

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ИМ. М.Г. МЕЩЕРЯКОВА

*На правах рукописи*

---

*(подпись соискателя ученой степени)*

**Войтишин Николай Николаевич**

**Методы и комплексы программ для реконструкции траекторий заряженных частиц в экспериментах  $BM@N$  и CMS**

Специальность: 1.2.2 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Дубна – 2023

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий  
им. М.Г. Мещерякова  
Объединенного института ядерных исследований.

**Научный руководитель: Пальчик Владимир Владимирович**

к.ф.-м.н., старший научный сотрудник,  
Объединенный институт ядерных  
исследований, ведущий научный сотрудник  
Лаборатории информационных технологий им.  
М.Г. Мещерякова

**Официальные оппоненты: Федин Олег Львович**

д.ф.-м.н., Петербургский институт ядерной  
физики им. Б.П. Константинова, руководитель  
Отделения физики высоких энергий

**Корхов Владимир Владиславович**

к.ф.-м.н., доцент, Санкт-Петербургский  
государственный университет, Факультет  
прикладной математики – процессов  
управления, доцент кафедры компьютерного  
моделирования и многопроцессорных систем

С электронной версией диссертации можно ознакомиться на официальном сайте Объединенного института ядерных исследований в информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» по адресу: <https://dissertations.jinr.ru>. С печатной версией диссертации можно ознакомиться в Научно-технической библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь диссертационного  
совета ОИЯИ.05.01.2022.П, д.ф.-м.н.

Земляная Елена Валериевна

## **Общая характеристика работы**

Настоящая работа основана на результатах исследований, выполненных в 2012–2023 гг. в Лаборатории информационных технологий им. М.Г. Мещерякова Объединенного института ядерных исследований (ЛИТ ОИЯИ, г. Дубна) и в Европейской организации по ядерным исследованиям (ЦЕРН, г. Женева). В диссертации представлены результаты разработки и внедрения методов, алгоритмов и программного обеспечения для моделирования и реконструкции траектории заряженных частиц в рамках реализации программ физических исследований многоцелевого эксперимента «Компактный мюонный соленоид» (Compact Muon Solenoid, CMS) [1] на Большом адронном коллайдере (LHC) [2] в ЦЕРНе и эксперимента на фиксированной мишени BM@N (Barionic Matter at Nuclotron) [3] на ускорительном комплексе NICA (Nuclotron-based Ion Collider fAcility) [4] в ОИЯИ.

## **Актуальность темы исследования**

Физика элементарных частиц (ФЭЧ) изучает фундаментальные свойства материи и пытается объяснить структуру и свойства элементарных частиц, закономерности их рождения и уничтожения и дать ответы на многие другие вопросы, возникающие при попытках понять происхождение Вселенной. Для этого проводятся тщательные прецизионные изучения свойств известных элементарных частиц и поиск новых частиц и явлений. Ответы на эти вопросы призваны дать различные виды физических экспериментов, проводимых, в том числе, на ускорителях частиц. Для проникновения на все более глубокие уровни материи требуется все большая и большая энергия<sup>1</sup>. В настоящее время физики способны ускорять заряженные элементарные частицы и ядра атомов до энергий порядка 10 трлн электронвольт. В ускорителях поток (пучок) ускоренных частиц сталкивается с мишенью или с другим пучком, что приводит к различного вида взаимодействиям элементарных частиц, в результате которых образуются и другие элементарные частицы. Ожидается, что среди этих частиц можно будет обнаружить и новые, ранее неизвестные частицы или зафиксировать какие-то необычные свойства хорошо известных частиц, не описываемые современной теорией взаимодействий элементарных частиц – Стандартной моделью (СМ).

Для регистрации продуктов реакций, протекающих при взаимодействии элементарных частиц, используются различные детекторные системы, объединенные в экспериментальные комплексы (установки). В отдельных

---

<sup>1</sup> Поэтому часто вместо ФЭЧ используют термин «физика высоких энергий» (ФВЭ).

