ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
им. Н.Н. БОГОЛЮБОВА

На правах рукописи

Безуглов Максим Александрович

Разработка методов вычисления мастер-интегралов с эллиптической структурой

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Дубна — 2022

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук
Онищенко Андрей Иванович

С электронной версией диссертации можно ознакомится на официальном сайте Объединенного института ядерных исследований в информационно-телекомуникационной сети «Интернет» по адресу: https://dissertations.jinr.ru. С печатной версией диссертации можно ознакомится в Научно-технической библиотеке ОИЯИ (г. Дубна, Московская область, ул. Жолио-Кюри, д. 6).

Ученый секретарь диссертационного
совета (технический секретарь)
канд. физико-математических наук Быст Ю.М. Быстрицкий

Общая характеристика работы

Актуальность темы. На данный момент, одной из наиболее успешных физических теорий, является стандартная модель (СМ) элементарных частиц [1—3] созданная в 70-х годах двадцатого века. Данная теория является одним из величайших достижений человечества и находит свое подтверждение во множестве экспериментов [4]. Однако, существует множество прямых и косвенных свидетельств того, что СМ не может являться окончательной физической теорией. Основными аргументами в пользу этого является наличие таких явлений, как темная материя[5—8] и темная энергия [5; 9—11], а также принципиальная несовместимость СМ с общей теорией относительности [12]— другой крайне успешной физической теорией. Таким образом, одной из наиболее актуальных задач современной естественной науки является поиск новой физики за пределами СМ. Наиболее многообещающим методом для этого представляется поиск отклонений от СМ на большом адронном коллайдере (БАК) [13; 14], а также на других ускорителях и установках включающих в себя, как наземные так и космические обсерватории. Но, для того, чтобы иметь возможность отличить гипотетические эффекты новой физики от возможных неучтенных эффектов СМ необходимо уметь делать очень точные предсказания в ее рамках. В то же время, необходимо отметить, что абсолютное большинство расчетов в квантовой теории поля производятся при помощи теории возмущений. В рамках теории возмущений, некая измеримая величина ищется в виде ряда по константе связи, последняя считается малой. Каждый k-ый элемент теории возмущений может быть представлен, как сумма Фейнмановских диаграмм с k петлями[1]. Для их вычисления необходимо вычислить $4k$-кратный интеграл по внутреннему четырехмерному импульсу каждой петли, такой интеграл называется петлевым фейнмановским интегралом. В современных расчетах часто бывает необходимо вычислять фейнмановские интегралы для двух и более петель, для примера см. [16; 17]. Таким образом для получения точных предсказаний нам необходимо иметь точные решения для соответствующих много-петлевых интегралов. Наиболее предпочтительно получить точные аналитические результаты т.к. это позволяет получить наиболее точные предсказания.

Помимо этого, фейнмановские интегралы также могут иметь большое значение для важных разделов чистой математики. Например, можно показать, что фейнмановские интегралы связаны с теорией мотивных периодов и могут быть использованы для изучения мотивной группы Галуа [18—20]. Отдельные фейнмановские интегралы также могут быть использованы, как своеобразная лаборатория, для изучения различных областей математики. Так, простейший двух-петлевой интеграл типа закат

[1]На самом деле такой ряд является асимптотическим и только сумма конечного числа членов правильно аппроксимирует искомую функцию, подробнее см. в [15]

солнца является преобразованием Лежандра локального препотенциала Громова-Виттена и эквивалентность двух различных представлений этого интеграла является локальным проявлением зеркальной симметрии [21; 22].

Каждый фейнмановский интеграл принадлежит к определенному семейству интегралов. Семейством называют все интегралы с одинаковым набором пропагаторов, но с разными степенями этих пропагаторов включая степень ноль т.е. подграфы. Элементы одного семейства не являются независимыми друг от друга. Между ними существуют линейные зависимости, которые устанавливают связь между элементами одного семейства [23—25]. Это означает, что семейство интегралов формирует некое линейное пространство с конечным базисом. Элементы этого базиса обычно называются мастер-интегралами. Число мастер-интегралов или, иными словами, размерность соответствующего линейного пространства определяется особыми точками подынтегральной функции [26] в представлении Фейнмана или Байкова [27]. Таким образом, нам не нужно вычислять все интегралы из данного семейства, достаточно только, вычислить некий фиксированный набор мастер-интегралов.

Существует множество разных способов вычисления фейнмановских интегралов. Условно, их можно разделить на два класса. Первый и самый старый метод это прямое интегрирование фейнмановского интеграла с использованием некоторого параметрического представления. В качестве примеров можно привести: фейнмановскую параметризацию, альфа представление, представление Мелина-Барнса и многие другие [15; 28; 29]. Многие методы можно успешно комбинировать друг с другом. Особенностью метода прямого интегрирования является, прежде всего то, что каждый мастер-интеграл должен быть рассмотрен отдельно от всей системы. Второй метод, это решение системы уравнений для всей системы мастер-интегралов в целом. Наиболее распространенным выбором является решение системы дифференциальных уравнений (ДУ) [30—36], при этом, в качестве переменной выступает некоторый внешний параметр, например, квадрат импульса внешней частицы. При использовании метода ДУ крайне важно правильно выбрать базис мастер-интегралов. Очевидно, что выбирается он таким образом, чтобы получившаяся система ДУ была как можно проще. Наиболее простой формой ДУ, для системы мастер-интегралов, является, так называемая, ε-форма [37]. Алгоритм нахождения соответствующего базиса мастер-интегралов, для случая, когда такой базис существует, приведен в [38].

Фейнмановские интегралы обычно выражаются в терминах специальных функций. Самыми распространенными из них, являются мульти полилогарифмы (МПЛ) [39; 40]. Существует набор математических пакетов, таких как HyperInt [41], MPL [42] и PolyLogTools [43], которые специально ориентированы на работу с этими функциями. МПЛы могут использоваться для вычисления фейнмановских интегралов методом прямого интегрирования, обычно, для этого используется фейнмановсекая параметризация. При этом, очень важную роль играет концепция линейной приводимости [44; 45], которая позволяет понять, анализируя полиномы Симанчика входящие в фейнмановское параметрическое представление, может ли заданный фейнмановский интеграл иметь решения в классе МПЛов. Также, с помощью МПЛов можно получать решения для фейнмановских интегралов с использованием метода ДУ. Система ДУ может быть решена в терминах МПЛов в том случае, если она допускает сведение к ε-форме и если ядра ДУ записанные через дифференциалы от логарифмов $d\log$ содержат, только, рациональные аргументы [46]. Пожалуй, одной из главных особенностей МПЛов, что делает их настолько успешными, это то, что они удовлетворяют алгебре Хоппфа [47]. Последнее позволяет находить множество функциональных зависимостей между ними. Помимо этого, немало важным является то, что они могут быть вычислены численно с очень высокой точностью [48; 49].

Несмотря на все вышеописанные замечательные свойства, точно известно, что не все фейнмановские интегралы могут быть решены в классе МПЛов. Первый пример появился еще 1962 году и связан с диаграммой типа воздушный змей возникающей при расчете двух-петлевой поправки к собственной энергии электрона в КЭД [50]. Выяснилось, что такой интеграл является эллиптическим и никак не может быть выражен через МПЛы. После этого, подобные интегралы часто появлялись в практических вычислениях. Поэтому, появилась необходимость ввести новые функции, более общие чем обычные МПЛы. Простейшим классом неполилогарифмических интегралов являются эллиптические мульти полилогарифмамы (эМПЛ) [51] свойства которых тесно связаны со свойствами эллиптических кривых. Несмотря на то, что теория для многих типов эМПЛов довольно развита, для некоторых даже известна структура алгебры Хопфа [52; 53], единого общепризнанного метода для решения всех типов неполилогарифмических интегралов все еще не существует. Подобные расчеты лежат скорее в области «искусства» нежели в области рутинных алгоритмизированных вычислений. Поэтому, поиск дополнительных способов решений и соответствующих им новых функций для фейнмановских интегралов является важной задачей и представляет первостепенный интерес для данного исследования.

