

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

N10-85

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ О ИЯИ

сборник

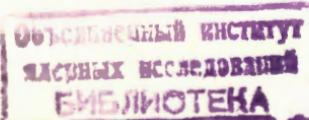
1985

Объединенный институт ядерных исследований
JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

№10-85

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ ОИЯИ
JINR RAPID COMMUNICATIONS

сборник
COLLECTION



Дубна 1985

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

| | |
|---------------|--------------------|
| Н.Н.Боголюбов | — председатель |
| А.М.Балдин | — зам.председателя |
| А.Н.Сисакян | — зам.председателя |
| Д.В.Ширков | — зам.председателя |
| В.А.Бирюков | — ученый секретарь |

| | | |
|----------------|---|----------------|
| Р.А.Асанов | } | — члены совета |
| А.М.Говоров | | |
| А.Д.Коваленко | | |
| А.Б.Кузнецов | | |
| Б.И.Пустыльник | | |
| М.Г.Сапожников | | |
| А.Б.Швачка | | |

EDITORIAL BOARD

| | |
|---------------|------------------------|
| N.N.Bogolubov | — Chairman |
| A.M.Baldin | — Vice-Chairman |
| A.N.Sissakian | — Vice-Chairman |
| D.V.Shirkov | — Vice-Chairman |
| V.A.Biryukov | — Scientific Secretary |

| | | |
|-----------------|---|------------------------|
| R.A.Asanov | } | — Members of the Board |
| A.M.Govorov | | |
| A.D.Kovalenko | | |
| A.B.Kuznetsov | | |
| B.I.Pustylnik | | |
| M.G.Sapozhnikov | | |
| A.B.Shvachka | | |

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

| | |
|---|-----------|
| A. Săndulescu, H. Scutaru Damping of Collective Modes as Open Quantum Systems А. Сэндулеску, Х. Скутару Затухание коллективных мод как эффект открытых квантовых систем. | Стр. 5 |
| N. B. Skachkov, I. L. Solovtsov, O. Yu. Shevchenko Infrared Asymptotics and Dayson-Schwinger Equations for the Gauge-Invariant Spinor Green Function in Quantum Electrodynamics Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, О. Ю. Шевченко Инфракрасная асимптотика и уравнения Дайсона - Шингера для калибровочно-инвариантной спинорной функции Грина в квантовой электродинамике. | 13 |
| V. P. Alfimenkov, S. B. Borzakov, Yu. D. Mareev, L. B. Pikelner, A. S. Khrykin, E. I. Sharapov Корреляции в угловом распределении гамма-квантов при захвате нейtronов в области p-резонанса ^{117}Sn V. P. Alfimenkov, S. B. Borzakov, Yu. D. Mareev, L. B. Pikelner, A. S. Khrykin, E. I. Sharapov Correlations in Gamma-Quanta Angular Distribution at Neutron Capture in ^{117}Sn p-Resonance Region. | 19 |
| E. I. Aliskenderov, A. A. Moldayrov, A. S. Shumovsky Нелинейная двухмодовая модель Дикке E. I. Aliskenderov, A. A. Moldayrov, A. S. Shumovsky Nonlinear Two-Mode Dicke Model. | 26 |
| V. E. Grishin, V. K. Fedyanin "Спектр" частных решений для массивной модели комплексного поля типа Борна - Инфельда V. E. Grishin, V. K. Fedyanin "Spectrum" of Special Solutions for a Field Massive Model of Born-Infeld Type Complex. | 36 |

| | |
|---|----|
| V.G.Makhankov, O.K.Pashaev, S.A.Sergeenkov Dynamical Symmetry and Spin Waves of Isotropic Antiferromagnet B.Г.Маханьков, О.К.Пашаев, С.А.Сергеенков Динамическая симметрия и спиновые волны в изотропном антиферромагнетике. | 45 |
| Ю.И.Алексахин Самосогласованная электродинамика ламинарных потоков пространственного заряда Yu.I.Alexahin Self-Consistent Electrodynamics of Space-Charge Laminar Flow. | 53 |
| И.В.Кузнецов, Э.А.Перельштейн, В.П.Саранцев, Г.Д.Ширков Коллективное ускорение встречных ионных пучков I.V.Kuznetsov, E.A.Perelstein, V.P.Sarantsev, G.D.Shirkov Collective Acceleration of Colliding Ion Beams. | 62 |
| И.Адам, З.Гонс, К.Я.Громов, Т.А.Исламов, Г.А.Кононенко, А.Х.Холматов $E0$ -переходы при распаде ^{164}Tm . 0^+ -состояния в ^{164}Er I.Adam, Z.Hons, K.Ya.Gromov, T.A.Islamov, G.A.Kononenko, A.Kh.Kholmatov $E0$ Transitions at ^{164}Tm Decay. 0^+ -States in ^{164}Er | 69 |

DAMPING OF COLLECTIVE MODES
AS OPEN QUANTUM SYSTEMS

A.Săndulescu, H.Scutaru

In the framework of the Lindblad theory for open quantum systems the following results are obtained: a generalization of the fundamental constraints on quantum mechanical diffusion coefficients which appear in the corresponding master equations, a generalization of the Haase pure state condition and a generalized Schrödinger type nonlinear equation for an open system. Also, the Schrödinger, Heisenberg and Weyl-Wigner-Moyal representations of the Lindblad equation are given explicitly. Based on these representations, one shows that various master equations for the damped quantum oscillator used in the literature for the description of the damped collective modes in DIC are particular cases of the Lindblad equation and that the majority of these equations are not satisfying the constraints on quantum mechanical diffusion coefficients.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Reactions, JINR.

Затухание коллективных мод
как эффект открытых квантовых систем

А.Сэндулеску, Х.Скутару

В рамках теории Линдблада для открытых квантовых систем были получены следующие результаты: обобщение соотношения для ограничения коэффициентов диффузии, обобщенное условие для существования чистых состояний и обобщенное уравнение типа Шредингера для открытых систем. Были получены также в явном виде представления Шредингера, Гейзенберга и Вайла-Вигнера-Мойала уравнения Линдблада. На основе этих представлений было показано, что многие уравнения для гармонического осциллятора с диссипацией энергии, использованные в литературе для описания затухания коллективных мод, представляют собой частные случаи уравнения Линдблада и большинство этих уравнений не выполняет соотношения для ограничения коэффициентов диффузии, вытекающих из принципа неопределенности.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ.

The only systems for which we can study experimentally the dynamics of nuclear matter are the deep inelastic collisions (DIC). In the last years a large body of experimental data has been accumulated in this field^{/1/} which allows a vivid discussion between the two extreme theoretical approaches; the transport theories which view this process as being due to independent particle propagation thus stressing the stochastic, random walk nature of the relaxation phenomenon^{/2/} and the quantum mechanical collective theories which view this process as being due to large scale collective modes thus stressing the coherent nature of the relaxation phenomenon^{/3/}.

It is now widely admitted that the description of the friction in quantum mechanics is far from trivial. Perhaps, the greatest difficulty arises from the fact that in classical mechanics the dissipation of the energy is directly related to the presence of a nonzero momentum (the friction force is proportional to the velocity). On the other hand it is known that such systems with forces proportional to the velocities cannot be described by the standard Hamiltonian mechanics and that the Liouville theorem is not valid. Such forces, which cause a decrease in the phase space volume, are more suitable described in the frame of the theory of stochastic processes.

In order to prevent the fall in time of any finite volume in phase space into a volume smaller than $(\hbar/2)^n$ a diffusion process (stochastic process) which increases the volume in phase space is needed. An equilibrium state is a state in which these two opposite tendencies balance. It follows that in order to obtain a quantum theory for systems with friction forces it is necessary to understand how such quantum diffusion processes arise which balance the friction forces and prevent the violation of the uncertainty relations.

In the literature there are an enormous number of papers which try to solve this problem by introduction, in addition to the friction forces, of some diffusion coefficients, using quite different and contradictory arguments.

In the present paper, we extend our previous work^{/4/} on the dynamics of charge equilibration in damped heavy ion collisions as a large scale collective mode by describing the corresponding collective mode as an open quantum system. We adopt the Lindblad axiomatic way of introducing dissipation in quantum mechanics^{/5,6/} based on completely positive dynamical semigroups with bounded generators.

We succeeded to obtain: a generalization of the fundamental constraints on quantum mechanical diffusion coefficients which appear in the corresponding master equation, a generalization of the Hasse pure state condition and a generalized Schrödinger type nonlinear and non-hermitic equation for an open system. Based on the Schrödinger, Heisenberg and Weyl-Wigner-Moyal representations of the Lindblad master equations we show that various master equations for the damped quantum oscillator used in the literature for the description of the damped collective modes in DIC are particular cases of the Lindblad equation and that the majority of these equations are not satisfying the constraints on quantum mechanical diffusion coefficients.

The Lindblad master equations are of the following form:

$$\frac{d\rho}{dt} = L(\rho(t)) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] + \frac{1}{2\hbar} \sum_{j=1}^N ([V_j \rho(t), V_j^*] + [V_j, \rho(t) V_j^*]), \quad (1)$$

where $\rho(t)$ is the density matrix and V_j the corresponding bounded operators.

Also Lindblad proposed a model for the damped quantum harmonic oscillator with unbound V_j of the form $V_j = a_j p + b_j q$, $j = 1, 2$, where a_j, b_j are complex numbers; and q and p , the usual operators with the commutation relation $[q, p] = i\hbar$. For this model eq.(1) becomes

$$\frac{d\rho}{dt} = L(\rho(t)), \quad (2)$$

where

$$L(\rho) = -\frac{i}{\hbar} [H_0, \rho] - \frac{i(\lambda - \mu)}{2\hbar} [\rho, pq + qp] - \frac{i\lambda}{\hbar} [q, pp + \rho p] - \frac{D_{pp}}{\hbar^2} [q, [q, \rho]] - \frac{D_{qq}}{\hbar^2} [p, [p, \rho]] + \frac{(D_{pq} + D_{qp})}{\hbar^2} [p, [q, \rho]] \quad (3)$$

$$\text{and } H_0 = \frac{1}{2m} p^2 - \frac{m\omega^2}{2} q^2. \quad H = H_0 + \frac{\mu}{2} (pq + qp).$$

Here we denoted by D_{pp} , D_{qq} , D_{pq} , and D_{qp} the diffusion coefficients and by λ the friction constant, all the parameters being real and related to the complex numbers a_j and b_j by the relations

$$D_{qq} = \frac{\hbar^2}{2} \sum_{j=1}^2 |a_j|^2; \quad D_{pp} = \frac{\hbar^2}{2} \sum_{j=1}^2 |b_j|^2;$$

$$D_{pq} = D_{qp} = -\frac{\hbar}{2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \bar{a}_j b_j; \quad \lambda = -\operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \bar{a}_j b_j, \quad (4)$$

where \bar{a}_j means the complex conjugate of a_j .

Thus, the following constraints for the quantum mechanical diffusion coefficients result:

$$D_{qq} \geq 0; \quad D_{pp} \geq 0; \quad D_{qq} D_{pp} - D_{pq}^2 \geq \frac{\lambda^2 \hbar^2}{4}, \quad (5)$$

the last inequality being a consequence of the Schwartz inequality

$$\left(\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \bar{a}_j b_j \right)^2 + \left(\operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \bar{a}_j b_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^2 |a_j|^2 \sum_{j=1}^2 |b_j|^2. \quad (5')$$

In the Heisenberg representation the master eq. (1) is:

$$\frac{dA(t)}{dt} := \tilde{L}(A(t)) = \frac{i}{\hbar} [H, A(t)] + \frac{1}{2\hbar} \sum_j (V_j^* [A(t), V_j] + [V_j^*, A(t)] V_j). \quad (6)$$

If the time evolution of the operator $M = \sum_j V_j^* V_j$ is considered we obtain from the 2-positivity of the dynamical semigroup generated by (6) that

$$M(t) \geq \sum_j V_j(t)^* V_j(t). \quad (7)$$

From this relation an inequality for mean values of M , V_j^* , and V_j follows immediately if we observe that the map $A \rightarrow \operatorname{Tr} \rho A$ is also 2-positive.

$$\operatorname{Tr} \rho M(t) \geq \sum_j \operatorname{Tr} (\rho V_j(t)^*) \operatorname{Tr} (\rho V_j(t)). \quad (8)$$

By the duality $\operatorname{Tr} \rho(A(t)) = \operatorname{Tr} \rho(t)A$ rel. (8) becomes:

$$\operatorname{Tr} (\rho(t) \sum_j V_j^* V_j) \geq \sum_j \operatorname{Tr} (\rho(t) V_j^*) \operatorname{Tr} (\rho(t) V_j). \quad (9)$$

This inequality is a generalization of the inequality (11) from ref. ⁸ to all Markovian master equations.

For the damped quantum harmonic oscillator, the above inequality becomes:

$$D_{qq} \sigma_{pp}(t) + D_{pp} \sigma_{qq}(t) - 2D_{pq} \sigma_{pq}(t) \geq \lambda \frac{\hbar^2}{2}, \quad (10)$$

where we have used the notations

$$\begin{aligned}\sigma_q &= \text{Tr}(\rho(t)q); \quad \sigma_p = \text{Tr}(\rho(t)p); \quad \sigma_{qq} = \text{Tr}(\rho(t)q^2) - \sigma_q(t)^2 \\ \sigma_{pp} &= \text{Tr}(\rho(t)p^2) - \sigma_p(t)^2; \quad \sigma_{pq}(t) = \text{Tr}(\rho(t)(\frac{pq + qp}{2})) - \sigma_p(t)\sigma_q(t).\end{aligned}\quad (11)$$

The equality in rel. (9) is a necessary and sufficient condition for $\rho(t)$ to be a pure state for all time $t > 0$. Indeed, the condition $\rho^2(t) = \rho(t)$ which is a necessary and sufficient condition for $\rho(t)$ to be a pure state gives $\text{Tr} \rho(t)^2 = 1$ for all $t > 0$. This implies:

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}(\rho(t)^2) = \text{Tr} \rho(t) L(\rho(t)) = 0 \quad t > 0, \quad (12)$$

or by using the explicit form of $L(\rho(t))$ given by eq. (1)

$$\text{Tr}(\rho(t)L(\rho(t))) = \frac{1}{2M} \sum_j (\text{Tr}(\rho(t)V_j \rho(t)V_j^*) - \text{Tr}(\rho(t)^2 V_j^* V_j)) \quad (13)$$

and the conditions $\rho^2(t) = \rho(t)$ and $\rho(t) A \rho(t) = \text{Tr}(\rho(t)A)\rho(t)$ we have

$$\text{Tr}(\rho(t) \sum_j V_j^* V_j) = \sum_j \text{Tr}(\rho(t) V_j) \text{Tr}(\rho(t) V_j^*). \quad (14)$$

This equality is a generalization of the Hasse pure state condition to all Markovian master equations.

The condition $\rho^2(t) = \rho(t)$ implies firstly that $\rho(t)\phi = (\psi(t), \phi)\psi(t)$ for any wave function ϕ and secondly that its derivative

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{d\rho(t)^2}{dt} = L(\rho(t))\rho(t) + \rho(t)L(\rho(t)) \quad (15)$$

is equivalent with the following Schrödinger type nonlinear and nonhermitic equation:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} (H + i \sum_j (\psi(t), V_j^* \psi(t)) V_j - \\ &- \frac{i}{2} (\psi(t), \sum_j V_j^* V_j \psi(t)) - \frac{i}{2} \sum_j V_j^* V_j) \psi(t).\end{aligned}\quad (16)$$

This result is a generalization to all Markovian master equations of the results obtained for particular master equations in refs. /10/ and /7,8/.

For the damped quantum harmonic oscillator the new "Hamiltonian" is

$$\begin{aligned}
H + \lambda(\sigma_p(t)q - \sigma_q(t)p) + \\
+ i\left\{\lambda\hbar - \frac{D_{qq}}{\hbar}((p - \sigma_p(t))^2 + \sigma_{pp}(t)) - \frac{D_{pp}}{\hbar}((q - \sigma_q(t))^2 + \sigma_{qq}(t))\right\} + (17) \\
+ \frac{D_{pq}}{\hbar}((p - \sigma_p(t))(q - \sigma_q(t)) + (q - \sigma_q(t))(p - \sigma_p(t)) + 2\sigma_{pq}(t)).
\end{aligned}$$

It is interesting to remark that the mean value of this new "Hamiltonian" is equal to the mean value of the original Hamiltonian H if the equality is valid in the inequality (10). In this last case the new "Hamiltonian" is equal to

$$\begin{aligned}
H + \lambda(\sigma_p(t)q - \sigma_q(t)p) - \frac{i}{\hbar}\left\{D_{qq}(p - \sigma_p(t))^2 + D_{pp}(q - \sigma_q(t))^2 + \right. \\
\left.+ D_{pq}((p - \sigma_p(t))(q - \sigma_q(t)) + (q - \sigma_q(t))(p - \sigma_p(t)) - \frac{\hbar^2\lambda}{2}\right\}. \quad (18)
\end{aligned}$$

This result, from the physical point of view, is quite natural since the average value of the new "Hamiltonian" of the nonlinear and nonhermitic Schrödinger equation describing the open system must give the energy of the open system.

Another possible representation of the Lindblad master equation is the Weyl-Wigner-Moyal representation. This is a phase-space representation of the quantum mechanics. Roughly speaking such a representation is a mapping from the Hilbert space operators to the functions on the classical phase space in such a way that if A is mapped into $f_A(x, y)$ and ρ is mapped onto $f_\rho(x, y)$, then

$$Tr(\rho A) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\rho(x, y) f_A(x, y) dx dy. \quad (19)$$

This representation can be easily obtained by using Wigner mapping of the density operators $\rho(t)$ from the Hilbert space onto the functions $f_{\rho(t)}(x, y)$ on the classical phase space

$$f(x, y, t) = f_{\rho(t)}(x, y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}(x\eta - y\xi)} Tr(\rho(t)W(\xi, \eta)) d\xi d\eta, \quad (20)$$

where $W(\xi, \eta)$ is the Weyl operator.

Indeed, taking the time derivative of the Wigner function (20), using the master equation in the Heisenberg representation (6) and the explicit action of the dynamical semigroup on the Weyl operators we obtain:

$$\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = -\frac{y}{m} \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x} + m\omega^2 x \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial y} + (\lambda - \mu) \frac{\partial xf(x, y, t)}{\partial x} + \\ + (\lambda + \mu) \frac{\partial yf(x, y, t)}{\partial y} + D_{qq} \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial x^2} + D_{pp} \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial y^2} + 2D_{pq} \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial x \partial y}. \quad (21)$$

This equation looks very classical, like an equation of the Fokker-Planck type, but we must be very careful with the initial function $f(x, y, 0)$ on the phase space which must be a Wigner transform of a density operator in order to keep the quantum mechanical properties of the system.

Because the most frequently choice for $f(x, y, 0)$ is a Gaussian function and because eq.(21) preserves this Gaussian type, i.e., $f(x, y, t)$ is also a Gaussian function, the differences between the quantum mechanics and classical mechanics are completely lost in this representation of the master equation. This is a possible explanation for the frequently occurred ambiguities on this subject in the literature.

In the following we show that various master equations for the damped quantum oscillator used in the literature for the description of the damped collective modes in DIC are particular cases of the Lindblad equation and that the majority of these equations are not satisfying the constraints on quantum mechanical diffusion coefficients.

Indeed, in the form (3) a direct comparison with eq.(1) from refs. /7,10-12/ is possible. It follows that this master equation supplemented with the fundamental constraints (5) is a particular case of eq.(3), when $\mu = \lambda$.

Also a particular case of eq.(3) is the master equation (12) considered in ref./¹³/ for $\lambda = \gamma(\omega)/2m = \mu$; $D_{qq} = 0$; $D_{pp} = \gamma(\omega)T^*(\omega)$; and $D_{pq} = 0$. Evidently the constraints (5) are not satisfied.

Analogously, the master equation (A.36) considered in ref. /⁹/ is a particular case of eq.(3) for $\lambda = \mu = \gamma/2$; $D_{pp} = D$; $D_{qq} = 0$; $D_{pq} = D_{qp} = -d/2$ and $H_0 = p^2/2m + \frac{1}{2}m(\omega^2 - k^2)q^2$. Again the constraints (5) are not satisfied.

In the form (21) a direct comparison with two kinds of quantum master equations, written for the Wigner transform of the density matrix, obtained recently in ref./¹⁴/ is possible.

The first master equation (see eq.(5.1) of ref. /¹⁴/) is a particular case of eq. (21) for $\lambda = \mu = \Gamma/2$; $D_{pp} = D/2$; $D_{qq} = 0$; $D_{pq} = D_{qp} = B/2$ and $H = H_0 - \frac{Am\omega}{2}q^2 + f(t)q$. Evidently the constraints (5) are not satisfied.

The second master equation (see eq. (5.6) of ref.^{/14/}) is also a particular case of eq. (21) for $\mu = 0$; $\Gamma_p^{II} = \Gamma_R^{II} = \lambda$; $D_{pp} = \frac{1}{2} D_p^{II}$; $D_{qq} = \frac{1}{2} D_R^{II}$; $D_{pq} = 0$ and $H = H_0 - A \frac{\pi \omega}{2} q^2 - \frac{A^{II}}{2m\omega} p^2 + f(t)q$. This equation satisfies the fundamental constraints (5).

Finally we should like to stress that the collective fluctuations have not been revealed with clarity by experiment. Now it is clear that, due to the similarity of the equations and solutions in both extreme theoretical approaches: transport theories and quantum collective theories, the effects are similar. We consider that it is premature to conclude, like the majority of the recent papers^{/1/}, that the present data suggest that the dynamical evolution of the dinuclear system may be seen as an independent particle exchange process constrained by the underlying potential energy surface (PES).

