



объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

N 11-85

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ ОИАИ

сборник

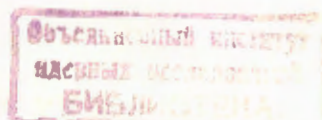
1985

Объединенный институт ядерных исследований
JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

№ 11-85

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ ОИЯИ
JINR RAPID COMMUNICATIONS

сборник
COLLECTION



Дубна 1985

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Н.Н.Боголюбов	— председатель
А.М.Балдин	— зам.председателя
А.Н.Сисакян	— зам.председателя
Д.В.Ширков	— зам.председателя
В.А.Бирюков	— ученый секретарь

Р.А.Асанов	}	— члены совета
А.М.Говоров		
А.Д.Коваленко		
А.Б.Кузнецов		
Б.И.Пустыльник		
М.Г.Сапожников		
А.Б.Швачка		

EDITORIAL BOARD

N.N.Bogolubov	— Chairman
A.M.Baldin	— Vice-Chairman
A.N.Sissakian	— Vice-Chairman
D.V.Shirkov	— Vice-Chairman
V.A.Biryukov	— Scientific Secretary

R.A.Asanov	}	— Members of the Board
A.M.Govorov		
A.D.Kovalenko		
A.B.Kuznetsov		
B.I.Pustynnik		
M.G.Sapozhnikov		
A.B.Shvachka		

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

И.М.Франк, Э.И.Шарапов Полуклассическое рассмотрение Р-четных эффектов в реакции $^{117}\text{Sn}(n,\gamma)$ I.M.Frank, E.I.Sharapov Semiclassical Treatment of the P-Even Effects in the $^{117}\text{Sn}(n,\gamma)$ -Reaction	5
Ю.М.Антипов, В.А.Батарин, В.А.Беззубов, Н.П.Буданов, Ю. П. Горин, Ю.А.Горнушкин, С.П.Денисов, С.В.Клименко, И.В.Котов, . П.А.Кулинич, А.А.Лебедев, Г.В.Мицельмахер, А.Г.Ольшевский, Ф.Паломбо, А.И.Петрухин, Р.В.Пирцхалава, С.А.Половников, В.Н.Ройнишвили, Я.Седлак, Д.А.Стоянова, В.И.Травкин Измерение константы связи $\gamma \rightarrow 3\pi$ в процессе образования пионных пар пионами в кулоновском поле ядер Yu.M.Antipov, V.A.Batarin, V.A.Bessubov, N.P.Budanov, Yu.P.Gorin, Yu.A.Gornushkin, S.P.Denisov, S.V.Klimenko, I.V.Kotov, P.A.Kulinich, A.A.Lebedev, G.V.Micelmacher, A.G.Olshevski, F.Palombo, A.I.Petrukhin, R.Pirtzkhilava, S.A.Polovnikov, V.N.Roinishvili, J.Sedlak, D.A.Stoyanova, V.I.Travkin Measurement of Coupling Constant $\gamma \rightarrow 3\pi$ in the Process of Pion Pair Production by Pions in Nuclear Coulomb Field	11
А.Н.Сисакян, Г.Т.Торосян Описание быстротных спектров в центральной области рождения при энергии SPS-коллайдера в модели двух механизмов A.N.Sissakian, H.T.Torosian Description of Rapidity Spectra in the Central Production Region at the SPS-Collider Energy in the Two-Mechanism Model	20

Г.М.Гавриленко	
К теории взаимодействия молекул и атомов	
с поверхностью твердого тела	
G.M.Gavrilenko	
On the Theory of Interaction of Molecules	
and Atoms with the Solid State Surface	28

Н.М.Атакишиев, Р.М.Мир-Касимов	
Волновые функции релятивистского осциллятора	
и различные базисы представлений группы $\tilde{SL}(2, R)$	
N.M.Atakishiev, R.M.Mir-Kasimov	
Relativistic Oscillator Wave Functions	
and Different Bases of the	
$\tilde{SL}(2, R)$ Group Representations	38

ПОЛУКЛАССИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ P- ЧЕТНЫХ ЭФФЕКТОВ В РЕАКЦИИ $^{117}\text{Sn}(n,\gamma)$

И.М.Франк, Э.И.Шарапов

Выполнен расчет угловых и поляризационных корреляций в реакции $^{117}\text{Sn}(n,\gamma)$, основанный на полуклассическом описании поляризаций и углового распределения гамма - излучения ядер. Расчет согласуется с экспериментальными результатами, полученными недавно для реакции $^{117}\text{Sn}(n,\gamma)$ в области p - волнового резонанса 1,33 эВ. Указаны недостатки прежних подходов, давших предсказания в противоречии с экспериментом.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Semiclassical Treatment of the P-Even Effects in the $^{117}\text{Sn}(n,\gamma)$ -Reaction

I.M.Frank, E.I.Sharapov

The polarization and angular correlations in the (n,γ) -reaction are calculated. The gamma-ray polarization and angular distribution are treated semiclassically by the correspondence principle. The results are in agreement with the recent experiment on the P-even effects in the $^{117}\text{Sn}(n,\gamma)$ reaction near the 1,33 eV p-wave resonance. The reasons are given for the failure of some previous predictions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

В работе ^{/1/} сообщено о несоответствии между предсказаниями теории и экспериментальными результатами исследования угловых асимметрий в (n,γ) -реакции. Изучались гамма-переходы с энергией 9,3 МэВ в реакции $^{117}\text{Sn}(n,\gamma)$ вблизи резонанса 1,33 эВ, в котором ранее было обнаружено нарушение пространственной четности. Опыты проводились в геометрии с поперечной поляризацией нейтронов, исключавшей возможность проявления нарушения четности. В этой связи эффекты право-левой и вперед-назад асимметрий углового распределения называют P- четными.

В эксперименте обнаружена интерференция E1- и M1-переходов после захвата p- и s-нейтронов ядрами ^{117}Sn , которую не удалось описать в рамках известных теорий.

На наш взгляд это противоречие не всеобъемлюще. Оно состоит в различии предсказанного и измеренного знаков интерференционного члена в дифференциальном сечении исследованной реакции на поляризованных нейтронах.

Тщательно проверенные экспериментальные результаты не вызывают сомнения. Что касается теории, то справедливость соотношений, полученных с применением диаграммной техники и представления спиральности $v^{1/2}$ и с использованием аппарата функций преобразования в общей теории S-матрицы $v^{3/2}$, не является очевидной. Целесообразны иные, по возможности простые подходы, вскрывающие физическую сущность явления. Мы будем при описании γ -квантов следовать полуклассическому подходу - принципу соответствия, который в атомной физике не раз приводил к правильным результатам.

Согласно этому принципу поле излучения при переходе из состояния с большей энергией $|M_i\rangle$ в состояние с меньшей энергией $|M_f\rangle$ /матричный элемент перехода $D_{M_f M_i}$ / такое же, как поле классического распределения зарядов, в нашем случае - поле электрического /или магнитного/ осциллятора с компонентами Фурье $\vec{D}(m)e^{i\omega t}$. Ориентация вектора $\vec{D}(m)$ определяется разностью магнитных квантовых чисел $m = M_f - M_i$:

$$\vec{D}(m) \doteq D \vec{e}_z, \quad m = 0, \quad \vec{D}(m) = \pm \frac{D}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y), \quad m = \pm 1, \quad /1/$$

где $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ - единичные векторы декартовой системы координат. В переходе с $m=0$ работает линейно осциллирующий вдоль оси Z диполь, а в переходах с $m = \pm 1$ - диполи, вращающиеся в плоскости XY.

Соотношения /1/ давно известны в атомной физике. Они приведены, например, в книге Кондона и Шортли ⁴ /см.там формулу (3.83)/, где получены из общих выражений для неисчезающих матричных элементов оператора T(m) на основании стандартных правил коммутации с операторами углового момента. Электромагнитные поля диполей в декартовой системе координат - это шаровые функции ⁵. Однако соответствующие выражения не имеют физической наглядности. Перейдем в сферическую систему координат с единичными векторами $\vec{r}_0$, $\vec{\theta}_0$, $\vec{\phi}_0$, направленными в сторону возрастания координат /см.рисунок/. Выражения для полей диполей /1/ примут тогда простой вид:

ширина p -резонанса будет суммой $\Gamma_n^p = \Gamma_{ns=1}^p + \Gamma_{ns=0}^p$. Для дальнейшего удобно ввести параметры смеси амплитуд нейтронных ширин разных каналов $x = \sqrt{\Gamma_{ns=1} / \Gamma_n}$, $y = \sqrt{\Gamma_{ns=0} / \Gamma_n}$. Нейтроны и ядра полагаем полностью поляризованными, что означает фиксацию проекции спина канала m_s . Реакцию через компаунд-ядро рассчитываем обычным образом, например, как в ^{2/}, используя резонансную амплитуду реакции

$$f_e(s) f_y(m) = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\Gamma_{ns}^e} f_y(m) / (\Delta_e + i\Gamma_e/2), \quad \Delta_e = E - E_e$$

и фазовый договор для угловых функций по Кондону - Шортли. Амплитуду вероятности распада компаунд-состояния отождествляем, согласно вышесказанному, с полями $f_y(m)$ ^{2/}. Общее выражение для дифференциального сечения интересующей нас реакции принимает тогда следующий вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_{e,s,M} \sqrt{4\pi} i^e Y_{1m_e}^*(\vec{n}_x) C_{em_e, sm_s}^{JM} C_{im_i, -im_i}^{SMs} f_e(s) f_y(m) \right|^2 \quad /3/$$

где m_i, m_i /а следовательно и m_s / фиксированы поляризациями нейтронов и ядер, $M = m_s + m_e$ и $m = -M$ для нашего случая $J_f = 0$.

Для нейтронов и ядер, поляризованных в одном направлении, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}^{\uparrow\uparrow} = & \left| C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{11} f_s f_y^{\text{mag}}(m=-1) + \right. \\ & + C_{1-1, 11}^{10} C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{11} i\sqrt{4\pi} Y_{1-1}^*\left(\frac{\pi}{2}; 0\right) f_p(1) f_y^{\text{en}}(0) \left. \right|^2 = \frac{\lambda^2}{4} \frac{3}{4} \left\{ \frac{\Gamma_n \Gamma_y^s}{\Delta_s^2} + \right. \\ & + \sqrt{6} \frac{\sqrt{\Gamma_n^s \Gamma_n^p \Gamma_y^s \Gamma_y^p}}{\Delta_s (\Delta_p^2 + \Gamma_p^2/4)} [(E - E_p) \cos \phi + \frac{\Gamma_p}{2} \sin \phi] x + \left. \frac{\Gamma_n^p \Gamma_y^p}{\Delta_p^2 + \Gamma_p^2/4} - \frac{3}{2} x^2 \right\}. \end{aligned} \quad /4/$$

Применяя общее выражение /3/ для случая противоположной поляризации ядер по отношению к нейтронам и опуская простые выкладки, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}^{\uparrow\downarrow} = & \left| C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{10} f_s f_y^{\text{mag}}(0) + i\sqrt{4\pi} Y_{11}^*\left(\frac{\pi}{2}; 0\right) [C_{11, 00}^{11} C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{00} f_p(0) + \right. \\ & + C_{11, 10}^{11} C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{10} f_p(1)] f_y^{\text{en}}(m=-1) + i\sqrt{4\pi} Y_{1-1}^*\left(\frac{\pi}{2}; 0\right) x \end{aligned}$$

$$\lambda \left[C_{1-1, 00}^{1-1} C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{00} f_p(0) + C_{1-1, 10}^{1-1} C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{10} f_p(1) \right] f_y^{\text{эл}}(m=+1) \Big|^2 =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4} \frac{3}{4} \left\{ \frac{\Gamma_n^s \Gamma_\gamma^s}{\Delta_s^2} + \sqrt{6} \frac{\sqrt{\Gamma_n^s \Gamma_n^p \Gamma_\gamma^s \Gamma_\gamma^p}}{\Delta_s (\Delta_p^2 + \Gamma_p^2/4)} [(E - E_p) x \cos \phi - \frac{\Gamma_p}{2} y \sqrt{2} \sin \phi] + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma_n^p \Gamma_\gamma^p}{\Delta_p^2 + \Gamma_p^2/4} \frac{3}{2} (x^2 \cos^2 \phi + 2y^2 \sin^2 \phi) \right\}. \quad /5/$$

Так как в эксперименте использовались неполяризованные ядра, то следует усреднить соотношения /4/ и /5/. Окончательное выражение для дифференциального сечения реакции на поляризованных нейтронах принимает вид

$$\frac{d\sigma}{a\Omega} = \frac{\lambda^2}{4} \frac{3}{4} \left\{ \frac{\Gamma_n^s \Gamma_\gamma^s}{\Delta_s^2} + \sqrt{6} \frac{\sqrt{\Gamma_n^s \Gamma_n^p \Gamma_\gamma^s \Gamma_\gamma^p}}{\Delta_s (\Delta_p^2 + \Gamma_p^2/4)} [(E - E_p) x \cos \phi + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma_p}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{\sqrt{2}} \right) \sin \phi \right] + \frac{\Gamma_n^p \Gamma_\gamma^p}{\Delta_p^2 + \Gamma_p^2/4} \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} (1 + \cos^2 \phi) + y^2 \sin^2 \phi \right] \right\}. \quad /6/$$

Легко показать, что при усреднении по поляризации нейтронов исчезнет слагаемое с синусом в интерференционном члене в /6/ /право-левая асимметрия/, но останется слагаемое с косинусом /асимметрия вперед-назад/.