Целью данной работы является разработка методов для аналитического вычисления двух-петлевых и трех-петлевых фейнмановских интегралов с эллиптическими структурами, в терминах хорошо определенных специальных функций, на серии конкретных примеров таких интегралов.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать новый программный пакет заточенный под вычисление эллиптических фейнмановских интегралов методом прямого интегрирования.
2. Разработать новый метод позволяющий решать двух-петлевые неполилогарифмические интегралы методом ДУ в терминах повторных интегралов с алгебраическими ядрами.
3. Обобщить метод из предыдущего пункта на трех-петлевой случай.
4. Разработать метод для численной проверки результатов полученных в терминах повторных интегралов с алгебраическими ядрами.
5. Разработать метод для точного по ε решения неполилогарифмических фейнмановских интегралов в виде рядов Фробениуса.
6. Применить разработанные методы для решения практических задач, а именно, для аналитического вычисления мастер-интегралов описывающих двух-петлевые поправки к процессам в нерелятивистской квантовой хромодинамике.

Научная новизна:

1. Впервые, методом прямого интегрирования, были получены решения для серии "треугольных" эллиптических интегралов в терминах эМПЛов.
2. Был разработан специальный математический пакет TEMPLE на базе языке Wolfram mathematica предназначеный для вычисления эллиптических фейнмановских интегралов методом прямого интегрирования.
3. Был введен новый класс функций названный повторными интегралами с алгебраическими ядрами. Этот новый класс функций позволяет находить решения для широкого класса неполилогарифмических двух-петлевых и трех-петлевых фейнмановских интегралов решения для которых, на данный момент, не могут быть получены в терминах других известных функций.
4. Было получено новое интегральное представление для простейшей эллиптической диаграммы типа закат солнца в терминах повторных интегралов с алгебраическими ядрами.
5. Было получено решение для интеграла типа воздушный змей, с двумя безмассовыми линиями в терминах повторных интегралов с алгебраическими ядрами.
6. Впервые было получено решение для интеграла типа воздушный змей, со всеми массивными линиями и с одной безмассовой линией в терминах повторных интегралов.
7. Было получено новое интегральное представление для трех-петлевой эллиптической диаграммы типа «банан».

8. Был разработан новый метод позволяющий получать точные, по параметру размерной регуляризации, решения для некоторого класса эллиптических интегралов.
9. Впервые были получены точные, по параметру размерной регуляризации, решения для двух-петлевой эллиптической диаграммы типа непланарная эллиптическая вершина.
10. Впервые были получены точные, по параметру размерной регуляризации, решения для системы мастер-интегралов описывающих двух-петлевые поправки к процессам в нерелятивистской квантовой хромодинамике.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Были получены аналитические решения для набора двух-петлевых эллиптических фейнмановских интегралов с помощью метода прямого интегрирования. Данный метод позволяет получать решения для любого порядка по параметру размерной регуляризации. Решения выражены через эллиптическое обобщение мульти полилогарифмов. На примере непланарной эллиптической вершины, также показано, что решения могут быть выражены через новый класс функций названный повторными интегралами с алгебраическими ядрами. Установлено, что в некоторых случаях методика позволяет получать решения для фейнмановских интегралов содержащих две эллиптические структуры. Для решения этих задач был разработан специальный математический пакет TEMPLE на базе языка Wolfram Mathematica.
2. Предложен метод позволяющий находить решения для широкого класса двух-петлевых и трех-петлевых фейнмановских интегралов, в терминах нового класса функций, названных повторными интегралами с алгебраическими ядрами. Данный метод основан на синтезе метода фейнмановской параметризации и метода дифференциальных уравнений для полной системы мастер-интегралов и позволяет получать решения в любом, наперед заданном порядке по параметру размерной регуляризации. Данная методика позволила получить решения для большого числа двух-петлевых фейнмановских интегралов содержащих диаграмму типа «закат солнца», в качестве подграфа и для двух-петлевой непланарной эллиптической вершины. Также были получены решения для мастер-интегралов описывающих двух-петлевые поправки к процессам в нерелятивистской квантовой хромодинамике. Обобщение данной методики на трех-петлевой случай позволило получить решения для диаграммы типа «банан». Было показано, что полученные решения могут быть использованы для расчета более сложных трех-петлевых фейнмановских интегралов содержащих трех-петлевой «банан» в качестве подграфа.

3. Предложен метод позволяющий находить точные, по параметру размерной регуляризации, решения для некоторого класса двух-петлевых эллиптических фейнмановских интегралов в терминах хорошо сходящихся степенных рядов Фробениуса. Метод основан на сведении системы дифференциальных уравнений для полной системы мастер-интегралов к системе неоднородных разностных уравнений первого порядка. Полученные таким образом решения выражаются в терминах степенных треугольных сумм по кинематической переменной и, в конкретно рассмотренных случаях, могут быть записаны через обобщенные гипергеометрические функции и обобщенные функции Кампе-де-Ферье. Особенностью полученных решений является их относительная компактность и простота численного счета. С помощью данного подхода удалось получить точные решения для двух-петлевой диаграммы типа непланарная эллиптическая вершина, а также для базиса мастер-интегралов описывающих двух-петлевые поправки к процессам в нерелятивистской квантовой хромодинамике.

Достоверность полученных результатов обеспечивается численной проверкой и тем, что результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены лично автором на:

– «Moscow International School of Physics 2022», Дубна, Россия, 24 июля 2022 г.; устный доклад: Analytic calculation of some NRQCD master integrals.
– Международная конференция «International Conference on Quantum Field Theory, High-Energy Physics, and Cosmology», Дубна, Россия, 17 июля 2022 г.; устный доклад: Exact Frobenius solutions for elliptic Feynman integrals.
– XI Межинститутская молодежная конференция «Физика элементарных частиц и космология 2022», Москва, Россия, 19 апреля 2022 г.; устный доклад: Точное вычисление эллиптических фейнмановских интегралов.
– Международная конференция «The XXV International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists (AYSS-2021)», Алматы, Казахстан, 11 октября 2021 г.; устный доклад: Massive sunset and kite diagrams with elliptics.
– X Межинститутская молодежная конференция «Физика элементарных частиц и космология 2021», Москва, Россия, 19 апреля 2021 г.; устный доклад: Эллиптические массивные диаграммы типа воздушный змей.

– Семинар ЛТФ ОИЯИ, Дубна, Россия, май 2020, устный доклад: Calculation of master integrals in terms of elliptic multiple polylogarithms.

Личный вклад. Все результаты, приведенные в данной диссертационной работе, получены лично автором, либо при его непосредственном участии.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 5 печатных работах в рецензируемых журналах, включённых в список ВАК и/или международных баз данных Web of Science и/или Scopus [A1—A5].

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы. В последующих главах рассматриваются три различных метода позволяющих получать аналитические решения для неполилогарифмических фейнмановских интегралов.

Первая глава диссертации основана на работах [A2; A5] и посвящена аналитическому расчету мастер-интегралов методом прямого интегрирования, а также описанию некоторых основных классов специальных функций, которые будут использоваться в этой и последующих главах. Для получения всех результатов представленных в данной главе был разработан специальный математический пакет TEMPLE на базе языка Wolfram Mathematica [54].