References

1. Freisleben H., Kratz J.V. Phys.Rep., 1984, No.1,2, p.1.
2. Weidenmüller H.A. Progr.Nucl.Part.Phys., 1980, 3, p.49.
3. Maruhn J.A., Greiner W., Scheid W. Heavy Ion Collisions. (Ed. by R.Bock). North-Holland Publ.Com., Amsterdam, 1980, vol.II.
4. Sandulescu A. et al. J.Phys.G: Nucl.Phys., 1981, 7, p.L55.
5. Lindblad G. Comm.Math.Phys., 1976, 48, p.119.
6. Lindblad G. Rep.Math.Phys., 1976, 10, p.393.
7. Dekker H., Valsakumar M.C. Phys.Lett., 1984, 104A, p.67.
8. Hasse R.W. Phys.Lett., 1979, 85B, p.197.
9. Hasse R.W. Nucl.Phys., 1979, A318, p.480.
10. Dekker H. Phys.Lett., 1979, 74A, p.15.
11. Dekker H. Phys.Lett., 1980, 80A, p.369.
12. Dekker H. Phys.Rev., 1977, A16, p.2126.
13. Hofmann H. et al. Z.Phys., 1979, A293, p.229.
14. Spina E.M., Weidenmüller H.A. Nucl.Phys., 1984, A425, p.354.

Received on July 2, 1985.

INFRARED ASYMPTOTICS AND DAYSON-SCHWINGER EQUATIONS
FOR THE GAUGE-INVARIANT SPINOR GREEN FUNCTION
IN QUANTUM ELECTRODYNAMICS

N.B.Skachkov, I.L.Solovtsov, O.Yu.Shevchenko*

The Dayson-Schwinger equations for the gauge-invariant (G.I.) spinor Green function are derived for an Abelian case. On the basis of these equations as well as the functional integration method the behaviour of the G.I. spinor propagator is studied in the infrared region. It is shown that the G.I. propagator has a singularity of a simple pole in this region.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Инфракрасная асимптотика и уравнения Дайсона-Швингера для калибровочно-инвариантной спинорной функции Грина в квантовой электродинамике

Н.Б.Скачков, И.Л.Соловцов, О.Ю.Шевченко

Получены уравнения Дайсона-Швингера для калибровочно-инвариантной спинорной функции Грина в абелевом случае. На основе этих уравнений, а также с помощью функциональных методов изучается поведение калибровочно-инвариантного спинорного пропагатора в инфракрасной области. Показано, что введенный таким образом пропагатор имеет в этой области особенность в виде простого полюса.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

During the last few years there appeared a lot of papers where the behaviour of the Green functions in the infrared region was studied (see for instance^{/1,2/} and references therein). The interest in this problem stems from a widely discussed possibility of the relation of the infrared asymptotics of the QCD Green functions with the problem of quark confinement.

In this article we shall study the infrared behaviour on the basis of the gauge-invariant (G.I.) variables

* Gomel Polytechnical Institute

which have been introduced in our previous papers^{/8/}. We shall start with the definition of the G.I. Green function

$$G(x, y) = i <0 | T\psi(x) P \exp[i g \int_x^y d\xi^\mu A_\mu(\xi)] \bar{\psi}(y) | 0>. \quad (1)$$

Our first aim is to find what form would take an analog of the Dayson-Schwinger equation for (1).

Previously the propagator (1) was considered in papers^{/4/} for the purpose of a gauge-invariant definition of quark mass and studied in^{/5/} in the framework of exactly solvable Schwinger and Bloch-Nordsick models. This function was also considered in^{/6/} and calculated to the second order of perturbation theory in the massless case^{/7/}.

As for the integration contour in the P-ordered exponent in (1) we choose a piece of the straight line that connects the points x and y (see^{/4-7/}). By applying the well-known method of derivation of the Schwinger equation in terms of functional derivatives for the gauge-dependent spinor propagator^{/2/}, we find that the G.I. equation for the propagator (1) in the presence of the vector source J_μ has the form

$$\begin{aligned} & [i y_\mu (\frac{\partial}{\partial x_\mu} - g \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} - g [\frac{\partial}{\partial x_\mu} \int_x^y d\xi^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu(\xi)}] - ig u^\mu(x) - \\ & - ig [\frac{\partial}{\partial x_\mu} \int_x^y d\xi^\nu u_\nu(\xi)] - m] G(x, y | J) = - \delta(x - y). \end{aligned} \quad (2)$$

The second equation has the standard form

$$u_\mu(x) = \int dz D_{\mu\nu}^0(x, z) [J^\nu(z) + ig Sp(\gamma^\nu G(z, z/J))], \quad (3)$$

where $D_{\mu\nu}^0$ is the vector field propagator.

It can be shown that the Dayson equation for the G.I. Green function (1) has the form

$$[i \hat{\partial}_x - m + g \hat{B}(x|y) G(x, y|u) - \int dy' M(x, y'|u) G(y', y|u)] = - \delta(x - y), \quad (4)$$

where $\hat{B}(x|y)$ is the G.I. vector field defined by the formula

$$B_\mu(x|y) = u_\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_x^y d\xi^\nu u_\nu(\xi) \quad (5)$$

and $M(x, y|u)$ is the G.I. mass operator defined as follows

* Our notations coincides with this of^{/2/}.

$$M(x, y|u) = ig \gamma^\mu \int dy' <0| T\psi(x) \exp[i g \int_x^y d\xi \xi^\nu A_\nu(\xi)] \times \\ \times \bar{\psi}(y') B_\mu(x|y') |0> G^{-1}(y', y|u). \quad (6)$$

In order to find the asymptotics of the Green function (1) in the infrared region we shall make use of Eq. (2) and apply the method suggested in ^{8/}. With our choice of the integration contour we pass to the functional variable u_μ and putting $y = 0$ find from (2) the equation

$$\{ig^\mu [\frac{\partial}{\partial x^\mu} + g(\hat{\phi}_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_0^x ds \hat{\phi}_\nu(sx)) - \\ - ig(u_\mu(x) - (\frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_0^x ds u_\nu(sx)))\} - m \{G(x|u) = -\delta(x), \quad (7)$$

$$\text{where } \hat{\phi}_\mu(x) = \int dy D_{\mu\nu}(x-y) \frac{\delta}{\delta u_\nu(y)}.$$

Now we shall pass to the momentum representation and consider the expression

$$\Phi_\mu(p|u) = \int dx e^{ipx} [\hat{\phi}_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} x^\nu \int ds \hat{\phi}_\nu(sx)] G(x|u). \quad (8)$$

Expression (8) can be rewritten in another form (we shall denote the Fourier transform of $\hat{\phi}_\mu(x)$ as $\hat{\phi}_\mu(k)$)

$$\Phi_\mu(p|u) = \int_0^1 ds \int \frac{dk}{(2\pi)^4} [\hat{\phi}_\mu(k) G(p-k|u) + k_\mu \frac{\partial \hat{\phi}_\nu(k)}{\partial k_\nu} G(p-sk|u)]. \quad (9)$$

In accordance with ^{8/} one can neglect the dependence of $G(p-k|u)$ and $G(p-sk|u)$ in (9) on the value of k . In this case the integrand in (9) becomes a 4-divergence of $k_\mu \hat{\phi}_\nu(k)$ and therefore we find in the infrared limit that $\Phi_\mu(p|u) = 0$.

In the analogous way it can be shown that in the infrared limit

$$\int dx e^{ipx} [u_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} x^\nu \int_0^x ds u_\nu(sx)] G(x|u) \approx 0. \quad (10)$$

Thus the G.I. Green function $G(p)$ in the region $p^2 = m^2$ obeys the equation $(p-m) G(p) = -1$ and therefore in infrared limit it has a singularity of a simple pole

$$G(p) = \frac{1}{m-p} \quad \text{as} \quad p^2 = m^2. \quad (11)$$

Supposing that the counterterms for the renormalization of the G.I. Green function have the same structure as in the case of the renormalization of the S-matrix, we find that the renormalized function $G'(p)$ in the infrared limit has a simple pole $G'(p) \approx z_g^{-1}/(m-p)$ as well.

Let us study the infrared asymptotics of (1) on the basis of the method of functional integration^[9]. After the integration over the fermion fields we shall represent the vector fields A_μ

$$G(x, y) = \int DA \frac{\det[i\hat{\partial} + gA - m]}{\det[i\hat{\partial} - m]} \exp\{iS_0[A]\} \times \\ \times G(x, y|A) \exp\left[ig \int_x^y d\xi^\mu A_\mu(\xi)\right], \quad (12)$$

where $S_0[A]$ is a free action of the vector field and $G(x, y|A)$ is the Green function of the fermion in an external field A_μ . The function $G(x, y|A)$ can be written in the form of functional integral^[9]

$$G(x, y|A) = i[\hat{i\partial}_x + \hat{gA}(x) + m] \int_0^\infty ds \exp[-is(m^2 - i0)] \times \\ \times \int DB \delta(x - y - 2 \int_0^s d\xi B(\xi)) \exp\{-i \int_0^s d\xi [B^2(\xi) - \\ - g(2B_\mu(\xi) + \sigma_{\mu\nu}(\xi) i\hat{\partial}_x(\xi)) A_\mu(x - 2 \int_\xi^s d\eta B(\eta))]\}, \quad (13)$$

with the normalization of the measure DB : $\int dB \exp[-i \int_0^s d\xi B^2(\xi)] = 1$.

Neglecting the effects of the vacuum polarization in the infrared limit and the term $\sigma_{\mu\nu}$ in (13) we find for $G(x, y)$

$$G(x, y) = i \int_0^\infty ds \exp[-is(m^2 - i0)] \int DB \exp\{-i \int_0^s d\xi B^2(\xi)\} \times \\ \times [i\hat{\partial}_x + m + g^2 K(x, y|B) \delta(x - y - 2 \int_0^s d\eta B(\eta))] \times \\ \times \exp\left[\frac{i}{2} g^2 \Phi(x, y|B)\right], \quad (14)$$

where

$$K(x, y|B) = \int_x^y d\xi_1 \gamma^\nu D_{\mu\nu} (x - \xi_1) + 2 \int_0^s d\xi_1 \gamma^\mu D_{\mu\nu} [2 \int_{\xi_1}^s d\eta B(\eta)] B^\nu(\xi_1),$$

$$\Phi(x, y|B) = 4 \int_0^s d\xi_1 \int_0^s d\xi_2 B_\mu(\xi_1) D_{\mu\nu} [2 \int_{\xi_1}^s d\eta B(\eta)] B^\nu(\xi_2) +$$

$$+ \int d\xi_1^\mu d\xi_2^\nu D_{\mu\nu}(\xi_1 - \xi_2) + 2 \int_x^y d\xi \int_0^s d\xi B^\nu(\xi) D_{\mu\nu}[\xi - x + 2 \int_\xi^s d\eta B(\eta)] + \\ + 2 \int_0^s d\xi \int_x^y d\xi B^\mu(\xi) D_{\mu\nu}[x - 2 \int_\xi^s d\eta B(\eta) - \xi].$$

By passing to the momentum representation and performing a shift of the functional argument $B_\mu(\eta) = P_\mu + \omega_\mu(v)$, $\eta = sv$ we find from (14) that

$$G(p) = i \int_0^\infty ds \exp[is(p^2 - m^2 + i0)] \int D\omega \exp[-is \int dv \omega^2(v)] \times \\ \times [\hat{p} + m + g^2 \tilde{K}(p|\omega)] \exp[\frac{i}{2} g^2 \Phi(p|\omega)]. \quad (15)$$

In the infrared limit it is possible to neglect the functional argument ω in $\tilde{K}(p|\omega)$ and $\Phi(p|\omega)$. The functions $\tilde{K}(p|0)$ and $\Phi(p|0)$ are equal to zero as it is easy to see. Then from (16) we find that $G(p) \approx (\hat{p} + m)/(m^2 - p^2)$ that completely agrees with (11).

References

1. Mandelstam S. Phys.Rev., 1979, D20, p.3223; Pagels H. Phys.Rev., 1977, D15, p.2991; Baker M., Ball J.S., Zachariasen F. Nucl.Phys., 1981, B186, p.531; Nucl. Phys., 1983, B229, p.445; Arbuzov B.A. Phys.Lett., 1983, 125B, p.497; Alekseev A.I., Arbuzov B.A., Baikov V.N. Sov.Journ.Nucl.Phys., 1981, vol.34, p.1374; Nekrasov M.L., Rochev V.E. Sov.Journ.Nucl. Phys., 1984, vol.39, p.1275; Efimov G.V. JINR, P2-84-716, Dubna, 1984.
2. Bogolubov N.N., Shirkov D.V. The Introduction in the Theory of Quantized Fields. Wiley Interscience, New York, 1980.
3. Skachkov N.B., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu. In: JINR Rapid Comm., No.8-85, Dubna, 1985, p.1-5.
4. Kanaya K. et al. Phys.Lett., 1982, 111B, p.61; Kanaya K. Phys.Rev., 1982, D26, p.1758.
5. Solovtsov I.L. Izv.Vuzov, Fizika, 1985, No.1, p.65; Solovtsov I.L., Solovtsov O.P. Izv.Vuzov, Fizika, 1984, No.12, p.49.
6. Minchev M., Todorov I. Sov.Journ.Particles and Nucl., 1985, vol.16, p.3.

7. Stefanis N.G. Nuovo Cim., 1984, vol.83A, p.205.
8. Logunov A.A. Sov.Journ.ZETF, 1965, vol.29, p.871.
9. Barbashev B.M. Sov.Journ.ZETF, 1965, vol.48, p.607;
Blokhintsev D.I., Barbashev B,M. Sov.Journ. Uspekhi
Fizicheskich Nauk, 1972, vol.106, p.593.

Received on June 6, 1985.

КОРРЕЛЯЦИИ В УГЛОВОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГАММА-КВАНТОВ
ПРИ ЗАХВАТЕ НЕЙТРОНОВ В ОБЛАСТИ p -РЕЗОНАНСА ^{117}Sn

В.П.Алфименков, С.Б.Борзаков, Ю.Д.Мареев,
Л.Б.Пикельнер, А.С.Хрыкин, Э.И.Шарапов

Исследованы угловое распределение и поляризационная правово-левая асимметрия для прямого перехода $/E_y = 9,3 \text{ МэВ}$ в реакции $^{117}\text{Sn}(n, \gamma)$ вблизи p -волнового резонанса с $E_p = 1,33 \text{ эВ}$, нарушающего четность, с целью получения парциальных нейтронных ширин Γ_{nj} с различными значениями полного момента нейтрона $j = 1/2$ или $j = 3/2$. Измерения проводились методом времени пролета на реакторе ИБР-30 с использованием детектора NaI(Tl). Показано, что полученные результаты нельзя описать единым образом в рамках существующих теорий.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Correlations in Gamma-Quanta Angular Distribution at Neutron Capture in ^{117}Sn p-Resonance Region

V.P.Alfimenkov et al.

An angular distribution and the experimental analysing power were investigated for the direct transition ($E_y = 9.3 \text{ MeV}$) in the $^{117}\text{Sn}(n, \gamma)$ reaction near the parity violating p -wave 1.33 eV resonance in order to obtain partial neutron widths with the total neutron momentum $j = 1/2$ or $j = 3/2$. The experiments were performed by the time-of-flight method at the IBR-30 reactor with the NaI(Tl) spectrometer. The results appeared to be inconsistent with any available at present theory.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Изучение свойств p -волновых нейтронных резонансов в области низких энергий значительно сложнее, чем s -волновых, из-за центробежного барьера, существенно снижающего вероятность захвата нейтрона с $\ell > 1$. Между тем, p -волновые резонансы обладают специфическими свойствами, не присущими s -резонансам. К числу таких свойств относится двухкомпонентный характер нейтронных ширин Γ_p^n при возбуждении компаунд-состояний со спинами $J = I \pm 1/2$. В представ-

лении полного момента нейтрона $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ / $j = 1/2$ или $3/2$ / $\Gamma_p^n = \Gamma_{p,\frac{1}{2}}^n + \Gamma_{p,\frac{3}{2}}^n$. Соответственно, для представления спина канала $S = I + \frac{1}{2}$ имеем $\Gamma_p^n = \Gamma_{p,I+\frac{1}{2}}^n + \Gamma_{p,I-\frac{1}{2}}^n$. Экспериментальные данные о компонентах Γ_p^n очень бедны. Для нескольких резонансов ядер фтора и иттрия Γ_p^n определены из угловых распределений рассеянных нейтронов $^{11/2}$, а для хлора и ниобия - из угловых распределений γ -квантов прямых переходов в радиационном захвате резонансных нейтронов $^{3/4}$. В последние годы в связи с обнаружением эффектов неохранения пространственной четности в p -волновых резонансах $^{5/}$ появился дополнительный стимул к изучению структуры Γ_p^n , поскольку для теоретической интерпретации этих эффектов требуется знать величины $x = (\frac{\Gamma_{p,\frac{1}{2}}^n}{\Gamma_p^n})^{1/2}$. Следует отметить, что эксперименты по определению величин x для этих резонансов представляют значительные трудности из-за малости их нейтронных ширин $|\Gamma_p^n| \leq 10^{-8}$ эВ/, что делает практически невозможным наблюдение резонансного рассеяния и усложняет измерения с γ -квантами.

Ниже описываются исследования углового распределения γ -квантов прямого перехода / $E_y = 9,3$ МэВ/ после захвата ядром ^{117}Sb нейтронов с энергиями, близкими к энергии p -волнового резонанса этого ядра с $E_p = 1,33$ эВ. Исследования проводились как с неполяризованными, так и с поляризованными нейтронами и имели целью получение информации о параметрах указанного резонанса, в первую очередь, о величине x .

Следуя $^{6/}$, дифференциальные сечения выхода γ -квантов прямого перехода с учетом s - и p -захвата можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi, E)}{d\Omega} \equiv \sigma(\theta, \phi, E) = a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 f_n \sin \theta \cdot \cos \phi + \\ + a_3 (\cos^2 \theta - \frac{1}{3}). \quad /1/$$

Здесь f_n - поляризация нейтронного пучка, θ - угол между направлениями импульсов нейтрона (\vec{n}_n) и γ -кванта (\vec{n}_y), ϕ - угол между направлением нейтронной поляризации и направлением вектора [\vec{n}_n, \vec{n}_y]. Коэффициенты a_i зависят от энергии нейтрона E и от параметров s - и p -резонансов, в частности, $a_0 = [\sigma_s(E) - \sigma_p(E)]/4\pi$, где $\sigma_s(p)(E)$ - проинтегрированное по телесному углу сечение радиационного $s(p)$ -захвата для исследуемого парциального перехода.

В настоящей работе были продолжены исследования право-левой поляризационной асимметрии /см. $^{7/}$ /,

$$\epsilon_{n.p.}^{n.p.}(E) = \frac{\sigma(90^\circ, 0^\circ, E) - \sigma(90^\circ, 180^\circ, E)}{\sigma(90^\circ, 0^\circ, E) + \sigma(90^\circ, 180^\circ, E)}. \quad /2/$$

Кроме этого, на неполяризованном пучке ($f_n = 0$) исследовалась асимметрия "вперед-назад",

$$\epsilon_{B.H.}^{B.H.}(E, \theta) = \frac{\sigma(\theta, E) - \sigma(180 - \theta, E)}{\sigma(\theta, E) + \sigma(180 - \theta, E)}, \quad /3/$$

а также угловая асимметрия для р-волновой части сечения /1/,

$$\epsilon^a(\theta) = \frac{2[\sigma(90^\circ, E_p) - \sigma_s(E_p)/4\pi]}{\sigma(\theta, E_p) + \sigma(180 - \theta, E_p) - \sigma_s(E_p)/2\pi} = \frac{\sigma_p(90^\circ, E_p)}{\sigma_p(\theta, E_p)}. \quad /4/$$

р-резонанс в ^{117}Sn имеет $J^\pi = 1^-$, а основное состояние ядра ^{118}Sn имеет $J^\pi = 0^+$, т.е. осуществляется E1 γ -переход из резонанса в основное состояние, а при s-захвате с $J^\pi = 1^+$ - M1-переход. С учетом этого, используя результаты работы /6/, экспериментально измеряемые асимметрии /2/-/4/ можно связать с параметрами р-резонансов и сечением s-захвата. Для конкретных условий наших измерений /для определенного значения угла θ и энергий нейтронов, близких к энергии р-резонанса/ такую связь можно с достаточной точностью представить в виде

$$\epsilon_{n.p.}^{n.p.}(E) = + \frac{x + y/\sqrt{2}}{(1 + \frac{xy}{\sqrt{2}} + \frac{y^2}{4})^{1/2}} \frac{2t_{90^\circ}\sqrt{E/E_p}}{4(E - E_p)^2/\Gamma_p^2 + 1 + t_{90^\circ}^2 \frac{E}{E_p}}, \quad /5/$$

$$\epsilon_{B.H.}^{B.H.}(E, 45^\circ) = \frac{-x + y/\sqrt{2}}{(1 - \frac{xy}{2\sqrt{2}} - \frac{y^2}{8})^{1/2}} \frac{2\sqrt{2}t_{45^\circ}\sqrt{E/E_p}(E - E_p)/\Gamma_p}{4(E - E_p)^2/\Gamma_p^2 + 1 + t_{45^\circ}^2 \frac{E}{E_p}}, \quad /6/$$

$$\epsilon^a(45^\circ) = \frac{1 + xy/\sqrt{2} + y^2/4}{1 - \frac{xy}{2\sqrt{2}} - \frac{y^2}{8}}. \quad /7/$$

Здесь Γ_p - полная ширина р-резонанса, $y = (\frac{\Gamma_p^n}{\Gamma_p^0})^{1/2}$, причем $x^2 + y^2 = 1$. Соотношение /5/ записано в предположении $f_n = 1$. Параметр $t_\theta^2 = \frac{\sigma_p(\theta, E_p) \cdot 4\pi}{\sigma_s(E_p)}$ может быть получен из эксперимента.

Легко показать, что в выражениях для исследуемых асимметрий /2/-/4/ сечения можно заменить скоростями счета, полученными из соответствующих времяпролетных спектров. При этом во всех спектрах нужно вычесть фон, внести поправки на захват нейтронов после их рассеяния в образце,

а в выражении для асимметрии /2/ необходимо учесть реальную поляризацию f_n .

Соотношения /5/-/7/ при известных значениях ϵ и параметров резонанса дают уравнения, позволяющие найти величины x и y .