Формула /6/ отличается от ранее полученной в /3/ относительным знаком слагаемых при синусе и косинусе. То же самое отличие имеет место при сравнении ее с результатами расчета в /2/ после перевода в представление спина канала /в /2/ использовано представление полного момента нейтрона/. Формула /6/ полностью согласуется с экспериментальными результатами работы /1/, в которой отмечено несоответствие с теорией, касающееся знака.

Возникает вопрос о причинах несоответствия. Недостатком работы /3/ является отсутствие физической информации о фотонном канале реакции, заложенной в сложные расчеты на ЭВМ. Ссылка на общий метод работы /6/, в которой конкретных расчетов не проводилось, не проясняет ситуации. В работе /2/ волновая функция гамма-кванта записана через D-функции без определения последних. Если их взять из известной книги Варшавовича и др., то знак работы /2/ воспроизводится при $m = M$. Однако в /7/ волновая функция гамма-кванта выражена через D-матрицы вращений с $m = -M$, что согласуется с нашим результатом. В строгом,

квантовом расчете необходим корректный учет инвариантных свойств амплитуды p, u -реакции, идущей через компаунд-состояния разной четности.

Авторы благодарят Г.Бунатяна и В.Ефимова за обсуждения.

Литература

1. Алфименков В.П. и др. В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ, № 10-85, Дубна, 1985, с.19.
2. Sushkov O.P. Flambaum V.V. Nucl.Phys., 1985, A435, p.352.
3. Laszewski R.W., Holt R.J. Atomic Data and Nucl.Data Tables. 1977, vol.19, p. 305; vol.23, p.97.
4. Кондон Е., Шортли Г. Теория атомных спектров. ИЛЛ, М., 1949.
5. Берестецкий В.Б., Долгинов А.З., Тер-Мартirosян К.А. ЖЭТФ, 1950, т.20, с.527.
6. Балдин А.М. и др. Кинематика ядерных реакций. Изд.2-е, Атомиздат, М., 1963.
7. Долгинов А.З. В кн.: Гамма-лучи. Изд. АН СССР, М.Л. 1961.

Рукопись поступила 26 июля 1985 года

ИЗМЕРЕНИЕ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ $\gamma \rightarrow 3\pi$ В ПРОЦЕССЕ ОБРАЗОВАНИЯ ПИОННЫХ ПАР ПИОНАМИ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ ЯДЕР

Ю.М.Антипов¹, В.А.Батарин¹, В.А.Беззубов¹, Н.П.Буданов¹,
Ю.П.Горин¹, Ю.А.Горнушкин, С.П.Денисов¹, С.В.Клименко¹,
И.В.Котов¹, П.А.Кулинич, А.А.Лебедев¹, Г.В.Мицельмахер,
А.Г.Ольшевский, Ф.Паломбо², А.И.Петрухин¹, Р.В.Пирцхалава³,
С.А.Половников¹, В.Н.Ройнишвили³, Я.Седлак,
Д.А.Стойнова¹, В.И.Травкин

В реакции рождения пионных пар пионами в кулоновском поле ядер $\pi^- + Z \rightarrow \pi^- + \pi^0 + Z$ в области малых инвариантных масс $\pi^- \pi^0$ - системы ($s < 10 m_\pi^2$) исследована вершина $\gamma \rightarrow 3\pi$. Эксперимент проводился на пучке пионов 40 ГэВ ускорителя ИФВЗ /Серпухов/ на спектрометре СИГМА. В результате эксперимента впервые измерено значение константы связи $\gamma \rightarrow 3\pi$: $F^{3\pi}(0) = 13,0 \pm 0,9 \pm 1,3 \text{ ГэВ}^{-3}$. Результат согласуется с расчетом, основанным на эффективном лагранжиане Весса-Зумино-Виттена. Подтверждается гипотеза киральных аномалий и цветная SU(3)/ симметрия кварков.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Measurement of Coupling Constant $\gamma \rightarrow 3\pi$ in the Process of Pion Pair Production by Pions in Nuclear Coulomb Field
Yu.M.Antipov et al.

The vertex $\gamma \rightarrow 3\pi$ was investigated in the $\pi^- + Z \rightarrow \pi^- + \pi^0 + Z$ reaction of pion pair production in nuclear Coulomb field at small invariant mass of $\pi^- \pi^0$ ($s < 10 m_\pi^2$). The experiment was carried out at 40 GeV pion beam of IHEP accelerator (Serpukhov) using SIGMA spectrometer. The first measurement of the coupling constant $\gamma \rightarrow 3\pi$ is presented: $F^{3\pi}(0) = 13.0 \pm 0.9 \pm 1.3 \text{ GeV}^{-3}$. The result is in agreement with

¹ Институт физики высоких энергий, Серпухов

² ИФН, Милан, Италия

³ Институт физики АН ГрССР, Тбилиси

calculations based on Wess-Zumino-Witten effective Lagrangian. The hypothesis of the chiral anomalies and colour SU(3) quark symmetry are confirmed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

В настоящей работе представлены результаты экспериментального исследования реакции образования пионных пар с малыми инвариантными массами пионами в кулоновском поле ядер и измерения константы $F^{3\pi}$, входящей в вершину $\gamma \rightarrow 3\pi$. Изучение этой реакции проводилось по программе экспериментов СИГМА-АЯКС параллельно с исследованием реакции радиационного рассеяния пионов в кулоновском поле ядер /комpton-эффект на π -мезоне^{1,2/}.

В теории аномальных условий частичного сохранения аксиально-векторного тока^{3/} константа связи $F^{3\pi}$ в низкоэнергетическом пределе связана с константой F^π , входящей в вершину $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, теоремой^{4,5/}:

$$F^{3\pi}(0) = \frac{F^\pi(0)}{ef^2}. \quad /1/$$

где $e = \sqrt{4\pi\alpha}$, f - константа распада заряженного пиона. При этом амплитуды обоих аномальных процессов полностью описываются петлевыми диаграммами /рис.1/. В кварковой модели, амплитуды пропорциональны числу цветов кварков. Экспериментальная проверка теоремы /1/, как неоднократно отмечалось^{4-11/}, важна для подтверждения гипотезы киральных аномалий, а также проверки цветной SU(3) симметрии кварков. В настоящее время такая проверка особенно важна в связи с интенсивно развивающимся^{12/} подходом к описанию низкоэнергетического предела КХД с помощью кирального лагранжиана Весса-Зумино-Виттена^{13-14/}, опирающегося на эту гипотезу.

Низкоэнергетическая теорема /1/ и лагранжиан Весса-Зумино-Виттена дают для константы $F^{3\pi}(0)$ выражение^{4,14/}:

$$F^{3\pi}(0) = \frac{e}{12\pi^2} \frac{N_C}{f^3}. \quad /2/$$

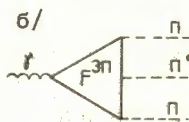
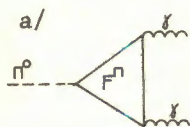


Рис.1. Диаграммы, описывающие в низкоэнергетическом пределе аномальные процессы: а/ $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, б/ $\gamma \rightarrow 3\pi$.

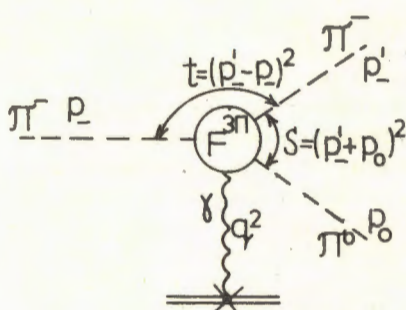


Рис.2. Диаграмма реакции $\pi^- + N(A, Z) \rightarrow \pi^- + \pi^0 + N(A, Z)$ в кулоновском поле ядра.

При $N_c = 3$ получаем*:

$$F^{3\pi}(0) = 10,5 \pm 1,5 \text{ ГэВ}^{-3}. \quad /3/$$

Удобным способом экспериментального определения $F^{3\pi}$ является ^{/5,8/} исследование вершины $\gamma \rightarrow 3\pi$ в реакции образования пионных пар пионами в кулоновском поле ядер

$$\pi^- + N(A, Z) \rightarrow \pi^- + \pi^0 + N(A, Z), \quad /4/$$

в области малых инвариантных масс $\pi^-\pi^0$ -системы. Дифференциальное сечение реакции /4/ /рис.2/ методом эквивалентных фотонов связано с сечением процесса $\gamma\pi \rightarrow \pi\pi$ ^{/5/}:

$$\frac{d\sigma}{ds dt dq^2} = \frac{Z^2 \alpha}{\pi} \left(\frac{q^2 - q_{\min}^2}{q^4} \right) \frac{1}{s - m_\pi^2} \cdot \frac{d\sigma_{\gamma\pi \rightarrow \pi\pi}}{dt}, \quad /5/$$

где $s = (p'_+ + p_0)^2$, $t = (p_- - p'_-)^2$, p_- , p'_- и p_0 - импульсы начального и конечных π -мезонов, q^2 - квадрат переданного

ядру импульса $q_{\min}^2 = \left(\frac{s - m_\pi^2}{2E} \right)^2$, E - энергия пучка. Для сече-

ния реакции $\gamma\pi \rightarrow \pi\pi$ имеем

$$\frac{d\sigma_{\gamma\pi \rightarrow \pi\pi}}{dt} = \frac{(F^{3\pi})^2}{128\pi} k^2 \sin^2 \theta. \quad /6/$$

где θ - угол рассеяния π -мезона в с.ц.и., $k^2 = 1/4 \cdot (s - 4m_\pi^2)$.

Наши первые результаты измерения сечения, подтверждающие низкоэнергетическую теорему /1/, были представлены

* Следует заметить, что теоретическое значение $F^{3\pi}$, как это видно из /2/, сильно зависит от используемого значения f . Разные авторы используют ^{/4-14/} для f значения от 83 до 95 МэВ. Мы пользуемся значением $f = 90$ МэВ. С неопределенностью в f ± 5 МэВ/ связана ошибка в /3/, которая соответствует $\sim 15\%$ точности низкоэнергетических расчетов.

ранее ^{/15/}. Впоследствии подтверждение низкоэнергетической теоремы было получено при изучении реакции $\pi^- + e \rightarrow \pi^- + \pi^0 + e$ ^{/16/}.

Настоящий эксперимент проводился на пучке пионов с импульсом 40 ГэВ/с ускорителя ИФВЭ /Серпухов/ на спектрометре СИГМА. Экспериментальная установка включала пучковую часть, ядерную мишень, охранную систему, запрещающую регистрацию событий с частицами, не попадающими в апертуру установки, магнитный спектрометр для регистрации заряженных продуктов реакции и гамма-спектрометр для регистрации фотонов. Подробно установка, триггер и критерии отбора событий в этом эксперименте были описаны ранее ^{/15/}.

Акцептанс установки был рассчитан по методу Монте-Карло в соответствии с теоретическим сечением ^{/5/-/6/}. Оказалось, что геометрическая эффективность мало меняется в интервале значений $q^2 \leq 10^{-2} (\text{ГэВ/с})^2$ и сильно зависит от s . Резкое падение эффективности при $s > 10 m_\pi^2$ выделяло интересующую область малых инвариантных масс.

