

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. Н.Н.  
БОГОЛЮБОВА

На правах рукописи



Яхиббаев Равиль Маратович

**БИСКАЛЯРНЫЕ ФИШНЕТ-МОДЕЛИ В  
ПРОИЗВОЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ И ИХ  
ПРИЛОЖЕНИЯ**

Специальность 1.3.3 —  
«Теоретическая физика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Дубна — 2024

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединённого института ядерных исследований

Научный руководитель: профессор, доктор физико-математических наук,  
член-корреспондент РАН,  
**Казаков Дмитрий Игоревич**

Научный консультант: кандидат физико-математических наук,  
**Леонид Владимирович Борк**

С электронной версией диссертации можно ознакомиться на официальном сайте Объединённого института ядерных исследований в информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» по адресу: <https://dissertations.jinr.ru>. С печатной версией диссертации можно ознакомиться в Научно-технической библиотеке ОИЯИ (г. Дубна, Московская область, ул. Жолио-Кюри, д. 6).

Технический секретарь диссертационного совета по теоретической физике ЛТФ, канд. физ.-мат. наук

Быстрицкий Юрий Михайлович

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы.

Конформные квантовые теории поля представляют значительный интерес как самостоятельные модели, так и как приближения, использующиеся для изучения многих фундаментальных явлений. Конформно-полевые теории находят свои применения в физике критических явлений, в различных космологических моделях, а также в рамках квантовой хромодинамики. Конформные теории поля удобны для изучения различными методами, однако набор таких теорий был крайне невелик до последнего времени. И если двумерии в связи с развитием теории струн они являются хорошо и всесторонне изученными (так же можно сказать и об остальных низкоразмерных квантовых моделях типа модели Садчева-Йе-Китаева (SYK)), то понимание конформных теорий в более высоких измерениях является крайне неполным. Достаточно хорошо изученными квантовыми теориями поля вне двумерия являются суперсимметричные теории: четырехмерная максимально суперсимметричная теория Янга Миллса ( $4d \mathcal{N} = 4 \text{ SYM}$ ) [5], и трехмерная модель Аарони-Бергмана-Джаффериса-Малдасены (ABJM-модель или конформная  $3d \mathcal{N} = 6$  теория Черна-Саймонса) [6]. Данные модели считаются интегрируемыми по крайней мере в планарном пределе т'Хоофта, что позволяет извлекать из них информацию об аномальной размерности операторов с помощью различных методов, например, квантовой спектральной кривой [7–9] или анзаца Бете [10; 11]. Эти методы, в свою очередь, приводят к пониманию устройства пертурбативного и непертурбативного режимов теорий в корреляционных функциях и амплитудах и поведению теории в целом, раскрывая внутренние структуры теорий и их связи с другими моделями [5; 12].

В 2015 году Гурдоганом, Каэтано и Казаковым [13] был предложен ряд теорий, которые представляют собой деформированные копии четырехмерной  $\mathcal{N} = 4$  янг-миллсовской модели с "отсоединенными" калибровочными полями и их суперпартнерами, изначальная  $R$ -симметрия  $PSU(2,2|4)$  в которых нарушается до  $SU(2,2) \times U(1)^3$  [14]. В полученных теориях нарушена унитарность, и они не обладают суперсимметрией. Тем не менее в рамках предела двойного скейлинга деформированные модели распадаются на несколько типов подмоделей, которые неожиданно оказываются интегрируемыми. Эти модели в планарном пределе представляют собой бесконечные

решетки фейнмановских диаграмм различных конфигураций, состоящих из правильных многоугольников; изучение подобных диаграмм было начато в пионерской работе Замолодчикова [15]. Если точнее, то после деформации и взятия предела двойного скейлинга из материнской суперсимметричной модели возникают модели, которым в планарном пределе соответствуют решетки фейнмановских диаграмм со скалярными вершинами типа  $\phi^4$  и юкавскими вершинами (соответствующая модель называется  $\chi$ -конформной теорией [16]). Однако и эта модель может быть упрощена до теории, которая содержит лишь вершины типа  $\phi^4$ : соответствующая теория называется бискалярной фишнет-моделью, и в планарном пределе описывается лишь квадратной решеткой фейнмановских интегралов. Несмотря на свою простоту, эта модель позволяет глубже взглянуть на интегрируемость конформных теорий поля и их соотношение с теорией струн. Стоит отдельно остановиться на этих двух аспектах бискалярной фишнет-модели.

В основе интегрируемости бискалярных фишнет-теорий в планарном пределе лежит факт того, что корреляторы в них отобраны особым образом и представляют собой регулярную "глобусную" или "колесную" фейнмановскую диаграмму [17]. Причем регулярность структуры таких графов позволяет их интерпретировать как трансфер-матрицы гейзенберговской спиновой цепочки  $SO(1,5) \sim SU(2,2)$ . Эти трансфер-матрицы коммутируют со всеми локальными интегралами движения для произвольных спектральных параметров, то есть эта бискалярная фишнет-модель в планарном пределе справедливо может считаться интегрируемой [17]. С точки зрения квантовой теории поля интегрируемость дает возможность находить точные спектры аномальных размерностей и реджевские траектории, а вычисления отдельных корреляционных функций в интегрируемых квантовых теориях поля облегчены возможностью применения метода уникальности и его обобщений [18–21]. Таким образом, интегрируемость четырехмерных фишнет-моделей позволяет получать полные корреляционные функции и четырехточечные амплитуды рассеяния [22; 23]. Вышеописанный метод, основанный на отождествлении фишнет-моделей со спиновыми цепочками, обычно совместим с подходом Замолодчикова, в котором фейнмановские графы рассматриваются как статистическая система на решетке Бакстера [15; 24]. В таком подходе оказывается удобным изучение термодинамического анзаца Бете, который

проливает свет на дуальную связь между бискалярными фишнет-моделями и нелинейными сигма-моделями [25].

Дуальные соотношения являются примером реализации голографического принципа, они позволяют смотреть на разные модели как на режимы одной более общей модели [26]. Обычно подразумевается, что эквивалентны квантовая гравитация (в виде теории струн или М-теории), компактифицированная до AdS-геометрии и конформная теория поля, заданная на границе этого многообразия. Так, например, особенно широкую популярность получило соответствие между пятимерной теорией струн в пространстве анти де Ситтера и четырехмерной  $\mathcal{N} = 4$  SYM, носящее тем не менее характер гипотезы, поскольку соответствие не просто трудно доказать, но и проверить [8]. В этом смысле вышеописанные несуперсимметричные интегрируемые квантовые теории поля могут быть более удобными для исследования точных голографических соответствий, так как структура корреляторов в фишнет-моделях гораздо проще, она обладает предсказуемой регулярностью, как было отмечено ранее. Именно благодаря такой регулярности возможно построение из первых принципов голографических фишчейн-моделей, по крайней мере, соответствующих бискалярным фишнет-моделям в четырехмерии, что было сделано Громовым и Севером в ряде их работ [27–29]. Такие голографические модели представляют собой замкнутую дискретизированную ломаную струну (или цепочку попарно взаимодействующих частиц), которая в классическом случае обернута вокруг светового конуса в шестимерном пространстве. В квантовом же случае из-за учета поправок оказывается, что световой конус превращается в соответствующий многомерный гиперboloид, то есть в пространство AdS<sub>5</sub>, что, вообще говоря, является не совсем тривиальным выводом. Возможно и строгое доказательство наблюдаемого соответствия, основанного на сличении корреляционных функций, с одной стороны, а с другой – на непосредственном доказательстве соответствия производящих операторов в фишнет-модели и гамильтониана фишчейн-модели. Доказательство интегрируемости дискретизированных струн на классическом и квантовом уровнях строится также на нахождении условия нулевой кривизны для лаксовых пар [28]. Такие модели оказываются приемлемыми для получения спектров операторов аномальной размерности не только для самых простых (нуль-магнонных) операторов, но и более изощренных операторов [28], более

того, предполагается, что при настройке константы связи и взятии непрерывного предела данной модели, ломаная струна переходит в непрерывную [30]. Таким образом с помощью интегрируемости удастся напрямую связать струноподобные действия и квантовые теории поля, что является убедительной иллюстрацией действительности голографического описания.