Измерения всех асимметрий проводились методом времени пролета на импульсном реакторе ИБР-30^{/8/}. Длительность вспышки нейтронов составляла 70 мкс, а длина пролетной базы в разных сериях - 35 или 58 м. У-кванты прямого перехода в ¹¹⁸Sn регистрировались кристаллом NaI(Tl) диаметром 200 мм и толщиной 200 мм. Измерялись спектры по времени пролета нейтронов при пороге регистрации у-квантов 8,5 МэВ и одновременно - амплитудные спектры в 8 временных окнах. Фон определялся при перекрывании пучка нейтронов борным фильтром - "черным" для нейтронов с энергиями вблизи исследуемого резонанса, а также при установке в пучок эквивалентного рассеивателя. В качестве образцов использовалось металлическое олово с обогащением ~90% по изотопу ¹¹⁷Sn. Вес образцов составлял от 80 до 400 г, а площадь - 20-60 см². При измерении право-левой асимметрии /2/ резонансные нейтроны поляризовались путем пропускания через поляризованную протонную мишень^{/9/}. Быстрый реверс поляризации осуществлялся соответствующим изменением конфигурации ведущего магнитного поля. При измерении углового распределения выхода у-квантов с неполяризованными нейтронами угол θ составлял 45°, 90° и 135°. Была также получена энергетическая зависимость величины пропускания нейтронов образцом ¹¹⁷Sn. Совместная обработка позволила уточнить приведенные в^{/10/} параметры резонанса с энергией 1,33 эВ: $g I_p^n = 1,66 \pm 0,21 \cdot 10^{-7}$ эВ; $I_p = 0,180 \pm 0,018$ эВ; $\sigma_0 = 1,8 \pm 0,2$.

На рис.1 в относительных единицах представлены энергетические зависимости дифференциальных сечений $\sigma(90^\circ, E)$ и $[\sigma(45^\circ, E) + \sigma(135^\circ, E)]/2$, полученные из экспериментальных спектров для неполяризованных нейтронов. На основании этих данных были найдены величина $\epsilon^a /45^\circ/ = 1,63 \pm 0,14$ и значения $t_{90}^2 = 3,0 \pm 0,3$; $t_{45}^2 = 1,83 \pm 0,18$.

Экспериментальные данные для асимметрии ϵ приведены на рис.2, а на рис.3 показаны результаты измерений $\epsilon^{n.p.}$ с поляризованными нейтронами, включающие результаты наших предварительных исследований^{/7/} и новых измерений в настоящей работе. Сплошные кривые на рис.2 и 3 получены при подгонке по методу наименьших квадратов выражений /6/ и /5/ при независимом варьировании значений x для каждого эффекта. При этом использовались приведенные выше значения параметров резонанса и t_θ^2 . Однако найденные при этом значения x оказались несовместимыми в пределах точности экспериментов. Остановимся подробнее на этом результате. Харак-

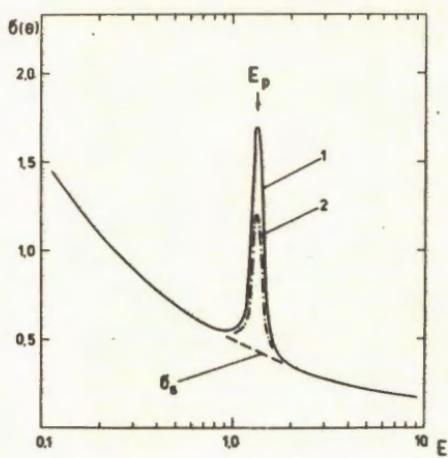


Рис.1. Дифференциальные сечения в относительных единицах реакции $^{117}\text{Sn}(n, \gamma_0)$:
1 - $\sigma(90^\circ, E)$, 2 - $\{\sigma(45^\circ, E) + \sigma(135^\circ, E)\}/2$, E - энергия нейтронов в эВ.

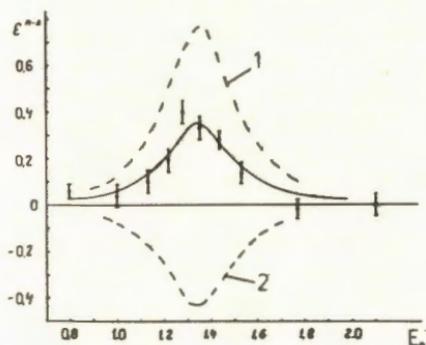


Рис.3. Экспериментальные значения ϵ_{B-N} . Описание кривых см. в тексте.

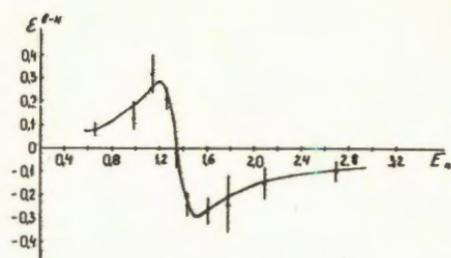


Рис.2. Экспериментальные значения ϵ_{B-N} . Кривая - расчет по формуле /6/ с подгонкой по МНК.

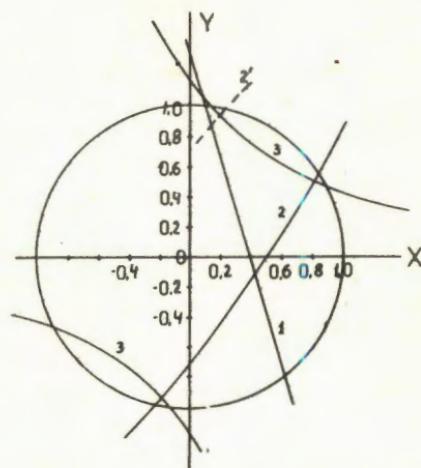


Рис.4. Зависимость $y(x)$ из уравнений /5/-/7/ [кривые 1-3 соответственно]. Пояснения в тексте.

тер уравнений /5/-/7/ таков, что каждое из них /с учетом неопределенности знака t_θ / дает четыре набора решений (x, y) . Уравнения /6/ и /7/, описывающие измерения с неполяризованными нейтронами, эквивалентны, однако их целесообразно использовать независимо, поскольку величины ϵ^a и ϵ^{B-N} извлекаются из различных экспериментальных результа-

тов, что позволяет избежать возможных систематических ошибок. На рис.4 представлены кривые $y(x)$, полученные из уравнений /5/-/7/, и окружность $x^2 + y^2 = 1$, иллюстрирующие совместное решение уравнений /5/-/7/ при $t_\theta > 0$. Для отрицательных t_θ кривые 1 и 2 получаются поворотом относительно точки 0 на 180° . Неопределенность в знаке t_θ связана с тем, что парциальное сечение радиационного захвата нейтронов пропорционально произведению нейтронной и парциальной радиационной ширин. Корень из этих ширин, в свою очередь, пропорционален соответствующим амплитудам, знаки которых неизвестны, но должны быть одинаковыми в выражениях /5/ и /6/. Из рис.4 и расчетов по МНК видно, что нет точки, лежащей на окружности, в которой пересекались бы все три кривые. Основное противоречие отражено в кривых 1 и 2, тогда как каждая из них дает совместимое в пределах ошибки эксперимента пересечение с кривой 3 на окружности. Другой иллюстрацией такой несовместимости являются пунктирные кривые на рис.3, описывающие $\epsilon_{n,p}^{B-N}$ при значениях x , найденных при подгонке $\epsilon_{n,p}^{B-N}$ /рис.2/. Кривая 1, соответствующая набору $x = 0,84$, $y = 0,54$, лежит значительно выше экспериментальных точек, а кривая 2/ $x = -0,24$; $y = -0,97$ / подходит для количественного описания $\epsilon_{n,p}^{B-N}$, но дает другой знак эффекта. Полученные противоречивые результаты заставили провести тщательную проверку экспериментальных данных. Были сделаны дополнительные измерения с поляризованными и неполяризованными нейтронами в измененных геометрических условиях, тем не менее ситуация не прояснилась. Теоретические выражения для описания дифференциальных сечений, приведенные в работе /8/, согласуются с результатами ряда других работ, например, /11,12/, где рассмотрены аналогичные явления. Таким образом, маловероятно, что причиной наблюдаемого противоречия является ошибка при выводе довольно громоздких соотношений. Заметим, что изменение общего знака одного из выражений /5/ или /6/ приводит к согласующимся с экспериментом результатам. Это видно из рис.4, где пунктирная кривая 2 соответствует выражению /6/, но с измененным знаком. В этом случае получается удовлетворительное пересечение всех кривых на окружности в точке с $x \approx 0,2$.

Необходимо отметить, что в данной работе впервые наблюдалась для одного и того же p -резонанса различные четные корреляции при испускании u -квантов радиационного захвата нейтронов, которые позволили проследить за совместностью результатов. Обнаруженное противоречие между предсказанием теории и экспериментальными результатами требует тщательного анализа применимости данного описания явления и дальнейшего экспериментального исследования аналогичных эффектов для других ядер и резонансов.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить благодарность И.М.Франку за постоянную поддержку и интерес к работе, а также В.И.Фурману, В.Н.Ефимову, И.А.Ломаченкову за полезные дискуссии.

Литература

1. Николенко В.Г., Самосват Г.С. В кн.: Нейтронная физика. Материалы 5-й Всесоюзной конф. по нейтронной физике. Киев, 15-19 сент. 1980 г. ЦНИИАТОМИНФОРМ, М., 1980, ч.2, с.178.
2. Nikolenko V.G., Samosvat G.S. Neutron Induced Reac. Proc. of Eur.Topical Conf. June 21-25, 1982, Smolenice, p.373.
3. McCullagh C.M. et al. Phys.Rev., 1979, vol.C19, p.539.
4. Chrien R.E. et al. Phys.Rev., 1973, vol.C8, p.336.
5. Alfimenkov V.P. et al. Nucl.Phys., 1983, vol.398, p.93.
6. Sushkov O.P., Flambaum V.V. Nucl.Phys., 1985, A435, p.352.
7. Алфименков В.П. и др. Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, с.346.
8. Франк И.М. ЭЧАЯ, 1972, т.2, вып.4, с.807.
9. Алфименков В.П. и др. ЭЧАЯ, 1980, т.11, вып.2, с.411.
10. Алфименков В.П. и др. Письма в ЖЭТФ, 1981, т.34, с.308.
11. Huby R. Proc.Phys.Soc.(London), 1958, vol.72, p.97.
12. Laszewski R.M., Holt R.J. At.Data and Nucl.Data Sheets, 1977, vol.19, p.305; 1979, vol.23, p.97.

Рукопись поступила 25 июня 1985 года.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДВУХМОДОВАЯ МОДЕЛЬ ДИККЕ

З.И. Алискендеров, А.А. Молдояров, * А.С. Шумовский

Рассмотрена модель типа модели Дикке с квадратичным по операторам поля взаимодействием. Физической реализацией такой системы могут служить дипольно-запрещенные переходы, используемые в процессах нелинейного преобразования ИК-излучения в видимый диапазон, либо система, описывающая взаимодействие материи с электромагнитным полем и фононами. Для исследования подсистемы поля использован метод глауберовских когерентных состояний. Методом проекторов на состояния с конечным числом фотонов вычислена статистическая сумма. Построен аппроксимирующий гамильтониан. Показано отсутствие равновесного фазового перехода в сверхизлучательное состояние, при этом населенность нижнего уровня всегда больше, чем верхнего.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Nonlinear Two-Mode Dicke Model

E.I.Alyskenderov, A.A.Moldoyarov, A.S.Shumovsky

A Dicke type model with the quadratic in field operators interaction is considered. A physical realization of such a system is dipole-forbidden transitions, used in the processes of nonlinear transformation of infrared radiation into a visible range, or the system, describing the interaction of a matter with electromagnetic field and the phonons. The method of Glauber coherent states is applied to study the field subsystem. The partition function is calculated by the method of projectors onto the states with finite number of photons. The approximating Hamiltonian is constructed. It is shown there is no equilibrium phase transition into a superradiance state, the population of the lower level being always larger than of the upper one.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

* Институт математики АН КиргССР

Рассмотрим двухфотонные процессы в системе N двухуровневых атомов. Физической реализацией такой системы могут служить дипольно-запрещенные переходы, используемые, например, в процессах преобразования ИК-излучения в видимый диапазон^{/1/}. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = H_F + H_M + H_{M-F}; \quad H_F = \omega_1 a_1^+ a_1^- + \omega_2 a_2^+ a_2^-,$$

$$H_M = N\epsilon\sigma^z; \quad H_{M-F} = \lambda(\sigma^+ a_1^- a_2^+ + \sigma^- a_1^+ a_2^+).$$

/1/

Здесь a_i^\pm - операторы электромагнитного поля, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[a_i^+, a_j^+] = \delta_{ij}; \quad [a_i^-, a_j^-] = 0; \quad i, j = 1, 2.$$

Операторы материи σ^z , σ^\pm аддитивно выражаются через матрицы Паули, отнесенные к узлу f:

$$\sigma^z = \frac{1}{2N} \sum_{f=1}^N \sigma_f^z; \quad \sigma^\pm = \frac{1}{2N} \sum_{f=1}^N (\sigma_f^x \pm i\sigma_f^y).$$

Отметим, что одно из полей в /1/ можно интерпретировать как фононное поле^{/2/}. Следует упомянуть, что равновесные свойства сходного обобщения модели Дикке, отличающегося наличием еще и линейного по бозонам взаимодействия, рассматривались Джилмором^{/3/}. При этом было показано, что при достаточно больших значениях константы связи в системе есть фазовый переход в сверхизлучательное состояние.

Для исследования термодинамики системы с гамильтонианом /1/ удобным представляется метод глауберовских когерентных состояний^{/4,5/}. На первом этапе получим сходящиеся в термодинамическом пределе верхнюю и нижнюю границы для статистической суммы по гамильтониану /1/. С этой целью введем в полном пространстве состояний $\mathcal{X} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{X}_s / \mathcal{F}_i$ - пространство, на котором определены операторы a_i^\pm , и \mathcal{X}_s - пространство состояний операторов спина $\sigma_j/2$ ($j = x, y, z$) размерности 2^N / проекторы $P_1(n)$ и $P_2(m)$ на состояния с не менее чем n фотонами и не менее чем m фононами. Из этого определения следует, что $P_i(k) \rightarrow 1_i$ в сильном смысле /глава 8 книги^{/6/}. Кроме того, учтем, что для гамильтониана /1/ выполняются следующие условия: 1/ $D(H)$ плотно в \mathcal{X} ; 2/ $H = H^\dagger$, $D(H) = D(H^\dagger)$; 3/ $\forall \psi \in D(H)$, $\exists a: (\psi, H\psi) > a ||\psi||^2$; 4/ $\sigma_{ess} = \emptyset$, т.е. спектр дискретен; 5/ H принадлежит Тт-классу. Доказательство этих свойств проводится в рамках техники, изложенной, например, в^{/8/}. Положим далее

$$H(n, m) = P_1(n) P_2(m) H P_2(m) P_1(n)$$

и рассмотрим

$$Z(n, m) = \operatorname{Tr}_{\mathcal{K}} P_1(n) P_2(m) \exp(-\beta H(n, m)).$$

/2/

Очевидно, что в /2/ берется след оператора в конечно-мерном пространстве. Заметим также, что общей областью определения для оператора H в /1/ и операторов $H(n, m)$ является область $\mathcal{K} = \bigcup_{(n, m)} P_1(n) P_2(m) \mathcal{K}$, и для любого состояния $\psi \in \mathcal{K}_0$ можно удовлетворить равенству

$$P_1(n) P_2(m) H P_2(m) P_1(n) \psi = H \psi,$$

выбрав достаточно большие значения n и m . В силу этого равенства и свойств 1/ и 2/ имеем $H(n, m) \rightarrow H$ в смысле сильной резольвентной сходимости /глава 7 книги⁶/. Из последнего следует, что для проекторнозначных мер имеет место предел $S = \lim_{n, m \rightarrow \infty} P_{(a, b)}(n, m) = P_{(a, b)}$ $(a, b) \notin \sigma(H)$

/поскольку в силу спектральной теоремы $P_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\lambda)} R_\mu d\mu$,

где $R_\mu = (H - \mu I)^{-1}$, а $\Gamma(\lambda)$ - известный стандартный контур/.

Пусть $\{\psi_k, \mathcal{E}_k\}_{k=1}^\infty$ - системы собственных векторов и собственных значений для гамильтониана H . Для $H(n, m)$ соответствующую систему обозначим $\{\psi_\ell(n, m), \mathcal{E}_\ell(n, m)\}_{\ell=1}^{n \cdot m \cdot 2^N}$. Мы можем использовать $\psi_\ell(n, m)$ в качестве пробных функций для H и методом Рэлея - Ритца /глава 13 книги⁷/ получить $\mathcal{E}_\ell(n, m) > \mathcal{E}_\ell$ для $1 \leq \ell \leq n \cdot m \cdot 2^N$. Последнее вместе с сильной сходимостью проекторнозначных мер достаточно для существования пределов $\psi_\ell(n, m) \rightarrow \psi_\ell$, $\mathcal{E}_\ell(n, m) \rightarrow \mathcal{E}_\ell$ поточечно по индексу ℓ в силу спектральной теоремы /глава 8 книги⁸/. Из формул Рэлея - Ритца следует также, что $\exp(-\beta \mathcal{E}_j(n, m)) < \exp(-\beta \mathcal{E}_j)$ для $j : 1 \leq j \leq n \cdot m \cdot 2^N$. Из теоремы о мажорированной сходимости получаем

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} Z(n, m) = Z.$$

/3/

В каждом из пространств \mathcal{F}_i введем усеченные глауберовские состояния

$$|a_i, n\rangle = P_i(n) |a_i\rangle, \quad a_i |a_i\rangle = a_i |a_i\rangle.$$

/4/

Тогда справедливы соотношения

$$\langle a_i, n | \beta_i, n \rangle = K_i(a_i, \beta_i, n) =$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2)\right] \times \sum_{n'=1}^n (\alpha_i^* \beta_i)^{n'}/n'!, \quad /5/$$

$$\frac{\text{Tr}_{\mathcal{F}_i}(n)|\alpha_i\rangle\langle\beta_i|P_i(n)}{\{\mathcal{F}_i\}} = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{F}_i}|\alpha_i, n\rangle\langle\beta_i, n|}{\{\mathcal{F}_i\}} = K_i(\alpha_i, \beta_i, n), \quad /6/$$

$$\frac{\text{Tr}_{\mathcal{F}_i}(n)AP_i(n)}{\{\mathcal{F}_i\}} = \frac{1}{\pi} \int d\alpha_i \langle \alpha_i, n | A | \alpha_i, n \rangle, \quad /7/$$

где A - произвольный оператор в \mathcal{F}_i ,

$$\langle \alpha_i, n | A_i | \alpha_i, n \rangle = \alpha_i K_i(\alpha_i, \alpha_i, n-1), \quad /8/$$

$$\langle \alpha_i, n | A_i^\dagger A_i | n, \alpha_i \rangle = |\alpha_i|^2 K_i(\alpha_i, \alpha_i, n-1), \quad /9/$$

$$P_i(n) = \frac{1}{\pi} \int d\alpha_i |\alpha_i, n \rangle \langle n, \alpha_i|, \quad /10/$$

$$P_i(n) A_i^\dagger A_i P_i(n) = \frac{1}{\pi} \int d\alpha_i (|\alpha_i|^2 - 1) |\alpha_i, n \rangle \langle n, \alpha_i|, \quad /11/$$

$$\frac{1}{\pi} \int d\alpha_i K_i(\beta_i, \alpha_i, n) K_i(\alpha_i, \gamma_i, n) = K_i(\beta_i, \gamma_i, n). \quad /12/$$

Предельным переходом $n \rightarrow \infty$ можно получить формулы для обычных глауберовских состояний. Поскольку мы уже доказали, что $Z(n, m) \rightarrow Z$, то для получения нижней границы оценки статистической суммы воспользуемся формулой /7/, подставляя $A = \exp(-\beta H)$. Из неравенства Боголюбова - Пайерлса

$$\langle \psi | e^A | \psi \rangle \geq \langle \psi | \psi \rangle \exp[\langle \psi | A | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle].$$

получаем оценку снизу для усеченной статистической суммы

$$\begin{aligned} Z(n, m) &> \text{Tr}_{\{\mathcal{H}_s\}} \frac{1}{\pi} \int d\alpha_1 d\alpha_2 K_1(\alpha_1, \alpha_1, n) K_2(\alpha_2, \alpha_2, m) \times \\ &\times \exp[-\beta \{|\omega_1| |\alpha_1|^2 \frac{K_1(\alpha_1, \alpha_1, n-1)}{K_1(\alpha_1, \alpha_1, n)} + |\omega_2| |\alpha_2|^2 \frac{K_2(\alpha_2, \alpha_2, m-1)}{K_2(\alpha_2, \alpha_2, m)}\}] + \\ &+ \frac{\lambda}{2N} \sum_{f=1}^N (\sigma_f^- \alpha_1^* \alpha_2^* + \sigma_f^+ \alpha_1 \alpha_2) \cdot \frac{K_1(\alpha_1, \alpha_1, n-1)}{K_2(\alpha_2, \alpha_2, m)} \times \\ &\times \frac{K_2(\alpha_2, \alpha_2, m-1)}{K_1(\alpha_1, \alpha_1, n)} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{f=1}^N \sigma_f^z \}. \end{aligned} \quad /13/$$

Взяв след в пространстве \mathcal{H}_s и переходя к пределу $n, m \rightarrow \infty$, имеем $\tilde{Z} > Z$, где

$$\begin{aligned}\tilde{Z} = & \frac{1}{\pi^2} \int d\alpha_1 d\alpha_2 \exp[-\beta(\omega_1 |\alpha_1|^2 + \\ & + \omega_2 |\alpha_2|^2)] \cdot 2^N \cdot [\operatorname{ch}(\beta(\epsilon^2 + \frac{\lambda^2}{N^2} |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2)^{1/2})].\end{aligned}\quad /14/$$

Отметим, что оценка /14/ справедлива в силу теоремы о мажорированной сходимости.

Для получения оценки сверху введем следующее выражение

$$Z_k(n, m) = \operatorname{Tr} P_1(n) P_2(m) \left(1 - \beta \frac{H(n, m)}{k}\right)^k \quad /15/$$

и, следуя Либу^{/9/}, воспользуемся одним из неравенств Голдена^{/10/},

$$|\operatorname{Tr}(AB)^{2m}| \leq \operatorname{Tr}(A^2 B^2)^m \leq \operatorname{Tr} A^{2m} B^{2m}, \quad /16/$$

сформулированным, правда, для ограниченных операторов.