В **первом разделе** дается описание основных классов специальных функций. Это, прежде всего, мульти полилогарифмы (МПЛ), которые могут быть определены рекурсивно следующим образом

$$G(a_1,...,a_n;x) = \int_0^x \frac{G(a_2,...,a_n;x')}{x'-a_1} dx', \qquad n > 0, \tag{1}$$

где n- называется весом и рекурсия начинается с $G(;x) = 1$. Приводится подробное описание основных свойств этих функций. Особое внимание уделено структуре алгебры Хопфа для этих функций и показано, как она может быть использована для получения полезных функциональных соотношений для G-функций. Далее, вводится определение для эллиптических мульти полилогарифмов (эМПЛ) в рекурсивной форме

$$\mathcal{E}_4\left(\begin{smallmatrix} n_1 & \ldots & n_k \\ c_1 & \ldots & c_k \end{smallmatrix};x;\vec{a}\right) = \int_0^x dx' \Psi_{n_1}(c_1,x',\vec{a}) \mathcal{E}_4\left(\begin{smallmatrix} n_2 & \ldots & n_k \\ c_2 & \ldots & c_k \end{smallmatrix};x';\vec{a}\right). \tag{2}$$

Где $\sum_i |n_i|$, аналогично неэллиптическому случаю, называется весом эМПЛа и ядра $\Psi_{n_1}(c_1,x',\vec{a})$ определены как

$$\Psi_0(0,x,\vec{a}) = \frac{c_4}{\omega_1 y} \tag{3}$$

и

$$\Psi_1(c,x,\vec{a}) = \frac{1}{x-c}, \qquad \Psi_{-1}(c,x,\vec{a}) = \frac{y(c)}{y(x-c)} + Z_4(c,\vec{a}), \qquad c \neq \infty, \tag{4}$$

$$\Psi_1(\infty,x,\vec{a}) = -Z_4(x,\vec{a})\frac{c_4}{y}, \qquad \Psi_{-1}(\infty,x,\vec{a}) = \frac{x}{y} - \frac{a_1 + 2c_4 G_*(\vec{a})}{y}. \tag{5}$$

В этих выражениях y обозначает эллиптическую кривую $y^2 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$ и $c_4 = \sqrt{a_{13}a_{24}}$, $a_{ij} = a_i - a_j$, $\omega_1 = 2c_4 \int\limits_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{y}$ обозначает один из периодов эллиптической кривой. Функции $Z_4(x,\vec{a})$ и $G_*(\vec{a})$ определяются как:

$$Z_4(x,\vec{a}) = -\frac{1}{\omega_1}\left(g^{(1)}(z_x - z_*,\tau) + g^{(1)}(z_x + z_*,\tau)\right), \tag{6}$$

и

$$G_*(\vec{a}) = \frac{g^{(1)}(z_*,\tau)}{\omega_1}, \tag{7}$$

где $g^{(n)}(z,\tau)$ являются коэффициентами ряда Эйзенштейна-Кронекера и z_x - обозначает отображение координаты x на торе. Далее, мы доказываем следующую теорему: если все точки ветвления a_i эллиптической кривой $y^2 = \prod_{i=1}^4 (x-a_i)$ являются попарно комплексно сопряженными и выполняется соотношение $1 - a_1 - a_3 = 0$, тогда для любого $x \in \mathbb{C}$ справедливо следующее соотношение

$$Z_4\left(\frac{1}{2}+x,\vec{a}\right) + Z_4\left(\frac{1}{2}-x,\vec{a}\right) = \frac{2\pi i}{\omega_1}, \tag{8}$$

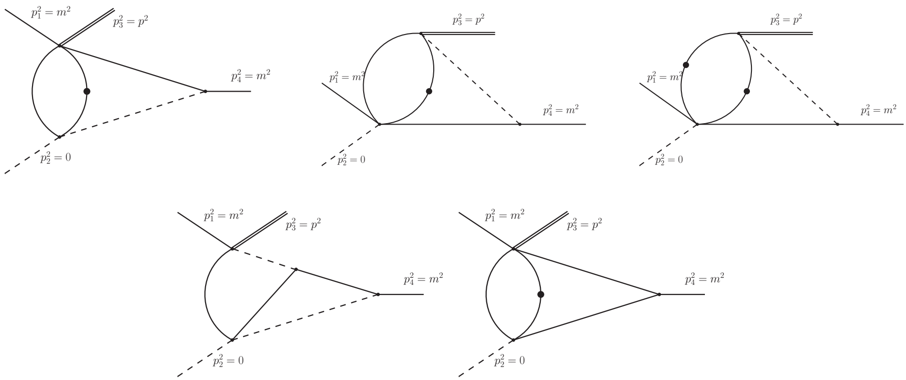
В завершении первого раздела, мы приводим определение для повторных интегралов с алгебраическими ядрами. Это новый, введенный нами, класс функций. В общем виде эти функции можно задать следующим образом

$$J(\underbrace{\Omega}_{\text{1-формы по y}}, \overbrace{\omega_1^s,\ldots,\omega_n^s}^{\text{1-формы по s}}, \underbrace{\omega_1^w,\ldots,\omega_m^w}_{\text{1-формы по w}}, \overbrace{\omega_1^y,\ldots,\omega_l^y}^{\text{1-формы по y}}; s) \tag{9}$$

где ω_i^s, ω_i^w и , ω_i^y это некоторые дифференциальные 1-формы по переменным s, w и y соответственно и Ω обозначает также дифференциальную

1-форму по y. 1-формы ω_i^s, ω_i^w и , ω_i^y образуют повторные интегралы, и последняя 1-форма Ω является «замыкающей», интегрирование по ней идет в неких конкретных пределах. В данном разделе рассматриваются конкретные примеры дифференциальных 1-форм и дано несколько примеров таких функций. Также, в конце данного раздела показано, что введенные J-функции отличаются от повторных интегралов Чена [55] и содержат их в качестве частного случая. Повторные интегралы с алгебраическими ядрами, или сокращенно J-функции, будут использоваться в этой и следующей главе.

Второй раздел посвящен исследованию конкретных примеров фейнмановских диаграмм с использованием метода прямого интегрирования. Все результаты этого раздела представлены в терминах эМПЛов. Полный список фейнмановских диаграмм посчитанных в этой главе приведен на рисунке 1. Краткое описание метода, использованного в данном разделе, со-



Штрихованные линии обозначают безмассовые пропагаторы и безмассовые внешние частицы с импульсом на массовой поверхности, сплошные линии обозначают массивные пропагаторы и массивные внешние частицы с импульсом на массовой поверхности, двойная линия обозначает внешнюю частицу с импульсом не на массовой поверхности. Точка на линии означает что соответствующий пропагатор взят в степени два.

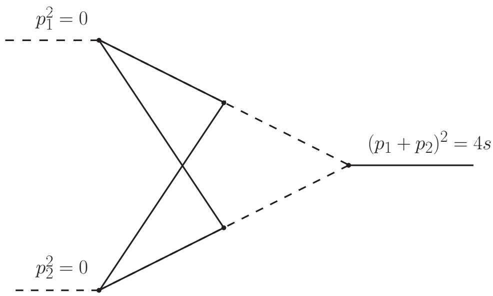
Рис. 1 — Набор мастер-интегралов рассчитанных методом прямого интегрирования в терминах эМПЛов.

стоит в следующем. Сначала мы находим все соответствующие полиномы

Симанчика и записываем параметрическое представление для рассматриваемого интеграла в виде

$$I_{\nu_1,\dots,\nu_2} = \frac{1}{(i\pi^{d/2})^l}\int\dots\int\frac{d^dk_1\dots d^dk_l}{D_1^{\nu_1}\dots D_n^{\nu_n}} =$$
$$= \frac{\Gamma(\nu-\frac{ld}{2})}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(\nu_j)}\int_\Delta\left(\prod_{j=1}^{n}x_j^{\nu_j-1}dx_j\right)\frac{U^{\nu-\frac{(l+1)d}{2}}}{F^{\nu-\frac{ld}{2}}}, \quad (10)$$

где $\nu = \sum\nu_l$, $\Gamma(x)$ - гамма функция Эйлера , d - размерность пространства-времени, $\Delta \in \{\vec{x} \mid x_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ - область интегрирования, а U и F это соответственно первый и второй полиномы Симанчика. Далее мы используем теорему Ченг-Ву [56] чтобы зафиксировать контур интегрирования Δ удобным нам способом и интегрируем получившееся выражение вплоть до последнего интегрирования в терминах МПЛов. При этом, мы используем функциональные соотношения для МПЛов и, при необходимости, проводим замену переменных. На последним шаге мы используем алгоритм из [57], имплементированный в пакете TEMPLE, и переписываем все G-функции через линейную комбинацию $\mathcal{E}_4$-функций, после чего, проделываем последнее интегрирование используя определение (2). В **третьем разделе** мы изучаем диаграмму типа ненепланарная



Штрихованные линии обозначают безмассовые пропагаторы и безмассовые внешние частицы с импульсом на массовой поверхности, сплошные линии обозначают массивные пропагаторы и массивные внешние частицы с импульсом на массовой поверхности.