Всё вышеперечисленное касалось изучения фишнет-модели в четырехмерии, однако существует непосредственное обобщение фишнет-моделей на произвольное число пространственных измерений. Более того, в планарном пределе многомерные модели могут иметь неизотропные решетки, и тем не менее отвечать условиям интегрируемости. При этом изучение по крайней мере бискалярных фишнет-моделей в различных измерениях имеет значительную ценность в связи с тем, что им могут отвечать модели в совершенно различных областях квантовой теории поля. Например, модель Балицкого-Фадиана-Кураева-Липатова или липатовская спиновая цепочка реджеизированных глюонов в лидирующем пределе могут быть описана в терминах бискалярных фишнет-моделей [31]. Или вполне разумно мыслить, что если четырехмерные и трехмерные суперсимметричные модели в специфическом пределе редуцируются до фишнет-моделей, то то же самое может происходить и в моделях более высокой размерности, например, в шестимерных SYM-моделях, явный вид которых изучался в работах [32–36]. Более того, шестимерная бискалярная модель представляет самостоятельный интерес, так как она являет собой пример простейшей теории с высшими производными при целочисленной канонической размерности полей в единицах массы. Изучение спектра конформной размерности в такой теории может иметь интересные приложения. Из-за этого особый акцент в данной работе делается на изучении шестимерных бискалярных фишнет-моделей.

То же самое касается и голографических фишчейн-моделей: обобщение фишчейн-моделей на произвольное число измерений диктуется естественным соображением о том, что единообразно квантоваться должны нелинейные сигма-модели в любой некритичной размерности [28]. Такие модели должны обитать в многообразиях высшей размерности и обладать теми же свойствами, что и фишчейн Севера-Громова с поправкой на возможность модификации взаимодействия между частицами в цепочке. Такое исследование двух голографически связанных моделей — шестимерной фишнет-модели и

восьмимерного фишчейна — может способствовать также изучению аспектов  $\mathcal{N} = (1,1)$  и  $\mathcal{N} = (2,0)$  SYM-моделей, а в свете возможности построения точных двойственных струнных копий — сигма-моделей на AdS<sub>7</sub> [37].

И, в конце концов, интерес представляют конкретные приложения вычислений с помощью фишнет-моделей, например, непосредственное вычисление амплитуд, так как последние иногда имеют неочевидные скрытые симметрии (например, дуальная конформность). Иногда такие симметрии позволяют связывать нетривиальным образом амплитуды даже в различных измерениях [38]. Более того, принципы, на которых строятся шестимерные амплитуды в фишнет-моделях, могут пролить свет на то, как именно устроены амплитуды в теориях вроде  $\mathcal{N} = (2,0)$  SYM или иных шестимерных моделях, эффективные или явные формы которых не так понятны до сих пор [39—41].

**Целью** данной работы подробное описание бискалярных фишнет-моделей в произвольных измерениях, их обобщение, нахождение их голографически дуальных копий, исследование возможных приложений для вычисления шестимерных амплитуд и изучения принципов построения шестимерных амплитуд.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать бискалярные фишнет-модели, обобщенные на случай произвольного числа измерений. Получить соответствующие спектры для волновых функций конформной теории поля по крайней мере для нуль- и одномагнетонного случая.
2. Вывести дуальные им модели — фишчейн-модели, а также обосновать голографическое соответствие.
3. Аналитическими методами исследовать спектры соответствующих операторов в изученных теориях, сравнить результаты на классическом и квантовом уровнях.
4. Рассмотреть приложения моделей для изучения амплитуд в различных шестимерных теориях.
5. Изучить возможность построения итеративных соотношений для интегралов с помощью дуальной конформности в шестимерном пространстве.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Изучены спектры бискалярной фишнет-модели с произвольным параметром деформации решетки интегралов в произвольном числе измерений. Предложено рассмотрение контрчленов нового вида для обеспечения УФ-полноты неизотропных моделей.
2. Получены квазиклассические фишчейн-модели в произвольном числе пространственно-временных измерений, соответствующие фишнет-моделям (изотропным или с целочисленным параметром деформации). Модель была проквантована, получены точные спектры конформной размерности в пределе границы объемлющего многообразия, соответствующие полученным спектрам в фишнет-модели
3. Вычислены шестимерные конформные амплитуды в разных кинематических пределах и режимах константы связи, проведено сравнение с прямыми расчетами фейнмановских интегралов. Найдено соответствие между шестимерными высокоэнергетическими лестничными амплитудами в теории  $6d \mathcal{N} = (1,1) \text{ SYM}$  и амплитудами в бискалярной фишнет-модели.
4. Изучены ряды нетривиальных фейнмановских шестимерных диаграмм типа "бокс" и исследована возможность построения итеративных соотношений между различными типами суперконформных моделей в шестимерии с высшими производными (аналогичных соотношениям Берна-Диксона-Смирнова (BDS) для  $4d \mathcal{N} = 4 \text{ SYM}$ ).

**Научная новизна:**

1. Непосредственно найдены спектры для неизотропных произвольных бискалярных фишнет-моделей в нульмагнетонном и одномагнетонном случаях.
2. Предложена схема вычисления фиксированных точек для бискалярных фишнет-моделей в шестимерии на массовой поверхности.
3. Предложено обобщение фишчейн-модели на произвольное число пространственных измерений, соответствующей деформированной бискалярной фишнет-модели: проведена проверка соответствия и доказана голографическая дуальность моделей.
4. Построены амплитуды шестимерных моделей в различных пределах константы связи и кинематических режимах. Предложен способ вычисления амплитуд в пределе сильной связи. Получена альтерна-



тивная формулировка редуцированного конформного блока, позволяющая непосредственно вычислять амплитуду в пределе сильной константы связи.

5. Найдены соответствия между амплитудами фишнет-модели в шестимерии и серией диаграмм лестничного типа, обнаруживаемой в  $d = 6$   $\mathcal{N} = (1,1)$  SYM.
6. Изучены дуально-конформные интегралы и возможность итеративного построения амплитуд в шестимерии. Показано, что понятие дуальной конформности может быть расширено на фейнмановские интегралы определенного типа.