Чтобы обойти вопрос о сходимости в /15/, введем везде, где есть операторы поля a_i^\dagger , обрезающий фактор $e^{-y|\alpha_i|^2}$, $y > 0$, как это было сделано в ^{/11/} для стандартной модели Дикке. Полученный таким образом гамильтониан обозначим $H_k^Y(n, m)$, а выражение в /15/ - как $Z_k^Y(n, m)$. Применяя /16/, имеем

$$\begin{aligned}Z_k^Y(n, m) &< \int \frac{da_1}{\pi} \frac{da_2}{\pi} K_1(\alpha_1, \alpha_2, n) K_2(\alpha_2, \alpha_2, m) \times \\ &\times \operatorname{Tr} \left(1 - \beta \frac{H_k^Y(n, m)}{k}\right)^k.\end{aligned}\quad /17/$$

Снова пользуясь теоремой о мажорированной сходимости, вычисляя след в \mathcal{H}_s и интеграл в правой части /что легко в силу его гауссности/, а также полагая $y = 0$ /что возможно в силу равномерности оценки /17/ по y /, получаем

$$\tilde{Z} \leq Z \leq \tilde{Z} \exp(\beta(\omega_1 + \omega_2)), \quad /18/$$

где \tilde{Z} дается выражением /14/. Очевидно, что в термодинамическом пределе верхняя и нижняя границы в /18/ сходятся. Свободная энергия рассматриваемой системы, таким образом, равна

$$f = -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \tilde{Z}}{N}. \quad /19/$$

Легко видеть, что заменами $x_1 = \frac{|a_1|}{N}$ можно преобразовать статистическую сумму Z в следующее выражение:

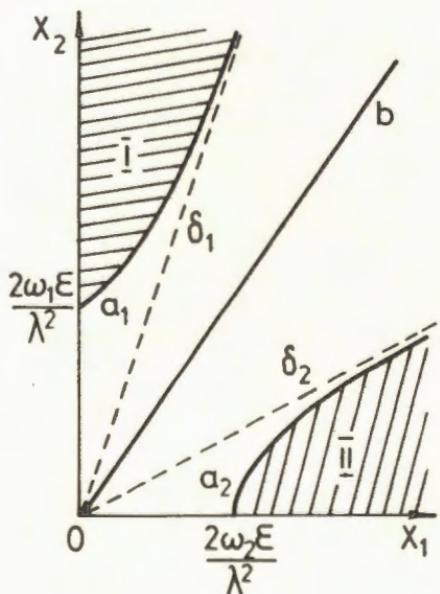
$$Z = N^2 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \exp[N\{-\beta(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) + \ln(2 \operatorname{ch}(\beta \epsilon \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\epsilon^2} x_1 x_2}))\}] . \quad /20/$$

Интеграл /20/ вычисляется стандартно методом Лапласа. Уравнение для точек экстремума функции

$$\Phi(x_1, x_2) = -\beta(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) + \ln(2 \operatorname{ch}(\beta \epsilon \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\epsilon^2} x_1 x_2}))$$

выглядит следующим образом:

$$\operatorname{th}(\beta \epsilon \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\epsilon^2} x_1 x_2}) = \frac{2 \epsilon \omega_1}{\lambda^2 x_2} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\epsilon^2} x_1 x_2} = \frac{2 \epsilon \omega_2}{\lambda^2 x_1} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\epsilon^2} x_1 x_2} . \quad /21/$$



Области экстремумов функции $\Phi(\cdot)$:

I — область существования решений уравнения $\frac{\partial \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0$,

II — то же для уравнения $\frac{\partial \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$; a_1 — кривая

$$x_1 = \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} \frac{1}{x_2} \left(\left(\frac{\lambda^2}{2\omega_1^2} \right)^2 x_2^2 - 1 \right);$$

δ_1 — прямая $x_2 = \frac{4\omega_1^2}{\lambda^2} x_1$; a_2 — кривая

$$x_2 = \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} \frac{1}{x_1} \left(\left(\frac{\lambda^2}{2\omega_2^2} \right)^2 x_1^2 - 1 \right);$$

δ_2 — прямая $x_2 = \frac{\lambda^2}{4\omega_2^2} x_1$;

b — прямая $\omega_1 x_1 = \omega_2 x_2$.

Они попросту несовместны при $\lambda \leq 2\sqrt{\omega_1 \omega_2}$ /см. рисунок/, поскольку области, где они имеют решения, не пересекаются. В случае $\lambda > 2\sqrt{\omega_1 \omega_2}$ прямым вычислением убеждаемся, что квадратичная форма из вторых производных от $\Phi(x_1, x_2)$ на критической прямой $\omega_1 x_1 = \omega_2 x_2$ положительно определена.

Следовательно, максимум достигается на границе области интегрирования. Рассмотрение показывает, что точкой максимума является $x_1 = x_2 = 0$. Из /19/ получаем плотность свободной энергии

$$f = -\frac{1}{\beta} \ln(2 \cosh(\beta\epsilon)). \quad /22/$$

Макроскопического заполнения бозонных мод нет, так как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \frac{a_1^+ a_1^-}{N} \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\int dx_1 \int dx_2 x_1^- \exp[N\Phi(x_1, x_2)]}{\int dx_1 \int dx_2 \exp[N\Phi(x_1, x_2)]} = 0. \quad /23/$$

Построим аппроксимирующий гамильтониан. Справедлива следующая

Теорема. Для гамильтониана /1/ аппроксимирующим является гамильтониан $H_a = \frac{\epsilon}{2} \sum_{f=1}^N \sigma_f^z$ в том смысле, что $\lim_{N \rightarrow \infty} (f[H] - f[H_a]) = 0$.

Доказательство. Обозначим через $H(\eta)$ оператор, полученный следующей заменой в /1/:

$$\frac{1}{2N} \sum_{f=1}^N \sigma_f^z \rightarrow \eta^#.$$

Пусть

$$H_\Delta = H - \tilde{H}(\eta) = \lambda \left[\left(\frac{1}{2N} \sum_{f=1}^N \sigma_f^- - \eta \right) a_1^+ a_2^+ + \left(\frac{1}{2N} \sum_{f=1}^N \sigma_f^+ - \eta^* \right) a_1^- a_2^- \right]. \quad /24/$$

Согласно теореме Боголюбова^{/8/}, имеет место неравенство

$$-\frac{1}{N} \langle H_\Delta \rangle_{\tilde{H}(\eta)} \leq f[H] - f[\tilde{H}(\eta)] \leq -\frac{1}{N} \langle H_\Delta \rangle_H. \quad /25/$$

Разбивая $\tilde{H}(\eta)$ на два слагаемых,

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\eta) &= H_a + \tilde{H}_F = H_a + \omega_1^+ a_1^- a_1^+ + \omega_2^+ a_2^- a_2^+ + \\ &+ \lambda (\eta^* a_1^- a_2^+ + \eta a_1^+ a_2^+), \end{aligned} \quad /26/$$

для среднего в левой части /25/ получаем

$$\begin{aligned} \langle H_\Delta \rangle_{\tilde{H}(\eta)} &= \lambda \left\langle \frac{1}{2N} \sum_{f=1}^N \sigma_f^- - \eta \right\rangle_{H_a} \cdot \left\langle a_1^+ a_2^+ \right\rangle_{\tilde{H}_F} + \text{k.c.} = \\ &= -\lambda \eta \left\langle a_1^+ a_2^+ \right\rangle_{\tilde{H}_F} + \text{k.c.} \end{aligned}$$

Перейдем от операторов $a_1^{\#}$ к новым бозонным операторам A_j следующим каноническим преобразованием:

$$A_1 = a_1 \operatorname{ch} \rho + a_2^+ \operatorname{sh} \rho \cdot e^{-i\phi}; \quad A_2 = a_1^+ \operatorname{sh} \rho \cdot e^{-i\phi} + a_2 \operatorname{ch} \rho, \quad /27/$$

где

$$\operatorname{th} \rho = \frac{1}{2\lambda|\eta|} (\omega_1 + \omega_2 - \sqrt{(\omega_1 + \omega_2)^2 - 4\lambda^2|\eta|^2}) \equiv T,$$

$$a \phi = \operatorname{Arg} \eta.$$

Гамильтониан \tilde{H}_F диагонализуется:

$$\tilde{H}_F = E_0 + E_1 A_1 A_1^+ + E_2 A_2 A_2^+, \quad /28/$$

где

$$E_0 = \frac{T^2}{T^2 - 1} \sqrt{(\omega_1 + \omega_2)^2 - 4\lambda^2|\eta|^2},$$

$$E_1 = \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2 + \sqrt{(\omega_1 + \omega_2)^2 - 4\lambda^2|\eta|^2}),$$

$$E_2 = \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1 + \sqrt{(\omega_1 + \omega_2)^2 - 4\lambda^2|\eta|^2}).$$

Теперь видно, что $\langle a_1^+ a_2^+ \rangle_{\tilde{H}_F}$ не зависит от N , и, даже не вычисляя это среднее, получаем, что левая часть в /25/ исчезает при $N \rightarrow \infty$, когда $|\eta|$ ограничено:

$$|\eta| < K, \quad /29/$$

где K – некоторое положительное число.

Правую часть в /25/ оценим следующим очевидным образом:

$$-\langle H_{\Delta} \rangle_H \leq \lambda \left(\frac{1}{2N} \sum_{f=1}^N \sigma_f^- - \eta \right) \left(\frac{1}{2N} \sum_{f=1}^N \sigma_f^+ - \eta^* \right) + \langle a_1^+ a_1 a_2^+ a_2 \rangle_H. \quad /30/$$

Первое слагаемое в этом среднем ограничено в силу /29/ и ограниченности операторов $\frac{1}{2N} \sum_{f=1}^N \sigma_f^{\pm}$. Среднее от операторов поля представим в виде следующего интеграла, воспользовавшись методом глауберовских когерентных состояний,

$$\frac{1}{N} \langle a_1^+ a_1 a_2^+ a_2 \rangle_H = N \int_0^{\infty} dx_1 \int_0^{\infty} dx_2 x_1 x_2 \exp[N\Phi(x_1, x_2)] / \tilde{Z}. \quad /31/$$

Поскольку максимум функции $\Phi(x_1, x_2)$ достигается, когда $x_1 = x_2 = 0$, т.е. на границе области интегрирования, то

при оценке интеграла методом Лапласа главный член асимптотики пропорционален $\frac{1}{N} x_1 x_2$, что при $N \rightarrow \infty$ дает нуль в правой части /25/.

Таким образом, имеем $\lim_{N \rightarrow \infty} \{f[H] - f[\tilde{H}(\eta)]\} = 0$.

До сих пор $|\eta|$ предполагался просто ограниченным. Ничто не мешает положить его равным нулю. Тогда

$$\tilde{H}(\eta \equiv 0) = \omega_1 a_1^+ a_1^- + \omega_2 a_2^+ a_2^- + H_a.$$

Следовательно, $\lim_{N \rightarrow \infty} \{f[H] - f[H_a]\} = 0$, что и требовалось доказать.

Нами было строго показано, что система двухуровневых излучателей, взаимодействующих с электромагнитным полем и когерентной фононной модой, согласно /1/ не может претерпевать равновесный фазовый переход в сверхизлучательное состояние. Заселенность верхних уровней в системе всегда меньше, чем заселенность нижних, и становится равной ей только при бесконечной температуре /подразумевается, что $\epsilon > 0$ /, так как

$$\xi = \text{Tr} \left[\frac{1}{2N} \sum_{f=1}^N \sigma_f^z \exp(-\beta H) \right] / Z = -\frac{1}{2} \text{th}(\beta \epsilon),$$

и, следовательно, $0 \geq \xi \geq -1/2$. Если $\epsilon < 0$, то картина обратная.

Надо также заметить, что, если рассматривается процесс типа комбинационного рассеяния в данной системе, т.е. когда взаимодействие имеет вид

$$H_{M-F} = \frac{\lambda}{2N} \sum_{f=1}^N (\sigma_f^+ a_1^+ a_2^- + \sigma_f^- a_1^- a_2^+),$$

то все результаты данной работы остаются справедливыми.

Литература

1. Ахметели А.М., Мелешко А.Н., Шумовский А.С. ДАН СССР, 1981, т.256, с.1094.
2. Thompson B.V. J.Phys.A, 1975, vol.8, p.126.
3. Gilmore R. Physica A, 1977, 86, No.1, p.137-146.
4. Glauber R. Phys.Rev., 1963, 131, No.6, p.2766-2788.
5. Arechi F.T. et al. Phys.Rev.A, 1972, 6, No.6, p.2211-2237.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной мат.физики. Функциональный анализ. "Мир", М., 1977, т.1.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной мат.физики. Анализ операторов. "Мир", М., 1982, т.4.

8. Боголюбов Н.Н. /мл./ и др. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике. Изд-во БАН, София, 1981.
9. Lieb E. Comm.Math.Phys., 1973, 31, No.4, p.327-340.
10. Ruskai M.B. Comm.Math.Phys., 1972, 26, No.4, p.280-289.
11. Hepp K., Lieb E. Phys.Rev.A, 1973, 8, No.5, p.2517-2525.

Рукопись поступила 30 мая 1985 года.

"СПЕКТР" ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ
ДЛЯ МАССИВНОЙ МОДЕЛИ КОМПЛЕКСНОГО ПОЛЯ
ТИПА БОРНА - ИНФЕЛЬДА

В.Е.Гришин, В.К.Федянин

В модели типа Борна - Инфельда с $U(1)$ -абелевой глобальной калибровочной группой, используя ряд подстановок, позволивших найти интегрирующий множитель, приводим к задаче поиска частных решений на алгебраической поверхности $G^2 - P_4(\phi, \omega^2 | E) = 0$ рода $g = 1$ /топология тора/. "Спектр" этих решений, полученный методом фазовой плоскости /МФП/, анализируется в зависимости от параметров $D(\omega^2, E)$ исходного интеграла.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

"Spectrum" of Special Solutions
for a Field Massive Model
of Born-Infeld Type Complex

V.E.Grishin, V.K.Fedyanin

Special solutions $U(1)$ of the Born-Infeld model with Abelian gauge global group have been found using some substitutions and integrating factor. The problem is reduced to finding its special solutions on the algebraic surface $G^2 - P_4(\phi, \omega^2 | E) = 0$ of the type $g = 1$ (topology of torus). The dependence of these solutions on $D(\omega^2, E)$ parameters of the initial integral is analysed by the method of phase plane (MPP).

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Введение

В существующих полевых теориях появление расходимостей тесно связано с поведением некоторых типов решений соответствующего уравнения, которые исходят из особой пространственно-временной точки, подобно функциям Шингера. Так, в частности, в полевых уравнениях теории сильных взаимодействий имеется наличие сингулярностей на световом конусе. Данным сингулярностям должна отвечать вполне определенная специфика решений вблизи светового конуса. Еще на заре появления теории элементарных частиц Борн и Инфельд предложили нелинейную модификацию уравнений Максвелла.

В последние годы интерес к нелинейным дифференциальным уравнениям резко возрос. К описанию свойств частиц в теории конденсированного состояния классической и квантовой теории поля привлекаются решения как полностью интегрируемых уравнений /sine-Gordon, НУШ, КдВ и др./, так и других нелинейных уравнений /например, ϕ^4 / . Отметим, что нелинейные уравнения обладают, как правило, богатым спектром решений, которые можно с полным основанием привлекать для описания физических свойств частицеподобных объектов /в уравнении sine-Gordon - это "фононы", кинки и антикинки, бионы/. Нам представляется, что актуальным является развитие общих методов исследования "спектра" решений нелинейных уравнений.

В данной работе будут изложены основные результаты исследования спектра решений модифицированной модели класса Борна - Инфельда для комплексного скалярного поля, обладающей $U(1)$ -глобальной калибровочной группой. Лагранжиан этой системы имеет вид

$$L[H, G] = \sqrt{1 + H^2 - m^2 \cdot G^2}, \quad /1/$$

где $H^2(\phi_\mu) = g_{\mu\nu} \cdot \phi_\mu \cdot \phi_\nu^*$, $G^2(\phi) = \phi \cdot \phi^*$ - скаляры. Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ здесь определен в произвольном $n+1$ -мерном псевдоевклидовом пространстве: $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $\text{Sp} g_{\mu\nu} = -(n-1)$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, n$. При наличии массы $m^2 \neq 0$ имеем для полной дивергенции соотношение

$$\nabla_\mu \cdot F_\mu = m^2 \cdot j, \quad F_\mu = g_{\mu\nu} \frac{\phi_\nu}{\sqrt{1 + H^2 - m^2 G^2}}, \quad /2/$$

$$j = \frac{\phi}{\sqrt{1 + H^2 - m^2 G^2}}.$$

Уравнение движения /2/ представляется в развернутом виде:

$$2 \cdot \phi_{\mu\mu} \cdot (1 + H^2 - m^2 G^2) - \phi_\mu \cdot \nabla_\mu \cdot f + m^2 (\phi^* \cdot \phi_\mu^2 + \phi \cdot |\phi_\mu|^2) +$$

$$+ 2m^2 \cdot \phi \cdot (1 + H^2 - m^2 G^2) = 0. \quad /3/$$

В /3/ введены обозначения $\nabla_\mu \equiv \partial_\mu$, $\partial_\mu \phi \equiv \phi_\mu$, $f = \phi_\alpha \cdot g_{\alpha\beta} \cdot \phi_\beta^*$ - скаляр. При $\phi = \phi^*/\mu$, $\nu = 0, 1/$ мы приходим к уравнению Борна - Инфельда для действительного скалярного поля:

$$\phi_{tt} (1 - \phi_x^2 - m^2 \cdot \phi^2) - \phi_{xx} (1 + \phi_t^2 - m^2 \phi^2) +$$

$$+ 2 \cdot \phi_{xt} \cdot \phi_x \cdot \phi_t + 2m^2 \phi \cdot (\phi_t^2 - \phi_x^2) + m^2 \cdot \phi (1 - m^2 \cdot \phi^2) = 0. \quad /4/$$

Случай $m^2 = 0$ - безмассовое уравнение Борна - Инфельда, был подробно исследован в работах ^{/3-8/}. В ^{/4,6/} была доказана полная интегрируемость безмассового варианта уравнения ^{/4/}. Кроме того, оказывается, что уравнение ^{/4/} может менять свой тип /нарушение гиперболичности/ в некоторой пространственно-временной точке. В этом случае возможна прямая связь появления на характеристиках ударных волн в точках, где уравнение переходит в уравнение эллиптического типа.

В работе ^{/8/} была установлена идентичность безмассовой версии ^{/4/} и уравнения экстремальных поверхностей $Z = \phi(x, t)$ /мыльные пленки/, в псевдоевклидовом пространстве с метрикой

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu \cdot dx_\nu = dt^2 - dx^2 - dz^2.$$

Кроме этого, в ^{/7,8/} была доказана эквивалентность уравнений Зинштейна ($S_a = 0$) нелинейным уравнениям электродинамики Борна - Инфельда. Отметим в заключение этого раздела, что модель типа Борна - Инфельда с $m^2 \neq 0$ была мало изучена ввиду отсутствия достаточно эффективных методов исследования для подобных существенно-нелинейных систем.

1. Анализ уравнения для массивной модели Борна - Инфельда с $U(1)$ -симметрией

В данной заметке, излагая результат исследования "спектра" частных решений ^{/3,4/}, мы, как и в ^{/9,10/}, воспользуемся методом фазовой плоскости. И в данном случае весьма удобна инвариантная подстановка: $\phi(\theta, \psi) = \phi(\theta) \cdot e^{i\psi}$, где

$$\theta = k_\mu \cdot x_\mu, \quad \psi = p_\mu \cdot x_\mu \quad /5/$$

- обобщенная координата и фаза плоской бегущей волны в $n+1$ -мерном пространстве.