Результаты данной работы основаны на статистике $\sim 8 \cdot 10^{10}$ π -мезонов, пропущенных через мишени С, Al и Fe/толщина $\sim 0,25$ рад длины/, а также "пустую" мишень. При обработке были отобраны события с двумя фотонами в конечном состоянии, эффективная масса которых $m_{\gamma\gamma}$ соответствует массе π^0 -мезона, сумма энергий продуктов реакции E_{tot} отвечает энергии начального пиона, а инвариантная масса $\pi^-\pi^0$ -системы принадлежит области $s < 10 m_\pi^2$. Более подробно процедура отбора событий реакции ^{/4/} описана в работе ^{15/}. Для всех исследованных мишеней в распределении по квадрату переданного ядру импульса хорошо виден характерный для кулоновских процессов пик в области малых передач /рис. 3/. Дифференциальное сечение было получено с помощью нормировки наблюдаемого распределения dN/dq^2 на сечение реакции радиационного рассеяния пионов в кулоновском поле ядер ^{1,2}:

$$\pi^- + Z \rightarrow \pi^- + \gamma + Z,$$

^{/7/}.

Этот процесс изучался в эксперименте одновременно с процессом рождения пионных пар. Реакция ^{/7/} является чистым электродинамическим процессом и с точностью до малой поправки поляризуемости ² рассчитывается теоретически. Полученное нами экспериментальное значение сечения реакции ^{/7/} хорошо согласуется с рассчитанным ^{1,2}, поэтому такая нормировка позволяет подавить ошибки в мониторинговании, в оценке физической эффективности детектирующей аппаратуры, а также в эффективности программы геометрической реконструкции треков.

Малая величина сечения изучаемого процесса требовала специальных мер для подавления и учета сопровождающих реакцию ^{/4/} фоновых процессов. Фоновым процессом, который

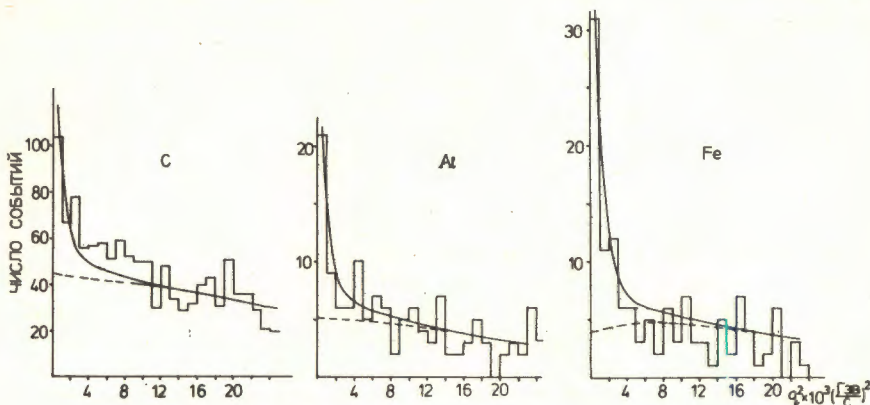
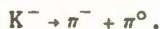


Рис.3. Экспериментальное распределение dN/dq^2 , полученное на разных мишенях: — фитирующее экспериментальное распределение сумма кулоновского сечения и фона /нормированная на пионный комптон-эффект, $\sigma_{qt} = 20$ МэВ/; --- сумма когерентного и некогерентного ядерного фона.

может имитировать пик при малых передачах импульса, является распад K^- -мезонов /примесь которых в пучке составляла ~2%/:



/8/

Этот фон был практически полностью подавлен /более чем в 10^5 раз/ пучковыми пороговым и дифференциальным черенковскими счетчиками. Это проверялось по данным экспозиции без мишени и по распределению координаты точки взаимодействия вдоль пучка для отобранных событий.

Сечение когерентного рождения пионных пар, с учетом интерференции, имеет вид

$$-\frac{d\sigma}{dq^2} = |T_c + e^{i\phi} T_s|^2, \quad /9/$$

где амплитуда T_s определяет вклад в реакцию /4/ сильных взаимодействий, в основном обусловленных ω -обменом^{/8/}, T_c - кулоновская амплитуда, ϕ - относительная фаза между ними. Сечение кулоновского образования пионных пар увеличивается с ростом начальной энергии как $\sim \log E$, в то же время ядерное сечение падает как $\sim 1/E$. При энергии 40 ГэВ кулоновский пик уже достаточно хорошо выделяется, а события, происходящие за счет сильного взаимодействия, дают вклад в подложку под пиком. Отношение сечения кулоновского и ядерного процессов зависит от заряда ядра ми-

шени и растет как $\sim Z^2/A^{4/3}$. Поэтому в экспериментальном спектре dN/dq^2 /рис. 3/ подложка под кулоновским пиком на углероде больше, чем на более тяжелых мишенях. В экспериментальном спектре dN/dq^2 может присутствовать и фон от реакций, в которых часть частиц не зарегистрирована. Наиболее важным фоном такого типа является реакция

$$\pi^- + N(A, Z) \rightarrow \pi^- + \pi^0 + \pi^0 + N(A, Z), \quad /10/$$

происходящая за счет сильного взаимодействия, в том случае, когда два фотона не регистрируются установкой. Фон от реакции /10/, так же как и от других неупругих процессов, значительно подавлялся охранной системой и отбором по $m_{\pi\pi}$ и E_{tot} .

Обсуждаемые выше источники фона, так же как и другие реакции, дающие вклад в подложку распределения по q^2 , учитывались при фитировании. Экспериментальное распределение фитировалось суммой кулоновского сечения, сечения когерентного рождения в сильном поле ядра, интерференционного члена и некогерентного фона:

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = (F^{3\pi})^2 T_c'^2 + C_s^2 T_s^2 + 2C_s F^{3\pi} |T_c' N T_s| \cos\phi + C_{inc}. \quad /11/$$

где $T_c' = T_c / F^{3\pi}$, в интервале $0 < q^2 < 25 \cdot 10^{-3} (\text{ГэВ}/c)^2$. Амплитуда T_s взята в таком же виде, как и в работе /17/. Параметрами фита были константа $F^{3\pi}$, относительная фаза ϕ , а также нормировка когерентного ядерного C_s и некогерентного фона $-C_{inc}$. При фитировании учитывался аксептанс установки $\epsilon(s, q^2)$, а также разрешение установки по q_t /поперечной передаче импульса ядру/, которое определялось в основном координатной точностью гамма-детектора $/\sigma_{q_t} = 20 \pm 5 \text{ МэВ}/$.

Экспериментальное распределение фитировалось также в предположении отсутствия некогерентного фона C_{inc} . Полученные в результате различных способов фитирования значения параметра $F^{3\pi}$ согласуются в пределах ошибок. Фит экспериментального спектра без кулоновского сечения имеет уровень достоверности $S.L. < 10^{-6}$. Оцененный при фитировании вклад фоновых событий в область малых передач был вычтен дифференциально по s во всем интервале зарегистрированных событий по этой переменной. Полученное распределение хорошо описывается теоретическим сечением с учетом аксептанса установки /рис. 4/.

В результате фита было определено среднее значение константы связи $F^{3\pi}$ в области $s < 10 m_\pi^2$:

$$F^{3\pi} = 13,0 \pm 0,9 \pm 0,8 / \text{ГэВ}^{-3}. \quad /12/$$

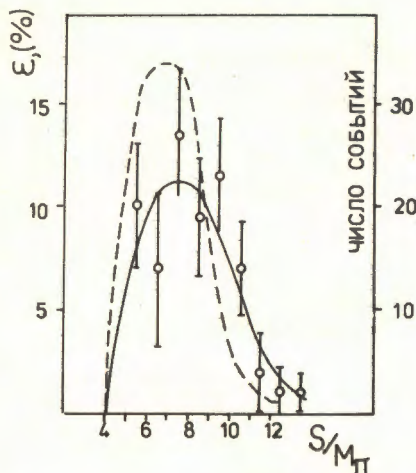


Рис.4. Распределение событий реакции /4/ во всем интервале по s ($q^2 < 2 \cdot 10^{-3}$ (ГэВ/с)²):
 — теоретическое сечение с учетом акцептанса, нормированное на количество событий реакции /4/ в области $q^2 < 2 \cdot 10^{-3}$ (ГэВ/с)²;
 --- акцептанс установки.

Статистическая ошибка получена путем усреднения результатов фита на разных ядрах. В систематическую ошибку входит ошибка, связанная с неточным знанием функции разрешения, ошибки в определении эффективности регистрации и отбора событий, а также ошибка, связанная с различными предположениями о характере фонов при фите.

Константа связи $F^{3\pi}$ является, вообще говоря, функцией s , t и q^2 . В низкоэнергетическом приближении предполагается, что $F^{3\pi}$ мало меняется при $s, t \ll m_\rho^2$ и $F^{3\pi}(0) \approx F^{3\pi}$. В работах /5,8/ для учета отклонения $F^{3\pi}$ от $F^{3\pi}(0)$ при $s < 10 m_\pi^2$ предлагается экстраполяция:

$$F^{3\pi}(s, t; q^2) = F^{3\pi}(0) \left[1 + C_\rho \left(\frac{s}{m_\rho^2 - s} + \frac{t}{m_\rho^2 - t} + \frac{u}{m_\rho^2 - u} \right) + C_\omega \frac{q^2}{m_\omega^2 - q^2} \right]. \quad /13/$$

Выражение /13/ учитывает вклад в $F^{3\pi}$ состояний с промежуточными ρ - и ω -мезонами. Последний член в нашем случае, когда фотон почти реальный, пренебрежимо мал и составляет ~ 1% ($|C_\omega| \approx 3^{1/11}$, $q^2 < 2 \cdot 10^{-3}$ (ГэВ/с)²). Для C_ρ имеем

$$C_\rho = \frac{2 / g_{\rho\pi\pi} / / g_{\rho\pi\gamma} /}{m_\rho^3 \cdot F^{3\pi}(0)} e^{i\psi}. \quad /14/$$

где $g_{\rho\pi\pi}$ и $g_{\rho\pi\gamma}$ — константы связи, определяемые через парциальные ширины ρ -мезона, ψ — неизвестная фаза. /Используя данные /17,18/, получаем $g_{\rho\pi\pi} = 6,1$, $g_{\rho\pi\gamma} = 0,17$ /. Подставляя $F^{3\pi}$ в виде /13/ в /6/ и интегрируя дифференциальное сечение /5/ в области $s < 10 m_\pi^2$, $q^2 < 2 \cdot 10^{-3}$ (ГэВ/с)², можно найти теоретическое значение σ / Z^2 :

$$\sigma/Z^2 = 9,84 \cdot 10^{-3} ((F^{3\pi}(0))^2 + 1,94 \cdot F^{3\pi}(0) \cos \psi + 1,0) / \text{нб/}. \quad /15/$$

Полученные в результате фита значения σ/Z^2 согласуются с результатами нашей предыдущей работы ^{/15/}, где для вычитания фона использовалась более простая процедура. Усредняя экспериментальные значения σ/Z^2 , полученные на разных ядрах, получаем

$$\langle \sigma/Z^2 \rangle = 1,67 \pm 0,24 \pm 0,22 / \text{нб/}. \quad /16/$$

Для определения $F^{3\pi}(0)$ из сравнения /15/ и /16/ надо, вообще говоря, знать фазу ψ . Если считать фазу полностью неопределенной ($\cos \psi = 0 \pm 1$), то

$$F^{3\pi}(0) = 13,0 \pm 0,9 \pm 1,3 \text{ (ГэВ}^{-3}\text{)} \quad /17/$$

с несколько большей, по сравнению с /12/, систематической ошибкой, учитывающей неопределенность фазы.

Сравнивая полученный результат /17/ с теоретическим значением /3/, можно сделать следующие выводы:

- полученный результат в пределах точности теоретических приближений и экспериментальных ошибок подтверждает низкоэнергетическую теорему /1/ и согласуется с расчетом на основе эффективного лагранжиана Весса-Зумина-Виттена; таким образом, подтверждается гипотеза киральных аномалий;

- согласие экспериментального значения $F^{3\pi}$ с теоретическим при $N_c = 3$ подтверждает также цветную SU(3) симметрию кварков.