детекторных подсистемах, предназначенных для регистрации того или иного специфического вида ионизирующего излучения, происходит формирование электронного сигнала, который передается в систему сбора данных для дальнейшей обработки и анализа. При этом критически важными являются калибровка детекторных систем, реконструкция событий и коррекция данных. Для каждого этапа работы с данными необходимо разработать методику, алгоритмы обработки и моделирования данных, соответствующее программное обеспечение (ПО).

Важными частями практически любой экспериментальной установки ФВЭ являются координатные детекторы, позволяющие с высокой точностью фиксировать пространственные координаты траектории частиц (трека), что дает возможность по искривлению траектории в магнитном поле измерять их импульс. Несколько координатных детекторов различного типа образуют так называемую трековую систему (или систему трекинга) эксперимента. В каждом из этих координатных детекторов (или их частей-слоев) реконструируется часть траектории частицы (так называемый трек-сегмент), после чего несколько трек-сегментов сшиваются в единый глобальный трек. Качество координатной реконструкции напрямую влияет на точность измерения импульса, а также на достоверность и точность последующей идентификации частиц. Потому очень важны методы и алгоритмы регистрации и реконструкции как отдельных координат и трек-сегментов, так и восстановления всего глобального трека.

Современные эксперименты ФВЭ характеризуются высокой частотой соударений, большой множественностью и плотностью заряженных частиц, а также сложной структурой детекторов и наличием массивных слоев вещества. Поэтому для измерения характеристик элементарных частиц необходимы быстрые и эффективные алгоритмы и комплексы программ, устойчивые к «зашумлению» траекторий частиц и высокому уровню загрузок в детекторах.

Реконструкция траекторий заряженных частиц (далее «трекинг») является одним из ключевых этапов в процессе полной реконструкции физических событий. Она направлена на оценку импульсов частиц, их идентификации и восстановлении точки взаимодействия. Эта задача является чрезвычайно сложной, учитывая большую множественность частиц, возникающих при каждом соударении, будь то встречных пучков в точках взаимодействия или пучка с фиксированной мишенью.

Многоцелевой экспериментальный комплекс CMS, работающий на LHC, спроектирован для детектирования, идентификации и реконструкции физических объектов (фотонов, электронов, мюонов, струй) с энергией вплоть

до нескольких ТэВ. Мюоны, обладающие такими высокими импульсами<sup>2</sup>, перестают быть слабоионизирующими частицами и ведут себя подобно электронам (для них резко возрастает тормозное излучение, и они активно взаимодействуют с веществом детектора, порождая вторичные фоновые частицы). Это накладывает особые требования к разработке методов реконструкции событий во всех детекторных подсистемах, образующих трекинг-систему установки (трекер и мюонная система). Ключевыми детекторами торцевой мюонной системы CMS являются катодно-стриповые камеры (Cathode Strip Chambers, CSC), часть из которых расположена в области максимальных загрузок детекторных систем эксперимента. Это многократно усложняет реконструкцию событий.

Эксперимент  $BM@N$  является первым этапом мегасайенс проекта NICA, реализуемого в ОИЯИ. Для получения первых физических данных в этом эксперименте необходимо реконструировать траектории заряженных частиц после анализирующего магнита, где главную роль выполняют дрейфовые камеры (Drift Chambers, DCH), для которых требовалось разработать комплекс программ, начиная от формирования хитов до полной реконструкции траекторий частиц после магнита.

## Цели и задачи

Целью исследования является разработка методов и комплексов программ для реконструкции траекторий заряженных частиц в катодно-стриповых камерах эксперимента CMS и дрейфовых камерах эксперимента  $BM@N$ .