Будем предполагать, что векторы k_μ , p_μ находятся на взаимно ортогональных гиперболоидах с условием нормировки $k_\mu^2 = -a^2 < 0$, $p_\mu^2 = \beta^2 > 0$, $k_\mu \cdot p_\mu = 0$. Если использовать подстановку ^{/5/}, то уравнение движения ^{/3/} принимает вид

$$\phi_{\theta\theta} \cdot (1 - \omega^2 \cdot \phi^2) + 2 \cdot \omega^2 \cdot \phi_\theta^2 \cdot \phi - \omega^2 \cdot \phi \cdot (1 - \omega^2 \phi^2) = 0. \quad /6/$$

Здесь мы перешли к переменной $\theta' = \theta / \sqrt{-k_\mu^2}$: штрих далее опущен/. Подстановкой $\frac{d\phi}{d\theta} = y(\phi)$, $\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = y \cdot \frac{dy}{d\phi}$ уравнение ^{/6/} можно привести к дифференциальной форме Пфаффа:

$$\Omega = P(y, \phi) \cdot dy + Q(y, \phi) \cdot d\phi = 0.$$

/7/

Для того чтобы форма Ω являлась полным дифференциалом, необходимо использовать интегрирующий множитель:

$$\begin{aligned} \mu(\phi) &= \exp \int \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial \phi} \right) / P \right\} d\phi = \\ &= \exp \left(6 \cdot \omega^2 \cdot \int \frac{\phi \cdot d\phi}{1 - \omega^2 \cdot \phi^2} \right) = e^{-3 \ln(1 - \omega^2 \cdot \phi^2)}, \\ \mu(\phi) &= \frac{1}{(1 - \omega^2 \cdot \phi^2)^3}. \end{aligned}$$
/8/

В итоге уравнение /7/ в полных дифференциалах представляется в следующем виде:

$$d\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} \cdot d\phi = 0,$$

где $\frac{\partial \Omega}{\partial y} = P(y, \phi) \cdot \mu(\phi)$, $\frac{\partial \Omega}{\partial \phi} = Q(y, \phi) \cdot \mu(\phi)$. Используя /8/, имеем

$$\Omega(y, \phi) = \mu(\phi) \cdot \int P \cdot dy + Z(\phi) = \frac{y^2}{2(1 - \omega^2 \phi^2)^2} + Z(\phi),$$

или

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \phi} = \frac{2 \cdot \omega^2 \cdot y^2 \cdot \phi}{(1 - \omega^2 \cdot \phi^2)^2} + \frac{\partial Z}{\partial \phi} = Q \cdot \mu(\phi).$$

Из последнего соотношения следует: $\frac{\partial Z}{\partial \phi} = -\frac{\omega^2 \cdot \phi}{(1 - \omega^2 \cdot \phi^2)^2}$. В окончательной форме функции $Z(\phi)$, $\Omega(y, \phi)$ представляются в виде

$$Z(\phi) = -\omega^2 \int \frac{d\phi}{(1 - \omega^2 \cdot \phi^2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \omega^2 \phi^2)} + C,$$

$$\Omega(y, \phi) = \frac{y^2}{2(1 - \omega^2 \phi^2)^2} - \frac{1}{2 \cdot (1 - \omega^2 \phi^2)} + C.$$

Отсюда следует, что $d\Omega$ - полный дифференциал, то есть

$$d \left[\frac{y^2}{2 \cdot (1 - \omega^2 \cdot \phi^2)^2} - \frac{1}{2 \cdot (1 - \omega^2 \cdot \phi^2)} + C \right] = 0.$$

С учетом того, что $y = \frac{d\phi}{d\theta}$, дифференциальное уравнение /6/ принимает окончательный вид:

$$\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 = (1 - \omega^2 \cdot \phi^2) \cdot [1 + C(1 - \omega^2 \cdot \phi^2)].$$

/9/

Квадратура /9/ дается эллиптическим интегралом 1-го рода:

$$\theta(\phi) = \int \frac{d\phi}{G_4(\phi)}, \quad G_4^2 = E - U(\phi, E | \omega^2),$$

/10/

$$U(\phi, E | \omega^2) = \omega^2 (2E - 1) \cdot \phi^2 - \omega^4 (E - 1) \cdot \phi^4, \quad E = C + 1.$$

Сразу же отметим интересную особенность этого результата: эффективный потенциал $U(\phi, E | \omega^2)$ зависит от "энергии" E . Это усложняет исследование спектра частных решений вида /5/ /установление связи $\phi = \phi(\theta)$ при обращении интеграла в /10//, но делает его более "богатым" /см. ниже/. Эллиптического типа абелев интеграл в /10/ аналитичен всюду за исключением точек ветвления / a_1, a_2, a_3, a_4 / $.$ Точки ветвления для /10/ являются корнями алгебраического уравнения $G_4^2(\phi, E | \omega^2) = 0$. Известно, что кривая

$$G_4^2 - [E - U(\phi)] = 0,$$

/11/

рода $g = 1$ ($g = \frac{n-2}{2} = 1$, $n=4$), допускает униформизацию на классе эллиптических функций вида

$$\phi = z_i[\theta], \quad G = \frac{dz_i}{d\theta},$$

/12/

где $z_i[\theta]$ - некоторая эллиптическая функция. Согласно /10/, /12/, эллиптические функции будут удовлетворять исходному дифференциальному уравнению /9/. Эллиптические функции $z_i[\theta]$ будут результатом обращения абелева интеграла /10/. Конкретный вид эллиптической функции $\phi = z_i[\theta]$ будет существенно зависеть от типа корней / a_1, a_2, a_3, a_4 / $уравнения $G_4^2(\phi) = 0$. Классификация корней на комплексной плоскости представлена на рис.1. Используя стандартное обращение эллиптического интеграла 1-го рода, изложенное в /9/, можно для интеграла /10/ получить спектр решений в терминах эллиптических функций Якоби. Представляется естественным разделить случаи: {I. $\omega^2 > 0$ и II. $\omega^2 < 0$ } $\forall E, (-\infty < E < \infty)$.$

I. $\omega^2 > 0$. Опишем здесь кратко результаты анализа /удобно ввести переменные $y = \omega \cdot \phi, x = \omega \cdot \theta$ /:

1/ при $E < 0$ мы получаем нелинейные волны конечной амплитуды

$$y = dn[\sqrt{|E-1|} \cdot x, k], \quad k^2 = 1/\sqrt{|E-1|};$$

/13/

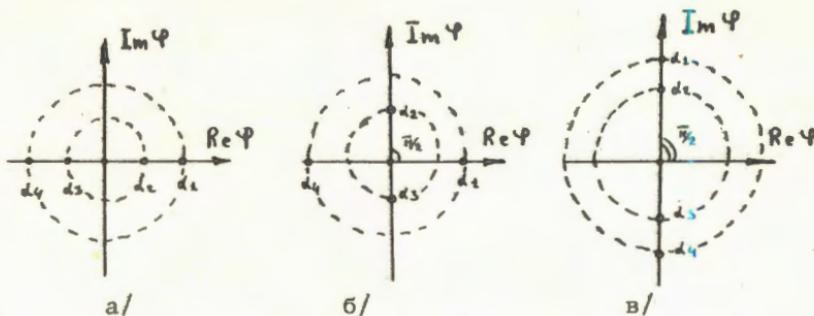


Рис. 1. а/ - все корни действительные; б/ - корни действительные и комплексные; в/ - все корни комплексные.

2/ для $1 > E > 0$ получаем "коноидальные" волны

$$y = \operatorname{cn}[x, k_1], k_1^2 = |E - 1|; \quad /14/$$

3/ при $k^2 = k_1^2 = 1$ ($E = 0$) получаем вырожденные случаи /13/, /14/ в виде солитона

$$y = \operatorname{dn}(x, 1) = \operatorname{cn}(x, 1) = \operatorname{sech} x; \quad /15/$$

4/ при $E > 1$ /10/ приводит к периодическим нелинейным "зп" -волнам:

$$a/ \quad y = \operatorname{sn}[\sqrt{E} \cdot x, k] \quad /16/$$

$$\text{для } |y| < 1, \quad y = \omega \cdot \phi, \quad x = \omega \cdot \theta, \quad k^2 = 1 - \frac{1}{E}, \quad \omega^2 = m^2 - \beta^2 > 0;$$

б/ а также к сингулярным решениям для гиперболических орбит на фазовой плоскости

$$y = \operatorname{dc}[\sqrt{E} \cdot x, k] \quad /17/$$

$$\text{при } \infty > y > y_1, \quad y_1 = (1 + \frac{1}{E-1}), \quad k^2 = 1 - \frac{1}{E}.$$

При $k^2 \rightarrow 0$ ($E \rightarrow 1$) из /16/ получаются малые линейные колебания $y = \sin x$. Решение /17/ в предельном случае $k^2 = (1 - 1/E) \rightarrow \infty$ ($E \rightarrow \infty$) переходит в решение типа доменной стенки:

$y \sim \operatorname{th}(x \cdot \sqrt{E}) \Big|_{E \rightarrow \infty}$ с шириной переходной зоны $\Delta \sim \frac{1}{\sqrt{E}} \Big|_{E \rightarrow \infty} \sim 0$, т.е., практически имеет вид "ступеньки" (Γ) .

II. $\omega^2 < 0$ ($\omega = i\omega_1$). Как показывает анализ неравенства $E - U_4(\phi, E|\omega_1^2|) > 0$, где

$$U_4(\phi, E | \omega_1^2) = -\omega_1^2(2E - 1) \cdot \phi^2 - \omega_1^2 \cdot (E - 1) \cdot \phi^4,$$

решения существуют в двух областях изменения переменной:
1/ $1 > E > 0$, 2/ $E > 1$. При $1 > E > 0$ имеем решение в виде коноидальных волн:

$$y = \frac{(1 - |E - 1|)}{|E - 1|} \cdot \operatorname{cn}[x, k], \quad k^2 = 1 - |E - 1|, \quad /18/$$

$$\omega_1^2 = \beta^2 - m^2 > 0.$$

2/ Для $E > 1$ получаем сингулярные решения:

$$y = \sqrt{\frac{E-1}{E}} \cdot \operatorname{tn}^{-1} [\sqrt{E} \cdot x, k], \quad k^2 = \frac{1}{E}. \quad /19/$$

Для /18/ в пределе $k^2 \rightarrow 1$ ($E \rightarrow 1$) получаем сингулярный солитон:

$$y = \left(\frac{1}{E-1+\epsilon} - 1 \right)^{-1} \cdot \operatorname{ch}^{-1}(x), \quad y = \omega_1 \phi, \quad x = \omega_1 \cdot \theta, \quad /20/$$

$$\omega_1^2 = \beta^2 - m^2 > 0.$$

Как показывают формулы /18/ и /19/, при $\omega^2 = m^2 - \beta^2 < 0$ или $\omega_1^2 = \beta^2 - m^2 > 0$, где $\omega = i\omega_1$, данные решения можно выразить в терминах эллиптических функций Якоби, даже в безмассовой теории Борна - Инфельда $m^2 = 0$ /существенным моментом является требование, чтобы скалярное поле было комплексным/. Так, например, для /19/ с учетом /5/ "полное" решение при $m^2 = 0$ имеет вид

$$\phi(\theta, \psi) = \frac{1}{(\beta^2)^{1/2}} \sqrt{\frac{E-1}{E}} \operatorname{tn}^{-1} (\sqrt{E \cdot \beta^2} \cdot \theta, k) \cdot e^{i\psi}.$$

Полученный "спектр" частных решений для параметров $(E | \omega^2)$ представлен на рис. 2.

Выражаем признательность Б.М.Барбашову и Б.А.Дубровину за обсуждение результатов и ценные замечания.

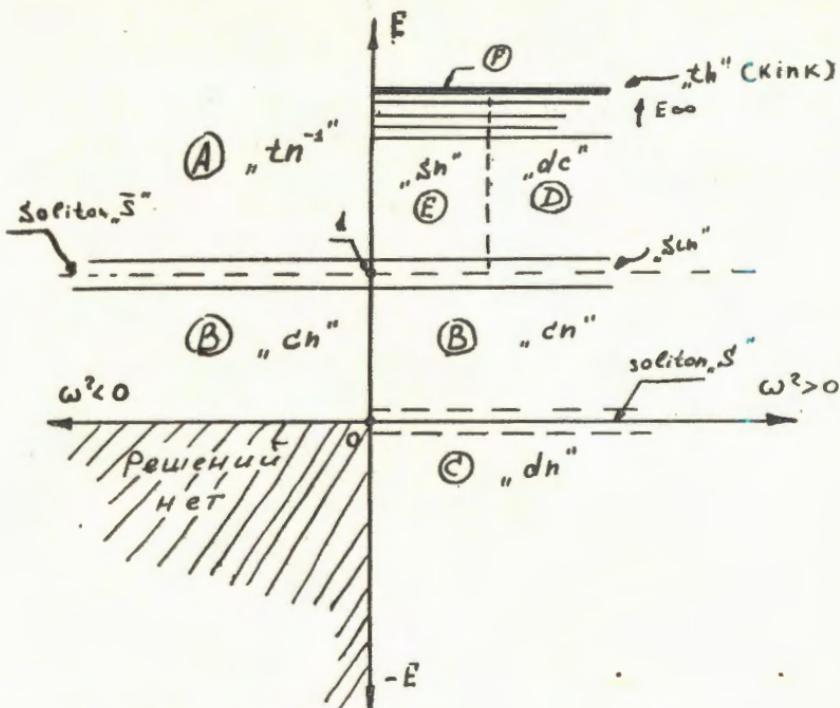


Рис. 2. А - сингулярные решения $'tn^{-1}'$; В - коноидальные волны $'ch'$; С - $'dh'$ -волны; Д - сингулярные $'dc'$ -волны; Е - $'sh'$ -волны; F - кинки в пределе $E \rightarrow \infty$; $'S'$ - сингулярный солитон; $'\bar{S}'$ - обычный солитон; $'sin'$ - гармонические колебания.

Литература

1. Born M., Infeld L. Proc.Roy.Sov., 1934, vol.A144, p.425.
2. Гришин В.Е., Федягин В.К. В кн.: Сборник аннотаций III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-84-407, Дубна, 1984, с.49.
3. Барбашов Б.М., Черников Н.А. ЖЭТФ, 1966, т.50, с.1296.
4. Барбашов Б.М., Черников Н.А. ОИЯИ, Р2-7857, Дубна, 1974.
5. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-80-419, Дубна, 1980.
6. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. В кн.: Материалы IV Международного совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, 1976. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976, с.243.

7. Черников Н.А. ОИЯИ, Р2-9714, Дубна, 1976.
8. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-83-781, Дубна, 1983.
9. Гришин В.Е., Федягин В.К. ТМФ, 1983, т.54, № 3, с.469.
10. Гришин В.Е., Федягин В.К. ТМФ, 1984, т.59, № 3, с.440.
11. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. "Наука", М., 1968.

Рукопись поступила 3 июня 1985 года.

DYNAMICAL SYMMETRY AND SPIN WAVES
OF ISOTROPIC ANTIKERROMAGNET

V.G.Makhankov, O.K.Pashaev, S.A.Sergeenkov *

Noncompact group $\prod_k^{\infty} [SU(1,1)]_k$ is shown to be the dynamical symmetry group of a linearized isotropic Heisenberg antiferromagnet. Eigenvalues and eigenstates corresponding to the spin waves are constructed. A group theoretical interpretation of the Bogoliubov transformation as a hyperbolic rotation in the algebra space of the dynamical group is established. In the framework of the coherent states technique it is shown that the corresponding classical dynamics of the model is described by the harmonic oscillations on the Lobachevsky plane.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Динамическая симметрия и спиновые волны
в изотропном антиферромагнетике

В.Г.Маханьков, О.К.Пашаев, С.А.Сергеенков

Показано, что динамической группой симметрии линеаризованного изотропного антиферромагнетика является некомпактная группа $\prod_k^{\infty} [SU(1,1)]_k$. Построены дискретный спектр и собственные состояния, соответствующие спиновым волнам. Установлен теоретико-групповой смысл преобразования Боголюбова как гиперболического вращения в пространстве алгебры динамической группы. Методом когерентных состояний показано, что соответствующее классическое движение системы описывается гармоническими колебаниями в плоскости Лобачевского.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

1. As is well-known^{/1/}, the dynamical symmetry group has appeared in the particle physics when various multiplets of particles were tried to be joined in a one irreducible representation of some noncompact group. After that

*Dnepropetrovsk State University

they found applications in a number of one-particle problems(hydrogen atom, etc.) and many particle problems(superfluidity, etc.)^{/2-4/}. In the case of the ordinary symmetry groups the Hamiltonian of the system commutes with all their generators. It means that energy degenerated states are transformed via the group symmetry representations. This is not the case for the dynamical symmetry group when the Hamiltonian of the system belongs simply to the group algebra. It is therefore named the spectrum generating algebra.

In some many-particle problems when linearized the Hamiltonian of the system may be written through the generators of some dynamical symmetry group. Then, solution of the quantum mechanical eigenvalue problem comes to the solution of the proper group theoretical problem, i.e., to looking for the irreducible representations of the dynamical group. In addition to the complete information about the spectra of the problem, the dynamical group makes it possible i) to construct the natural coherent states for the initial quantum system, ii) to represent the Green functions via the path integral over this states and iii) to describe classical behaviour of the system^{/7.11/}.

The theory of magnetism is especially interesting in this respect since there is a quantum microscopic theory based on the Heisenberg model on the one hand and the macroscopic theory of magnetism governed by the Landau-Lifshitz equations^{/5/} on the other. Sometimes one can establish such a correspondence, for example, for isotropic ferromagnet^{/6/} but not yet for the antiferromagnet and some models of anisotropic ferromagnet. As a first step in this direction one can construct the dynamical group and the coherent states of the proper spin models.

In the present communication the dynamical symmetry group of a linearized two sublattices Heisenberg antiferromagnet will be found as well as (using its irreducible unitary representations) the spectrum and eigenstates of the spin waves. Then the coherent states and Green function will be introduced. In conclusion we show that the classical dynamics of the linearized antiferromagnet as well as a nearly ideal superfluid Bose gas is described by the harmonic oscillators on the Lobachevsky plane.

2. Supposing the interaction is between the nearest neighbours only then for the Hamiltonian of two sublattices antiferromagnet we have^{/8/}:

$$\mathcal{H} = \sum_{i \in A, j \in B} \left[\frac{1}{2} (S_i^+ S_j^+ + h.c.) - S_i^z S_j^z \right]. \quad (1)$$

Here, up-spins form sublattice A and down-spins form sublattice B. In the ground state every up-spin is in closed neighbourhood with every down-spin and vice versa.

In a linear approximation it follows from (1) that:

$$\mathcal{H}_{\text{lin}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j(i)} [s(a_i^+ a_j^+ + h.c.) - s^2 + s(a_i^+ a_i^- + a_j^+ a_j^-)] \quad (2)$$

or in the momentum representation^{/8/}:

$$\mathcal{H}_{\text{lin}} = -\frac{z}{2} N s^2 + s z \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}^- + \frac{s}{2} \sum_{\vec{k}, \vec{\delta}} \cos \vec{k} \vec{\delta} (a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ + a_{\vec{k}}^- a_{-\vec{k}}^-), \quad (3)$$

where z is the number of the near neighbours, $\vec{\delta}$ is the lattice vector, $a_{\vec{k}}^+(a_{\vec{k}}^-)$ is the Bose operator of the creation (annihilation) of a magnon with momentum \vec{k} and

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^+] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} a_{\vec{k}}^+, \quad [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^-] = [a_{\vec{k}}^+, a_{\vec{k}'}^-] = 0.$$

Let us following^{/8/} introduce the operators:

$$\begin{aligned} J_1^{(\vec{k})} &= -\frac{1}{2} (a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^- + a_{\vec{k}}^- a_{-\vec{k}}^+), & J_2^{(\vec{k})} &= \frac{i}{2} (a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ - a_{\vec{k}}^- a_{-\vec{k}}^-), \\ J_3^{(\vec{k})} &= \frac{1}{2} (a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}^- + a_{-\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^- + 1) \end{aligned} \quad (4)$$

generating the algebra of the $[SU(1,1)]_\rightarrow$ group:

$$[J_1^{(\vec{k})}, J_2^{(\vec{k})}] = -i J_3^{(\vec{k})}, \quad [J_2^{(\vec{k})}, J_3^{(\vec{k})}] = i J_1^{(\vec{k})}, \quad [J_3^{(\vec{k})}, J_1^{(\vec{k})}] = i J_2^{(\vec{k})}. \quad (5)$$

In terms of this operators the Hamiltonian (3) assumes the form:

$$\mathcal{H}_{\text{lin}} = -\frac{z}{2} N s^2 + s \sum_{\vec{k}} [z J_3^{(\vec{k})} - J_1^{(\vec{k})} \sum_{\vec{\delta}} \cos \vec{k} \vec{\delta} - \frac{z}{2}]. \quad (6)$$

The quantum mechanical problem is to solve the following eigenvalue problem:

$$\mathcal{H}_{\text{lin}} |\Psi_n\rangle = E_n |\Psi_n\rangle. \quad (7)$$

To construct the discrete spectrum of this problem let us perform the hyperbolic rotation by the angle $\theta_{\vec{k}}$ over the axis $J_2^{(\vec{k})}$:

$$\mathcal{H}_{\text{lin}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_{\text{lin}} = R \mathcal{H}_{\text{lin}} R^{-1}, \quad (8)$$

where $R = \prod_{\vec{k}} R(\theta_{\vec{k}})$, $R(\theta_{\vec{k}}) = \exp[-iJ_2^{(\vec{k})}\theta_{\vec{k}}]$. It is important to emphasize that transformation (8) is a group theoretical analogue of the well-known Bogolubov $u-v$ transformation¹⁰. As a result we have

$$\tilde{H}_{\text{lin}} = -\frac{z}{2}Ns^2 + s \sum_{\vec{k}} \left(\sqrt{z^2 - (\sum_{\vec{\delta}} \cos \vec{k} \cdot \vec{\delta})^2} J_3^{(\vec{k})} - \frac{z}{2} \right), \quad (9)$$

where $\theta_{\vec{k}} = \frac{1}{z} \sum_{\vec{\delta}} \cos \vec{k} \cdot \vec{\delta}$.

The Casimir operator of the $[\text{SU}(1,1)]_{\vec{k}}$ group is:

$$C_{\vec{k}} = (J_3^{(\vec{k})})^2 - (J_1^{(\vec{k})})^2 - (J_2^{(\vec{k})})^2 = \frac{1}{4}(\Delta_{\vec{k}}^2 - 1), \quad (10)$$

where $\Delta_{\vec{k}} = a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} - a_{-\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}$.

The only possible irreducible unitary representation $\prod_{\vec{k}} \otimes D(j_{\vec{k}})$ of the $\prod_{\vec{k}} [\text{SU}(1,1)]_{\vec{k}}$ group corresponding to bound below spectrum is as follows:

$$J_3^{(\vec{k})} |n_{\vec{k}}\rangle = (n_{\vec{k}} + \sigma_{\vec{k}}) |n_{\vec{k}}\rangle, \quad (11)$$

where $|n_1, n_2, \dots, n_{\vec{k}}, \dots\rangle = \prod_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle$, $n_{\vec{k}} = 0, 1, 2, \dots; \sigma_{\vec{k}} = \frac{1}{2}(1 + |\Delta_{\vec{k}}|) = -j_{\vec{k}}$. For energy and eigenstates of the Hamiltonian (9) from (7), (8) and (9) it follows that:

$$E_{n_1, \dots, n_{\vec{k}}, \dots} = \sum_{\vec{k}} \left(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} + \frac{|\Delta_{\vec{k}}|}{2} \right) E_{\vec{k}} - \frac{z}{2} Ns(s+1), \quad (12)$$

where $E_{\vec{k}} = s\sqrt{z^2 - (\sum_{\vec{\delta}} \cos \vec{k} \cdot \vec{\delta})^2}$ is an antiferromagnon excitation spectrum

$$|\Psi(n_1, \dots, n_{\vec{k}}, \dots)\rangle = \prod_{\vec{k}} \otimes \sum_{m_{\vec{k}}} S_{m_{\vec{k}} n_{\vec{k}}}^{j_{\vec{k}}} (g_{\vec{k}}) |m_{\vec{k}}\rangle, \quad (13)$$

where

$$g_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} \alpha_{\vec{k}} & \beta_{\vec{k}} \\ \bar{\beta}_{\vec{k}} & -\bar{\alpha}_{\vec{k}} \end{pmatrix} \in [\text{SU}(1,1)]_{\vec{k}},$$

$\alpha_{\vec{k}} = \text{ch} \frac{\theta_{\vec{k}}}{2}$, $\beta_{\vec{k}} = \text{sh} \frac{\theta_{\vec{k}}}{2}$, $S_{m_{\vec{k}} n_{\vec{k}}}^{j_{\vec{k}}}(g_{\vec{k}})$ are the finite matrix elements of the unitary irreducible representations corresponding to the group element $g_{\vec{k}} \in [\text{SU}(1,1)]_{\vec{k}}^{1/8}$. In particular, for the ground state ($n_{\vec{k}} = 0$, $\Delta_{\vec{k}} = 0$, $j_{\vec{k}} = -1/2$) one gets:

$$E_{0, \dots, 0, \dots} = \frac{s}{2} \sum_{\vec{k}} \sqrt{z^2 - (\sum_{\delta} \cos \vec{k} \vec{\delta})^2} - \frac{z}{2} N s (s+1), \quad (14)$$

$$|\Psi(0, \dots, 0, \dots)\rangle = \prod_{\vec{k}} \operatorname{sech} \frac{\theta_{\vec{k}}}{2} \exp \left\{ -\sum_{\vec{k}} \operatorname{th} \frac{\theta_{\vec{k}}}{2} a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ \right\} |0\rangle, \quad (15)$$

where

$$a_{\vec{k}} |0\rangle = 0, \quad \operatorname{th} \frac{\theta_{\vec{k}}}{2} = \frac{z - \sqrt{z^2 - (\sum_{\delta} \cos \vec{k} \vec{\delta})^2}}{\sum_{\delta} \cos \vec{k} \vec{\delta}}.$$

This result, as it might be expected coincides, with the one getting via the Bogolubov transformation^[8].