Рис. 2 — Двух-петлевая диаграмма типа непланарная эллиптическая вершина.

эллиптическая вершина приведенную на рисунке 2. Для этого, мы используем метод похожий на тот, что был использован в предыдущем разделе. Единственная разница заключается в том, что в конце, мы переписываем наши результаты не в терминах еМПЛов, а в терминах повторных интегралов с алгебраическими ядрами. Полученный результат имеет ряд преимуществ, в частности, он может быть посчитан численно при любых значениях квадрата внешнего импульса s.

В **четвертом разделе** приведено заключение, в котором мы обсуждаем преимущества и недостатки метода прямого интегрирования. Также необходимо отметить, что все результаты данной главы были проверены численно с помощью пакета FIESTA [58].

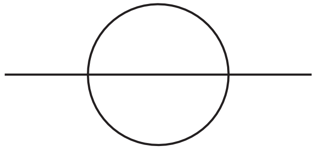


Рис. 3 — Двух-петлевая диаграмма типа «закат солнца»

Вторая глава диссертации основана на работах [A1—A4] и посвящена разработке нового метода решения неполилогарифмических фейнмановских интегралов основанного на решении системы ДУ по фейнмановскому параметру. Все результаты, данной главы, записаны в терминах повторных интегралов с алгебраическими ядрами. Разработаный метод основан на использовании фейнмановской параметризации на двух[2] пропагаторах и решении системы ДУ для получившейся системы эффективных мастер-интегралов. Похожий подход, также ранее, расматривался в [59—63]. Главным новшеством развиваемого подхода является то, что полученные таким образом представления могут быть использованы для решения более полной системы ДУ содержащей в себе более старшие мастер-интегралы. Последнее становится возможным благодаря специальной структуре повторных интегралов с алгебраическими ядрами.

В **первом разделе** мы даем короткое описание, так называемого, алгоритма Ли [38] который используется для редукции системы ДУ к ε-форме и обсуждаем его возможности и ограничения применительно к данной работе. Мы также приводим простой пример применения данного алгоритма. Во **втором разделе** исследуются двух-петлевые фейнмановские интегралы. Самой важной частью этой главы является получение нового интегрального представления для простейшей эллиптической двухпетлевой диаграммы типа «закат солнца», см. рисунок 3. Семейство интегралов типа «закат солнца», может быть записано в следующей форме:

$$S_{a,b,c}(s) = \int \frac{dk_1^d dk_2^d}{(i\pi^{d/2})^2} \frac{1}{(1-k_1^2)^a(1-k_2^2)^b(1-(k_1+k_2-q)^2)^c}\,, \tag{11}$$

[2]или трех, в случае интегралов с тремя петлями.

где $q^2 = s$. Были рассмотрены случаи как двумерного пространства $d = 2-2\varepsilon$ так и четырехмерного $d = 4-2\varepsilon$. Было показано что результаты в двумерном случае получаются более компактными. Система мастер-интегралов содержит три элемента, которые могут быть выбраны как:

$$\{S_{0,1,1},\, S_{1,1,1},\, S_{2,1,1}\}.$$

Для расчета этих мастер-интегралов мы воспользовались комбинированной техникой использующей, как Фейнмановскую параметризацию, так и метод ДУ. Сначала мы используем Фейнмановский трюк, с помощью которого объединяем два из трех пропагаторов и проделываем тривиальное интегрирование по внутреннему импульсу k_1, после чего получаем

$$S_{n,1,1}(q^2) = \Gamma(2-d/2)\int_0^1 dt\,(t\bar{t})^{d/2-2} \underbrace{\int \frac{dk_1}{i\pi^{d/2}} \frac{1}{(1-(k_1+q)^2)^n (y^2-k_1^2)^{2-d/2}}}_{I_n}, \tag{12}$$

где $y^2 = 1/t(1-t)$ логично назвать эффективной массой. После этого мы записываем систему ДУ для полной системы эффективных мастер-интегралов ($I = \{I_0,I_1,I_2\}$) стоящих в подынтегральной функции. Используя преобразование ($I = T\widetilde{I}$), которое может быть найдено с помощью методов описанных в [38], мы приводим эту систему к ε-форме:

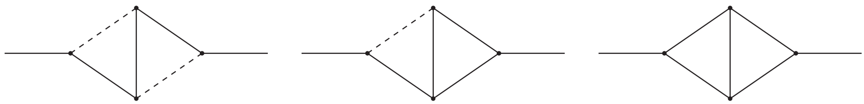
$$\frac{d\widetilde{I}}{dz} = \varepsilon\left(\frac{\mathcal{M}_0}{z} + \frac{\mathcal{M}_1}{z-1} + \frac{\mathcal{M}_{-1}}{z+1} + \frac{\mathcal{M}_{1/y}}{z-1/y} + \frac{\mathcal{M}_y}{z-y}\right)\widetilde{I}, \tag{13}$$

Где $\mathcal{M}_i$ это просто числовые матрицы. Эта система может быть легко решена итерационно, в терминах МПЛов, до любого наперед заданного порядка по параметру размерной регуляризации ε. Граничные условия можно получить методом прямого интегрирования, который был описан в предыдущей главе. После подстановки полученных решений в уравнение (12) и последнего интегрирования, в терминах повторных интегралов с алгебраическими ядрами, получаем решения для двух нетривиальных мастер-интегралов

$$S^{(2)}_{1,1,1} = 2J\left(\Theta_6,\omega_0^z;s\right) + \mathcal{O}(\varepsilon)\,, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{2,1,1} =& -J\left(\Theta_5;s\right) + J\left(\Theta_6;s\right) - J\left(\Theta_8;s\right) \\ &+ \frac{1}{2}J\left(\Theta_5,\omega_0^z;s\right) + \frac{3}{2}J\left(\Theta_8,\omega_0^z;s\right) - J\left(\Theta_9,\omega_0^z;s\right) + \mathcal{O}(\varepsilon)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Особенность полученных выражений заключается в том, что кинематическая переменная s находится только на верхнем пределе интегрирования, это позволяет нам использовать полученные результаты для решения



а) Воздушный змей с двумя безмассовыми линиями.

б) Воздушный змей с одной безмассовой линией.

в) Воздушный змей со всеми массивными линиями.

Сплошные линии обозначают массивные пропагаторы и штрихованные линии обозначают безмассовые пропагаторы.

Рис. 4 — Массивные диаграммы типа «воздушный змей».

более сложных двух-петлевых интегралов содержащих двух-петлевой «закат солнца» в качестве подграфа. В качестве примера мы рассмотрим серию интегралов типа «воздушный змей», см. рисунок 4.