Литература

- 1 Антипов Ю.М. и др. Письма в ЖЭТФ, 1982, 35, с.302.
2. Antipov Yu.M. et al. Phys.Lett., 1983, 121B, p.445; Antipov Yu.M. et al. Z.Phys.C.-Particles and Fields, 1984, 26, p.616.
3. Adler S.L. Phys.Rev.1969,177, p.2426; Bell J.S. Jackiw R. Nuov. Cim., 1969, 60A, p.47.
4. Adler S.L. et al. Phys.Rev.1971, D4, p.3497.
5. Terent'ev M.V. Phys.Lett., 1972, B38, p.419.
6. Chanowitz M.S. In: XII Rencontre de Moriond, J.Tran Thanh Van, 1977, vol.3, p.25.
7. Freund R., Zee A. Phys.Lett., 1983, 143B, p.419.
8. Zee A.Phys.Rev. 1972, D6, p.900.
9. Rudaz S. Phys.Rev., 1974, D10, p.3857.
10. Rudaz S. Phys.Lett., 1984, 145B, p.281.
11. Терентьев М.В. УФН, 1974, 112, с.37.
12. Wess J., Zumino B. Phys.Lett., 1971, 37B, p.95.

13. Witten E. Nucl.Phys., 1983, B223, p.422.
14. Дьяконов Д.И., Эйдеcs М.И. Письма в ЖЭТФ, 1983, 38, с.358;
Pak N.K., Rossi P.CERN, TH3964, Geneva, 1984;
Brihaye Y., Pak N.K., Rossi P. CERN, TH3984, Geneva, 1984.
15. Antipov Yu.M. et al. Z.Phys.C.-Particles and Fields, 1985, 27, p.21.
16. Amendolia S.R. et al. GERN, EP 85-14, Geneva, 1985.
17. Particle Data Group, Rev.Mod.Phys., 1984, vol.56, No.2.
18. Jensen T. et al. Phys.Rev. 1983, 27, p.26.

ОПИСАНИЕ БЫСТРОТНЫХ СПЕКТРОВ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ
РОЖДЕНИЯ ПРИ ЭНЕРГИИ SPS-КОЛЛАЙДЕРА
В МОДЕЛИ ДВУХ МЕХАНИЗМОВ

А.Н.Сисакян, Г.Т.Торосян*

В рамках многокомпонентной феноменологической модели двух механизмов проводится описание инклюзивных и полуинклюзивных быстротных спектров в центральной области рождения вторичных частиц. Показано, что без изменения значений параметров, фиксированных при описании множественных распределений при энергиях ~ ISR, достигается удовлетворительное описание экспериментальных данных SPS-коллайдера. Исходя из соображений конечности асимптотического поведения полных сечений и ограниченности поперечных импульсов, получена зависимость от энергии размеров центральной области рождения по быстроте при сверхвысоких энергиях. При этом, приводя в соответствие коэффициент неупругости в модели с его экспериментальным значением при энергии SPS-коллайдера, найдено среднее значение $M(n) = 3,92 \pm 0,24$ ГэВ массы тяжелых четырехчастичных кластеров, рассматриваемых в модели.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Description of Rapidity Spectra in the Central
Production Region at SPS-Collider Energy
in the Two-Mechanism Model

A.N.Sissakian, H.T.Torosian

The inclusive and semi-inclusive rapidity distributions in the central production region of multi-particle production process are described in the framework of manycomponent phenomenological model of two mechanisms. It is shown that without change of parameters fixed from the discription of multiplicity distributions at ISR energies, a satisfactory description of SPS-collider experimental data is achieved. The energy dependence of the size of central production region on rapidity at superhigh energies is received owing to the finiteness of the asymptotic behaviour of total cross sections and

* Ереванский физический институт

limitedness of transverse momenta. The value $\bar{M}(u) = 3.92 + 0.24 \text{ GeV}$ is found for the average mass of four-particle heavy clusters considered in the model describing the inelasticity coefficient at SPS energy.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

1. Как известно, при высоких энергиях в так называемой центральной области рождается большинство конечных частиц, несмотря на то, что на их долю приходится небольшая часть первоначальной энергии сталкивающихся частиц^{/1/}. Рост средней множественности, однако, намного слабее, чем допускается законом сохранения энергии. Измерения на SPS-коллайдере показали, что лучше всех описывает этот рост параметризация $\langle n \rangle \sim \ln^2 S + \ln S$ и что степенной $S^{1/4}$ закон роста приводит к расхождению с экспериментом при энергии коллайдера^{/2/}.

В работах^{/3-4/} была разработана многокомпонентная феноменологическая схема для описания процессов множественного рождения при высоких энергиях, где средняя множественность растет как некоторая /нецелая/ степень логарифма $-(\ln S)^A$. Многокомпонентная схема согласуется с обоснованным в рамках инклюзивного подхода соображением о необходимости выделять в фазовом пространстве области, ответственные за образование различных групп частиц^{/5/}.

Сопоставление предсказаний модели двух механизмов с экспериментальными данными SPS-коллайдера показали самосогласованность развитой схемы^{/6/} и реалистичность сделанных в модели допущений /в частности, о кластерном составе центральной области и о характере энергетических зависимостей параметров модели/.

В данной заметке предлагается описание роста с энергией высоты плато инклюзивного и полуинклюзивного быстротного распределений. Как будет показано, не меняя значения параметров модели, фиксированных при описании множественных распределений в адрон-адронных реакциях при энергиях $\sim \text{ISR}$ ^{/7/}, можно достичь вполне удовлетворительного согласия с данными при энергиях SPS-коллайдера.

2. В предположении изотропного распада кластеров в своих системах покоя и пренебрежения массой пиона относительно массы кластеров в рамках модели было получено следующее выражение для инклюзивного распределения по быстроте вторичных частиц в центральной области рождения^{/8/}:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dy} = \frac{a+2b}{Y} \frac{1}{2} \left\{ \left[1 - e^{-\left(\frac{y+Y}{\sqrt{2}\delta}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[1 - e^{-\left(\frac{y-Y}{\sqrt{2}\delta}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad /1/$$

Здесь a и b - параметры модели, имеющие смысл средних чисел кластеров, распадающихся соответственно на две ($\sigma \rightarrow \pi^+ \pi^-$; $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^-$; $B \rightarrow \pi^+ \pi^- 2\pi^0$) и четыре заряженные частицы ($B \rightarrow 2\pi^+ 2\pi^-$).

Параметр $Y \sim \ln S$ характеризует ширину быстротного распределения и соответствует значению y , при котором $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dy}$ уменьшается в два раза по сравнению с $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dy} \Big|_{y=0}$. Легко заметить, что зная Y при двух значениях энергии S_1 и S_2 , можно найти его значение при любой другой энергии:

$$Y(S) = Y(S_1) + [Y(S_2) - Y(S_1)] \frac{\ln S/S_1}{\ln S_2/S_1}. \quad /2/$$

Вычисляя Y по формуле /2/ и беря значения $a(S)$ и $b(S)$ из /4/, приводим описание формулой /1/ экспериментальных быстротных распределений при SPS-энергиях /рис.1/.

Как видно из рисунка, достигнуто удовлетворительное описание экспериментальных данных. Заметим здесь, что это описание довольно чувствительно к выбору параметра Y /см. табл. 1/. В то же время на SPS-коллайдере было установлено, что плотность частиц растет

быстрее, чем ожидалось, в соответствии с простой экстраполяцией параметров при энергиях

$$ISR \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dy} \Big|_{y=0} = 3,0 \pm 0,1 \text{ при } \sqrt{s} = 540 \text{ ГэВ} \right).$$

Другими словами, $Y(S)$ растет с энергией медленнее, чем просто $\ln S$.

Еще более интересно рассмотреть полукклюзивные распределения. К сожалению, достигнутая экспериментальная статистика не позволяет пока

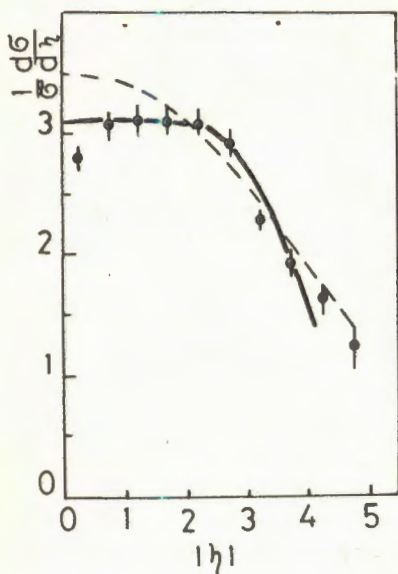


Рис.1. Сплошная линия - расчет по модели двух механизмов,

$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dy}$, пунктирная - результат дуальной партонной модели⁹.

Таблица 1

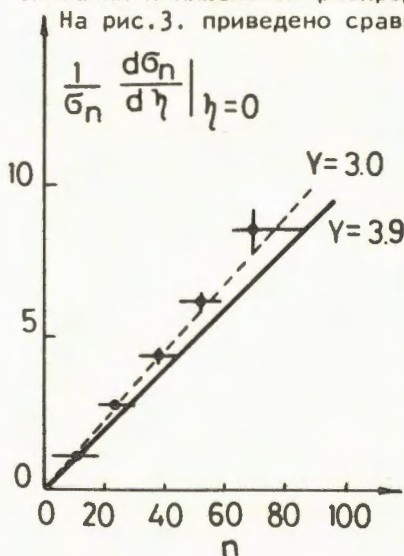
Значения Y по формуле /2/

$\sqrt{s}$	23,6	30,8	45,2	53,2	62,8	540
Y	2,0	2,12	2,30	2,37	2,45	3,44
$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dy} \Big _{y=0}$	1,37	1,52	1,73	1,82	1,91	3,15

строить зависимости быстротных распределений от топологии процесса p , но усредненные по небольшим множественным интервалам данные тоже достаточно хорошо позволяют проводить сравнение с модельными предсказаниями. В рамках модели установлено, что полуинклюзивное распределение по быстроте при больших значениях p имеет следующий вид^{/8/}:

$$\frac{1}{\sigma_n} \frac{d\sigma_n}{dy} \Big|_{y=0} = \frac{1}{Y} \frac{a+2b}{a+b} \cdot p, \quad p_c = 4p + 2, \quad p \gg 1. \quad /3/$$

На рис.2. представлено описание формулой /3/ экспериментальных плотностей по быстроте вторичных частиц при энергии $\sqrt{s} = 540$ ГэВ. Здесь значение Y то же, что и при описании инклюзивных распределений.



На рис.3. приведено сравнение экспериментальных плотностей вторичных частиц в центральной области рождения с модельными в широком интервале начальной энергии столкновения. Как видно из рисунков, в этом случае тоже имеется хорошее согласие с экспериментом. Однако отметим здесь, что варьирование значения Y для $\sqrt{s} = 540$ ГэВ если улучшает описание зависимости

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dy} \Big|_{y=0} \quad \text{от } p, \text{ то, соот-}$$

Рис.2. Описание экспериментальных плотностей по быстроте вторичных частиц при $\sqrt{s} = 540$ ГэВ.

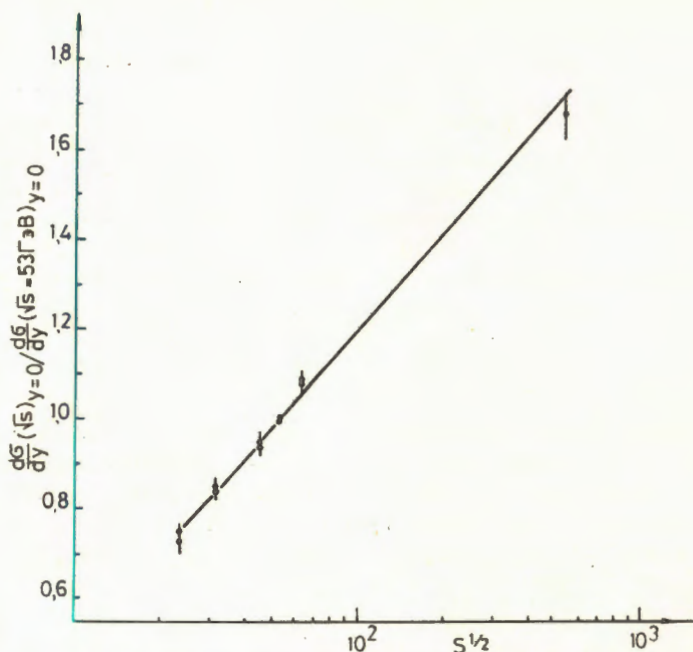


Рис.3. Сравнение экспериментальных плотностей вторичных частиц в центральной области рождения с модельными.

ответственно, ухудшает согласие модели с экспериментальной плотностью частиц в центральной области и наоборот. Оптимальное совместное описание достигается при значении $Y = 3,4$, что несколько меньше, чем получается по формуле /2/.