For the linear spin chain ($z = 2$) we have the following spectrum of an antiferromagnon excitation

$$\tilde{\epsilon}(\vec{k}) = 2s |\sin k|, \quad (16)$$

which is well-known from the Anderson solution of an isotropic antiferromagnet model^[12]. The eigenvector of the ground state of the system is

$$|\Psi(0, \dots, 0, \dots)\rangle = \prod_{\vec{k}} \operatorname{sech} \frac{\theta_{\vec{k}}}{2} \exp \left\{ -\sum_{\vec{k}} \operatorname{th} \frac{\theta_{\vec{k}}}{2} a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ \right\} |0\rangle, \quad (17)$$

$$\text{where } \operatorname{th} \frac{\theta_{\vec{k}}}{2} = \frac{1 - |\sin k|}{\cos k}.$$

Dynamical symmetry group allows one to construct the coherent states of the system and to represent its propagator via the path integral over these states^[11]. In our case the propagator of the system can be presented in the form:

$$K(\zeta'_k, \zeta_k; T) = e^{i \frac{z}{2} N s^2 T} \prod_{\vec{k}} \sum_{|\Delta_{\vec{k}}|} K(|\Delta_{\vec{k}}|) (\zeta'_k, \zeta_k; T), \quad (18)$$

where

$$K(|\Delta_{\vec{k}}|) (\zeta'_k, \zeta_k; T) = \int d\mu_{|\Delta_{\vec{k}}|} (\zeta_k) \exp \left\{ i \frac{1}{h} \int dt \frac{i h \sigma_{\vec{k}}}{1 - |\zeta_k|^2} (\zeta'_k \dot{\zeta}_k - \dot{\zeta}_k \dot{\zeta}'_k) + s [\sqrt{z^2 - (\sum_{\delta} \cos \vec{k} \vec{\delta})^2} \sigma_{\vec{k}} \frac{1 + |\zeta_k|^2}{1 - |\zeta_k|^2} - \frac{1}{2} z] \right\}.$$

Here the $[\operatorname{SU}(1,1)]_{\vec{k}}$ coherent states have been used^[7,11]:

$$|\zeta'_k, \sigma_{\vec{k}}\rangle = (1 - |\zeta_k|^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \zeta'_k J_{+}^{(\vec{k})} \right\} |\sigma_{\vec{k}}, 0\rangle, \quad (19)$$

where

$$\begin{aligned} \vec{J}_{+}^{(\vec{k})} &= J_1^{(\vec{k})} + i J_2^{(\vec{k})}, \quad d\mu_{|\Delta_{\vec{k}}|}(\zeta_{\vec{k}}) = \frac{2\alpha_{\vec{k}} - 1}{\pi} \frac{d^2 \zeta_{\vec{k}}}{(1 - |\zeta_{\vec{k}}|^2)^2}, \\ \langle \zeta_{\vec{k}}' | J_3^{(\vec{k})} | \zeta_{\vec{k}}' \rangle &= \frac{1 + \bar{\zeta}_{\vec{k}}' \zeta_{\vec{k}}'}{1 - \bar{\zeta}_{\vec{k}}' \zeta_{\vec{k}}'}, \end{aligned} \quad (20)$$

The equivalent classical problem determined through a path integral (18) is dealing with a curved phase space namely Lobachevsky plane. It follows from the classical action in eq.(18) that the corresponding classical motion for the quantum linearized antiferromagnet will look oscillator-like on the Lobachevsky plane with frequencies:

$$\omega_{\vec{k}} = \frac{s}{\hbar} \sqrt{z^2 - (\sum_{\vec{\delta}} \cos \vec{k} \vec{\delta})^2}.$$

In one space dimension $\omega_{\vec{k}} = \frac{2s}{\hbar} |\sin k a|$ so we have the quasiclassical result:

$$\hbar \omega_{\vec{k}} = 2s |\sin k a|. \quad (21)$$

As is well-known, for spin $s = 1/2$ the Anderson's excitation spectrum ^{12/} coincides with the exact one in the XY model ^{13/} and differs from the exact result for "hole"-like excitation spectrum in the isotropic antiferromagnet ^{10,13/} up to the coefficient $2/\pi$. It follows from model (21) that the frequency of classical motion on Lobachevsky plane doesn't depend on the choice of the coherent state related to the representation space of the dynamical symmetry group. This means that described by the linearized antiferromagnet equations the harmonic motion cannot reproduce the configurations related to the exact result for the quantum integrable system ^{13/}, and it is necessary to study more complex soliton-like configurations of the nonlinear classical equations corresponding to the isotropic antiferromagnet. One of the possibilities is considered in paper ^{14/} where the coefficient in excitation spectrum (21) is determined by the density of the magnon condensate.

It is important to emphasize once more that a coincidence of the dynamical symmetry groups for a linearized antiferromagnet and a nearly ideal Bose gas of superfluid type makes it possible to conclude that a classical motion in both cases is determined by the harmonic oscillators on the Lobachevsky plane. As is shown in paper ^{14/}, a similar character of motion is given by a clas-

sical integrable model of Heisenberg magnet with the magnetization vector lying on the hyperboloid $SU(1,1)/U(1)$. This model is gauge equivalent to the repulsive nonlinear Schrödinger equation^{f5} that describes a nearly ideal Bose gas on the classical level. It should be noted that if the ordinary coherent states are used in our problem, one immediately encounters the difficulties of the mixing of modes with $+k$ and $-k$ momenta. These difficulties are overcome with the introduction of the $SU(1,1)$ coherent states.

Thus one can say that the ground state of an antiferromagnet as well as of a superfluid Bose gas¹⁰ may be related to the magnon condensation in momentum space.

In conclusion we remarked that the above consideration may be applied to a number of problems of the magnetism theory. Among them there is a spin-wave theory providing an adequate description of the low-energy magnetic excitations in materials that can be described by a Heisenberg exchange Hamiltonian. When the boson Holstein-Primakoff representations are used, the corresponding dynamical symmetry groups are noncompact $\prod_k [SU(1,1)]_+$. Related to

the spin-wave classical motion following from the path integral in $SU(1,1)$ coherent states representation is the harmonic motion on the Lobachevsky plane. There are, for example, the spin waves in the anisotropic XXZ antiferromagnet, those in the ferromagnet with dipole interaction, in ferrimagnets and in the easy-plane anisotropic ferromagnet. It is important to note that for the spin $s = 1/2$ in one dimension there exist an exact Jordan-Wigner transformation from the Pauli to the Fermi operators. Related dynamical group is now compact $\prod_k [SU(2)]_+$.

and the classical motion is the harmonic oscillations on the sphere S^2 . There are for example the XY ferromagnet as well as XXX ferromagnet with spin $s = 1/2$. These results with some other lattice models will be published elsewhere.

The authors are indebted to I. Gochev, V. B. Priezzhev, D. Pushkarov and to others participants of the Fedyanin's seminar for critical and fruitful discussions.

References

1. High Energy Physics and the Theory of Elementary Particles. "Naukova Dumka", Kiev, 1967 (in Russian).
2. Malkin I.A., Man'ko V.I. Dynamical Symmetries and

- the Coherent States of the Quantum System. "Nauka", M., 1979 (in Russian).
3. Solomon A.I. J.Math.Phys., 1971, 12, p.390.
 4. Solomon A.I. J.Phys.A, 1981, 14, p.2177.
 5. Kosevich A.M., Ivanov B.A., Kovalev A.S. Nonlinear Waves of Magnetization. Dynamical and Topological Solitons. "Naukova Dumka", Kiev, 1983 (in Russian).
 6. Gochev I. JINR, P17-84-663, Dubna, 1984.
 7. Perelomov A.M. Uspekhi Phiz.Nauk, 1977, 123, p.23 (in Russian); Perelomov A.M. Comm.Math.Phys., 1972, 26, p.222.
 8. Mattis D.K. Theory of Magnetism. "Mir", M., 1967.
 9. Des Cloizeaux J., Pearson I.J. Phys.Rev., 1962, 128, p.2131.
 10. Bogolubov N.N. Izv.Akad.Nauk SSSR,ser,fiz., 1947, 11, p.17.
 11. Gerry Ch.C., Silverman S. J.Math.Phys., 1982, 23, p.1995.
 12. Anderson P.W. Phys.Rev., 1952, 86, p.694.
 13. Faddeev L.D., Takhtajan L.A. Zapiski seminarov LOMI. "Nauka", L., 1981, 109, p.134.
 14. Pashaev O.K., Sergeenkova S.A. JINR, P2-85-481, Dubna, 1985.
 15. Makhankov V.G., Pashaev O.K. Phys.Lett., 1983, 95A, p.95.

Received on June 11, 1985.

САМОСОГЛАСОВАННАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ЛАМИНАРНЫХ ПОТОКОВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Ю.И.Алексахин

Дана общековариантная формулировка "самосогласованной электродинамики" Дирака - Бунемана, описывающей релятивистские ламинарные потоки заряженной жидкости. Выведено уравнение для скалярной плотности заряда, обобщающее известное уравнение огибающей параксиального ламинарного пучка. Найдено точное аналитическое решение задачи о равновесии плоского замагниченного потока.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

**Self-Consistent Electrodynamics
of Space-Charge Laminar Flow**

Yu.I.Alexahin

A generally relativistic formulation is given of the Dirac-Buneman "self-consistent electrodynamics", which describes the relativistic laminar flow of charged fluid. An equation for the charge scalar density is derived, generalizing the well-known paraxial laminar beam envelope equation. An exact analytic solution is found to the problem of planar immersed flow equilibrium.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Предвосхищая современные тенденции в теории элементарных частиц, П.Дирак в работе ^{1/1} предложил рассматривать электрический заряд как результат нарушения калибровочной инвариантности электромагнитного поля. Именно, добавление в лагранжиан поля члена вида $*\tilde{\lambda}(q^2 A_i A^i - 1)/2c$, где A^i - 4-потенциал, $\tilde{\lambda}$ - некоторый скаляр, $q = e/mc^2$ - константа, приводит к уравнениям Максвелла с 4-током $j^i = -q^2 \tilde{\lambda} A^i$, что позволяет отождествить $-qA^i$ с 4-скоростью потока частиц - источников электромагнитного поля, а $q\tilde{\lambda}/c$ - с их скалярной плотностью заряда ($\tilde{\lambda} = \sqrt{j_i j^i}/q$).

^{*} Используется метрика с сигнатурой -2.

Как отмечал Дирак, такой подход дает попутно экономный способ описания ламинарных /скорость - однозначная функция координат/ потоков пространственного заряда - уравнения Максвелла интерпретируются как уравнения для 4-скорости потока u^i , скалярная плотность задается неявно соотношением

$$u_i u^i = 1,$$

/1/

то есть задача сводится к решению системы из пяти уравнений для пяти неизвестных. Распространяя свой метод на заэвихренные потоки, Дирак ввел две дополнительные скалярные функции /2/, которые, как показал О.Бунеман /3/, являются обобщением переменных Клебша, известных в гидродинамике идеальной жидкости.

Эффективность применения данного метода, названного "самосогласованной электродинамикой" /4/, в теории пучков заряженных частиц продемонстрирована в работе /5/, в которой на основе уравнений для стационарного безвихревого потока было исследовано пинчевание электронного пучка в релятивистском плоском диоде.

Оставляя в стороне вопросы непротиворечивого построения классической электродинамики /1/. примем в качестве исходной систему уравнений Максвелла - Лоренца; предположение ламинарности позволяет с помощью замены $d/ds \rightarrow u^i \partial_i$, где $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$, получить из уравнения движения отдельной частицы /6/ уравнение для гидродинамической 4-скорости:

$$u^k (u_{i;k} - q F_{ik}) = 0;$$

/2/

где $F_{ik} = A_{k;i\beta} - A_{i;k}$ - тензор электромагнитного поля, $u_{i;k} = \partial_k u_i - \Gamma_{ik} u_\beta$ - ковариантная производная /6/. Введем обобщенную 4-скорость $U_i = u_i + q A_i$ и выразим F_{ik} через ее ковариантный ротор

$$\Omega_{ik} = U_{k;i} - U_{i;k}$$

/3/

/вихревой тензор/ и механическую 4-скорость,

$$q F_{ik} = u_{i;k} - u_{k;i} + \Omega_{ik} .$$

/4/

Учитывая равенство $u^i u_{i;k} = 0$, получаемое дифференцированием /1/, из /2,4/ найдем уравнение

$$u^k \Omega_{ik} = 0,$$

/5/

показывающее, что 4-скорость ортогональна вихревому тензору, и уменьшающее число его независимых компонент до

трех. Из первой группы уравнений Максвелла ^{/6/} следуют еще четыре соотношения для компонент вихревого тензора:

$$e^{iklm} \Omega_{ik; l} = 0, \quad /6/$$

где e^{iklm} - символ Леви-Чивита. Нетрудно убедиться, что уравнения ^{/5,6/} в действительности недоопределенны Ω_{ik} - это следует из инвариантности ^{/6/} относительно замены $\Omega_{ik} \rightarrow \Omega_{ik} + \psi_i X_k - \psi_k X_i$, где ψ , X - произвольные скаляры. Эта неоднозначность имеет ту же природу, что и градиентная инвариантность электромагнитного поля, и физически несущественна.

Из соотношений ^{/3,5,6/} легко получить обобщение теоремы Кельвина о постоянстве циркуляции на случай релятивистской заряженной жидкости ^{для псевдоевклидового пространства - времени} проведенное в ^{/8/}. Рассмотрим два замкнутых контура C_1 и C_2 , которые получаются друг из друга деформацией вдоль мировых линий, образующих "трубку". Обозначим через Σ_0 поверхность трубы, заключенную между контурами, и через $\Sigma_{1,2}$ - натянутые на них поверхности. Интеграл от вихревого тензора по поверхности $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ может быть преобразован в интеграл по охватываемой ею трехмерной гиперповерхности ^{/6/}:

$$\begin{aligned} \oint \Omega_{ik} df^{ik} &= -\frac{1}{2} \sum \int e^{iklm} \Omega_{ik} df^*_{lm} = \\ &= \int e^{iklm} \partial_l \Omega_{ik} dS_m = \int e^{iklm} \Omega_{ik; l} dS_m = 0, \end{aligned}$$

где $df^*_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm} df^{lm}$ - относительный тензор, дуальный элементу поверхности $df^{ik} = dx^i dx^k - dx^k dx^i$. В силу ^{/5/} вклад в исходный интеграл от поверхности Σ_0 равен нулю, так что интегралы от вихревого тензора по одинаково сориентированным поверхностям Σ_1 и Σ_2 равны друг другу, а стало быть, равны и контурные интегралы

$$\int_{C_{1,2}} U_i dx^i = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{1,2}} \Omega_{ik} df^{ik} = \text{const}. \quad /7/$$

Таким образом, вывод о постоянстве циркуляции обобщенной 4-скорости ^{/3/} справедлив и в общем случае пространства с ненулевой кривизной. Этот результат имеет важное следствие - если на некоторой нехарактеристической гиперповерхности циркуляция отсутствует, то $\Omega_{ik} = 0$ всюду в потоке.

Представляя 4-ток в виде $j^i \pm q \bar{\lambda} u^i = c \lambda u^i / 4\pi q$, из второй группы уравнений Максвелла ^{/6/} получим уравнение для

4-скорости потока:

$$g^{kl} u_{i;k;l} - u_{i;k}^k + g^{kl} \Omega_{ik;l} = -\lambda u_i,$$

/8/

где g_{ik} - метрический тензор. Уравнения /1,5,6,8/ и составляют систему уравнений самосогласованной электродинамики, описывающую движение ламинарных потоков заряженной жидкости. Существенным недостатком этой системы является отсутствие уравнения, явно определяющего скалярную плотность λ .

Переходя к выводу соответствующего уравнения, заметим, что из уравнения непрерывности $j^k_{;k} = 0$ следует $u^k_{;k} = -u^k_{;\ell} \partial_k \ln \lambda$, а из равенств /1,5/ - соотношения $u_i u_{i;k;l} = -u_{i;\ell} u^i_{;k}$ и $u^i \Omega_{ik;l} = -\Omega_{ik} u^i_{;\ell}$. Меняя теперь во втором слагаемом в /8/ порядок дифференцирования по правилу $u^k_{i;k} = u^k_{;k;i} + u^k R_{ik}$, где R_{ik} - тензор Риччи /8/, и сворачивая /8/ с u^i , получим искомое уравнение

$$(u^i \partial_i)^2 \ln \lambda + \lambda = (u_{i;k} + \Omega_{ik}) u^{i;k} + u^i u^k R_{ik},$$

/9/

образующее вместе с /5,6,8/ полную систему дифференциальных уравнений; равенство /1/ налагает связь на начальные значения компонент 4-скорости и может рассматриваться как интеграл этой системы.

Соотношение /5/ показывает, что вихревой тензор представим в форме

$$\Omega_{ik} = \sqrt{-g} \lambda e_{ik\ell m} u^\ell_\mu u^m_\nu,$$

/10/

где μ^i - некоторый 4-вектор, $g = \det g_{ik}$. Из /6/ и уравнения непрерывности $(\lambda u^i)_{;i} = 0$ следует уравнение для вектора μ^i : $u^k \mu_{i;k} - u^i u_j u^k \mu_{j;k} = \mu^k u_{i;k}^i$.

Легко видеть, что это уравнение определяет только составляющую вектора $w^i = u^k \mu_{i;k}$, нормальную 4-скорости, пропольную же составляющую без ограничения общности можно положить равной нулю - общий случай $u_i w^i = \alpha$, где α - произвольный скаляр сводится к рассматриваемому ($u_i w^i = 0$) заменой

$$\mu^i \rightarrow \mu^i + \xi u^i,$$

/11/

где $u^k \partial_k \xi = \alpha$, не затрагивающей тензор /10/. Таким образом, для вектора μ^i имеем окончательно

$$u^k \mu_{i;k}^i - \mu^k u_{i;k}^i = u^k \partial_k \mu^i - \mu^k \partial_k u^i = 0,$$

/12/

то есть коммутатор Ли /7/ векторов u^i и μ^i равен нулю. Отметим, что уравнение /12/ определяет μ^i по-прежнему с точностью до преобразования /11/, однако теперь скаляр ξ должен быть постоянен вдоль мировых линий: $u^k \partial_k \xi = 0$.

Рассмотрим постановку задачи Коши для системы уравнений /8-10, 12/ в предположении стационарности метрики ($\partial_0 g_{ik} = 0$) и равенства нулю скорости старта частиц с некоторой пространственной поверхности /эмиттера/, выбрав ее в качестве координатной поверхности $x^1 = 0$:

$$u^\alpha|_0 = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad u^0|_0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}.$$

Считая заданной /и конечной/ плотность тока эмиссии $j_3 = -c \lambda u^1 / 4\pi q$, найдем связь между компонентами вектора μ^i и электромагнитным полем на эмиттере. Трехмерные векторы электрического поля E_α и магнитной индукции B_α вводятся соотношениями /8/

$$E_\alpha = F_{0\alpha}, \quad B^\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{ab\gamma} F_{b\gamma},$$

где $\gamma_{ab} = -g_{ab} + g_{00}g_{\beta\beta}$ — пространственный метрический тензор, $g_{\alpha} = g_{0\alpha}/h_0$, $h_0 = \sqrt{g_{00}}$, $\gamma = \det \gamma_{ab} = -g/g_{00}$.

Ввиду инвариантности уравнений относительно преобразования /11/, на компоненты μ^i можно наложить одно дополнительное условие, в частности, потребовать $\lambda \mu^1|_0 = 0$. Тогда для остальных компонент при $x^1 = 0$ имеют место соотношения

$$qE_2 = \partial_2 h_0 + \tilde{j}_3 \mu^3, \quad qE_3 = \partial_3 h_0 - \tilde{j}_3 \mu^2,$$

/13/

$$\sqrt{\gamma} q B^1 = \partial_2 g_3 - \partial_3 g_2 - \tilde{j}_3 \mu^0.$$

где $\tilde{j}_3 = \sqrt{-g} 4\pi q j_3/c = \sqrt{-g} \lambda u^1|_0$. Таким образом, в отсутствие гравитационного поля ($h_0 = \text{const}$, $\vec{g} = 0$) завихренность потока связана с отличием от нуля тангенциального электрического поля и/или нормальной компоненты магнитной индукции на эмиттере. В наиболее важном для практики случае стационарного потока, стартующего с эквипотенциального эмиттера, замагниченность описывается одной функцией μ^0 постоянной вдоль траекторий.

Анализ выражений для остальных компонент электромагнитного поля позволяет выяснить поведение u^i и λ при $x^1 \rightarrow 0$. Если $\mu^2|_0 = \mu^3|_0 = 0$, то производные $\partial_1 u_2$, $\partial_1 u_3$ конечны при

$x^1 \rightarrow 0$ и определяются тангенциальными компонентами магнитной индукции* $B^{2,3}|_0$; при $E_1|_0 \neq 0$ и $u^1 \sim \sqrt{E_1}x^1$, а в режиме ограничения пространственным зарядом ($E_1|_0 = 0$) справедлив закон Чайлда - Ленгмюра $u^1 \sim (x^1)^{2/3}$. Если хотя бы одна из компонент $\mu^{2,3}|_0$ отлична от нуля, то из $j_3 \neq 0$ с необходимостью следует $E_1|_0 \neq 0$, а значения соответствующей компоненты $B^{2,3}|_0$ выпадают из начальных условий. Возможное изменение числа независимых функций, задающих решение, связано с нарушением условий теоремы Коши - Ковалевской вследствие неаналитичности характеристик потока на поверхности $x^1 = 0$.