Достоверность полученных результатов обеспечивается их согласованностью с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. Международная конференция по квантовой теории поля, физике высоких энергий и космологии, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия, в 2022 году (устный доклад: "Exact amplitudes in various conformal fishnet theories");
2. VII Международная конференция "Модели в квантовой теории поля" памяти А.Н. Васильева (MQFT-2022), Санкт-Петербург, Международный математический институт им. Л. Эйлера, Россия, в 2022 году (устный доклад: "Four-point amplitudes in fishnet theories and dual conformal integrals");
3. Международная конференция "Квантовая теория поля и гравитация (QFTG'23)", ТГПУ, Томск, в 2023 году (устный доклад: "Generalized holographic fishchain");
4. Международная конференция AYSS-2023, Дубна, ОИЯИ в 2023 году (устный доклад "Correlation functions in 6d fishnet models");

а также докладывались на семинарах в 2023 году в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова ОИЯИ (устный доклад "Generalizing holographic fishchain") и ЛФВЭ МФТИ (устный доклад "Some properties of 6d biscalar fishnet models and ladder diagrams").

**Личный вклад.** Все результаты, приведенные в данной диссертационной работе, получены лично автором, либо при его непосредственном участии.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 4 печатных работах в рецензируемых журналах, включенных в список ВАК и международных баз данных Web of Science и Scopus [A1–A4].

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы. Во введении также сформулирована научная новизна полученных результатов.

**Первая глава** посвящена изучению и обзору общих свойств фишнет-моделей в произвольной размерности пространственных измерений  $d$ . Лагранжиан такой модели можно представить в виде [16]:

$$\mathcal{L} = N_c \text{Tr} \left( \phi_1^\dagger (-\square)^\omega \phi_1 + \phi_2^\dagger (-\square)^{d/2-\omega} \phi_2 + \xi^2 (4\pi)^{d/2} \phi_1^\dagger \phi_2^\dagger \phi_1 \phi_2 \right) \quad (1)$$

где  $\phi_i$  представляют собой скалярные поля в присоединенном представлении группы  $SU(N_c)$ ,  $\xi$  — константа связи,  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ , а  $\omega$  — параметр ”деформации”, характеризующий конформность решётки интегралов, то есть  $\omega \in (0, d/2)$ . Данная модель неунитарна, не является пределом какой-либо известной модели, конформна лишь на классическом уровне, однако на УФ-фиксированных точках соответствует интегрируемым моделям квантовой теории поля (данные модели были впервые введены в [15]). В частности при выборе  $d = 4, \omega = 1$  получается бискалярная четырехмерная фишнет модель, которая является частным случаем  $\gamma$ -деформированной  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теорией Янга-Миллса после взятия предела двойного скейлинга [13; 42]. Построение пропагаторов в рамках модели (1) осуществляется в соответствии с правилами дробного дифференцирования, исходя из следующего уравнения для функции Грина:

$$(-\square)^\omega D(x - y) = \delta^d(x - y), \quad (2)$$

причём  $\delta^d(x)$  —  $d$ -мерная дельта функция,

$$D(x - y) = \frac{1}{4^\omega \pi^{d/2}} \frac{\Gamma(d/2 - \omega)}{\Gamma(\omega)} \frac{1}{|x - y|^{d-2\omega}} \quad (3)$$

Вид пропагаторов в модели говорит о том, что параметр  $\omega$  характеризует изотропность решетки фейнмановских интегралов. Действие (1) также должно быть снабжено двухследовыми контрчленами другого типа вследствие расходимости однопетлевых поправок (таким образом оказываются зафиксированными правила отбора фейнмановских диаграмм в планарном пределе).

Для того, чтобы восстановить конформность на квантовом уровне необходимо ввести контрчлены для сокращения ультрафиолетовых расходимостей. Эти контрчлены представляют собой двухследовые операторы от скалярных полей. Их явный вид был дан в работе [43]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}/(4\pi)^2 = \alpha_1^2 \sum_{i=1}^2 \text{Tr}(\phi_i \phi_i) \text{Tr}(\phi_i^\dagger \phi_i^\dagger) - \alpha_2^2 \text{Tr}(\phi_1 \phi_2) \text{Tr}(\phi_2^\dagger \phi_1^\dagger) - \\ - \alpha_2^2 \text{Tr}(\phi_1 \phi_2^\dagger) \text{tr}(\phi_2 \phi_1^\dagger) \end{aligned} \quad (4)$$

Видно, что данная конструкция сохраняет конформность только в  $\omega = d/4$ , иначе константы при первом слагаемом обретут размерность. Однако однопетлевая расходимость даже в случае  $\omega \neq d/4$  имеет место на квантовом уровне, так что нахождение УФ-фиксированной точки необходимо. Для этого предлагаются следующего типа контрчлены [A2]:

$$\mathcal{L}_{dt} \sim \partial^{d-4\omega} \text{Tr}(\mathcal{O}) \text{Tr}(\mathcal{O}^\dagger) \quad (5)$$

где  $\mathcal{O}$  — некоторые мономы от скалярных полей неканонической размерности. Так, в частном случае,  $d = 6, \omega = 1$  можно ввести контрчлены следующего вида:

$$\mathcal{L}_{dt} \sim \hat{\alpha}_1^2(\xi) \text{Tr}(\phi_2(-\square)\phi_2) \text{Tr}(\phi_2^\dagger \phi_2^\dagger) - \hat{\alpha}_2^2(\xi) \text{Tr}(\phi_2 \partial_\mu \phi_2) \text{Tr}(\phi_2^\dagger \partial^\mu \phi_2^\dagger) \quad (6)$$

Легко видеть, что каждый член в данном выражении сохраняет конформность и позволяет зафиксировать бета-функцию, что в итоге после вычисле-

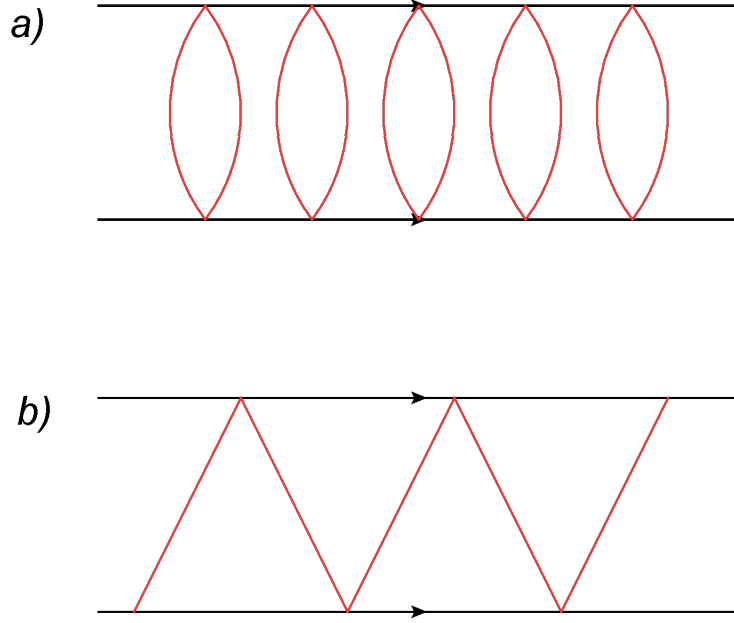


Рис. 1 — *a)* пример нулямагнной диаграммы *b)* пример однамагнной диаграммы. Разным цветам линий соответствуют разные скалярные поля.