Основные задачи, которые решались в рамках исследования:

- разработка алгоритмов и соответствующего комплекса программного обеспечения для реконструкции мюонных треков-сегментов в катодно-стриповых камерах эксперимента CMS в условиях высокой загруженности камер при большой светимости;
- разработка алгоритмов и соответствующего комплекса программного обеспечения для реконструкции траекторий заряженных частиц в дрейфовых камерах эксперимента  $BM@N$ ;
- определение оптимальных параметров алгоритмов для реконструкции треков в зависимости от расположения детекторов в экспериментальных установках и условий набора данных;

---

<sup>2</sup> Стоит отметить, что ранее, до эры LHC, мюоны подобных энергий в экспериментах на ускорительных комплексах не наблюдались.

- оценка эффективности и пространственного разрешения детекторов для различных наборов данных;
- внедрение разработанных алгоритмов и комплекса программ реконструкции траекторий заряженных частиц в катодно-стриповых камерах в программное обеспечение эксперимента CMS (CMSSW [5]) с последующим их тестированием на моделированных и экспериментальных данных;
- внедрение разработанных алгоритмов и комплекса программ реконструкции траекторий заряженных частиц в дрейфовых камерах в программное обеспечение эксперимента BM@N (BMNROOT [6]) с последующим его тестированием на моделированных и экспериментальных данных.

## **Научная новизна**

Предложен, разработан и апробирован алгоритм Road Usage (RU, алгоритм «опорной дороги») реконструкции трек-сегментов в катодно-стриповых камерах эксперимента CMS с учетом специфики детекторов и больших светимостей на LHC. Данный алгоритм позволил реконструировать траектории мюонов с уникально высоким поперечным импульсом (до  $\sim T\bar{E}B$ ) в условиях высокой загрузки камер вторичными частицами [A1, A3, A7].

Предложен, разработан и апробирован алгоритм, позволяющий разделять кластеры аномального распределения заряда на стрипах на отдельно взятом слое CSC, что позволило с высокой точностью разделять координаты двух близко летящих частиц [A6].

Впервые в эксперименте BM@N был реализован алгоритм полной реконструкции траекторий заряженных частиц в дрейфовых камерах. Проведены первые измерения эффективности, пространственного и импульсного разрешения в DCH [A2, A4, A5].

## **Научно-практическая значимость работы**

1. Разработанные методы и комплексы программ для реконструкции траекторий заряженных частиц в координатных детекторах, работающих в условиях большой множественности частиц, используются на данный момент в качестве основных при моделировании и обработке экспериментальных данных экспериментов CMS и BM@N, они могут быть использованы в трековых детекторах

других экспериментов в области физики высоких энергий и доступны по ссылкам:

<https://git.jinr.ru/nica/bmnroot/-/tree/dev/detectors/dch>

<https://github.com/cms-sw/cmssw/tree/master/RecoLocalMuon>

В частности, алгоритм RU был адаптирован для новых детекторов GEM (Gas Electron Multiplier – газовый электронный умножитель) в торцевой части мюонной системы CMS.

- Используя разработанные методы и алгоритмы для реконструкции траекторий мюонов в катодно-стриповых камерах, было показано, что высокоэнергичные ( $\sim 1$  ТэВ) мюоны реконструируются с высокой эффективностью и улучшенным пространственным разрешением в сравнении с другими методами, что расширяет возможности по изучению новой физики на LHC [A3].
- Существенным практическим результатом стало доказательство возможности восстановления траекторий мюонов с приемлемой эффективностью в условиях больших нагрузок в катодно-стриповых камерах, ожидаемых на будущем коллайдере HL–LHC.
- Реализованный комплекс программ для дрейфовых камер эксперимента VM@N сыграл решающую роль в реконструкции траекторий заряженных частиц после анализирующего магнита, что являлось необходимым условием для достижения целей физического эксперимента VM@N. В том числе, за счет качественного трекинга в DCH успешно выполнена физическая программа по короткодействующим корреляциям (Short-Range Correlations, SRC) на VM@N [7, 8].