Альтернативный способ описания завихренных потоков можно получить, вводя переменные Клебша - Дирака /2-4/. Из коммутативности векторных полей u^i, μ^i следует, что их интегральные кривые образуют систему двумерных поверхностей /7/, ортогональных, в силу равенства /10/, тензору Ω_{ik} . Это позволяет ввести скалярные поля ψ, χ , для которых указанные поверхности являются поверхностями уровня и, потребовав неколлинеарности их градиентов, представить вихревой тензор в виде

$$\Omega_{ik} = \psi_{;i} \chi_{;k} - \psi_{;k} \chi_{;i} = (\psi \partial_k \chi)_{;i} - (\psi \partial_i \chi)_{;k}. \quad /14/$$

Уравнения /6/ при этом удовлетворены тождественно, а уравнения /5/ - в силу постоянства ψ, χ вдоль мировых линий:

$$u^k \partial_k \psi = u^k \partial_k \chi = 0. \quad /15/$$

Физический смысл новых переменных выясняется при рассмотрении контурного интеграла

$$\oint_C U_i dx^i = \oint_C \psi \partial_i \chi dx^i = \oint_C \psi d\chi = \int_{\Sigma} d\psi d\chi.$$

то есть произведение $d\psi d\chi$ дает число вихревых "лент" по-ля обобщенной 4-скорости, пронизывающих соответствующий элемент поверхности Σ /3/. Представление /14/ уменьшает число переменных до семи, однако на практике более удобным часто оказывается представление /10/.

Рассмотрим в качестве примера задачу о стационарном плоском потоке, все характеристики которого зависят только от одной декартовой координаты $y \equiv x^2$, вдоль которой движение отсутствует ($u_2 = 0$). Система уравнений /1,8-10/ в этом случае значительно упрощается:

* Поскольку тангенциальные производные компонент $B^{2,3}$ связаны с $\partial_0 E_1$ и j_3 соответствующим уравнением Максвелла, выбор этих величин не является вполне произвольным.

$$\gamma^2 = 1 + u_1^2 + u_3^2, \quad \gamma'' = \lambda \gamma,$$

$$u_1'' - (vu_3)' = \lambda u_1, \quad u_3'' + (vu_1)' = \lambda u_3, \quad /16/$$

$$\lambda = v(u_1u_3' - u_1'u_3) - \gamma'^2 + u_1'^2 + u_3'^2,$$

где $v = \lambda \mu_0$, $\gamma = u_0$: штрих означает дифференцирование по u . Если $v = \text{const}$, то решение /16/ можно найти аналитически. Нетрудно проверить, что в этом случае система /16/ имеет два первых интеграла

$$\lambda + \frac{v^2 \gamma^2}{2} = A, \quad (\gamma^2 - 1)[(\arctg \frac{u_3}{u_1})' + \frac{v}{2}] = B. \quad /17/$$

Соотношения /16.1/ и /17.2/ позволяют выразить $u_{1,3}$ через релятивистский фактор γ :

$$u_1 = \sqrt{\gamma^2 - 1} \cos \phi, \quad u_3 = \sqrt{\gamma^2 - 1} \sin \phi,$$

$$\phi = \phi_0 + \int_0^\gamma \left(\frac{B}{\gamma^2 - 1} - \frac{v}{2} \right) dy, \quad /18/$$

для которого из /16.2/ и /17.1/ следует уравнение

$$\gamma'' - A\gamma + \frac{v^2}{2}\gamma^3 = 0, \quad /19/$$

имеющее первый интеграл

$$\gamma'^2 - A\gamma^2 + \frac{v^2}{4}\gamma^4 = -A - B^2 + \frac{v^2}{4}.$$

В наиболее важном случае, когда электрическое поле на одной из границ пучка отсутствует /выберем ее в качестве поверхности $u=0$, так что $\gamma'|_{u=0}=0$ /, решение уравнения /19/ имеет вид

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\gamma_1 v y}{2}, k \right)}}, \quad /20/$$

где $k = \sqrt{1 - \gamma_0^2/\gamma_1^2}$, $\gamma_{0,1}^2 = 2[A \mp \sqrt{A^2 - v^2(A+B^2-v^2/4)}]/v^2$. В пределе $v \rightarrow 0$ формулы /18,20/ дают известное решение для безвихревого потока /4/:

$$\gamma = \gamma_0 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} y,$$

$$u_1 = \sqrt{\gamma_0^2 - 1} \cos \phi_0 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} y + \sin \phi_0 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} y,$$

$$u_3 = \sqrt{\gamma_0^2 - 1} \sin \phi_0 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} y - \cos \phi_0 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} y.$$

Отметим, что для завихренного потока ($v \neq 0$) требование $\lambda \geq 0$ ограничивает возможные значения релятивистского фактора ($\gamma \leq \sqrt{2A/v}$) и, соответственно, толщину пучка.

Для осесимметричного замагниченного потока построить точные аналитические решения намного сложнее, поэтому воспользуемся разложением характеристик потока в ряд по степеням поперечной координаты x^2 . Ограничимся случаем сплошного стационарного пучка в евклидовом пространстве, выбрав ортогональную ($g_{\alpha\beta} = -h_{\alpha}^2 \delta_{\alpha\beta}$) сетку так, чтобы ось пучка ($x^2=0$) совпадала с координатной линией x^1 , причем $h_1|_{x^2=0} = 1$, а координата x^3 являлась азимутом ($\partial_3=0$). Обозначим $\eta = u^1|_{x^2=0}$. Для поперечных составляющих 4-скорости из /8,10/ на оси пучка получим

$$\partial_2 u_2 = \frac{1}{2\lambda} \partial_1 (\eta \lambda h_2^2), \quad 2u^3 = -qB^1 - \mu_0 \lambda \eta. \quad /21/$$

Из /9,21/ следует уравнение для скалярной плотности при $x^2 = 0$:

$$4\eta^2 \sqrt{\lambda} \partial_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) - 2\lambda + \frac{3+\eta^2}{1+\eta^2} (\partial_1 \eta)^2 + (qB^1)^2 - (\mu_0 \lambda \eta)^2 = 0. \quad /22/$$

Пренебрегая высшими членами разложений по x^2 , можно положить

$$\lambda = \frac{4qI}{c\eta R^2}, \quad /23/$$

где I - ток в пучке, R - его радиус. Подстановка /23/ в /22/ приводит к известному уравнению огибающей параксиального пучка /8/, так что уравнение /9/ можно рассматривать как обобщение последнего на случай непараксиальных пучков. Отметим, что уравнение /22/ является точным, в то время как применимость уравнения огибающей ограничена приближенным характером соотношения /23/.

Литература

1. Dirac P.A.M. Proc.Roy.Soc.A, 1951, 209, p.291.

2. Dirac P.A.M. Proc.Roy.Soc.A, 1952, 212, p.330.
3. Buneman O. Proc.Roy.Soc.A, 1952, 215, p.346.
4. Buneman O. Proc.Cambr.Phil.Soc., 1954, 50, p.77.
5. Goldstein S.A. et al. Phys.Rev.Lett., 1974, 33, p.1471.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. "Наука", М., 1967.
7. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. "Мир", М., 1964, т.2, с.209.
8. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц. "Мир", М., 1980, с.193.

Рукопись поступила 12 мая 1985 года.

КОЛЛЕКТИВНОЕ УСКОРЕНИЕ ВСТРЕЧНЫХ ИОННЫХ ПУЧКОВ

И.В.Кузнецов, Э.А.Перельштейн, В.П.Саранцев,
Г.Д.Ширков

Указан принципиально новый способ коллективного ускорения встречных ионных пучков в сжимающихся электронных кольцах. Проведенный анализ основных физических процессов и полученные ограничения на параметры ускоряемых ионов позволяют надеяться на достижимость светимости встречных ионных пучков $\sim 10^{30} \text{ 1/cm}^2\text{s}$ в области энергий столкновений до 200 кэВ/иукл. Метод может найти применение в физике атомных столкновений и спектроскопии. Приведены примеры использования рассматриваемых встречных ионных пучков для физических экспериментов.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Collective Acceleration of Colliding Ion Beams

I.V.Kuznetsov et al.

A new in principle method of collective acceleration of colliding beams is suggested. The main physical processes and available accelerated ion parameters are analysed. The luminosity of colliding ion beams is estimated as $\sim 10^{30}$ in the colliding energy region up to 200 keV/nucl. It overcomes the luminosity achievable in a collective accelerator without ordered azimuthal ion motion by a factor of 10 and energy by a factor of 20. The method may be used in the investigations of atomic physics processes and spectroscopy. Examples of using such colliding ion beams in the physical experiments are discussed.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

В последнее время исследования структуры сильноионизованных атомов, механизма их столкновения с нейтральными атомными системами ведутся в широкой области зарядностей и энергий бомбардирующих ионов^{1,2/}. Интерес к изучению ион-атомных столкновений стимулируется фундаментальными и прикладными исследованиями в различных областях физики /квантовая электродинамика, управляемый термоядерный синтез, астрофизика и др./. Дальнейшее развитие исследова-

ний взаимодействия многозарядных ионов с атомами и между собой определяется, в основном, возможностями получения интенсивных пучков ионов требуемой зарядности и энергии. В настоящее время эта задача решается двумя различными методами. Один из них состоит в генерации ионов любых зарядовых состояний, вплоть до ядер, полностью лишенных электронной оболочки, непосредственно в ионном источнике и ускорении их в обычном тяжелоионном ускорителе. Другой путь^{/3/} заключается в ускорении ионов сравнительно низкой зарядности до высоких энергий, обтирке их на тонкой мишени и последующем замедлении уже высокозаряженных ионов.

Наиболее труднодоступными для исследования являются процессы взаимных столкновений многозарядных ионов. Использование метода пересекающихся ион-ионных пучков для этой цели будет в значительной мере ограничено его низкой чувствительностью и сложностью практической реализации. Светимость пересекающихся ионных пучков при $\sim 10^6$ ион/см³, скорости ионов $\sim 10^9$ см/с и поперечном сечении пучка $\sim 0,1$ см² составит $\sim 3 \cdot 10^{19} 1/\text{см}^2\text{с}$. В связи с этим становится очевидной необходимость поиска более эффективных методов решения интересной и практически нейзученной проблемы - исследования ион-ионных столкновений. Интересными с этой точки зрения являются сильноточные электронные пучки, так как они позволяют в принципе генерировать многозарядные ионы, удерживать их длительное время в некотором объеме, создавая ионные сгустки высокой плотности вплоть до $\sim 10^{12}$ ион/см³. В работе^{/4/} содержится предложение для организации ион-ионных столкновений при высоких энергиях использовать пространственный заряд электронного облака. На возможность применения электронно-лучевого метода ионизации для измерения эффективных сечений взаимной перезарядки многозарядных ионов указано в работе^{/5/}. Электронные кольца коллективного ускорителя тяжелых ионов^{/6/} также могут быть основой методики исследования ион-ионных взаимодействий. Плотности ионных сгустков в этом случае могут достигать $\sim 10^{11}$ ион/см³. Однако энергия ионов/энергия колебания ионов в электронном кольце/ не превышает нескольких кэВ/нукл. В то же время в интенсивных электронных кольцах можно сформировать и ускорить встречные ионные пучки. Суть метода углового ускорения ионов при сжатии кольца^{/7/} состоит в следующем.

В электронное кольцо инжектируют навстречу друг другу нейтральные атомы с определенной начальной скоростью. В результате их ионизации электронным ударом образуются ионы, которые захватываются собственным электрическим полем электронов на кольцевую орбиту и создают встречные ионные пучки. Удержание вращающихся ионов в кольце осуществляется электронами. При сжатии электронно-ионного

кольца в азимутально-однородном магнитном поле, нарастающем во времени, для вращающихся ионов выполняется закон сохранения обобщенного момента количества движения:

$$M_Z = AMv_{\theta}r + \frac{eZ_i}{c} r A_{\theta},$$

/1/

где A - массовое число иона, M - масса нуклона, v_{θ} - скорость иона, r - радиус кольца, e - заряд электрона, c - скорость света, Z_i - зарядность иона, A_{θ} - азимутальная компонента векторного потенциала магнитного поля.

Магнитное поле формируется так, что в процессе сжатия механический момент иона намного превышает вклад в обобщенный момент от магнитного поля. Такое условие, в частности, реализуется в адгезаторе коллективного ускорителя тяжелых ионов /8/. Тогда из /1/ следует приближенный закон сохранения механического момента, т.е. при сжатии электронно-ионного кольца скорость вращающихся ионов нарастает обратно пропорционально радиусу кольца.

Предельную скорость ионов можно найти из условия равенства центробежной и удерживающей сил, т.е.

$$\frac{AMv_{\theta}^2}{r} = 2Z_i \nu m c^3 \frac{x}{a^2} (1-f),$$

/2/

где m - масса электрона, f - параметр нейтрализации заряда кольца, x - радиальная поляризация электронно-ионного кольца /радиальное расхождение электронного и ионного колец/, ν - параметр Будкера $\nu = 2,8 \cdot 10^{-13} / 2\pi r$, N_e - число электронов в кольце, a - радиус малого поперечного сечения кольца.

Выражение /2/ позволяет определить предельную скорость ионов при инъекции нейтралов в кольцо на большом радиусе и достижимую в конце сжатия.

В коллективном ускорителе электронные кольца формируются из линейного электронного пучка в адгезаторе, состоящем из вакуумной камеры и системы токовых катушек, следующим образом. Сначала электронный пучок инжектируется в слабофокусирующее магнитное поле и сворачивается в кольцо. Затем в результате поочередного включения токовых катушек магнитное поле нарастает во времени и сжимает электронное кольцо.

Ниже приведены типичные параметры электронного кольца в начале и в конце сжатия.

1982

| | Начало сжатия | Конец сжатия |
|-----------------------------------|----------------------|-------------------|
| Число электронов в кольце | 10^{18} | 10^{18} |
| Энергия электронов | $1,5 \div 2$ МэВ | $1,5 \div 20$ МэВ |
| Радиус кольца | 35 см | 3,5 см |
| Радиус малого поперечного сечения | $1 \div 2$ см | $0,1 \div 0,2$ см |
| Индукция магнитного поля | $2 \cdot 10^{-2}$ Тл | $1,5 \div 1,7$ Тл |

Скорость нейтральных атомов при инжекции в электронное кольцо должна быть $\sim 10^7$ см/с. Плотность потока нейтралов можно найти из выражения

$$N_i = n_0 V n_e \sigma c t, \quad /3/$$

где N_i - число ионов, захваченных в кольцо; n_0 - плотность потока нейтралов; V - объем пересечения потока нейтральных атомов и электронов; σ - сечение ионизации; t - длительность струи нейтралов. Если принять $t = 5 \cdot 10^{-4}$ с, $V = 10$ см³, $n_e = 5 \cdot 10^9$ электрон./см³, $\sigma = 2 \cdot 10^{-18}$ см² и $N_i = 5 \cdot 10^{10}$, то из /3/ находим, что $n_0 = 3 \cdot 10^{10}$ ат./см³.

Электронно-ионные кольца во время сжатия поляризованы в радиальном направлении. Если в начале сжатия размеры сечений ионных пучков много меньше электронного размера, то допустима предельная относительная поляризация x/a , близкая к 1. При равных размерах сечений предельная поляризация $\sim 0,25^{(8)}$.

Из /2/ следует, что наиболее трудные условия для удержания ионов в начале сжатия, т.к. плотность электронов здесь наименьшая и зарядность ионов изменяется медленно. Характерное время ионизации $r_i = (n_e \sigma c)^{-1}$ составляет в этот момент единицы миллисекунд. Считая, что увеличение заряда инжектированных ионов происходит за r_i и значение предельной относительной поляризации ~ 1 , получаем ограничение на начальную скорость сжатия

$$v_r \leq \frac{r_0 [1 - (x/a)_0]}{r_i}. \quad /4/$$

Уменьшение радиуса кольца вдвое приводит к увеличению плотности электронов примерно на порядок, и с этого момента применима существующая на коллективном ускорителе /8/ магнитная система, которая позволяет в конце сжатия получить ионы высокой зарядности $Z_i/A \geq 0,1$.

Используя выражение /2/ и параметры электронного кольца в начале и в конце сжатия, можно оценить максимальные скорости ионов, при которых они еще будут удерживаться

в электронном кольце на радиусе 35 и 3,5 см. В таблице приведены значения этих скоростей, полученные при следующих значениях параметров электронно-ионных колец: на радиусе $r = 35$ см $f = 0,05$; $x/a = 0,5$; $a = 1,5$ см; на радиусе $r = 3,5$ см $f = 0,2$; $a = 0,15$ см; $x/a = 0,5$. Для примера рассмотрено ускорение ионов азота, аргона, криптона, ксенона, свинца.

Таблица

| A | Z_i/A | $v_\theta \cdot 10^7$ см/с | E(кэВ/нукл.) | Z_i/A | $v_\theta \cdot 10^8$ см/с | E(кэВ/нукл.) |
|-------------|---------------------|----------------------------|--------------|--------------|----------------------------|--------------|
| $r = 35$ см | | | | $r = 3,5$ см | | |
| 14 | $7 \cdot 10^{-2}$ | 9,8 | 5,1 | 0,36 | 6,5 | 218 |
| 40 | $2,5 \cdot 10^{-2}$ | 5,9 | 1,8 | 0,18 | 4,6 | 109 |
| 84 | $1,2 \cdot 10^{-2}$ | 4,1 | 0,9 | 0,15 | 4,2 | 91 |
| 136 | $7,4 \cdot 10^{-3}$ | 3,2 | 0,5 | 0,14 | 4,0 | 85 |
| 208 | $4,8 \cdot 10^{-3}$ | 2,6 | 0,34 | 0,12 | 3,7 | 73 |

Таблица показывает, что отношение предельно допустимых скоростей ионов в конце сжатия и в начале превышает 10, по крайней мере для ионов с $A \geq 84$, т.е. они будут ускоряться при сжатии и удерживаться в кольце даже при максимально возможных значениях скоростей.

Число ионов, циркулирующих во встречных пучках, можно определить, задав фактор нейтрализации $f = (\sum Z_i N_i) / N_e$ и используя величину среднего заряда ионов. Например, для криптона в сжатом кольце может быть $1,5 \cdot 10^{11}$ ионов с зарядом $Z_i = 13$, если $N_e = 10^{13}$ и $r = 0,2$.

Принимая величину относительной скорости сталкивающихся ионов в конце сжатия $v_{\text{отн}} = 8 \cdot 10^8$ см/с и плотности встречных пучков $5 \cdot 10^{10}$ ион/см³, находим, что число ион-ионных взаимодействий в единицу времени составляет $N = 4 \cdot 10^{30}$ столкн./с. Видно, что светимость встречных пучков $4 \cdot 10^{30} 1/\text{см}^2\text{с}$ превышает на много порядков светимость пересекающихся пучков. Сравнение энергии и частоты столкновений ионов, совершающих хаотические колебания в электронном кольце, и ионов, взаимодействующих во встречных пучках, при условии их одинаковой плотности в кольце показывает, что встречные пучки обеспечивают выигрыш по энергии в 20-30 раз и по числу столкновений в единицу времени более чем в 10 раз.

Высокие скорости ионов и интенсивности встречных пучков позволяют провести измерения сечений ионизации в ион-

ионных столкновениях, взаимной перезарядки многозарядных ионов, образования вакансий на внутренних атомных оболочках и исследовать механизм образования и распада квазимолекул при столкновении высокозаряженных ионов и т.д.

Наиболее простыми в реализации представляются эксперименты по измерению сечений ионизации и взаимной перезарядки сталкивающихся высокозаряженных ионов. В этом случае достаточно измерить спектр зарядностей ионов в зависимости от времени их удержания в электронном кольце. Для этого, прежде всего, необходимо осуществить вывод ионов из кольца в требуемый момент времени. Вывод ионов можно произвести, например, путем создания локальной компенсации пространственного заряда электронов в кольце. С этой целью потребуется струя нейтральных атомов с плотностью потока $\sim 2 \cdot 10^{17}$ ат./см²с, если скорость нейтралов $\sim 10^5$ см/с и из периметра кольца ~ 12 см нейтрализуется участок $\sim 0,6$ см. В месте компенсации заряда электронов ионы будут покидать кольцо по касательной к нему. Ларморовский радиус ионов ~ 20 см, но магнитное поле спадает с увеличением радиуса, и поэтому вывод пучка из камеры не составит больших затруднений. Спектр зарядностей ионов в выведенном пучке можно будет измерить, например, с помощью электростатического анализатора.

Эксперименты по измерению сечений образования квазимолекул и вакансий на внутренних ионных оболочках можно будет провести на основе регистрации электромагнитного /оптическое, рентгеновское/ излучения, сопровождающего столкновение ионов. Первые экспериментальные результаты^{/8/} по измерению характеристического рентгеновского излучения ионов ксенона, наполняющих электронное кольцо, показали перспективность применения спектроскопических методов для исследования параметров электронно-ионных колец.

Возможности вывода интенсивных пучков сильноионизованных ионов из ускорителя, а для элементов легче криптона - даже ядер, полностью лишенных электронной оболочки, позволяют эффективно проводить эксперименты и в традиционной области исследования взаимодействий ионов с нейтральными атомами и веществом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Production and Physics of Highly Charged Ions. Proc. of an Int. Symp. Stockholm, June 1-5, 1982.
2. Atomic Collision Processes with Multiply Charged Ions. Proc. of the 2nd Workshop on Vinča Accel. Installation. Belgrad, 1983.

3. Mokler P.H. et al. Nucl.Instr.Meth., 1984, 232 (B4), p.34-39.
4. Jānes G.S. et al. Phys.Rev., 1966, 145, p.925.
5. Донец Е.Д. ЭЧАЯ, 1982, т.13, с.968.
6. Саранцев В.П., Перельштейн Э.А. Коллективное ускорение ионов электронными кольцами. Атомиздат, М., 1979.
7. Кузнецов И.В. и др. Авт.свид. СССР № 1102061 от 07.07.84. Бюл. ОИ, 1984, №25, с.196.
8. Zschornack G., Müller G., Musiol G. JINR, E9-12539, Dubna, 1979.