3. Можно более точно оценить Y , изучая поведение при больших S коэффициента неупругости $k = \frac{W}{S^{1/2}}$, где W - доля энергии, идущая на образование частиц в центральной области /см. /9/. В модели простая оценка дает следующее выражение для W :

$$W = A_1 (\ln S/S_0)^{A_2} \operatorname{ch} \frac{Y}{2} [3(\langle p_T \rangle^2 + \bar{M}_{(4)}^2)^{1/2} + 0.13(\langle p_T \rangle^2 + \bar{M}_{(2)}^2)^{1/2}] , \quad /4/$$

где $\bar{M}_{(2)}$ и $\bar{M}_{(4)}$ - средние массы двух- и четырехчастичных кластеров соответственно, $\langle p_T \rangle$ - средний поперечный импульс конечных частиц, $S_0 = (m_A + m_B)^2$. Значения A_1 и A_2 для разных процессов приведены в табл.2.

Таблица 2

Значения A_1 и A_2 по формуле /4/
для различных процессов

	$\bar{p}p$	pp	K^-p	K^+p	π^-p	π^+p
A_1	$0,047 \pm 0,004$	$0,047 \pm 0,004$	$0,028 \pm 0,002$	$0,028 \pm 0,002$	$0,016 \pm 0,001$	$0,016 \pm 0,001$
A_2	$1,655 \pm 0,085$	$1,630 \pm 0,090$	$1,894 \pm 0,076$	$1,868 \pm 0,081$	$2,038 \pm 0,070$	$2,012 \pm 0,075$

Из требования, что при асимптотических энергиях отношение остается конечным и отличным от нуля, находим

$$Y(S) = \ln \frac{S}{c_0 (\ln S/S_0)^{2A_2}} \quad /5/$$

где C_0 - постоянная величина, и при асимптотических энергиях она должна совпасть с S_0 . Интересно в связи с этим заметить, что при энергии SPS-коллайдера, подставляя в /5/ $c_0 = S_0$ и $A_2 = 1,65$, находим $Y^{pp}(\sqrt{S} = 540 \text{ ГэВ}) = 3,32$, в то время как значение $Y \sim 4$ достигается при $c_0 = 1,78 = S_0/2$.

Коэффициент неупругости $K = \frac{W}{S^{1/4}}$ при энергии ISR $\sqrt{S} = 63 \text{ ГэВ}$ имеет значение $K = 0,5$. С ростом энергии он уменьшается и достигает при $\sqrt{S} = 540 \text{ ГэВ}$ значения $K = 0,3$. Используя /4/ и /5/, находим:

$$k = \frac{A_1 [3(\langle p_T \rangle^2 + \bar{M}_{(4)}^2)^{1/2} + 0,13(\langle p_T \rangle^2 + \bar{M}_{(2)}^2)^{1/2}]}{c_0^{1/2}} \quad /6/$$

Как было найдено в /8/, средняя масса двухчастичного кластера в модели совпадает с массой ρ -мезона, а для массы четырехчастичного было получено ограничение $\bar{M}_{(4)} \geq 2 \cdot \bar{M}_{(2)} = 1,53 \text{ ГэВ}$. Приводя далее в соответствие модельное предсказание по /6/, куда подставляем $\langle p_T \rangle = 0,5$, $c_0 = S_0 = 3,52$, с экспериментальным значением $K = 0,3$ при $\sqrt{S} = 540 \text{ ГэВ}$, находим среднюю массу четырехчастичного кластера:

$$\bar{M}_{(4)} = 3,92 \pm 0,24 \text{ ГэВ} \quad /7/$$

Здесь следует еще раз подчеркнуть, что схема распада четырехчастичного кластера через промежуточное образование двух ρ -мезонов ($B \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$) указывает на важность исследования в эксперименте корреляций между промежуточными образованиями /в данном случае ρ -мезонами/. Таким образом, можно проверить как правильность схемы распада четырехчастичных кластеров, так и соответствие их масс с предсказанием модели /7/.

Заметим, что в достижении зависимости /5/ ключевую роль играет то обстоятельство, что в модели средняя множественность растет как логарифм в некоторой степени - $(\ln S)^A$. Исследования при еще больших энергиях энергетической зависимости $Y(S)$ могут указать на преимущества или недостатки разных подходов, предсказывающих разные законы роста средней множественности /см., например^{/9-11/}. Отметим еще одно указание на логарифмический характер зависимости - это то, что в предположении конечности полных сечений в асимптотике и ограниченности поперечных импульсов ($\sigma_{\text{tot}} \xrightarrow{S \rightarrow \infty} a \neq 0$, $\langle p_T \rangle \xrightarrow{S \rightarrow \infty} b \neq \infty$) в^{/11/} получена следующая связь между асимптотическим поведением средней множественности и полного сечения:

$$\frac{\langle n \rangle}{\sigma_{\text{tot}}} \rightarrow \text{const} \cdot \ln S / S_0. \quad /8/$$

Как следует из /8/ при достижении фруассаровского максимального режима роста полного сечения - $(\ln S / S_0)^2$, средняя множественность должна расти с энергией как $(\ln S / S_0)^A$, где $A \leq 3$.

4. В заключение подчеркнем, что, не изменяя значение параметров модели, зафиксированных при описании множественных распределений при энергиях ISR, достигнуто удовлетворительное описание инклюзивных и полuinклюзивных спектров при энергиях ISR и SPS. При этом, используя данные

SPS-коллайдера о величине коэффициента неупругости $K = \frac{W}{S^{1/2}}$.

мы получили значение массы четырехчастичных кластеров, играющих ключевую роль в рассматриваемой модели двух механизмов. Исследование корреляций между промежуточными ρ -мезонами /кластерами/ в процессе множественного рождения во многом продвинуло бы вперед вопрос изучения свойств тяжелых /четырёхчастичных/ кластеров.

Литература

1. Гришин В.Г. Инклюзивные процессы в адронных взаимодействиях при высоких энергиях. Энергоиздат, М., 1982.

2. Alpgard K. et al. Phys.Lett., 1981, 107B, p.310; 317.
3. Мавродиев С.Щ., Сисакян А.Н. и др. ЯФ, 1979, т.30, с.245.
4. Мавродиев С.Щ., Сисакян А.Н., Торосян Г.Т. ОИЯИ, P2-12570, Дубна, 1979; ОИЯИ, Д2-81,432, Дубна, 1981.
5. Logunov A.A., Mestvirishvili M.A., Nguen Van Hieu. Phys.Lett., 1967, 25B, p.611;
Логунов А.А., Мествиришвили М.А., Петров В.А. ЭЧАЯ, 1983, т.14, вып.3, с.493.
6. Mavrodiev S., Sissakian A.N., Torosyan H.T. JINR, E2-82-480, Dubna, 1983;
Сисакян А.Н., Торосян Г.Т. Краткие сообщения ОИЯИ, № 5 - 84, Дубна, 1984, с.20.
7. Thome W. et al. Nucl.Phys., 1977, B129, p.365.
8. Луценко И.В., Сисакян А.Н., Торосян Г.Т. ОИЯИ, P2-13049 Дубна, 1980.
9. Tran Thanh Van J. LPTHE 83/31, Orsay, 1983;
Capella A., Staar A., Tran Thanh Van J. LPTPE 84/53, Orsay, 1984.
10. Fowler G.N., Weiner R.M., Wilk G. Prepr.Marburg Univers., 1984.
11. Finkelstein J: LBL-18095, 1984.

К ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОЛЕКУЛ И АТОМОВ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Г.М.Гавриленко

Предлагается новый подход к теории взаимодействия молекул и атомов с кристаллическими поверхностями твердых тел. Он позволяет исходя из первых принципов формально строго последовательно получать модельные гамильтонианы для описания электронных свойств хемосорбированных покрытий и термодинамических свойств самих атомных покрытий. Модельные гамильтонианы типа Андерсона и Изинга ранее вводились в теорию хемосорбции полуфеноменологически. Рассмотрение этих двух разных аспектов теории хемосорбции в одной теоретической схеме важно, так как это позволяет выявить взаимосвязь между ними, по-новому поставить некоторые вопросы взаимодействия адсорбированных атомов с подложкой и взаимодействия адсорбированных атомов между собой.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

On the Theory of Interaction of Molecules and Atoms with the Solid State Surface

G.M.Gavrilenko

The new approach to the theory of interaction of the atoms and molecules with the crystal solid state surfaces is developed. The model Hamiltonians for the description of the electronic and the thermodynamic properties of the hemisorped layers may be obtained in the framework of this scheme in a formally strict way from the first principles. The model Hamiltonians of Anderson and Ising types were considered as the semiphenomenological models before. The consideration of these different aspects of the hemisorption theory in the framework of the one theoretical scheme is very important. It allows us to show the selfconnection before them. The new points of interaction between substrate and adatom and between two adatoms are exposed as well.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Введение

В последние годы в области исследования взаимодействия молекул и атомов с поверхностями твердых тел /хемосорбции/ достигнуты значительные успехи. Появление техники сверхвысокого вакуума, позволяющей проводить фотоэмиссионные эксперименты с угловым разрешением, дальнейшее развитие метода оже-спектроскопии, а также дифракционных методов исследования поверхностей позволили получить большое количество экспериментальных данных. С другой стороны, совершенствование методов расчета зонной структуры поверхностей методами квантовой механики и особенно привлечение в теорию поверхностных явлений методов статистической физики, таких, как метод модельных гамильтонианов типа Андерсона^{/1/} и Изинга^{/2/}, метод функционала плотности^{/3/} и др., позволило понять ряд особенностей физики поверхностных явлений. Однако в области фундаментальных исследований поверхностных явлений эксперимент, вообще говоря, пока еще значительно опережает теорию.

В данной работе предлагается общий подход к теории взаимодействия молекул и атомов с поверхностями твердых тел, позволяющий последовательным образом, исходя из первых принципов, получать модельные гамильтонианы типа Андерсона и Изинга, ранее вводимые и широко используемые полуфеноменологически для описания электронных свойств и хемосорбционных покрытий. Устанавливаются связи между константами взаимодействия и энергетическими параметрами ионной и электронной подсистем подложки /адсорбента/ и покрытия /адсорбата/.

Постановка задачи

Рассмотрим систему из N взаимодействующих электронов, состоящую из коллективизированных электронов зоны подложки и валентных электронов адсорбата, находящихся во внешнем поле положительно заряженных ионных остовов кристалла, и ионов атомов адсорбата, расположенных на поверхности раздела границы вещество-вакуум. В целом система электрически нейтральна. Гамильтониан такой системы запишется в виде

$$H = H_{\Sigma} + H_A + H_{\Sigma-A} \quad //$$

где

$$H_{\Sigma} = -\sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_{\vec{x}_j}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N v(\vec{x}_i - \vec{x}_j) + \sum_{j=1}^N u(\vec{x}_j),$$

$$H_A = \sum_{\alpha=1}^Z t(\vec{R}_\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} v(\vec{R}_\alpha - \vec{R}_\beta),$$

$$H_{\Sigma-A} = \sum_{\alpha} \sum_j v(\vec{R}_\alpha - \vec{x}_j).$$

Гамильтониан электронной подсистемы /адсорбента/ H_Σ включает в себя кинетическую энергию, энергию кулоновского взаимодействия между электронами, энергию взаимодействия электронов с положительно заряженным ионным фоном подложки $\Sigma u(\vec{x}_j)$. Будем считать, что потенциал $u(\vec{x})$ отражает пространственную симметрию кристаллической решетки подложки и в него включены граничные условия. В гамильтониане ионной компоненты адсорбата H_A кинетической энергией пренебрегается, $t(\vec{R}_\alpha)$ - потенциал взаимодействия между ионами адсорбата и положительным ионным фоном подложки, $v(\vec{R}_\alpha - \vec{R}_\beta)$ - кулоновское взаимодействие между ионами адсорбата. Суммирование по α идет по занятым центрам адсорбции /возможное положение иона адатома на поверхности/, отвечающим некоторой конфигурации расположения адатомов по поверхности подложки. $H_{\Sigma-A}$ - энергия кулоновского взаимодействия между Σ и A подсистемами.

Для простоты изложения и определенности будем считать, что электроны подложки образуют одну невырожденную зону, а адатомы являются водородоподобными, т.е. имеют один валентный электрон с волновой функцией, обладающей симметрией основного состояния атома водорода. Это не снижает общности подхода, но упростит вычисления.