ния бета-функции дает две фиксированные точки в следующем виде [A3]:

$$\hat{\alpha}_{1,\pm}^2 = \pm \frac{\xi^2}{108} (5\sqrt{73} - 23), \quad \hat{\alpha}_{2,\pm}^2 = \pm \frac{\xi^2}{27} (5\sqrt{73} - 41) \quad (7)$$

В то же время в рассматриваемом случае двухследовые поправки для полей  $\phi_1$  не нужны из-за конечности соответствующих однопетлевых поправок [A2; A3].

На УФ-фиксированной точке планарные диаграммы в произвольной бискалярной фишнет-модели представляют собой ту самую бесконечную решетку с произвольным количеством ног и петель — так называемые колёсные графы (или глобусные графы [14; 17]). Однако, переходя к обсуждению корреляционных функций конкретных видов, необходимо будет ограничиться четырьмя внешними точками, т.е. далее рассматриваются простейшие  $2J$ -точечные корреляционные функции, которые представляют собой каркас и ”намотанные” разным образом петли. В соответствии с тем, как именно петли намотаны условимся называть диаграммы нулямагнными, однамагнными, двумагнными и так далее (рис. 1). Структура диаграмм регулярна, таким образом возможно выделить оператор, который итеративным образом может построить полностью весь граф петля за петлёй. Оператор **В**, ответственный за построение такого рода корреляционных функций, мы назовем

производящим:

$$\mathbf{B}_J \circ \Psi(\{x_i\}_{i=1}^J) = \frac{1}{\pi^{\frac{dJ}{2}}} \int \frac{\prod_{i'=1}^{J'} d^d x_{i'}}{|x_{11'}|^{d-2\omega} \dots |x_{JJ'}|^{d-2\omega} \dots |x_{J'1'}|^{2\omega}} \Psi(\{x_i\}_{i'=1}^{J'}) \quad (8)$$

где фигурные скобки обозначают весь набор точек  $\{x_i\}_{i=1}^J = (x_1, x_2, \dots, x_J)$ ,  $J$  — длина замкнутой линии решетки, а  $\Psi(\{x_i\}_{i=1}^J)$  — является корреляционной функцией (или волновой функцией конформной теории поля). Ясно, что если подействовать таким оператором  $M$  раз на древесную корреляционную функцию  $\Psi$ , удастся получить полную корреляционную функцию [43]. Ядро оператора (8) представимо в виде произведения скалярных пропагаторов

$$\mathbf{B}_J = \prod_{i=1}^J \frac{\xi^2 / \pi^{d/2}}{|x_i - y_i|^{2\omega} |y_i - y_{i+1}|^{d-2\omega}} \quad (9)$$

с периодическими граничными условиями  $y_1 = y_J$ . То есть горизонтальным линиям соответствует пропагатор  $\sim |y_i - y_{i+1}|^{-d+2\omega}$ , а вертикальной линии соответствует  $\sim |x_i - y_i|^{-2\omega}$ . Условно производящий оператор можно представить в виде изображенном на рис. 2. Производящий оператор является

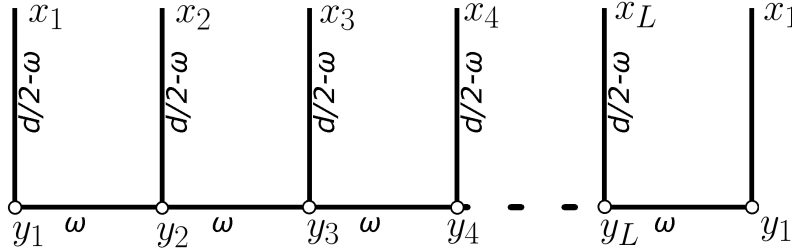


Рис. 2 — Графическое представление производящего оператора  $\mathbf{B}$  длиной  $J = L$  для произвольных значений  $d$  и  $\omega$ . Линии обозначают скалярные пропагаторы.

конформным генератором группы  $SO(1, d+1)$ , принадлежит семейству трансфер-матриц и обеспечивает интегрируемость модели [17].

Собственным вектором на гильбертовом пространстве производящего оператора  $\mathbf{B}_J$  является волновая функции конформной теории поля, иными словами  $(J + 1)$ -точечная функция, вид которой можно определить следующим образом в самом общем виде:

$$\Psi = \langle \mathcal{O}_J(x_0) \text{tr}[\phi_1^\dagger(x_1) \dots \phi_1^\dagger(x_J)] \rangle \quad (10)$$

причем оператор задан как

$$\mathcal{O}_J(x_0) = \text{tr}_{x_0}[\phi_1^J(\phi_2^\dagger\phi_2)^B] + \dots \quad (11)$$

где  $B$  — степень  $U(1)$ -нейтральных комбинаций квадрата ”внутренних” полей. В наиболее простом случае, когда  $J = 2$  трехточечную функцию  $\Psi$  можно представить как [22; 43; 44]

$$\Psi_{S,\Delta,x_0}(x_1,x_2) = \frac{x_{12}^{\Delta-S-d+2\omega}}{x_{01}^{\frac{\Delta-S}{2}} x_{02}^{\frac{\Delta-S}{2}}} \left( 2 \frac{(nx_{02})}{x_{02}^2} - 2 \frac{(nx_{01})}{x_{01}^2} \right)^S, \quad (12)$$

причем данная форма функции целиком зафиксирована конформной симметрией:  $\Delta$  является собственным значением оператора дилатации и представляет собой конформную размерность оператора  $\mathcal{O}_J$ , а  $S$  — собственным значением оператора спина, поэтому соответственно, его называют конформным лоренцевским спином,  $n_\mu$  является светоподобным 4-вектором, а  $x_{ab} = x_a - x_b$ . То есть эта функция (или состояние) принадлежит неприводимому представлению основной серии конформной группы, характеризующейся  $\Delta$  и  $S$ . Данная трехточечная конформная функция удовлетворяет условию ортогональности [43; 44]. Воспользовавшись свойствами такой трехточечной функции, можно вычислить спектр производящего оператора, решив следующее уравнение на собственное значение оператора  $\mathbf{B}_2$

$$\mathbf{B}_2^{(0)} \circ \Psi_{\Delta,S} = h_{\Delta,S,0}^{-1} \Psi_{\Delta,S} \quad (13)$$

причем

$$\mathbf{B}_2^{(0)}(x_1,x_2|x_3,x_4) = \frac{\hat{c}^d}{x_{12}^{d-2\omega} x_{13}^{2\omega} x_{24}^{2\omega}} \quad (14)$$

где дополнительный нижний индекс у собственного значения оператора и верхний у самого оператора обозначает ”нуль-магнетонность”. С помощью соотношения звезда-треугольник, в конце концов, имеем (опуская множитель  $\hat{c}^{-d}\pi^d\zeta^4$ )

$$h_{\Delta,S,0}^{-1} = \frac{\Gamma(\omega)^2 \Gamma\left(d + \frac{S-\Delta}{2} - \omega\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} + \frac{S+\Delta}{2} - \omega\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2} - \omega\right)^2 \Gamma\left(\frac{S-\Delta}{2} + \omega\right) \Gamma\left(-\frac{d}{2} + \frac{S+\Delta}{2} + \omega\right)} \quad (15)$$