Основная идея решения состоит в следующем. Сначала мы пишем систему ДУ для полной системы мастер-интегралов для семейства выбранного «воздушного змея». Система мастер-интегралов обязательно содержит в себе два нетривиальных мастер-интеграла (14)-(15). Далее, мы приводим систему ДУ к блочно диагональной форме и сводим все, кроме блока соответствующего мастер-интегралам из семейства «закат солнца», к ε-форме. Мастер-интегралы из (14)-(15) входят в отдельный блок и этот блок принципиально не может быть сведен к ε-форме. Но, у нас уже есть решения (14)-(15) и мы можем подставить эти решения в систему ДУ, после чего два уравнения превратятся в тождество. Далее, поскольку в решениях (14)-(15) кинематическая переменная s находится только на верхнем пределе интегрирования, мы можем проинтегрировать оставшиеся уравнения итерационно и получить решения для оставшихся мастер-интегралов тоже в классе повторных интегралов с алгебраическими ядрами. Это позволяет получать решения во всех порядках по параметру размерной регуляризации. Решения для интегралов типа «воздушный змей» с одной безмассовой линией и «воздушный змей» со всеми массивными линиями были получены впервые в терминах повторных интегралов с алгебраическими ядрами. Отметим, что решения для этих двух последних типов интегралов, в отличие от интеграла типа «воздушный змей» с двумя безмассовыми линиями, не могут быть выражены в терминах эМПЛов. Именно это является главной причиной того, что нам понадобилось ввести новый более общий класс функций. В конце данного раздела мы используем метод ДУ для получения решения для диаграммы типа непланарная эллиптическая вершина. Эта диаграмма не содержит диаграмму типа «закат солнца» в качестве подграфа поэтому мы опять должны применить фейнмановскую параметризацию для двух пропагаторов и затем решить систему дифференциальных уравнений для семейства эффективных мастер-интегралов.

Графическое представление семейства эффективных мастер-интегралов показано на рисунке 5.

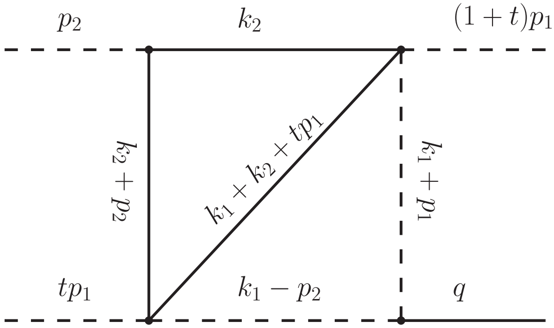


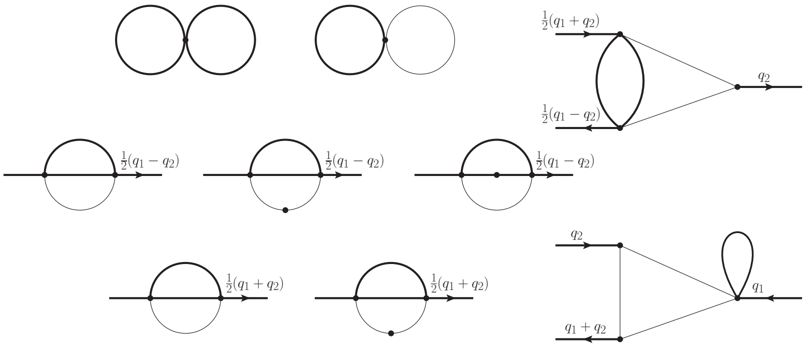
Рис. 5 — Графическое представление семейства эффективных мастер-интегралов

Нужно отметить, что полученные в этой главе решения по форме отличаются от решений полученных для этой же диаграммы, методом прямого интегрирования, в третьем разделе предыдущей главы.

В **третьем разделе** мы используем разработанную, в предыдущем разделе, методику для расчета интегралов описывающих двух-петлевые поправки к процессам в нерелятивистской квантовой хромодинамике. Соответствующая система мастер-интегралов изображена на рисунке 6. Решения для системы на рисунке 6 были получены в терминах повторных интегралов как для случая двух измерений $d = 2 - 2\varepsilon$ так и для случая четырех измерений $d = 4 - 2\varepsilon$.

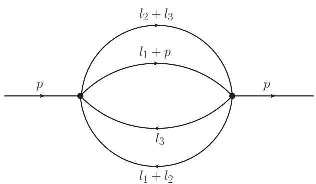
В **четвертом разделе** мы обобщаем метод, разработанный в первом разделе данной главы, на трех-петлевой случай. Конкретно, мы получили решения аналогичные решениям (14)-(15) для случая трех-петлевой диаграммы типа «банан» изображенной на рисунке 7а. Полученные решения, также, как и в двух-петлевом случае, могут быть использованы для расчета более сложных трех-петлевых интегралов содержащих «банан» в качестве подграфа. Последнее утверждение было проиллюстрировано на примере трех-петлевой диаграммы типа треугольник с двумя массивными петлями, см. рисунок 7б. Единственным существенным отличием J-функций описывающих решения для трех-петлевых фейнмановских интегралов является то, что последнее замыкающее интегрирование оказывается двойным, против одинарного, в двух-петлевом случае.

В **пятом разделе** приведено заключение, в котором мы обсуждаем преимущества и недостатки метода ДУ и сравниваем его с методом прямого интегрирования. Как и раньше, все результаты данной главы были проверены численно с помощью пакета FIESTA [58].

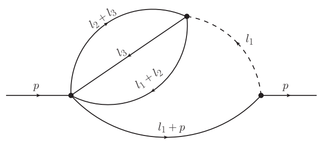


Толстые линии обозначают массивные пропагаторы с массой 1, тонкие линии обозначают массивные пропагаторы с массой x и точка на линии означает что соответствующий пропагатор взят в степени два.

Рис. 6 — Система мастер-интегралов описывающих двух-петлевые поправки к процессам в нерелятивистской КХД.



а) Трех-петлевая эллиптическая диаграмма типа банан.



б) Трех-петлевая эллиптическая диаграмма типа треугольник с двумя массивными петлями.

Сплошные линии обозначают массивные пропагаторы и штрихованные линии обозначают безмассовые пропагаторы.

Рис. 7 — Трех-петлевые эллиптические диаграммы

В **третьей главе**, основанной на работах [A1; A2], мы разрабатываем новый метод, который позволяет получать точные, по параметру размерной регуляризации, решения для некоторых эллиптических интегралов. Метод основан на решении системы ДУ для полной системы мастер-интегралов в терминах рядов Фробениуса по кинематической переменной. Оказывается, что в ряде важных случаев систему разностных уравнений для коэффициентов в степенном разложении можно свести к отдельным разностным уравнениям первого порядка т.е. к виду

$$f(n+1) = H(n)f(n) + Q(n) \tag{16}$$

общее решение этого уравнения хорошо известно

$$f(n) = \prod_{m=1}^{n-1} H(m) \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{Q(k)}{\prod\limits_{m=1}^{k} H(m)} + C \right\} \tag{17}$$

Где C это некоторая константа, которая определяется из граничных условий.

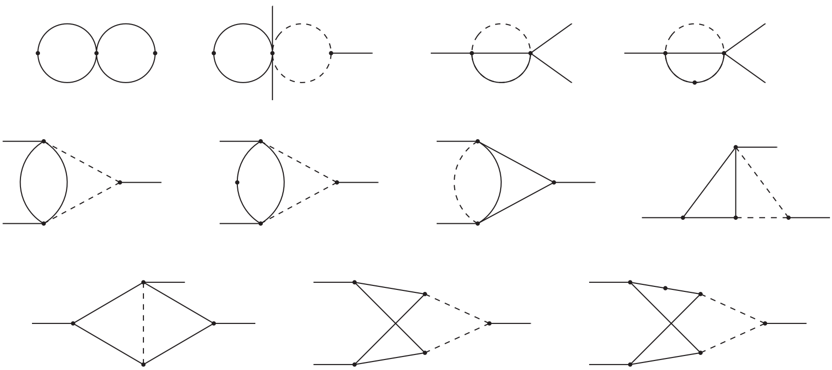


Рис. 8 — Система мастер-интегралов для семейства непланарной эллиптической вершины, эллиптическими являются последние два.