Пространство состояний

Электронные состояния в $(\Sigma + A)$ -системе будем описывать двумя качественно различными наборами одночастичных состояний $\{\phi_{k\sigma}^+(X)\}$ и $\{\phi_{a\sigma}(X)\}$. Первый отвечает состояниям электронов в зоне подложки с квазиимпульсом $\vec{k}$ и состоянием спина $\sigma = \pm 1$. Переменная X есть набор $\{\vec{x}, \kappa\}$, где $\vec{x}$ - положение электрона в пространстве, κ - спиновая переменная. В данном случае κ принимает значения ± 1 .

$$\phi_{k\sigma}^+(X) = \phi_{\vec{k}}^+(\vec{x}) \Delta_{k\sigma}. \quad /2/$$

Здесь функция $\phi_{\vec{k}}^+(\vec{x})$ - электронная /типа блоховской/ волна, удовлетворяющая следующей вспомогательной спектральной задаче:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_{\vec{x}_j}^2 + u(\vec{x}) + f(\vec{x}) \right\} \phi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \epsilon_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}}(\vec{x}), \quad /3/$$

где $\epsilon_{\vec{k}}$ - энергетический спектр электронной зоны чистой поверхности подложки, $f(\vec{x})$ - эффективный одноэлектронный потенциал, так что $f(\vec{x}) + u(\vec{x})$ - псевдопотенциал электронной зоны подложки, $\Delta_{\kappa\sigma}$ - символ Кронекера, введенный для описания спинового состояния электрона. Второй набор одночастичных состояний отвечает основным состояниям валентных электронов адатомов адсорбата, локализованных на центрах адсорбции

$$\phi_{a\sigma}(\vec{x}) = \phi_a(\vec{x}) \Delta_{\kappa\sigma}, \quad /4/$$

$$\text{где } \phi_a(\vec{x}) = \phi(\vec{R}_a - \vec{x}),$$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_{\vec{x}}^2 + v(\vec{x}) \right\} \phi(\vec{x}) = E \phi(\vec{x}), \quad /5/$$

E - ионизационный уровень водородоподобного адатома. Индекс в /4/ нумерует координаты всех центров адсорбции на поверхности подложки. Обозначим через K суммарное количество центров адсорбции на поверхности кристалла, тогда $Z \leq K$.

Ионные состояния адатомов на поверхности подложки будем описывать на языке возможных конфигураций расположения ионов адсорбата по центрам адсорбции. Для Z ионов адатомов возможно $K!/(K-Z)!Z!$ состояний /ионы тождественно неразличимы/. Набор одночастичных ионных состояний адсорбата $\{\phi_a(\beta)\}$ определим следующим образом:

$$\phi_a(\beta) = \Delta_{\vec{R}_a, \vec{R}_\beta} \equiv \Delta_{a\beta}, \quad /6/$$

где a - фиксирует состояние иона на поверхности /занят $\vec{R}_a$ центр адсорбции/, β - переменная, пробегающая по номерам β всех возможных центров адсорбции $\vec{R}_\beta$. $\Delta_{a\beta} = 1$, если $\vec{R}_a = \vec{R}_\beta$, и равна нулю в остальных случаях.

Представление вторичного квантования

Исключительно эффективным инструментом исследования проблемы многих тел является метод вторичного квантования. В дальнейшем будем использовать схему вторичного квантования, предложенную в 4'.

Введем операторные функции полей $\Psi^+(X), \Psi(X), \Phi^+(\beta), \Phi(\beta)$ в виде

$$\Psi^+(X) = \sum_{k\sigma} a_{k\sigma}^+ \phi_{k\sigma}^*(X) + \sum_{a\sigma} b_{a\sigma}^+ N_a \phi_{a\sigma}^*(X),$$

$$\Psi(X) = \sum_{k\sigma} a_{k\sigma} \phi_{k\sigma}(X) + \sum_{a\sigma} b_{a\sigma} N_a \phi_{a\sigma}(X), \quad /7/$$

и

$$\Phi^+ = \sum_a c_a^+ \phi_a(\beta), \quad \Phi = \sum_a c_a \phi_a(\beta), \quad N_a = c_a^+ c_a. \quad /8/$$

Поля Ψ^+ , Ψ описывают электроны; Φ^+ , Φ - ионы адатомов. Операторы рождения и уничтожения электронов $a_{k\sigma}^+$, $b_{a\sigma}^+$, $a_{k\sigma}$, $b_{a\sigma}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям Ферми, c_a^+ , c_a - операторы рождения и уничтожения Паули.

Определим скалярные произведения функций из $\{\phi_{a\sigma}(X)\}$, $\{\phi_{k\sigma}(X)\}$ и $\{\phi_a(\beta)\}$ обычным образом:

$$\langle \phi_{k\sigma} / \phi_{a\sigma} \rangle = \int dX \phi_{k\sigma}^*(X) \phi_{a\sigma}(X),$$

$$\langle \phi_a / \phi_\gamma \rangle = \sum_\beta \phi_a^*(\beta) \phi_\gamma(\beta). \quad /9/$$

Здесь $\int dX$ обозначает интегрирование по координатам $\vec{x}$ и суммирование по спиновой переменной k .

Наборы функций состояний $\{\phi_{k\sigma}(X), \phi_{a\sigma}(X)\}$ и $\{\phi_a(\beta)\}$

будем рассматривать как ортонормированные базисы в соответствующих пространствах состояний. Это, вообще говоря, не является вполне строгим, т.к. $\langle \phi_{k\sigma} / \phi_{a\sigma} \rangle \neq 0$, кроме того, существует отличное от нуля перекрытие волновых функций $\phi_a(\vec{x})$ и $\phi_\beta(\vec{x})$ на разных узлах a, β . Однако вопросы учета эффектов неортогональности и неполноты базисов достаточно подробно изучены^{/5,6/} и не представляются здесь принципиальными. Из /7/ и /8/ следует, что

$$[\Psi^+(X), \Phi(\beta)]_{(-)} \neq 0, \quad /10/$$

т.е. в определение полей Ψ^+ , Ψ входят операторы, на которых построены поля Φ^+ , Φ . Поэтому поля Ψ и Φ не являются независимыми; электронное состояние $\phi_{a\sigma}(X)$ дает вклад в поле Ψ только тогда, когда a -й узел адсорбции занят ионом адатома, т.е. $N_a = 1$. Это отражает специфику хемосорбции. Электронные состояния системы можно определить только тогда, когда фиксирована некоторая /произвольная/ конфигурация расположения ионов адатомов.

Следуя варианту метода вторичного квантования, развитому в^{/4/}, можно показать, что нетрадиционное определение полей /7/, приводящее к соотношению /9/, не меняет стандартной процедуры вторичного квантования. В результате гамильтониан /1/ в представлении вторичного квантования, реализованного на операторных полях Ψ, Φ , имеет вид

$$H = \int dX \Psi^+(X) \left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_X^2 + u(\vec{x}) \right] \Psi(X) + \frac{1}{2} \int dX dX' \times \\ \times \Psi^+(X) \Psi^+(X') \Psi(X') \Psi(X) v(\vec{x} - \vec{x}') + \sum_a t_a(\vec{R}_a) N_a + \\ + \frac{1}{2} \sum_{a \neq \beta} v(\vec{R}_a - \vec{R}_\beta) N_a N_\beta + \sum_a \int dX \Psi^+(X) \Psi(X) N_a v(\vec{R}_a - \vec{x}). \quad /11/$$

Если ограничиться в /11/ только доминирующими по величине унарными и бинарными взаимодействиями и принять во внимание предположение о симметрии электронных состояний атомов, то, опуская алгебраические преобразования и оценки, получим

$$H = \sum_{k\sigma} \epsilon_{\vec{k}} n_{\vec{k}\sigma} + \sum_a N_a [E \sum_{\sigma} n_{a\sigma} + U n_{a\sigma} n_{a-\sigma} + \sum_{k\sigma} (1 - n_{a-\sigma}) \times \\ \times [V_{a\vec{k}} b_{a\sigma}^+ a_{\vec{k}\sigma} + \text{k.c.}]] + \frac{1}{2} \sum_{a \neq \beta} N_a N_\beta [q_a q_\beta v_{a\beta} + 2q_a \sum_{k\sigma} [V_{\beta\vec{k}}(a) b_{\beta\sigma}^+ a_{\vec{k}\sigma} + \text{k.c.}]], \quad /12/$$

где $\epsilon_{\vec{k}}$, E определены согласно /3/, /5/; $q_a = \sum_{\sigma} n_{a\sigma}$,

$$U = \int d\vec{x} d\vec{x}' \rho(\vec{x}) \rho(\vec{x}') v(\vec{x} - \vec{x}'), \rho(\vec{x}) = \phi^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}), V_{a\vec{k}} = \int d\vec{x} \phi_a^*(\vec{x}) \times \\ \times \Psi_{\vec{k}}(\vec{x}) v(\vec{R}_a - \vec{x}), v_{a\beta} = v(\vec{R}_a - \vec{R}_\beta), \text{k.c.} - \text{обозначает комплексно-} \\ \text{сопряженное слагаемое, } V_{\beta\vec{k}}(a) = \int d\vec{x} \phi_\beta(\vec{x}) \phi_{\vec{k}}(\vec{x}) v(\vec{R}_a - \vec{x}).$$

Аппроксимирующие гамильтонианы

Описание гамильтониана /12/ достаточно сложно, так как в нем "перепутаны" электронные и ионные компоненты $(A+\Sigma)$ -системы. Однако часто исследуют или только термодинамические свойства хемосорбционных покрытий^{/2/}, или же только электронные свойства $(A+\Sigma)$ -систем^{/7/}. Предложим метод, позволяющий построить аппроксимирующие гамильтонианы для описания указанных свойств исходной системы.

Перепишем гамильтониан /12/ в виде

$$H = \sum_{k\sigma} \epsilon_{\vec{k}} n_{\vec{k}\sigma} + \sum_a N_a \hat{y}_a + \frac{1}{2} \sum_{a \neq \beta} N_a N_\beta \hat{y}_{a\beta}, \quad /13/$$

где

$$\hat{y}_a = \sum_{\sigma} E n_{a\sigma} + U n_{a\sigma} n_{a-\sigma} + \sum_{k\sigma} (1 - n_{a-\sigma}) [V_{a\vec{k}} b_{a\sigma}^+ a_{\vec{k}\sigma} + \text{k.c.}],$$

$$\hat{y}_{a\beta} = q_a q_\beta v_{a\beta} + 2q_a \sum_{k\sigma} [V_{\beta\vec{k}}(a) b_{\beta\sigma}^+ a_{\vec{k}\sigma} + \text{k.c.}],$$

и определим модельную систему H_0 :

$$H_0 = H_1 + H_2 + C.$$

/14/

Здесь

$$H_1 = \sum_a \gamma_a N_a + \frac{1}{2} \sum_{a \neq \beta} \gamma_{a\beta} N_a N_\beta.$$

$$H_2 = \sum_{k\sigma} \epsilon_k n_{k\sigma} + \sum_a \nu_a \hat{\gamma}_a + \frac{1}{2} \sum_{a \neq \beta} \nu_{a\beta} \hat{\gamma}_{a\beta}.$$

$$C = - \sum_a \gamma_a \nu_a - \frac{1}{2} \sum_{a \neq \beta} \gamma_{a\beta} \nu_{a\beta}.$$

Величины $\nu_a, \nu_{a\beta}, \gamma_a, \gamma_{a\beta}$ - пока свободные с-числовые параметры. Потребуем термодинамической эквивалентности модельной системы /12/ и исходной системы /13/, т.е. потребуем, чтобы свободные энергии F системы /13/ и F_0 системы /14/ совпадали. Тогда согласно известной формуле

$$F - F_0 = \int_0^1 d\lambda \langle \Delta H \rangle_{H_0 + \lambda \Delta H}, \quad /15/$$

где $\Delta H = H - H_0$.