В пределе  $\omega = d/4$  спектр, найденный в работах [22; 43], восстанавливается. Поскольку в ходе работы в фокусе рассмотрения модель  $6d, \omega = 1$ , можно

привести спектральное уравнение для него в явном виде:

$$h_{\Delta,S,0} = \frac{1}{16}(-\Delta + S + 3)(-\Delta + S + 5)(\Delta + S - 1)(\Delta + S + 1). \quad (16)$$

Продельвая те же самые шаги для одномагнетонного случая получаем спектр в следующем виде (опуская множитель  $(4\pi)^{-2}\pi^d\xi^4$ )

$$h_{\Delta,S,1}^{-1} = \frac{(-1)^S \Gamma\left(\frac{d}{2} - \omega\right) \Gamma\left(\frac{d}{4} + \frac{S}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{\Delta}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{d}{4} + \frac{S}{2} + \frac{\Delta}{2} + \frac{\omega}{2}\right)}{\Gamma(\omega) \Gamma\left(\frac{d}{4} + \frac{S}{2} + \frac{\Delta}{2} - \frac{\omega}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3d}{4} + \frac{S}{2} - \frac{\Delta}{2} - \frac{\omega}{2}\right)} \quad (17)$$

Конформную размерность с помощью этих спектров можно получить из следующих соображений. Полная корреляционная функция будет даваться суммой действий производящих операторов  $\mathbf{B}$ , и формально такую сумму можно записать как (иначе можно сказать, что корреляционная функция находится с помощью метода Бете-Солпитера [22]):

$$1 + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \dots = \frac{1}{1 - \mathbf{B}}, \quad (18)$$

то есть точную четырехточечную корреляционную функцию можно записать как

$$\langle x_1, x_2 | \frac{1}{1 - \mathbf{B}} | x_3, x_4 \rangle = \sum_S \int d\Delta \frac{1}{1 - h_{\Delta,S}} \langle x_1, x_2 | \Psi_{\Delta,S} \rangle \langle \Psi_{\Delta,S} | x_3, x_4 \rangle. \quad (19)$$

Данный интеграл можно привести к форме операторного разложения четырехточечной функции:

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{S, \Delta} C_{\Delta,S} g_{\Delta,S}(u, v), \quad (20)$$

где  $C_{\Delta,S}$  представляет собой структурную константу, а  $g_{\Delta,S}(u, v)$  — конформный блок, а  $u, v$  — конформные переменные [45]. Интеграл (19) по конформной размерности берется вычетами, находящимися в нижней комплексной плоскости, причем расположению полюсов соответствует уравнение

$$h_{\Delta,S} = \xi^4. \quad (21)$$

Половина корней этого уравнения вследствие симметрии не будет давать вклад в конечный результат [23], другая половина же решений определяет зависимость масштабной размерности от спина и константы связи, которое можно использовать для явного вычисления корреляционной функции или амплитуды рассеяния.

**Вторая глава** посвящена исследованию голографически дуальной копии бискалярной фишнет-модели. Действие для фишчейна — замкнутой цепочки нелинейно парно взаимодействующих частиц — выводится в виде [A4]:

$$S = 2\xi^{\frac{1}{\omega}} J \int dt \left( \prod_{i=1}^J \frac{\dot{X}_i^{2\omega}}{(-2X_i \cdot X_{i+1})^\omega} \right)^{\frac{1}{2\omega J}}, \quad (22)$$

где  $X_i$  являются координатами светового конуса в пространстве  $D = d + 2$ . Из выражения (22) видно, что константа взаимодействия стала обычным фактором  $\sim \xi^{1/\omega}$ , то есть обратная  $\xi$  играет ту же самую роль, что и константа Планка при квазиклассическом приближении решений уравнения Шрёдингера. Можно трансформировать действие (22) к форме действия Полякова [27; 29]:

$$L = \sum_i \alpha_i \frac{P_i^2}{2} - \prod_k (-\alpha_i X_i \cdot X_{i+1})^{-\frac{1}{J}} + \eta_i X_i^2, \quad (23)$$

где  $\alpha_i$  и  $\eta_i$  представляют собой лагранжевы множители, фиксирующие связи, наложенные на систему. Первые лагранжевы множители определяют глобальную конформную симметрию, а вторые ответственны за удержание частиц на световом конусе. Далее необходимо непосредственно зафиксировать все симметрии действия. В действии (23) их четыре: 1) конформная симметрия, 2)  $t$ -репараметризационная симметрия, 3) симметрия относительно сдвига по цепочке  $X_i \rightarrow X_{i+1}$ , 4) симметрия масштабирования с преобразованиями  $X_i \rightarrow g_i(t)X_i$ ,  $\alpha_i \rightarrow g_i^2 \alpha_i$ ,  $\eta_i \rightarrow g_i^{-2} \eta_i$ . Варьированием действия по  $\alpha_i$  с условием  $\alpha_i = 1$  можно зафиксировать следующее соотношение:

$$\mathcal{L} = 2 \prod_i (-X_i \cdot X_{i+1})^{1/J} = \dot{X}_k^2. \quad (24)$$

Данное выражение можно трактовать как условие Вирасоро первого типа: плотность энергии вдоль рассматриваемой связанной системы равна нулю [26]. Вследствие существования симметрии относительно ещё одних преобра-



зований  $t \rightarrow f(t)$ ,  $X_i(t) \rightarrow X_i(t)f'^{-1/2}$ ,  $\eta_i \rightarrow \eta_i f'^2$  необходимо зафиксировать и  $\mathcal{L} = m^2$ . Таким образом (24) можно считать условием массовой поверхности, так как оно фактически имеет вид  $\sim \dot{X}_i^2 - m^2$ . В целом поведение модели практически целиком аналогично модели Громова-Севера за исключением того, что для неизотропных моделей действие ведет себя пропорционально  $\sim \xi^{1/\omega}$

Квантование этой модели требует определения  $SO(1, d+1)$  - инвариантного гамильтониана, для чего требуется зафиксировать все связи, наложенные на исследуемую систему. Благодаря учёту всех связей можно записать гамильтониан в форме:

$$H_q = \text{tr} \left[ \prod_{i=1}^J \left( \frac{q_i^2}{2} \right)^\omega \right] - 1, \quad (25)$$

где плотность заряда группы  $SO(1, d+1)$  задается как

$$q_i^{MN} = 2P_i^{[M} \cdot X_i^{N]}. \quad (26)$$

Квантование такого гамильтониана осуществляется заменой скобок Дирака (они вводятся из-за наличия  $2J$  связей второго рода) и коммутационные соотношения задаются как

$$[\hat{X}_m^M, \hat{P}_n^N] = \frac{i\delta_{mn}}{\xi^{1/\omega}} \left[ \eta^{MN} - \frac{1}{m^2} \hat{P}_k^M \hat{P}_k^N \right], \quad (27)$$

$$[\hat{P}_m^M, \hat{P}_n^N] = 0, \quad (28)$$

$$[\hat{X}_m^M, \hat{X}_n^N] = \frac{i\delta_{mn}}{\xi^{1/\omega}} \frac{[\hat{P}_k^M, \hat{X}_k^N]}{m^2}. \quad (29)$$