В **первом разделе** мы используем разработанный метод, чтобы получить точные, по параметру размерной регуляризации, решения для двух-петлевой непланарной эллиптической вершины. Это решение состоит из двух частей, сперва нужно найти решения для системы неэллиптических мастер-интегралов (полная система мастер-интегралов приведена на рисунке 8). Эти решения имеют вид

$$\sum_n \left(c_n + d_n s^{-\varepsilon}\right) s^n. \tag{18}$$

Коэффициенты c_n и d_n удовлетворяют однородным уравнением первого порядка, коэффициентами которых являются рациональные функции по n и ε. Это значит, что коэффициенты c_n и d_n будут просто некоторыми мономами по гамма функциям Эйлера с аргументами линейными по n и ε, а полное решение будет просто однократной суммой, которая может быть переписана через обобщенные гипергеометрические функции

$_pF_q$ [64]. С эллиптическими секторами ситуация несколько сложнее, решение для них также будет выражаться формулой (18) но теперь уравнения на коэффициенты будут содержать вклады от неэллиптических секторов и, следовательно, будут не однородными. Согласно (17), решениями таких уравнений будут некоторые суммы. Таким образом, полный ответ будет выражаться в виде некоторой двойной суммы, в которой верхний предел первой суммы будет равен переменной суммирования второй суммы, такие вложенные суммы обычно называют треугольными. Такие треугольные суммы могут быть переписаны через обобщенные функции Кампе-де-Ферье. Такое решение является точным и может быть вычислено с любой, наперед заданной, точностью в силу того, что результирующие суммы очень хорошо сходятся.

Во **втором разделе** мы показываем, как ту же методику можно использовать для получения решений для отдельных коэффициентов разложения ряда Лорана по параметру размерной регуляризации ε. Для этого используется пример все той же непланарной эллиптической вершины.

В **третьем разделе** мы применяем разработанную методику получения точных решений на системе интегралов описывающих двух-петлевые поправки к процессам в нерелятивистской квантовой хромодинамике.

В **четвертом разделе** приведено заключение, в котором мы обсуждаем преимущества и недостатки рассмотренного в этой главе метода и сравниваем его с методом прямого интегрирования и методом ДУ. Как и раньше, все результаты данной главы были проверены численно с помощью пакета FIESTA [58] и путем сравнения с результатами полученными в предыдущих главах.

В **заключении** приведены основные результаты работы и обсуждение полученных результатов, которые заключаются в следующем:

Целью данной диссертации было внесение вклада в широкую область научных знаний, посвященную методам аналитического расчета петлевых фейнмановских интегралов. В данной области, наиболее важной и актуальной темой является разработка новых методов для вычисления, так называемых, неполилогарифмических фейнмановских интегралов в классе хорошо определенных функций. Именно этой теме и посвящена данная работа. В результате работы, на серии конкретных примеров неполилогарифмических интегралов, были разработаны новые методы и подходы, которые и будут обсуждаться в данном заключении.

Первая часть диссертации посвящена изучению метода расчета эллиптических фейнмановских интегралов с помощью параметрического представления. Этот метод был известен ранее, однако, нам удалось внести в него заметный вклад. Также, изучение этого подхода было полезно поскольку предоставляет некоторую «точку отсчета» для других методов. Под этим мы понимаем, что новые разработанные нами методы можно удобно сравнить с уже хорошо известным методом прямого интегрирования обращаясь к собственным результатам, а не к ссылкам на другие работы. Прежде всего, мы получили аналитические решения для серии треугольных эллиптических фейнмановских интегралов в терминах эМПЛов. Изучение данных интегралов представляет практический интерес, поскольку они входят в семейство фейнмановских интегралов описывающих двух-петлевые поправки к процессам рождения и распада тяжелого кваркония [65; 66]. Далее, нам удалось показать, что метод прямого интегрирования может быть, при некоторых условиях, успешно использован для вычисления диаграммы содержащей две эллиптические структуры. Главным условием для этого, является нахождение нетривиальной рациональной параметризации некой сложной двумерной поверхности. И наконец, мы показали, что рассматриваемый метод позволяет получить решения в терминах, введенных нами, новых функций названных повторными интегралами с алгебраическими ядрами, на примере непланарной эллиптической вершины. Помимо этого, в первой главе мы подробно рассмотрели наиболее важные классы специальных функций, а именно МПЛы, эМПЛы и повторные интегралы с алгебраическими ядрами, которые будут далее использованы в этой работе. Для проведения всех расчетов, представленных в первой главе, был разработан специальный программный пакет TEMPLE на базе языка Wolfram Mathematica [54].

Во второй части диссертации разрабатывается новый метод для расчета неполилогарифмических фейнмановских интегралов, основой которого является решение системы ДУ по фейнмановскому параметру. Все решения выражаются через новый, специально введенный в этой работе, класс функций, названный повторными интегралами с алгебраическими ядрами. Применение этого метода позволило получить следующие результаты для двух-петлевых фейнмановских интегралов:

- Было получено новое интегральное представление для простейшей эллиптической диаграммы типа «закат солнца» в двух и четырех измерениях. Показано, что полученные решения могут быть посчитаны численно, как ниже порога ($s \leq 1$) так и выше его ($s > 1$)
- Показано, что новые интегральные представления для диаграммы типа «закат солнца» могут быть использованы для получения решений для более сложных двух-петлевых диаграмм содержащих «закат солнца» в качестве подграфа. В качестве примера были получены решения для трех родственных типов фейнмановских интегралов, а именно «воздушных змеев» с двумя безмассовыми линиями, одной безмассовой линией и всеми массивными линиями. Последние два не могут быть посчитаны методом прямого интегрирования в классе эМПЛов. Тем самым, доказано, что повторные интегралы с алгебраическими ядрами являются более широким классом функций чем обычные эМПЛы.

– Были получены новые интегральные представления для двух-петлевой эллиптической диаграммы типа непланарная эллиптическая вершина.
– Были получены новые интегральные представления для системы мастер-интегралов описывающих двух-петлевые поправки к процессам в нерелятивистской КХД.

Также, было показано, что данный метод может быть обобщен на случай трех-петлевых интегралов. Последнее утверждение было продемонстрировано на примере трех-петлевой эллиптической диаграммы типа «банан» и на диаграмме типа треугольник с двумя массивными петлями. В качестве преимуществ данного метода, по сравнению с методом прямого интегрирования, можно указать его большую универсальность и простоту при получении высших поправок по параметру размерной регуляризации ε.

Наконец, последняя часть диссертации посвящена разработке нового метода для расчета неполилогарифмических фейнмановских интегралов, основой которого является решение системы ДУ методом Фробениуса. Данный метод позволяет получить точные, по параметру размерной регуляризации, решения для некоторого класса фейнмановских интегралов в терминах хорошо сходящихся треугольных сумм. С использованием этого метода были получены точные решения для двух-петлевой эллиптической диаграммы типа непланарная эллиптическая вершина и точные решения для системы мастер-интегралов описывающих двух-петлевые поправки к процессам в нерелятивистской КХД. Но возможности применения этого метода в общем случае еще нуждается в дополнительном изучении. Достоинством метода являются точные решения, которые могут быть легко посчитаны с огромной точностью.