## Методология и методы исследования

- При поиске оптимальных параметров алгоритмов реконструкции использовались методы математической статистики.
- Алгоритмы восстановления сигнала в детекторах и построения трек-сегментов разрабатывались и отлаживались одновременно на экспериментальных и моделированных данных с достижением их взаимного согласия.
- Программные комплексы и алгоритмы выполнены на языках C++ и Python.
- При программной реализации разработанных алгоритмов использовались онлайн-платформы GitHub (для эксперимента CMS) и GitLab (для эксперимента VM@N) для системы контроля версий Git.

- При моделировании сигналов в рассматриваемых детекторах применялись методы Монте-Карло с различными генераторами случайных чисел.

## **Положения, выносимые на защиту**

1. Алгоритм разделения перекрывающихся сигналов в катодно-стриповых камерах эксперимента CMS, повышающий точность измерения азимутальной координаты мюонов на отдельно взятом слое CSC.
2. Модифицированная процедура реконструкции хитов в дубненских ME1/1 CSC станциях эксперимента CMS с учетом специфики их геометрии, позволяющая восстанавливать хиты и трек-сегменты с высокой эффективностью в зоне максимальных загрузок детекторных систем эксперимента.
3. Комплекс программ реконструкции трек-сегментов в CSC эксперимента CMS, позволяющий реконструировать траектории мюонов в условиях высоких загрузок камер CSC при больших светимостях коллайдера.
4. Комплекс программ для реконструкции траекторий заряженных частиц в системе дрейфовых камер эксперимента BM@N, позволивший получить полную информацию о траекториях частиц для реализации программы исследований эксперимента.
5. Включение разработанных алгоритмов, методов и комплексов программ в программное обеспечение экспериментов CMS и BM@N, а также их тестирование на различных типах данных.

## **Достоверность**

Все разработанные методы, алгоритмы и комплексы программ были внедрены в официальные программные пакеты коллабораций CMSSW (программное обеспечение CMS) и BMNROOT (программное обеспечение BM@N), разработанные на базе специализированной платформы программ и библиотек ROOT.

Они были протестированы как на экспериментальных данных, так и на данных моделирования, полученных с помощью широко известных генераторов событий, например, таких как Pythia и DCM-SMM [9], также с использованием пакета GEANT4, применяемого для трассировки частиц через экспериментальные установки (получения «отклика» детекторных систем).

Результаты CMS, полученные с помощью созданных методов и алгоритмов, совпадают с результатами другого многоцелевого эксперимента на LHC – ATLAS [10] и не противоречат предсказаниям Стандартной модели.

Эти физические результаты включены в регулярные обзоры по физике частиц Particle Data Group [11].

### **Апробация работы**

Основные положения и результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на международных и российских конференциях и рабочих совещаниях:

- Russia-Dubna Member States (RDMS) CMS Conference – 2022, 2016 гг.
- Международная научная конференция молодых ученых и специалистов ОИЯИ – 2021, 2020 гг.
- Школа-конференция молодых ученых и специалистов ОИЯИ Алушта – 2020, 2019, 2018, 2017 гг.
- International Conference on Mathematical Modeling and Computational Physics (ММСП) – 2019, 2017, 2015 гг.
- International Symposium on Nuclear Electronics and Computing (NEC) – 2019 г.
- NICA Collaboration Meeting – 2018 г.
- International Conference on Computing in High Energy and Nuclear Physics (CHEP) – 2018 г.
- Romania LCG Workshop (RO-LCG) – 2018, 2017 гг.
- CSC Local Trigger and Reconstruction Workshop, CERN – 2017 г.
- International Session-Conference of the Section of Nuclear Physics of RAS, (SNP-RAS-16) – 2016 г.
- Регулярные семинары в ЛИТ и ЛФВЭ ОИЯИ.
- Регулярные совещания профильных подгрупп в экспериментах CMS и VM@N.

Исследования, на которых основана диссертация, были неоднократно поддержаны грантами РФФИ (18-02-40046) и Объединения молодых ученых и специалистов ОИЯИ (в 2016-2019 гг. и в 2022 г.), а также отмечены стипендией ЛИТ ОИЯИ им. М.Г. Мещерякова (в 2015, 2020, 2021 гг.) и премией ОИЯИ для молодых ученых и специалистов (в 2018 г.).