Обращает на себя внимание возникновение  $AdS_{D-1}$  пространства, которое как раз появляется вследствие того, что коммутатор по координатам не равен нулю:  $C_X = \hat{X}^2 \sim R^2 = \frac{C_{2,j}}{m^2 \xi^{2/\omega}}$ , причём  $C_{2,j}$  является квадратичным оператором Казимира:

$$\hat{C}_{2,j} = -\frac{1}{2} \xi^{2/\omega} \text{tr}(\hat{q}^2). \quad (30)$$

Собственное значение квадратичного оператора Казимира для произвольной  $\mathfrak{so}(1, d+1)$ -алгебры в объемлющем пространстве задается как:

$$\mathbf{C}_{2,j} = \Delta_i(\Delta_i - D + 2) \frac{(D-2)^2}{16}. \quad (31)$$

Таким образом, вследствие квантования модели дискретизированная струна со светового конуса "опускается" на пространство анти де-Ситтера (то есть осуществляется редуцирование одной из размерностей).

Условие "массовой оболочки" оказывается уравнением Клейна-Гордона и совпадает с уравнением на собственные значения квадратичного оператора Казимира:

$$\frac{1}{\xi^{\frac{2}{\omega}}} \square_{AdS} \widehat{\Psi}(Y_i) = m^2 \widehat{\Psi}(Y_i), \quad (32)$$

причем собственным вектором является дуальная волновая функция, зависящая от координат на пространстве  $AdS_{D-1}$ .

Процедура квантования требует введения нормально упорядоченной версии заряда (так как он после квантования не является бесследовым и антисимметричным оператором)

$$: \hat{q}_j^2 :^{NM} \equiv (\hat{q}_j^2)^{NM} - \frac{i d}{2\xi^{1/\omega}} \hat{q}_j^{NM} - \mathbf{C}_{2,j} \frac{d^2}{8D\xi^{2/\omega}} \eta^{NM}. \quad (33)$$

В таком виде гамильтониан можно считать определенным непротиворечиво:

$$\hat{H}_q = \text{tr} \left( \prod_{i=1}^J \left[ \frac{: q_i^2 :}{2} \right]^\omega \right) - 1, \quad (34)$$

так что должно выполняться условие

$$\hat{H}_q \widehat{\Psi} = 0, \quad (35)$$

причем здесь параметр деформации  $\omega$  указывает на число сверток нормально упорядоченных  $q_i$ -операторов.

Для проверки соответствия можно обратиться к простому примеру. Дуальную волновую функцию для двух частиц можно зафиксировать с помощью конформной симметрии в наиболее общем виде следующим образом

[28]:

$$\widehat{\Psi}_{\Delta,S}(Z_1, Z_2) = \frac{\left(\frac{Z_1 \mathcal{N}}{Z_1 \cdot \mathcal{X}} - \frac{Z_2 \mathcal{N}}{Z_2 \cdot \mathcal{X}}\right)^S}{(Z_1 \cdot \mathcal{X})^{\frac{(\Delta-S)}{2}} (Z_2 \cdot \mathcal{X})^{\frac{(\Delta-S)}{2}}} F\left(Z_1 \cdot Z_2, \log \frac{Z_1 \cdot \mathcal{X}}{Z_2 \cdot \mathcal{X}}\right) \quad (36)$$

Полагая  $Z_1 \cdot Z_2$  большим в уравнениях (32) и (35) с (36), можно получить для модели  $d = 6, \omega = 1$ :

$$\left(\frac{(-\Delta + S + 3)(-\Delta + S + 5)(\Delta + S - 1)(\Delta + S + 1)}{16\xi^4}\right) \widehat{\Psi}_{\Delta,S} = \widehat{\Psi}_{\Delta,S} \quad (37)$$

что полностью совпадает с результатами, полученными для аналогичной бискалярной фишнет-модели. В общем доказательство полного соответствия может быть построено на отождествлении операторов  $\hat{H}_q$  в  $d + 1$ -мерии и  $\mathbf{B}^{-1}$  в  $d$ -мерии с помощью введения так называемого пропагатора балк-граница [A4].

**Третья глава** посвящена исследованию амплитуд фишнет-моделей и связанных с ними теорий. В этой главе выполняются вычисления диаграмм Фейнмана в модели  $d = 6, \omega = 1$  и изучается поведение точной амплитуды для такой модели. Оказывается, что набор фейнмановских амплитуд для упорядоченных по цвету планарных диаграмм может быть получен дифференцированием амплитуды фишнет-модели по кинематическим переменным (мандельштамовским  $u$  или  $t$ , причем  $s + t + u = 0$ ), благодаря чему удается получить без труда поведение амплитуды для шестимерной модели в пределе любой константы связи. Таким образом точную амплитуду для четырехмерной модели можно получить из корреляционной функции путем редукции Лемана-Симанчика-Циммермана [23]:

$$\int \prod_i d^4 x_i e^{ip_i x_i} G_{(4)}(x_1, x_2 | x_3, x_4) = \frac{(2\pi)^4}{p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2} \times \delta^{(4)}\left(\sum_i p_i\right) A_{(4)}(z, \xi^2) + \dots, \quad (38)$$

а амплитуда шестимерной модели получается дифференцированием  $A(z, \xi^2)$  по  $t$ , причем  $z = 1 + 2t/s$ . Таким образом для шестимерной фишнет-модели имеет вид амплитуда [A2; A3]:

$$A(s, z, \xi^4) = \frac{1}{s} \int_C \frac{dS}{2i \sin(\pi S)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{\mu(\nu, S)}{h(\nu, S) - \xi^4} \frac{\partial \Omega_{\nu, S}(z)}{\partial z} + z \rightarrow -z. \quad (39)$$

где  $\Omega_{\nu,S}(z)$  — ”редуцированная” форма конформного блока (она лаконично выражается в форме суммы по двум функциям Лежандра [23]), а префактор  $\frac{\mu(\nu,S)}{h(\nu,S)-\xi^4}$  представляет собой ”редуцированную” структурную константу, причем в этом выражении (39) осуществлено преобразование Уотсона-Зоммерфельда с заменой суммы по  $S$  на интеграл по  $S$  по замкнутому контуру.