При работе над диссертацией, были сформулированы новые научные вопросы, изучение которых автор хотел бы отложить для будущих исследований. Во-первых, большой интерес представляет изучение новых, введенных в этой работе, функций, а именно, повторных интегралов с алгебраическими ядрами. На данный момент, понятно только как проводить регуляризацию этих функций, но ни методы аналитического продолжения, в общем случае, ни функциональные соотношения и возможная структура алгебры Хоппфа, нам неизвестны. Более того, пожалуй самой главной задачей является разработка алгоритма, на подобии соответствующего алгоритма для обычных МПЛов [48], который бы позволил численно считать эти функции с произвольной точностью как выше так и ниже порога. Во-вторых, хотелось бы применить метод разработанный во второй главе для решения более сложных практических задач. В качестве примера такой задачи, прежде всего, можно рассмотреть двух-петлевые поправки к процессам рождения и распада тяжелого кварккония. Полная система мастер-интегралов, для этой задачи, состоит из 133 элементов

[65; 66] из которых 40 являются эллиптическими. Если удастся получить такие решения то это будет надежной демонстрацией эффективности разработанного метода. Наконец, важным представляется изучение других методов вычисление фейнмановских интегралов. Наибольший интерес, помимо изученных в этой работе, представляет метод основанный на решениях размерных рекуррентных соотношений. Такой метод, в частности, позволяет получить точные, по параметру размерной регуляризации, решения для простейшей эллиптической диаграммы типа «закат солнца» [67]. Прежде всего, необходимо обобщить этот метод на диаграмму типа непланарная эллиптическая вершина, а затем и на другие боле сложные двух-петлевые и трех-петлевые фейнмановские интегралы.

Публикации автора по теме диссертации

A1. *Bezuglov*, *M. A.* On series and integral representations of some NRQCD master integrals / M. A. Bezuglov, A. V. Kotikov, A. I. Onishchenko // Jetp Lett. — 2022. — Май. — Т. 116. — С. 61—69. — arXiv: 2205.14115 [hep-ph].

A2. *Bezuglov*, *M. A.* Non-planar elliptic vertex / M. A. Bezuglov, A. I. Onishchenko // JHEP. — 2022. — Т. 04. — С. 045. — arXiv: 2112.05096 [hep-ph].

A3. *Bezuglov*, *M. A.* Integral representation for three-loop banana graph / M. A. Bezuglov // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 104, № 7. — С. 076017. — arXiv: 2104.14681 [hep-ph].

A4. *Bezuglov*, *M. A.* Massive kite diagrams with elliptics / M. A. Bezuglov, A. I. Onishchenko, O. L. Veretin // Nucl. Phys. B. — 2021. — Т. 963. — С. 115302. — arXiv: 2011.13337 [hep-ph].

A5. *Bezuglov*, *M.* Calculation of master integrals in terms of elliptic multiple polylogarithms / M. Bezuglov // Int. J. Mod. Phys. A. — 2020. — Т. 35, № 13. — С. 2050063. — arXiv: 2003.05367 [hep-th].

Список литературы

1. *Langacker*, *P.* The standard model and beyond / P. Langacker. — Taylor & Francis, 2017.

2. *Nagashima*, *Y.* Elementary Particle Physics: Foundations of the Standard Model V2. Т. 2 / Y. Nagashima. — John Wiley & Sons, 2013.

3. *Емельянов*, *В.* Стандартная модель и ее расширения / В. Емельянов. — Litres, 2018.

4. Review of Particle Physics / P. Zyla [и др.] // PTEP. — 2020. — Т. 2020, № 8. — С. 083C01.

5. *Верешков, Г.* Темная материя и темная энергия. Физика за пределами стандартной модели / Г. Верешков, Л. А. Минасян // Сборник научных трудов SWorld. — 2012. — Т. 10, № 1. — С. 65—72.
6. *Einasto, J.* Dark matter / J. Einasto // Brazilian Journal of Physics. — 2013. — Т. 43, № 5. — С. 369—374.
7. *Bertone, G.* History of dark matter / G. Bertone, D. Hooper // Reviews of Modern Physics. — 2018. — Т. 90, № 4. — С. 045002.
8. *Bertone, G.* A new era in the search for dark matter / G. Bertone, T. M. Tait // Nature. — 2018. — Т. 562, № 7725. — С. 51—56.
9. *Amendola, L.* Dark energy: theory and observations / L. Amendola, S. Tsujikawa. — Cambridge University Press, 2010.
10. *Ruiz-Lapuente, P.* Dark energy: observational and theoretical approaches / P. Ruiz-Lapuente. — Cambridge University Press, 2010.
11. *Kragh, H. S.* The weight of the vacuum: A scientific history of dark energy / H. S. Kragh, J. M. Overduin. — Springer, 2014.
12. *Фейнман, Р.* Фейнмановские лекции по гравитации / Р. Фейнман, Ф. Мориниго, У. Вагнер // М.: Янус-К. — 2000. — Т. 296.
13. *Дрёмин, И. М.* Физика на Большом адронном коллайдере / И. М. Дрёмин // Успехи физических наук. — 2009. — Т. 179, № 6. — С. 571—579.
14. *Schörner-Sadenius, T.* The Large Hadron Collider: Harvest of Run 1 / T. Schörner-Sadenius. — Springer, 2015.
15. *Peskin, M. E.* An introduction to quantum field theory / M. E. Peskin, D. V. Schroeder. — Boulder, CO : Westview, 1995. — URL: https://cds.cern.ch/record/257493 ; Includes exercises.
16. *Gehrmann, T.* QCD and High Energy Interactions: Moriond 2014 Theory Summary / T. Gehrmann // arXiv preprint arXiv:1406.5379. — 2014.
17. W±Z production at hadron colliders in NNLO QCD / M. Grazzini [и др.] // Physics Letters B. — 2016. — Т. 761. — С. 179—183.
18. *Brown, F.* Periods and Feynman amplitudes / F. Brown // 18th International Congress on Mathematical Physics. — 12.2015. — arXiv: 1512.09265 [math-ph].
19. *Brown, F.* Feynman amplitudes, coaction principle, and cosmic Galois group / F. Brown // Commun. Num. Theor. Phys. — 2017. — Т. 11. — С. 453—556. — arXiv: 1512.06409 [math-ph].
20. *Tapušković, M.* Motivic Galois coaction and one-loop Feynman graphs / M. Tapušković // Commun. Num. Theor. Phys. — 2021. — Т. 15, № 2. — С. 221—278. — arXiv: 1911.01540 [math.AG].

21. *Bloch*, *S.* Local mirror symmetry and the sunset Feynman integral / S. Bloch, M. Kerr, P. Vanhove // Adv. Theor. Math. Phys. — 2017. — T. 21. — C. 1373—1453. — arXiv: 1601.08181 [hep-th].

22. *Vanhove*, *P.* Feynman integrals, toric geometry and mirror symmetry / P. Vanhove // KMPB Conference: Elliptic Integrals, Elliptic Functions and Modular Forms in Quantum Field Theory. — 2019. — C. 415—458. — arXiv: 1807.11466 [hep-th].

23. *Tkachov*, *F. V.* A theorem on analytical calculability of 4-loop renormalization group functions / F. V. Tkachov // Physics Letters B. — 1981. — T. 100, № 1. — C. 65—68.

24. *Chetyrkin*, *K. G.* Integration by parts: the algorithm to calculate β-functions in 4 loops / K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov // Nuclear Physics B. — 1981. — T. 192, № 1. — C. 159—204.

25. *Laporta*, *S.* High-precision calculation of multiloop Feynman integrals by difference equations / S. Laporta // International Journal of Modern Physics A. — 2000. — T. 15, № 32. — C. 5087—5159.

26. *Lee*, *R. N.* Critical points and number of master integrals / R. N. Lee, A. A. Pomeransky // JHEP. — 2013. — T. 11. — C. 165. — arXiv: 1308.6676 [hep-ph].

27. *Baikov*, *P. A.* Explicit solutions of the multiloop integral recurrence relations and its application / P. A. Baikov // Nucl. Instrum. Meth. A / под ред. M. Werlen, D. Perret-Gallix. — 1997. — T. 389. — C. 347—349. — arXiv: hep-ph/9611449.

28. *Bogolyubov*, *N.* Introduction to Quantum Fields Theory / N. Bogolyubov, D. Shirkov. — Moscow : Nauka Eds, 1973.

29. *Smirnov*, *V.* Feynman Integral Calculus / V. Smirnov. — Springer Berlin Heidelberg, 2006. — URL: https://books.google.ru/books?id=4ecWm6eRU6gC.