Из /15/ можно получить следующие два условия на параметры ν, γ :

$$\int_0^1 d\lambda \langle (N_a - \nu_a)(\hat{\gamma}_a - \gamma_a) \rangle_{H_0 + \lambda \Delta H} = 0.$$

$$\int_0^1 d\lambda \langle (N_a N_\beta - \nu_{a\beta})(\hat{\gamma}_{a\beta} - \gamma_{a\beta}) \rangle_{H_0 + \lambda \Delta H} = 0. \quad /16/$$

При выполнении условий /16/ системы H и H_0 термодинамически эквивалентны. Это значит, что совпадают любые их термодинамические потенциалы, в том числе и внутренние энергии:

$$\langle H \rangle_H = \langle H_0 \rangle_{H_0}. \quad /17/$$

где

$$\begin{aligned} \langle H_0 \rangle_{H_0} = & \sum_{k\sigma} \epsilon_k \langle n_{k\sigma} \rangle_{H_2} + \sum_a \nu_a \langle \hat{\gamma}_a \rangle_{H_2} + \frac{1}{2} \sum_{a \neq \beta} \nu_{a\beta} \langle \hat{\gamma}_{a\beta} \rangle_{H_2} + \\ & + \sum_a \gamma_a \langle N_a \rangle_{H_1} + \frac{1}{2} \sum_{a \neq \beta} \gamma_{a\beta} \langle N_a N_\beta \rangle_{H_1} + C. \end{aligned}$$

Положим теперь

$$\nu_a = \langle N_a \rangle_{H_1} = \nu_a(\gamma_a, \dots, \gamma_a, \beta, \dots).$$

$$\nu_{a\beta} = \langle N_a N_\beta \rangle_{H_1} = \nu_{a\beta}(\gamma_a, \dots, \gamma_a, \beta, \dots). \quad /18/$$

В этом случае $\langle H_0 \rangle_{H_0}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle H_0 \rangle_{H_0} &= \sum_{k\sigma} \epsilon_k \langle n_{k\sigma} \rangle_E + \sum_a \nu_a (\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'}) \langle \hat{\gamma}_a \rangle_E + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{a \neq \beta} \nu_{a\beta} (\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'}) \langle \hat{\gamma}_{a\beta} \rangle_E = \langle H_E \rangle_E, \end{aligned} \quad /19/$$

где

$$H_E = H_2(\nu_a(\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'}), \nu_{a\beta}(\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'})), \quad \langle \dots \rangle_E \equiv \langle \dots \rangle_{H_E}.$$

Для определения параметров ν_a и $\nu_{a\beta}$ из /16/ имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \nu_a &= \frac{\int_0^1 d\lambda \langle \hat{\gamma}_a [N_a - \nu_a(\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'})] \rangle_{H_0 + \lambda \Delta H}}{\int_0^1 d\lambda \langle [N_a - \nu_a(\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'})] \rangle_{H_0 + \lambda \Delta H}}, \\ \nu_{a\beta} &= \frac{\int_0^1 d\lambda \langle \hat{\gamma}_{a\beta} [N_a N_\beta - \nu_{a\beta}(\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'})] \rangle_{H_0 + \lambda \Delta H}}{\int_0^1 d\lambda \langle [N_a N_\beta - \nu_{a\beta}(\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'})] \rangle_{H_0 + \lambda \Delta H}}. \end{aligned} \quad /20/$$

Из равенств /17/ и /19/ следует, что

$$\langle H \rangle_H = \langle H_E \rangle_E. \quad /21/$$

т.е. системе /13/ можно сопоставить термодинамически эквивалентную электронную подсистему H_E . Гамильтониан H_E будет аппроксимировать электронные свойства хемосорбированных покрытий. Заметим, что в H_E аддитивным образом входит константа, переопределяющая энергию электронной системы на величину вклада ионной подсистемы. Если положить

$$\nu_a = \langle \hat{\gamma}_a \rangle_{H_2} = \nu_a(\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'}),$$

$$\nu_{a\beta} = \langle \hat{\gamma}_{a\beta} \rangle_{H_2} = \nu_{a\beta}(\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'}). \quad /22/$$

то вместо /19/ будем иметь

$$\langle H_0 \rangle_{H_0} = \langle H_I \rangle_I + \sum_{k\sigma} \epsilon_k \langle n_{k\sigma} \rangle_{H_2}. \quad /23/$$

где

$$H_I = H_1(\nu_a(\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'}), \nu_{a\beta}(\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'})).$$

Для параметров ν_a , $\nu_{a\beta}$ получим следующие уравнения:

$$\nu_a = \frac{\int_0^1 d\lambda \langle [\hat{\gamma}_a - \nu_a(\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'})] N_a \rangle_{H_0 + \lambda \Delta H}}{\int_0^1 d\lambda \langle [\hat{\gamma}_a - \nu_a(\nu_{a'} \cdot \nu_{a'\beta'})] \rangle_{H_0 + \lambda \Delta H}},$$

$$\nu_{a\beta} = \frac{\int_0^1 d\lambda \langle [\hat{\gamma}_{a\beta} - \gamma_{a\beta}(\nu_a, \nu_{a\beta})] N_a N_\beta \rangle_{H_0 + \lambda \Delta H}}{\int_0^1 d\lambda \langle [\hat{\gamma}_{a\beta} - \gamma_{a\beta}(\nu_a, \nu_{a\beta})] \rangle_{H_0 + \lambda \Delta H}} \quad /24/$$

Аналогично из /23/ и /17/ следует, что

$$\langle H \rangle_H = \langle H_I \rangle_I + \sum_{k\sigma} \epsilon_k \langle n_{k\sigma} \rangle_{H_2} \quad /25/$$

т.е. внутреннюю энергию системы /13/ можно представить в виде суммы двух аддитивных вкладов: энергии, обусловленной "возмущенной" электронной подсистемой подложки и энергии адсорбированных атомов /ионов адатомов, "перенормированных" за счет электронной подсистемы/. Гамильтониан H_I будет описывать термодинамические свойства хемосорбционных атомных покрытий.

Заключение

Полученные гамильтонианы H_I и H_E известны как широко используемые в теории хемосорбции полуфеноменологические гамильтонианы типа Изинга и обобщенной модели Андерсона /17/ соответственно, при этом показана возможность аппроксимации исходной системы модельными системами такого вида. Уравнения /20/, /24/ носят формальный характер и полезны лишь тогда, когда их правая часть аппроксимируется более простыми выражениями. Уравнения /20/, /24/ сильно упрощаются, если считать ΔH малым возмущением системы H_0 : В этом случае системы /20/ и /24/ становятся эквивалентными и имеют вид

$$\gamma_a = \langle \hat{\gamma}_a \rangle_E \cdot \quad \nu_a = \langle N_a \rangle_I \cdot$$

$$\gamma_{a\beta} = \langle \hat{\gamma}_{a\beta} \rangle_E \cdot \quad \nu_{a\beta} = \langle N_a N_\beta \rangle_I \cdot$$

$$H_E = H_E(\nu_a, \nu_{a\beta}), \quad H_I = H(\gamma_a, \gamma_{a\beta}) \quad /26/$$

Однако представления /20/, /24/ несомненно полезны, они позволяют строить такие аппроксимации регулярным образом. Например, при малой степени покрытия подложки /20/, /24/ можно аппроксимировать по теории возмущения по малой поверхностной концентрации адатомов $c = \langle \hat{N}_a \rangle_I \ll 1$.

В заключение автор благодарит профессора В.К.Федянина за полезное обсуждение работы.

Литература

1. News D.M. Phys.Rev., 1969, vol.178, p.1123.
2. Федянин В.К. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1978, т.9, вып.4, стр.658.
3. Ying N.D., Smith J.R., Kohn W. J.Vac.Sci.Thechn.,1971, vol.9, p.575,
4. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. /мл./ ОИЯИ, Р7-80-239, 1980; Введение в квантовую статистическую механику, "Наука", М., 1984.
5. Zitkova J., Rivier N. J.Phys. C., 1970, vol.3, p.L71.
6. Kanamori J., Terakura K., Yamada K. Prog.Theor.Phys., 1969, vol.41, p.1426.
7. Эйнштайн Т., Герц Д., Шриффер Д. Проблемы теории хемосорбции, в кн.: Теория хемосорбции, "Мир", М., 1983.

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА И РАЗЛИЧНЫЕ БАЗИСЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SL(2, R)$

Н.М.Атакишиев*, Р.М.Мир-Касимов

Рассматривается точно решаемая задача для разностного уравнения Шредингера в релятивистском конфигурационном пространстве. Потенциал задачи является обобщением нерелятивистского осцилляторного потенциала. В частности, динамическая группа симметрии разностного уравнения Шредингера совпадает с динамической группой нерелятивистского осциллятора. Реализация динамической группы в терминах волновых функций разностного уравнения Шредингера /полиномов Поллачека/ используется для нахождения связи между матричными элементами представлений при различных редукциях и матричных элементов буста.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Relativistic Oscillator Wave Functions and Different Bases of the $SL(2, R)$ Group Representations

N.M. Atakishiev, R.M. Mir-Kasimov

The exactly soluble problem for the finite-difference Schrödinger equation in the relativistic configurational space is considered. The potential of the problem is the generalization of the nonrelativistic oscillator potential. In particular the dynamical group of symmetry for the finite-difference Schrödinger equation coincides with the dynamical group of symmetry of the nonrelativistic oscillator. The realization of dynamical group in terms of the wave function of the finite difference Schrödinger equation is used for establishing the connection between the matrix elements of representations for different reductions and for matrix elements of the boost.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

* Институт физики АН АзССР, Баку

В рамках квазипотенциального подхода в квантовой теории поля ^{/1,2/} в работах ^{/3-5/} была рассмотрена релятивистская модель линейного осциллятора с той же самой динамической группой симметрии $SL(2, R)$, что и в нерелятивистском случае. Были найдены волновые функции и явная реализация генераторов группы симметрии как в импульсном, так и в релятивистском конфигурационном x -пространстве ^{/6/}. Полученные решения в x -пространстве, выражающиеся через полиномы Поллачека ^{/4/}, интересны и с теоретико-групповой точки зрения, поскольку они являются коэффициентами преобразования между базисами собственных функций компактного $SO(2)$ и некомпактного $SO(1,1)$ генераторов группы $SL(2, R)$. В данной работе показано, что с помощью явного выражения для волновых функций релятивистского осциллятора ^{/3,4/} удастся получить простые формулы для коэффициентов преобразования и матричных элементов буста, относящихся к дискретной серии представлений универсальной накрывающей группы $\tilde{SL}(2, R)$.

1. Волновые функции линейного релятивистского осциллятора в p -представлении ^{/3-5/} можно записать в виде

$$\Psi_n(p) = i^n \left(\frac{\eta}{2mc} \right)^{1/2} \Phi_n^V(\eta), \quad /1/$$

где $\eta^2 = \frac{2c}{\hbar\omega} p^+$, $p^+ = p_0 + p$ есть переменная светового фронта, параметр $\eta^{2\nu} = 1 + (4\mu^2 + 1)^{1/2}$, $\mu = mc^2/\hbar\omega$, а функция

$$\Phi_n^V(\eta) = \left[\frac{2n!}{1^{n+2\nu}} \right]^{1/2} \eta^{2\nu-1/2} e^{-\eta^2/2} L_n^{2\nu-1}(\eta^2), \quad /2/$$

выражается через обобщенные полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$. Фазы в /1/ выбраны таким образом, что при $c \rightarrow \infty$ $\Psi_n(p)$ совпадают с волновыми функциями нерелятивистского линейного осциллятора.

Как следует из /1/, матричные элементы произвольного оператора A в p -представлении

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_p \Psi_n^*(p) A \Psi_n(p) = \int_0^{\infty} d\eta \Phi_n^V(\eta) \tilde{A} \Phi_n^V(\eta),$$

где $d\Omega_p = mcdp^+/p^+ = 2mcd\eta/\eta$ есть инвариантный элемент интегрирования в p -представлении, а $\tilde{A} = \eta^{-1/2} A \eta^{1/2}$. В частности, для гамильтониана $H(p) \equiv \hbar\omega K_0$ повышающего K_+ и понижающего K_- операторов, являющихся генераторами

динамической группы симметрии $\tilde{SL}(2, R)$ для модели осциллятора, описываемой $H(p)$. мы получаем следующую связь с используемой в ^{/7/} реализацией:

$$\bar{K}_0 = J_0^\gamma, \quad \bar{K}_\pm = \pm i(\bar{K}_1 \pm i\bar{K}_2), \quad \bar{K}_1 = J_1^\gamma, \quad \bar{K}_2 = J_2^\gamma. \quad /3/$$

где $\gamma = (2\nu - 1)^2 - 1/4$. В рассмотренном нами случае осциллятора значения параметра ν лежат в интервале $1 < \nu < \infty$. Однако формулы /1/, /2/ и /3/ могут быть использованы для описания неприводимых унитарных представлений /НУП/ группы $\tilde{SL}(2, R)$ и при значениях этого параметра $1/2 < \nu < 1$, где нижняя граница определяется исходя из требования, что генераторы /3/ должны иметь ограниченный снизу спектр*. Функции $\Psi_n(p)$ задают базис для положительной дискретной серии $D^+(\nu)$ НУП группы $\tilde{SL}(2, R)$, соответствующий $SO(2)$ редукции /ср. с ^{/7/}/.