Можно заметить, что в изначальном лагранжиане рассматриваемой фишнет-модели содержались кинетические члены с высшими производными, однако никаких проблем при вычислении амплитуд с духовыми состояниями не возникает. Более того, оказывается, что амплитуда шестимерной модели целиком совпадает с шестимерными диаграммами лестничного типа (такие амплитуды в высокоэнергетическом пределе появляются в  $d = 6$ ,  $\mathcal{N} = (1,1)$  суперсимметричной теории Янга-Миллса) [A2; A3]. Из точной амплитуды для шестимерной фишнет-модели удастся восстановить не только известные результаты, полученные по теории возмущений, но также получить главные логарифмы в реджевском пределе при  $z \rightarrow \infty$ :

$$a_{(l)}^{LLA} = \frac{1}{l!(l+1)!}, \quad (40)$$

$$a_{(l)}^{NLA} = \frac{2l(l-1)}{l!(l+1)!}, \quad (41)$$

$$a_{(l)}^{NNLA} = \frac{2l(l-1)(l+2) + \pi^2(l+1)}{l!(l+2)!}, \quad (42)$$

а также

$$a_{(l)}^{NNNLA} = \frac{2l(l+1)(2l^2 + 2l + 3\pi^2 - 13) + 6(l-4)\zeta_3 + 18}{3l!(l+2)!}. \quad (43)$$

где  $l$  — число петель. Эти выражения полностью согласованы с вычислениями лестничных амплитуды в шестимерной модели в первых порядках по теории возмущений. Помимо этого можно получить лидирующее поведение точной амплитуды в режиме сильной константы связи:

$$A(z, 1/\xi) = \xi^{-1/2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{4\pi \pi^{1/2} \mathbf{L} \exp\left(\frac{2}{\xi} \sqrt{\pi^2 + \mathbf{L}^2}\right)}{iz (\pi^2 + \mathbf{L}^2)^{7/4} \sin\left(\frac{2\pi \mathbf{L}}{\xi \sqrt{\pi^2 + \mathbf{L}^2}}\right)} + \dots, \quad (44)$$

где  $\mathbf{L} = \log(z + \sqrt{z - 1})$ ,  $\mathbf{z} = \sqrt{z - 1}$ . Данный результат открывает возможности для изучения и дуальных амплитуд, которые, вероятно, можно получить в подходе фишчейнов.

Интегрируемость фишнет-графов и возможность нахождения точных амплитуд для них ставит вопрос о том, реализуемо ли экспоненцирование типа Берна-Диксона-Смирнова для шестимерных амплитуд, зафиксированных дуальной конформностью в теориях с высшими производными. Иными словами, есть возможность "предсказания", какой могла бы быть шестимерная теория, порождающая шестимерные фишнет-модели. Также для получения амплитуды "порождающей теории" необходимо наложение требования дуальной конформности (конформности в импульсном пространстве): такая же симметрия графов имела место в случае изучения четырехмерных моделей  $\mathcal{N} = 4$  SYM и четырехмерной бискалярной фишнет-модели. Впервые вопрос об экспонировании амплитуды ставился в работе [39], где проводились анализ однопетлевых интегралов, а также вычисления минимального объема в  $AdS_7$  по аналогии с [46]. Вычисление двухпетлевых интегралов было осложнено тем, что дуальная конформность фиксирует 10 возможных комбинаций диаграмм в каждом канале. Расчёт показал [A1], что линейная комбинация этих диаграмм не может включать в себя шестимерные однопетлевые амплитуды с высшими производными (пропагаторами типа  $1/p^4$ ) как в [47], то есть итеративная связь не обнаруживается. Тем не менее, выделяется комбинация отдельных  $l$ -петлевых диаграмм, которые могут быть получены с помощью оператора  $\mathcal{D} = s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t}$  (он не нарушает дуальную конформность) и в принципе могут быть уложены в схему:

$$A_4^{d=6} = \sum_{l=0}^{\infty} g_6^l \tilde{A}_4^{d=6,(l)} = \sum_{l=0}^{\infty} g_6^l \left( \hat{\mathcal{D}}_{st} A_4^{d=4,(l)} - (l+1) A_4^{d=4,(l)} \right) \quad (45)$$

(здесь  $g_6$  является константой связи гипотетической шестимерной теории) что одновременно не соответствует гипотезе из [39], но напоминает схему построения амплитуд, предложенную в (39).

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. На основе исследования первых порядков корреляционных функций мы выделили итерированный производящий оператор, который

ответственен за построение корреляционных функций любого типа. В ходе дальнейшего исследования были найдены спектры соответствующих производящих операторов для нуль-магнонного и одномагнонного типа корреляторов. Спектры были проанализированы на конкретных примерах, также были приведены значения конформных размерностей и реджевских траекторий для исследуемых моделей.

2. Была получена точная голографическая модель фишнет-теории, обобщающая модель Громова-Севера, было показано соответствие на конкретных примерах, доказана дуальность между этими моделями. Показано, что и обобщенные фишчейны также после квантования имеют своим таргет-пространством AdS-многообразие. В общем случае было показано, что параметры деформации фишнет-решетки связаны с числом действий нормально-упорядоченных "квантованных" операторов Казимира. Было показано, что эти операторы связаны с производящим оператором фишнет-модели.
3. Были вычислена амплитуда шестимерных фишнетов с высшими производными в пределе слабой и сильной константы связи в разных кинетических пределах. Была показана связь рассматриваемой фишнет-модели и лестничных петлевых диаграмм.
4. Принцип, полученный, в ходе изучения шестимерных моделей, лег в основу изучения дуально-конформных амплитуд в шестимерии с высшими производными. Вычислены все типы дуально-конформных диаграмм в шестимерии и показана возможность построения амплитуд BDS-типа.

## Публикации автора по теме диссертации

- A1. Dual Conformal Symmetry and Iterative Integrals in Six Dimensions / R. M. Iakhibbaev [et al.] // Journal of High Energy Physics. — [Bristol, UK], England, 2020. — Vol. 2006. — P. 186.
- A2. Amplitudes in fishnet theories in diverse dimensions and box ladder diagrams / R. M. Iakhibbaev [et al.] // Journal of High Energy Physics. — [Bristol, UK], England, 2021. — Vol. 2021, no. 2. — P. 185.

- A3. *Iakhibbaev R. M., Tolkachev D. M.* Exact Four-Point Amplitudes in Various Fishnet Theories // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2023. — т. 20, № 3. — с. 237—239.
- A4. *Яхиббаев Р. М., Толкачев Д. М.* Обобщённые голографические фишчейны // ТМФ. — 2024. — т. 20, № 3. — с. 475—491.

## Список литературы

5. *Beisert N., Staudacher M.* The N=4 SYM integrable super spin chain // Nucl. Phys. B. — 2003. — т. 670. — с. 439—463.
6. N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals / O. Aharony [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2008. — т. 10. — с. 091.
7. *Onishchenko A. I.* Anomalous dimensions of twist 2 operators and  $\mathcal{N} = 4$  SYM quantum spectral curve. — 2021. — май. — arXiv: [2105.03945](https://arxiv.org/abs/2105.03945) [hep-th].
8. *Levkovich-Maslyuk F.* A review of the AdS/CFT Quantum Spectral Curve // J. Phys. A. — 2020. — т. 53, № 28. — с. 283004.
9. *Gromov N., Levkovich-Maslyuk F., Sizov G.* Quantum Spectral Curve and the Numerical Solution of the Spectral Problem in AdS5/CFT4 // Journal of High Energy Physics. — 2016. — т. 06. — с. 036.
10. *Staudacher M.* Review of AdS/CFT Integrability, Chapter III.1: Bethe Ansatz and the R-Matrix Formalism // Lett. Math. Phys. — 2012. — т. 99. — с. 191—208.
11. Exact Spectrum of Anomalous Dimensions of Planar N = 4 Supersymmetric Yang-Mills Theory: TBA and excited states / N. Gromov [и др.] // Lett. Math. Phys. — 2010. — т. 91. — с. 265—287.
12. Integrable Amplitude Deformations for N=4 Super Yang-Mills and ABJM Theory / T. Bargheer [и др.] // Phys. Rev. D. — 2015. — т. 91, № 2. — с. 026—004.