30. *Kotikov*, *A.* Differential equations method. New technique for massive Feynman diagram calculation / A. Kotikov // Physics Letters B. — 1991. — T. 254, № 1. — C. 158—164. — URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939190413K.

31. *Kotikov*, *A.* Differential equation method. The calculation of N-point Feynman diagrams / A. Kotikov // Physics Letters B. — 1991. — T. 267, № 1. — C. 123—127.

32. *Kotikov*, *A.* Differential equations method: the calculation of vertex-type Feynman diagrams / A. Kotikov // Physics Letters B. — 1991. — T. 259, № 3. — C. 314—322.

33. *Remiddi, E.* Differential equations for Feynman graph amplitudes / E. Remiddi // Il Nuovo Cimento A (1971-1996). — 1997. — Т. 110, № 12. — С. 1435—1452.

34. *Gehrmann, T.* Differential equations for two-loop four-point functions / T. Gehrmann, E. Remiddi // Nuclear Physics B. — 2000. — Т. 580, № 1/2. — С. 485—518.

35. *Argeri, M.* Feynman diagrams and differential equations / M. Argeri, P. Mastrolia // International Journal of Modern Physics A. — 2007. — Т. 22, № 24. — С. 4375—4436.

36. *Henn, J. M.* Lectures on differential equations for Feynman integrals / J. M. Henn // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2015. — Т. 48, № 15. — С. 153001.

37. *Henn, J. M.* Multiloop integrals in dimensional regularization made simple / J. M. Henn // Physical review letters. — 2013. — Т. 110, № 25. — С. 251601.

38. *Lee, R. N.* Reducing differential equations for multiloop master integrals / R. N. Lee // JHEP. — 2015. — Т. 04. — С. 108. — arXiv: 1411.0911 [hep-ph].

39. *Goncharov, A. B.* Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes / A. B. Goncharov // Mathematical Research Letters. — 1998. — Т. 5. — С. 497—516.

40. *Goncharov, A. B.* Multiple polylogarithms and mixed Tate motives / A. B. Goncharov // arXiv preprint math/0103059. — 2001.

41. *Panzer, E.* Algorithms for the symbolic integration of hyperlogarithms with applications to Feynman integrals / E. Panzer // Computer Physics Communications. — 2015. — Т. 188. — С. 148—166.

42. *Bogner, C.* MPL—A program for computations with iterated integrals on moduli spaces of curves of genus zero / C. Bogner // Comput. Phys. Commun. — 2016. — Т. 203. — С. 339—353. — arXiv: 1510.04562 [physics.comp-ph].

43. *Duhr, C.* PolyLogTools—Polylogs for the masses / C. Duhr, F. Dulat // Journal of High Energy Physics. — 2019. — Т. 2019, № 8. — С. 135.

44. *Brown, F.* The Massless higher-loop two-point function / F. Brown // Commun. Math. Phys. — 2009. — Т. 287. — С. 925—958. — arXiv: 0804.1660 [math.AG].

45. *Brown, F.* On the periods of some Feynman integrals / F. Brown // arXiv preprint arXiv:0910.0114. — 2009.

46. *Brown, F.* A double integral of dlog forms which is not polylogarithmic / F. Brown, C. Duhr //. — 06.2020. — arXiv: 2006.09413 [hep-th].

47. Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry / A. B. Goncharov [и др.] // Duke Mathematical Journal. — 2005. — Т. 128, № 2. — С. 209—284.

48. *Vollinga*, *J.* Numerical evaluation of multiple polylogarithms / J. Vollinga, S. Weinzierl // Comput. Phys. Commun. — 2005. — Т. 167. — С. 177. — arXiv: hep-ph/0410259.

49. *Naterop*, *L.* handyG —Rapid numerical evaluation of generalised polylogarithms in Fortran / L. Naterop, A. Signer, Y. Ulrich // Comput. Phys. Commun. — 2020. — Т. 253. — С. 107165. — arXiv: 1909.01656 [hep-ph].

50. *Sabry*, *A.* Fourth order spectral functions for the electron propagator / A. Sabry // Nuclear Physics. — 1962. — Т. 33. — С. 401—430.

51. *Brown*, *F.* Multiple elliptic polylogarithms / F. Brown, A. Levin // arXiv preprint arXiv:1110.6917. — 2011.

52. Elliptic Feynman integrals and pure functions / J. Broedel [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2019. — Т. 2019, № 1. — С. 23.

53. Elliptic symbol calculus: from elliptic polylogarithms to iterated integrals of Eisenstein series / J. Broedel [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2018. — Т. 2018, № 8. — С. 14.

54. *Inc.*, *W. R.* Mathematica, Version 13.0.0 / W. R. Inc. — URL: https://www.wolfram.com/mathematica ; Champaign, IL, 2021.

55. *Chen*, *K.-T.* Iterated path integrals / K.-T. Chen // Bull. Am. Math. Soc. — 1977. — Т. 83. — С. 831—879.

56. *Cheng*, *H.* EXPANDING PROTONS: SCATTERING AT HIGH-ENERGIES / H. Cheng, T. T. Wu. — 1987.

57. Elliptic polylogarithms and Feynman parameter integrals / J. Broedel [и др.] // JHEP. — 2019. — Т. 05. — С. 120. — arXiv: 1902.09971 [hep-ph].

58. *Smirnov*, *A. V.* FIESTA4: Optimized Feynman integral calculations with GPU support / A. V. Smirnov // Comput. Phys. Commun. — 2016. — Т. 204. — С. 189—199. — arXiv: 1511.03614 [hep-ph].

59. *Fleischer*, *J.* The Differential equation method: Calculation of vertex type diagrams with one nonzero mass / J. Fleischer, A. V. Kotikov, O. L. Veretin // Phys. Lett. B. — 1998. — Т. 417. — С. 163—172. — arXiv: hep-ph/9707492.

60. *Fleischer*, *J.* Analytic two loop results for selfenergy type and vertex type diagrams with one nonzero mass / J. Fleischer, A. V. Kotikov, O. L. Veretin // Nucl. Phys. B. — 1999. — Т. 547. — С. 343—374. — arXiv: hep-ph/9808242.

61. *Fleischer, J.* Two loop selfenergy master integrals on-shell / J. Fleischer, M. Y. Kalmykov, A. V. Kotikov // Phys. Lett. B. — 1999. — T. 462. — C. 169—177. — arXiv: hep-ph/9905249. — [Erratum: Phys.Lett.B 467, 310–310 (1999)].
62. *Kniehl, B. A.* Calculating four-loop tadpoles with one non-zero mass / B. A. Kniehl, A. V. Kotikov // Phys. Lett. B. — 2006. — T. 638. — C. 531—537. — arXiv: hep-ph/0508238.
63. *Kniehl, B. A.* Counting master integrals: integration-by-parts procedure with effective mass / B. A. Kniehl, A. V. Kotikov // Phys. Lett. B. — 2012. — T. 712. — C. 233—234. — arXiv: 1202.2242 [hep-ph].
64. Special functions. T. 71 / G. E. Andrews [и др.]. — Cambridge university press Cambridge, 1999.
65. *Chen, L.-B.* Two-loop integrals for CP-even heavy quarkonium production and decays / L.-B. Chen, Y. Liang, C.-F. Qiao // Journal of High Energy Physics. — 2017. — T. 2017, № 6. — C. 25.
66. *Chen, L.-B.* Two-Loop integrals for CP-even heavy quarkonium production and decays: Elliptic Sectors / L.-B. Chen, J. Jiang, C.-F. Qiao // Journal of High Energy Physics. — 2018. — T. 2018, № 4. — C. 80.
67. *Tarasov, O. V.* Hypergeometric representation of the two-loop equal mass sunrise diagram / O. V. Tarasov // Phys. Lett. B. — 2006. — T. 638. — C. 195—201. — arXiv: hep-ph/0603227.