### **Публикации и личный вклад**

По теме диссертации опубликовано 7 научных работ, 6 из которых опубликованы в рецензируемых изданиях, соответствующих требованиям к публикациям Положения о присуждении ученых степеней в ОИЯИ (пр. ОИЯИ от 11.02.2022 №132).

Методы и алгоритмы, представленные в диссертации, разработаны при определяющем участии соискателя. Программная реализация разработанных методов и алгоритмов, их тестирование и апробация выполнены лично соискателем.

### **Соответствие диссертации паспорту специальности**

Диссертация соответствует требованиям специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». В диссертационной работе присутствуют результаты в областях исследований, соответствующих пунктам 2,3,4 паспорта специальности. Соответствие диссертации физико-математической отрасли науки определяется преобладанием математических (численных) методов в качестве аппарата исследований и направленностью результатов диссертационной работы на получение новой физически значимой информации путем моделирования физических процессов и анализа данных экспериментов ФВЭ.

### **Объем и структура диссертации**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, двух приложений, списка литературы, рисунков и таблиц. Работа содержит 116 страниц и включает в себя 57 рисунков, две таблицы и два приложения. Список литературы содержит 46 наименований.

### **Содержание работы**

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель, и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, сформулированы выносимые на защиту научные положения.

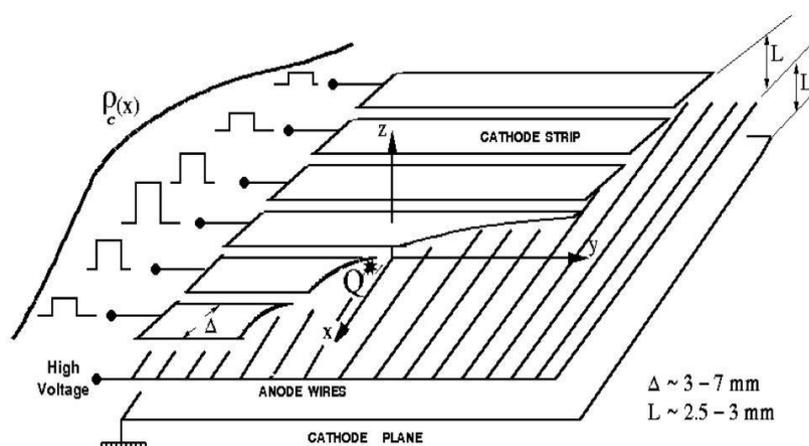
В **Главе 1** представлены результаты разработки и тестирования алгоритма разделения перекрывающихся сигналов [Аб] в катодно-стриповых камерах эксперимента CMS.

**Раздел 1.1** посвящен описанию многоцеловой экспериментальной установки CMS и системы координат эксперимента. Особое внимание уделено конструкции и характеристикам основных систем, участвующих в реконструкции траектории заряженных частиц – трекеру и торцевой мюонной системе. Отдельно рассмотрен принцип работы и реконструкции координат траектории в катодно-стриповых камерах CSC эксперимента CMS.

CSC представляют собой специальные многопроволочные пропорциональные камеры, расположенные в торцевой части мюонного

спектрометра. В этой области, несмотря на высокий уровень фоновых частиц (из-за близости к пучку), CSC способны восстанавливать траектории мюонов с высокой точностью и эффективностью.

Каждая камера состоит из шести слоев, обеспечивающих высокую надежность восстановления траектории мюона. При прохождении заряженной частицы через слой CSC (рис. 1) она выбивает электроны из молекул газа, и они стекают к анодным проволокам, а положительно заряженные ионы движутся к катодным стрипам, индуцируя на них заряд. Сработавшие проволоки (объединённые в проволочные группы – Wire Groups, WG) и заряды на стрипах дают информацию о радиальной и азимутальной координатах прошедшей частицы на слое, из которых мы получаем двумерную координату на слое.