13. *Caetano J., Gürdoğan Ö., Kazakov V.* Chiral limit of  $\mathcal{N} = 4$  SYM and ABJM and integrable Feynman graphs // Journal of High Energy Physics. — 2018. — т. 03. — с. 077.
14. *Gürdoğan Ö., Kazakov V.* New Integrable 4D Quantum Field Theories from Strongly Deformed Planar  $\mathcal{N} = 4$  Supersymmetric Yang-Mills Theory // Phys. Rev. Lett. — 2016. — т. 117, № 20. — с. 201602. — [Addendum: Phys.Rev.Lett. 117, 259903 (2016)].
15. *Zamolodchikov A. B.* 'Fishnet' diagrams as completely integrable system // Phys. Lett. B. — 1980. — т. 97. — с. 63–66.
16. *Kazakov V., Olivucci E., Preti M.* Generalized fishnets and exact four-point correlators in chiral  $\text{CFT}_4$  // Journal of High Energy Physics. — 2019. — т. 06. — с. 078.
17. Integrability of Conformal Fishnet Theory / N. Gromov [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2018. — т. 01. — с. 095.
18. *Kazakov D. I.* The method of uniqueness. A new powerful tool for multiloop calculations // Phys. Lett. B. — 1983. — т. 133. — с. 406–410.
19. *Isaev A. P.* Multiloop Feynman integrals and conformal quantum mechanics // Nucl. Phys. B. — 2003. — т. 662. — с. 461–475.
20. *Derkachov S. E., Isaev A. P., Shumilov L. A.* Ladder and zig-zag Feynman diagrams, operator formalism and conformal triangles // Journal of High Energy Physics. — 2023. — т. 06. — с. 059.
21. *Chicherin D., Derkachov S., Isaev A. P.* Conformal group: R-matrix and star-triangle relation // Journal of High Energy Physics. — 2013. — т. 04. — с. 020.
22. *Gromov N., Kazakov V., Korchemsky G.* Exact Correlation Functions in Conformal Fishnet Theory // Journal of High Energy Physics. — 2019. — т. 08. — с. 123.
23. *Korchemsky G.* Exact scattering amplitudes in conformal fishnet theory // Journal of High Energy Physics. — 2019. — т. 08. — с. 028.
24. *Kazakov V., Olivucci E.* The loom for general fishnet CFTs // Journal of High Energy Physics. — 2023. — т. 06. — с. 041.



25. *Basso B., Zhong D.-l.* Continuum limit of fishnet graphs and AdS sigma model // Journal of High Energy Physics. — 2019. — т. 01. — с. 002.
26. *Polchinski J.* String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string. — Cambridge University Press, 12.2007. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
27. *Gromov N., Sever A.* Derivation of the Holographic Dual of a Planar Conformal Field Theory in 4D // Phys. Rev. Lett. — 2019. — т. 123, № 8. — с. 081602.
28. *Gromov N., Sever A.* Quantum fishchain in AdS<sub>5</sub> // Journal of High Energy Physics. — 2019. — т. 10. — с. 085.
29. *Gromov N., Julius J., Primi N.* Open fishchain in N = 4 Supersymmetric Yang-Mills Theory // Journal of High Energy Physics. — 2021. — т. 07, № 127. — с. 127.
30. Thermodynamic Bethe Ansatz for Biscalar Conformal Field Theories in any Dimension / B. Basso [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2020. — т. 125, № 9. — с. 091601.
31. *Alfimov M., Gromov N., Kazakov V.* Chapter 13: N = 4 SYM Quantum Spectral Curve in BFKL Regime // From the Past to the Future / под ред. J. Bartels [и др.]. — 2021. — с. 335—367.
32. *Buchbinder I. L., Ivanov E. A., Merzlikin B. S.* Leading low-energy effective action in 6D,  $\mathcal{N} = (1,1)$  SYM theory // Journal of High Energy Physics. — 2018. — т. 09. — с. 039.
33. *Buchbinder I. L., Pletnev N. G.* Construction of 6D supersymmetric field models in N=(1,0) harmonic superspace // Nucl. Phys. B. — 2015. — т. 892. — с. 21—48.
34. *Buchbinder I. L., Ivanov E. A., Merzlikin B. S.* Low-energy 6D,  $\mathcal{N} = (1,1)$  SYM effective action beyond the leading approximation // Nucl. Phys. B. — 2020. — т. 954. — с. 114995.
35. The renormalization structure of 6D,  $\mathcal{N} = (1,0)$  supersymmetric higher-derivative gauge theory / I. L. Buchbinder [и др.] // Nucl. Phys. B. — 2020. — т. 961. — с. 115249.

36. On Two-Loop Divergences in 6D,  $\mathcal{N} = (1,1)$  Supergauge Theory / A. S. Budekhina [и др.] // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2022. — т. 19, № 6. — с. 666–671.
37. Little String Amplitudes (and the Unreasonable Effectiveness of 6D SYM) / C.-M. Chang [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2014. — т. 12. — с. 176.
38. *Bianchi M. S., Leoni M., Penati S.* An All Order Identity between ABJM and N=4 SYM Four-Point Amplitudes // Journal of High Energy Physics. — 2012. — т. 04. — с. 045.
39. *Bhattacharya J., Lipstein A. E.* 6d Dual Conformal Symmetry and Minimal Volumes in AdS // Journal of High Energy Physics. — 2016. — т. 12. — с. 105.
40. *Lambert N.* (2,0) Lagrangian Structures // Phys. Lett. B. — 2019. — т. 798. — с. 134948.
41. *Douglas M. R.* On D=5 super Yang-Mills theory and (2,0) theory // Journal of High Energy Physics. — 2011. — т. 02. — с. 011.
42. *Fokken J., Sieg C., Wilhelm M.* Non-conformality of  $\gamma_i$ -deformed  $\mathcal{N} = 4$  SYM theory // J. Phys. A. — 2014. — т. 47. — с. 455401.
43. *Kazakov V., Olivucci E.* Biscalar Integrable Conformal Field Theories in Any Dimension // Phys. Rev. Lett. — 2018. — т. 121, № 13. — с. 131601.
44. *Fradkin E. S., Palchik M. Y.* Recent Developments in Conformal Invariant Quantum Field Theory // Phys. Rept. — 1978. — т. 44. — с. 249–349.
45. *Dolan F. A., Osborn H.* Conformal partial waves and the operator product expansion // Nucl. Phys. B. — 2004. — т. 678. — с. 491–507.
46. *Alday L. F., Maldacena J. M.* Gluon scattering amplitudes at strong coupling // Journal of High Energy Physics. — 2007. — т. 06. — с. 064.
47. *Bern Z., Dixon L. J., Smirnov V. A.* Iteration of planar amplitudes in maximally supersymmetric Yang-Mills theory at three loops and beyond // Phys. Rev. — 2005. — т. D72. — с. 085001.