Рукопись поступила 15 мая 1985 года.

E0-ПЕРЕХОДЫ ПРИ РАСПАДЕ ^{164}Tm .
 0^+ -СОСТОЯНИЯ В ^{164}Er

И.Адам¹, З.Гонс, К.Я.Громов, Т.А.Исламов²,
Г.А.Кононенко, А.Х.Холматов³

С помощью β -спектрографов с постоянным однородным магнитным полем выполнены прецизионные исследования спектра конверсионных электронов при распаде ^{164}Tm . Обнаружено 10 переходов типа E0, среди них четыре - переходы между возбужденными 0^+ -состояниями. Установлено существование в ^{164}Er семи возбужденных 0^+ -уровней. Анализируются их свойства.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

E0 Transitions at ^{164}Tm Decay.
 0^+ -States in ^{164}Er

I.Adam et al.

Precision investigations of the conversion electron spectrum at the decay of ^{164}Tm have been performed using β -spectrographs with the constant homogeneous magnetic field. Ten transitions of the E0 type have been found, among them four transitions between excited 0^+ states. Seven excited 0^+ levels have been found in ^{164}Er . Their properties have been analysed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Электрические монопольные (E0)-переходы происходят при изменении радиального распределения электрических зарядов в ядре и представляют поэтому особый интерес. Экспериментальных данных о E0-переходах в атомных ядрах сравнительно немного¹. Их обнаружение затруднено тем, что для идентификации E0-перехода нужно увидеть обычно слабые линии электронов внутренней конверсии /ЭВК/ и показать, что в γ -спектре соответствующая линия отсутствует.

¹ Институт ядерных исследований ЧСАН, Прага

² Научно-исследовательский институт прикладной физики
ТашГУ

³ Ташкентский государственный университет

Для этой цели необходимы прецизионные исследования спектров ЭВК.

Мы продолжили поиски и исследования E0-переходов при распаде $^{164}\text{Tm} \xrightarrow[\beta^+]{2,0 \text{ мин}} ^{164}\text{Er}$. Изотоп ^{164}Tm был открыт и изучался в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ^{/2-4/}.^{/2/} показано, что основное состояние ^{164}Tm имеет спин и четность $I'' = 1^+$. Это создает благоприятные возможности для возбуждения и исследования в этом распаде уровней типа $I'' = 0^+$ в четно-четном ядре ^{164}Er и E0-переходов между этими уровнями. Ранее обнаружены E0-переходы и 0^+ -состояния ^{164}Er с энергиями 1246 кэВ, 1702 кэВ, 1765 кэВ и 2172 кэВ^{/3,4/}. Для получения более полных данных необходимо было выполнить тщательные исследования сложного спектра ЭВК при распаде ^{164}Tm . Они проводились с помощью комплекса β -спектрографов с постоянным однородным магнитным полем^{/5/}, имеющих разрешающую способность $\Delta H\rho / H\rho = 0,03 \div 0,07\%$. Спектры ЭВК на фотопластинках обрабатывались на специально разработанном^{/6/} автоматическом микрофотометре в линию с ЭВМ ЕС-1010. Сведения о ряде слабых линий ЭВК получены при усилении изображений на фотопластинках методом авторадиографии с применением радиоактивной ^{35}S ^{/7/}. Спектры ЭВК изучались также с помощью спектрометра с Si(Li)-детектором. Спектры γ -лучей и $\gamma-\gamma$ -совпадений исследованы с помощью γ -спектрометров с Ce(Li)-детекторами.

Для изучения спектров ЭВК, γ -лучей и $\gamma-\gamma$ -совпадений при распаде ^{164}Tm мы использовали в качестве источника препарата $^{164}\text{Yb} / T_{1/2} = 75 \text{ мин} /$ в равновесии с дочерним $^{164}\text{Tm} / T_{1/2} = 2 \text{ мин} /$. ^{164}Yb был получен при облучении tantalовой мишени протонами с энергией 660 МэВ на синхроциклотроне ОИЯИ. Источники для β -спектрографов готовились методом электроосаждения. Для спектрометров с полупроводниковыми детекторами использованы полученные на электромагнитном масс-сепараторе монозиобарные источники.

При исследовании спектров ЭВК и γ -лучей ^{164}Tm в диапазоне от 3 до 3000 кэВ обнаружено более 140 переходов, из них 50 - новых. Определены мультипольности 75 γ -переходов, для 50 из них - впервые. На основе данных о спектрах ЭВК и γ -лучей и спектрах $\gamma-\gamma$ -совпадений построена схема распада ^{164}Tm , включающая в себя 37 возбужденных состояний; введены четыре новых уровня, уточнены характеристики еще нескольких уровней. Эти результаты будут опубликованы позднее. Остановимся здесь на полученных экспериментальных данных о E0-переходах при распаде ^{164}Tm .

В спектрах ЭВК ^{164}Tm /см., например, рис.1/ идентифицировано 10 переходов типа E0, шесть из них - новых, и 11 переходов типа M1 + E2 + E0. В табл.1 представлены результаты сравнения экспериментальных величин коэффициентов внутрен-

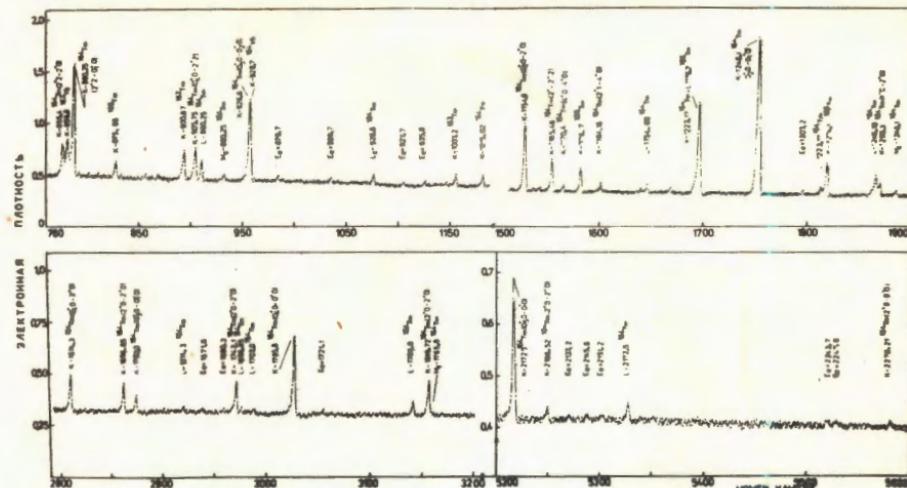


Рис.1. Участок спектра ЭВК, измеренный на β -спектрографе СП-3 / Н = 580 Гс/.

ней конверсии /или пределов α_k / с расчётыми для мультипольностей M1 и E2. Сравнение со значениями для более высоких мультиполей не проводили, так как маловероятно, чтобы при распаде $^{184}\text{Tm}/1'' = 1^+$ возникали такие у-переходы. Для всех E0 -переходов, кроме 407,0; 1416,6 и 1841,6 кэВ, измерены разности энергий K- и L-линий ЭВК и однозначно показано, что переходы происходят в ядре эрбия.

Возбуждающиеся при распаде ^{184}Tm состояния с $I''\text{K} = 0^+$ и их ротационные уровни изображены на рис.2. Четыре уровня типа 0^+ : 1246,1; 1702,2; 1765,8; 2172,8 кэВ и их врача-тельные состояния уверенно подтверждаются результатами изучения спектров γ - γ -совпадений и совпадениями величин сумм энергий γ -переходов, разряжающих эти уровни, $I''\text{K}$ этих уровней однозначно устанавливаются $E0$ -переходами с них в основное состояние, $E0$ -переходами между 0^+ -уровнями и мультипольностью других переходов с этих уровней.

Обнаруженный новый Е0-переход с энергией 1416,6 кэВ позволяет считать, что уровню с такой энергией, введенному в 18 , следует приписать спин 0, а не 1, и, таким образом, уровень 1416,6 кэВ должен иметь $I''K = 0^+0$. Уровни 1416,6 и 1483,6 кэВ образуют вращательную полосу $I'' = 0^+$ и 2^+ состояния с $K'' = 0$.

Не подтверждается существование 0^+ -уровня с энергией 2185 кэВ, введенного в 14 на основе наблюдения E0-перехода той же энергии. Мы обнаружили у-лучи с энергией 2186.5 кэВ и показали, что этот переход имеет мультиполь-

Таблица 1

К определению мультипольности переходов типа
 $E0$ и $E0 + M1 + E2$ при распаде ^{164}Tm

| $E_\gamma (\Delta E_\gamma)$, кэВ | теор. | | | Вывод о мультипольности |
|---------------------------------------|----------------------|------------|------------|----------------------------|
| | $a_k^{\text{эксп.}}$ | a_k^{M1} | a_k^{E2} | |
| | $\times 10^3$ | | | |
| 407,0(I) | >60 | 53 | 23 | $E0^H$ |
| 456,4(2) | >180 | 38 | I7 | $E0^H$ |
| 474,2(2) | 83(30) | 35 | I5 | $M1+E2+E0$ |
| 519,76(2I) | >50 | 28 | I2 | $E0^H$ |
| 794,62(52) | 47(I8) | 9,4 | 4,5 | $M1+E2+E0^H$ |
| 926,6(4) | >130 | 6,7 | 3,4 | $E0^H$ |
| 963,96(3) | 32(II) | 6,0 | 3,1 | $M1+E2+E0$ |
| 1170,4(4) | >20 | 3,7 | 2,I | $M1+E2+E0^H$ |
| 1223,17(6) | 7(I) | 3,3 | I,9 | $M1+E2+E0$ |
| 1246,1(4) | >400 | 3,2 | I,8 | $E0$ |
| 1392,30(II) | II(3) | 2,4 | I,5 | $M1+E2+E0^H$ |
| 1416,6(5) | 8,4(I5) | 2,3 | I,4 | $E0^H$ |
| 1696,85(II) | 3,8(8) | I,7 | I,I | $M1+E2+E0$ |
| 1702,1(4) | >23 | I,7 | I,I | $E0$ |
| 1742,07(II) | 4,4(I3) | I,6 | I,I | $M1+E2+E0$ |
| 1765,8(4) | >130 | I,6 | I,I | $E0$ |
| 1819,72(10) | 3,0(7) | I,4 | I,0 | $M1+E2+E0$ |
| 1841,6(5) | >30 | I,4 | I,0 | $E0^H$ |
| 1862,50(II) | 2,4(8) | I,4 | I,0 | $M1+E2+E0$ |
| 2172,5(4) | >400 | 0,9 | 0,8 | $E0$ |
| 2186,52(4I) | 20(7) | 0,9 | 0,75 | $M1+E2+E0^H$ |

Примечание: н - новые данные.

нность $M1 + E2 + E0/\text{см. табл. 1/}$ и размещается между уровнями с $I'' = 2^-$; 2278 кэВ и 91 кэВ.

Уровни 1911,1 кэВ и 1953,9 кэВ с $I'' = 2^+$ отличаются заметной $E0$ -примесью в переходах с них на уровень $I''K = 2^+0$ полосы основного состояния. Предположив, что эти уровни являются вращательными над новыми 0^+ -состояниями, мы предприняли поиски соответствующих им основных состояний. Анализ экспериментальных данных позволяет ввести в схему уровней ^{184}Er 0^+ -уровни с энергиями 1841,6 кэВ и 1861,3 кэВ.

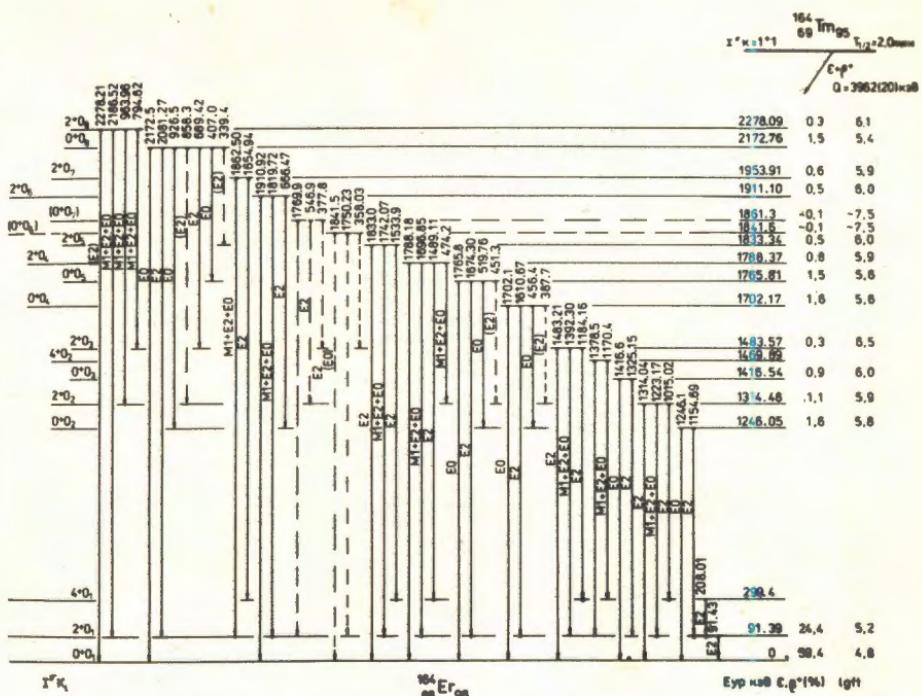


Рис.2. Состояния типа 0^+ в ^{184}Er и связанные с ними ротационные уровни, возбуждаемые при распаде ^{184}Tm .

В табл.2 приведены вычисленные по экспериментальным данным значения параметра Расмуссена ^{/9/}:

$$X_{ijj_1} = B(E0; 0_i^+ \rightarrow 0_j^+)/B(E2; 0_i^+ \rightarrow 2_j^+)$$

/отношение приведенных вероятностей $E0$ - и $E2$ -переходов с уровня 0^+ /, где i и j - номера начального и конечного 0^+ -состояний. Величины X обнаруживают значительный разброс от $X_{411} = 0,07/2/$ до $X_{811} = 4,5/15/$, что говорит о разной природе рассматриваемых 0^+ -состояний. Заметим, что β -вibrационный уровень ^{/9/} должен иметь $X = 4\beta_0^2 = 0,3-0,4$, т.е. β -колебательное состояние в ^{184}Er имеет, по-видимому, энергию 1246 кэВ.

Беляев и др. ^{/10/} для ряда ядер экспериментально изучили зависимость величины X от энергии возбуждения 0^+ -уровней и показали, что X резко увеличивается при приближении энергии уровня 0^+ к энергии щели. Как видно из рис.3, такое явление наблюдается и в ^{184}Er . Появление в спектре возбуждений ядра состояний с аномально большим значением X объясняется моделью с самосогласованным спариванием Митро-

Таблица 2

Отношение приведенных вероятностей /параметр
Расмуссена/ $X = B(E0)/B(E2)$ для E0-переходов в ^{184}Er

| $X_{ijj}^{(I)}$ | $(E_{\gamma p})_i$, кэВ | $E_{\gamma}^{(E0)}$, кэВ | $E_{\gamma}^{(E2)}$, кэВ | $X_{ijj}^{(I)}$ | $\bar{X}_{ijj}^{(I)}/X_{ijj}^{(0)}$ |
|-----------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------|-------------------------------------|
| $X_{2II}^{(0)}$ | I246,05 | I246,I | II54,69 | 0,26(7) | I,00 |
| $X_{2II}^{(2)}$ | I314,48 | I223,I7 | I223,I7 | 0,33(I0) | 0,36(I4) |
| $X_{2II}^{(4)}$ | I469,89 | II70,4 | II70,4 | I,0(5) | I,0(6) |
| $X_{3II}^{(0)}$ | I416,54 | I416,54 | I325,I5 | 0,I4(5) | I,00 |
| $X_{3II}^{(2)}$ | I483,57 | I392,30 | I392,30 | 0,87(25) | I,8(8) |
| $X_{4II}^{(0)}$ | I702,I7 | I702,I | I610,67 | 0,069(23) | I,00 |
| $X_{4II}^{(2)}$ | I788,37 | I696,85 | I696,85 | 0,64(I9) | 2,6(I2) |
| $X_{422}^{(0)}$ | I702,I7 | 456,4 | (387,7) | >0,09 | I,00 |
| $X_{422}^{(2)}$ | I788,37 | 474,2 | 474,2 | 0,II(3) | 0,35 |
| $X_{5II}^{(0)}$ | I765,8I | I765,8 | I674,3 | 0,5I(I5) | I,00 |
| $X_{5II}^{(2)}$ | I833,34 | I742,07 | I742,07 | 0,9(3) | 0,50(24) |
| $X_{522}^{(0)}$ | I765,8I | 5I9,76 | (45I,3) | >0,05 | |
| $X_{6II}^{(0)}$ | I84I,6 | I84I,6 | I750,23 | 2,3(7) | I,00 |
| $X_{6II}^{(2)}$ | I9II,I0 | I8I9,72 | I8I9,72 | 0,65(2I) | 0,08(4) |
| $X_{7II}^{(2)}$ | I953,9I | I862,50 | I862,50 | 0,49(I6) | |
| $X_{8II}^{(0)}$ | 2I72,76 | 2I72,5 | 208I,27 | 4,5(I5) | I,00 |
| $X_{8II}^{(2)}$ | 2278,09 | 2I86,52 | 2I86,52 | I4(6) | 0,9(5) |
| $X_{822}^{(0)}$ | 2I72,76 | 926,5 | (858,3) | >2,9 | I,00 |
| $X_{822}^{(2)}$ | 2278,09 | 963,96 | 963,96 | 0,7(3) | <0,06 |
| $X_{855}^{(0)}$ | 2I72,76 | 407,0 | (339,4) | >0,0I7 | |
| $X_{833}^{(2)}$ | 2278,09 | 794,62 | 794,62 | 0,47(22) | |

польского^{11/}. В табл.3 полученные нами данные о величинах X сравниваются с расчетом по модели^{11/}. Как видно, пока можно говорить только о качественном согласии. Следует отметить также заметное уменьшение величины X в начале графика рис.3.

В табл.2 приведены также отношения величин $\bar{X}_{ijj}^{(I)} = X_{ijj}^{(1)} \langle I_i 020 | I_j 0 \rangle^2$ и X_{ijj} . В адиабатическом приближении они равны единице. Хотя разброс величин этих отноше-

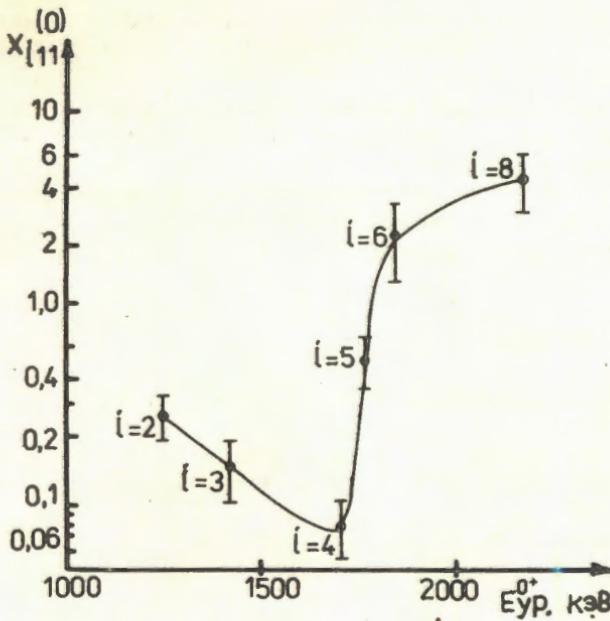


Рис.3. Зависимость величин $X_{111}^{(0)}$ от энергии уровней 0^+ в ^{164}Er .

Таблица 3

Свойства 0^+ -состояний ^{164}Er в модели с самосогласованным спариванием

| E_{up}^0 , кэВ | $X = B(E0)/B(E2)$ | | | |
|------------------|-------------------|------------|----------|------------|
| | эксп. | теор. /11/ | эксп. | теор. /11/ |
| 1246 | 1246 | | 0,26/7/ | 0,22 |
| 1416 | 1664 | | 0,14/5/ | 1,2,2 |
| 1702 | 1960 | | 0,07/2/ | 0,33 |
| 1765 | 1991 | | 0,50/15/ | 0,20 |
| 1841 | 2117 | | 2,3/7/ | 0,05 |
| 1861 | | | | |
| 2172 | | | 4,5/15/ | |

ний велик, можно считать, что они не противоречат приписанию соответствующего уровня (10^+) к вращательной полосе данного 0^+ -состояния.

Мы полагаем, что большие возможности для изучения структуры 0^+ -состояний ядер дает исследование $E0$ -переходов между возбужденными 0^+ -состояниями. К сожалению, для обнаруженных нами $E0$ -переходов между возбужденными 0^+ -состояниями пока определены только пределы величин X , и поэтому трудно сделать строгие выводы из этих данных.

Литература

1. Воинова-Елисеева Н.А. Препринт ЛИЯФ, № 673, Л., 1981.
2. Абдуразаков А.А. и др. Изв.АН СССР, сер.физ., 1960, т.24, № 4, с.278; Nucl.Phys., 1960, 21, p.164.
3. Басина А.С. и др. ЯФ, 1965, т.2, вып.2, с.204.
4. Врзал Я. и др. Изв.АН СССР, сер.физ., 1967, т.31, № 4, с.604.
5. Абдуразаков А.А., Громов К.Я., Умаров Г.Я. Бета-спектрограф с постоянными магнитами. "Фан", Ташкент, 1970.
6. Исламов Т.А. и др. ОИЯИ, Р10-12794, Дубна, 1979.
7. Громова И.И. и др. ОИЯИ, Р6-82-487, Дубна, 1982.
8. De Boer F.W. et al. Nucl.Phys., 1971, A169, p.577.
9. Rasmussen J.O. Nucl.Phys., 1960, 19, p.85.
10. Беляев Б.Н. и др. Изв.АН СССР, сер.физ., 1978, т.42, с.1928.
11. Mitropolsky I.A. J.Phys.G: Nucl.Phys., 1981, 7, p.921.

Рукопись поступила 13 июня 1985 года.