2. Волновые функции линейного осциллятора в релятивистском конфигурационном x -представлении

$$\Psi_n(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int d\Omega_p \xi(p, x) \Psi_n(p), \quad /4/$$

определяются с помощью разложения по матричным элементам представлений группы движений пространства Лобачевского

$$\xi(p, x) = \left(\frac{p_0 - p}{mc} \right)^{-i\tilde{x}} = \left(\frac{\eta^2}{2\mu} \right)^{-i\tilde{x}}, \quad /5/$$

где $\tilde{x} = x/\lambda$ есть безразмерная переменная, а $\lambda = \hbar/mc$ - комптоновская длина волны. Функции $\xi(p, x)$ являются собственными функциями $K_2 \xi(p, x) = \tilde{x} \xi(p, x)$ некомпактного генератора K_2 и образуют ортонормированный на δ -функцию базис, соответствующий редукции $SL(2, R) \supset SO(1, 1)$ ^{/7-10/}. Они следующим образом связаны с используемыми в ^{/7/} собственными функциями $\Phi_{\tilde{x}}(\eta)$ оператора K_2 :

$$\xi(p, x) = (\pi\eta)^{1/2} (2\mu)^{-i\tilde{x}} \Phi_{\tilde{x}}(\eta). \quad /5'/$$

В конфигурационном x -представлении генераторам /3/ соответствуют разностные операторы

* Поскольку НУП отрицательной дискретной серии $D^-(\nu)$ получаются из НУП положительной дискретной серии $D^+(\nu)$ с помощью внешнего автоморфизма $K_0 \leftrightarrow -K_0$, $K_1 \leftrightarrow -K_1$, $K_2 \leftrightarrow K_2$ алгебры $\mathfrak{sl}(2, R)$, то в данной работе будет рассматриваться лишь $D^+(\nu)$ серия.

$$K_+ \equiv K_0 + K_1 = \mu^{-1} [\bar{x}(\bar{x} + i) + \mu^2] e^{i \frac{d}{d\bar{x}}}.$$

$$K_- \equiv K_0 - K_1 = \mu e^{-i \frac{d}{d\bar{x}}}, \quad K_2 = -\bar{x}. \quad /6/$$

Отметим, что в качестве одного из возможных примеров реализации генераторов группы $SL(2, R)$, возникающей при редукции относительно некомпактной подгруппы $SO(1, 1)$, в^{/10/} приведен случай, когда

$$J_2 = \lambda, \quad J_- = -e^{i \frac{d}{d\lambda}}, \quad J_+ = f(\lambda) e^{-i \frac{d}{d\lambda}}, \quad f(\lambda) = \lambda(\lambda - i) + i(i + 1). \quad /7/$$

Нетрудно убедиться, что если положить $\lambda = -\bar{x}$, а $i = \nu - 1$, то мы получаем следующую связь между генераторами /7/ и /6/: $J_2 = K_2, J_{\pm} = \pm \mu^{\pm 1} K_{\pm}$.

3. Как известно, коэффициенты преобразования

$$C_n^{(\nu)}(\bar{x}) \equiv (\Phi_{\bar{x}}^{\nu}, \Phi_n^{\nu}) = \int_0^{\infty} d\eta \Phi_{\bar{x}}^{*}(\eta) \Phi_n^{\nu}(\eta) \quad /8/$$

связывают "координаты" $f(\bar{x}) \equiv (\Phi_{\bar{x}}^{\nu}, f)$ произвольной функции $f(\eta)$ из $L^2(R^+)$ в базисе собственных функций некомпактного генератора $\bar{K}_2$ с ее "координатами" $f_n^{(\nu)} \equiv (\Phi_n^{\nu}, f)$ в базисе собственных функций компактного генератора $\bar{K}_0$, т.е.

$$f(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(\nu)} C_n^{(\nu)}(\bar{x}), \quad f_n^{(\nu)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x} C_n^{*(\nu)}(\bar{x}) f(\bar{x}). \quad /9/$$

Используя явное выражение для волновых функций^{/4/}:

$$\Psi_n^{(\nu)}(x) = 2^{\nu} \left[\frac{n!}{2\pi\lambda\Gamma(n+2\nu)} \right]^{1/2} \mu^{-i\bar{x}} \Gamma(\nu + i\bar{x}) P_n^{\nu}(\bar{x}, \frac{\pi}{2}) \quad /4'/$$

через полиномы Поллачека $P_n^{\nu}(x; \phi)$ и подставляя в /4/ соотношения /1/ и /5'/, легко показать, что

$$C_n^{(\nu)}(x) = i^n \left[\frac{n!}{2\pi\Gamma(n+2\nu)} \right]^{1/2} 2^{\nu-i\bar{x}} \Gamma(\nu - i\bar{x}) P_n^{\nu}(x; \frac{\pi}{2}). \quad /10/$$

Ортогональность коэффициентов преобразования /10/

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx C_n^{*(\nu)}(x) C_{n'}^{(\nu)}(x) = \delta_{nn'}, \quad /11/$$

согласуется с условием ортогональности для полиномов Поллачека

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx P_n^{(\nu)}(x; \frac{\pi}{2}) P_n^{(\nu)}(x; \frac{\pi}{2}) \rho^{(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!} \delta_{nn}, \quad /12/$$

где $\rho^{(\nu)}(x) = 2^{2\nu} (2\pi)^{-1} |\Gamma(\nu + ix)|^2$. Под действием произвольного конечного элемента $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ группы $SL(2, R)$ коэффициенты $C_n^{(\nu)}(\bar{x})$ преобразуются в

$$[U^{(\nu)}(g) C_n^{(\nu)}](\bar{x}) = \left[\frac{a - ib}{a + ib} \right]^{n+\nu} (a^2 + b^2)^{-i\bar{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{1}{2} (ac + bd) \right]^k C_n^{(\nu)}(\bar{x} + ik). \quad /13/$$

В тех случаях, когда g принадлежит однопараметрическим компактной $\exp(iy\bar{K}_0)$ и некомпактной $\exp(i\beta\bar{K}_2)$ подгруппам, преобразование /13/ сводится просто к умножению соответственно на $\exp[iy(n+\nu)]$ и $\exp(i\beta\bar{x})$.

4. Как следует из определения /8/ коэффициентов преобразования $C_n^{(\nu)}(x)$, матричные элементы $D_{nn'}^{(\nu)}(g) \equiv (\Phi_n^{(\nu)}, U^{(\nu)}(g) \Phi_{n'}^{(\nu)})$ в $SO(2)$ базисе связаны с матричными элементами $D_{\bar{x}\bar{x}'}^{(\nu)}$ в $SO(1,1)$ базисе соотношением

$$D_{nn'}^{(\nu)}(g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' C_n^{(\nu)*}(x) D_{xx'}^{(\nu)}(g) C_{n'}^{(\nu)}(x'). \quad /14/$$

В частном случае, когда g принадлежит однопараметрической подгруппе $\exp(i\beta\bar{K}_2)$, матричные элементы

$$D_{xx'}^{(\nu)} \left(\begin{array}{cc} \exp(-\beta/2) & 0 \\ 0 & \exp(\beta/2) \end{array} \right) = e^{i\beta x} \delta(x - x'), \quad /15/$$

что приводит к интегральному представлению для матричных элементов буста в $SO(2)$ базисе

$$D_{nn'}^{(\nu)} \left(\begin{array}{cc} e^{-\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{\beta/2} \end{array} \right) = (-i)^n i^{n'} \frac{n! n'!}{\gamma_{nn'}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho^{(\nu)}(x) P_n^{(\nu)}(x; \frac{\pi}{2}) e^{ix\beta} P_{n'}^{(\nu)}(x; \frac{\pi}{2}), \quad /15/$$

где $\gamma_{nn'} = [n! n'! \Gamma(n+2\nu) \Gamma(n'+2\nu)]^{1/2}$. Интегральное представление /15/ позволяет легко получить известное аналитическое выражение /11/

$$D_{nn'}^{(\nu)} \left(\begin{array}{cc} e^{-\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{\beta/2} \end{array} \right) = \frac{(-1)^{n'}}{\gamma_{nn'}} \Gamma(2\nu + n + n') \frac{\text{th}^{n+n'} \frac{\beta}{2}}{\text{ch}^{2\nu} \frac{\beta}{2}} F(-n, -n'; 1-2\nu-n-n'; \text{cth}^2 \frac{\beta}{2}). \quad /16/$$

Действительно, как следует из определения веса $\rho^{(\nu)}(x)$ для полиномов Поллачека $P_n^\nu(x; \pi/2)$. в формуле /15/ при $\beta > 0$ ($\beta < 0$) интеграл можно замкнуть в верхней /нижней/ части комплексной плоскости $z = x + iy$, сведя его к сумме вычетов подынтегральной функции в точках $z_k = i(\nu + k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ /при $\beta < 0$ в точках z_k^* / , т.е.

$$D_{nn'}^\nu \left(\begin{matrix} e^{-\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{\beta/2} \end{matrix} \right) = i^{n'} (-i)^n 2^{2\nu} \frac{n! n'!}{\gamma_{nn'}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma(\nu - iz_k) P_n^\nu(z_k; \frac{\pi}{2}) e^{i\beta z_k},$$

$$P_n^\nu(z_k; \frac{\pi}{2}).$$

Воспользовавшись теперь соотношением $n! P_n^\nu(z_k; \frac{\pi}{2}) = i^n \mathbb{M}_n^{(2\nu, -1)}(k)$, где $\mathbb{M}_n^{(2\nu, -1)}(k)$ являются аналитическим продолжением полиномов Мейкснера $\mathbb{M}_n^{(\gamma, \mu)}(z)$ по параметру μ /см. /12/ / , получим

$$D_{nn'}^\nu \left(\begin{matrix} e^{-\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{\beta/2} \end{matrix} \right) = \frac{(-1)^{n'}}{\gamma_{nn'}} 2^{2\nu} e^{-\nu\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma(2\nu + k) e^{-k\beta} \mathbb{M}_n^{(2\nu, -1)}(k) \cdot$$

$$\mathbb{M}_{n'}^{(2\nu, -1)}(k).$$

/15'/

Поскольку /доказательство этого утверждения приведено в /13/ /

$$2^{2\nu} e^{-\nu\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma(2\nu + k) e^{-k\beta} \mathbb{M}_n^{(2\nu, -1)}(k) \mathbb{M}_{n'}^{(2\nu, -1)}(k) =$$

$$= \Gamma(2\nu + n + n') \operatorname{th}^{n+n'} \frac{\beta}{2} \left[\operatorname{ch} \frac{\beta}{2} \right]^{-2\nu} F(-n, -n'; 1 - 2\nu - n - n'; \operatorname{cth}^2 \frac{\beta}{2}).$$

то мы действительно приходим к равенству /16/.

Таким образом, мы видим, что использование волновых функций линейного осциллятора в релятивистском конфигурационном x -представлении позволяет получить простые формулы для описания дискретной серии $D^\pm(\nu)$ НУП универсальной накрывающей группы $\tilde{SL}(2, R)$.

Мы благодарны В.Г.Кадышевскому, В.Ласснеру, В.И.Манько, М.В.Савельеву и С.К.Суслову за полезные обсуждения.

Литература

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, 29, p.380.
2. Kadyshevsky V.G. Nucl.Phys., 1968, B6, p.125.
3. Атакишиев Н.М., Мир-Касимов Р.М., Нагиев Ш.М. ТМФ, 1980, 44, с.47.
4. Атакишиев Н.М. ТМФ, 1984, 58, с.254.
5. Atakishiyev N.M., Mir-Kasimov R.M. JINR, E2-85-214, Dubna, 1985.
6. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. Nuovo Cim., 1968, 55A, p.233.
7. Basu D., Wolf K.B. J.Math.Phys., 1982, 23, p.189.
8. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. "Наука", М., 1965.
9. Barut A.O., Phillips E.C. Commun. Math.Phys., 1968, 8, p.52.
10. Kuriyan J.G., Mukunda N., Sudarshan E.C.G. JMP, 1968, 9, p.2100.
11. Bargmann V. Ann.Math., 1947, 48, p.568.
12. Atakishiyev N.M., Suslov S.K. Institut für Hochenergiephysik, PHE 84-12, Berlin-Zeuthen, 1984.
13. Атакишиев Н.М. Институт физики АН АзССР, № 127, Баку, 1985.

Рукопись поступила 26 июня 1985 года