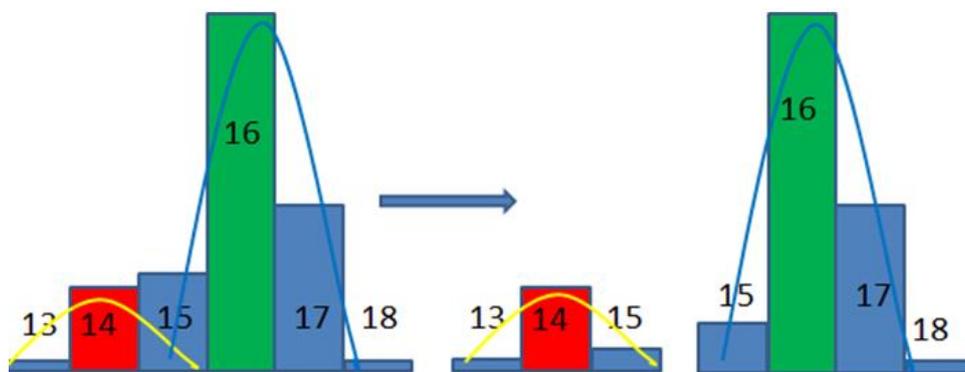
**Рис. 1.** Принцип работы одного слоя CSC. Анодные проволоки дают грубую координату, а по заряду перпендикулярно расположенных стрипов восстанавливается точная координата.

Имея такие координаты хотя бы на трех слоях, можно собрать их в трек-сегмент и восстановить всю траекторию движения заряженной частицы в конкретной камере. Информация от нескольких CSC наряду с информацией от других детекторов собирается вместе, чтобы восстановить полную траекторию пролетающей частицы, от точки взаимодействия до пределов экспериментальной установки CMS.

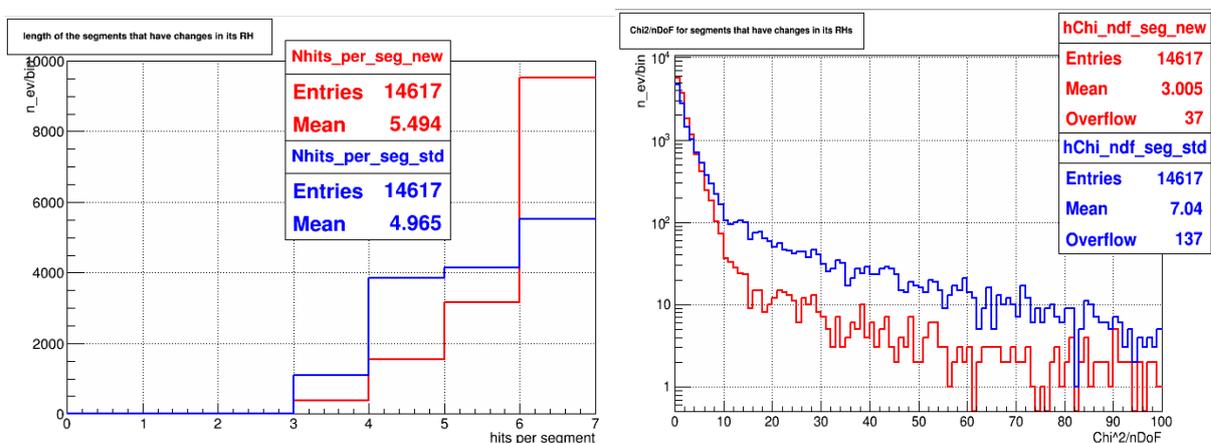
В разделе 1.2 дано описание предложенного метода распознавания перекрывающихся сигналов в отдельном слое CSC. Азимутальная координата восстанавливается путем фитирования распределения заряда на стрипах функцией Гатти [12]. Фитирование функцией Гатти даёт достоверный результат лишь при ширине кластера в три стрипа, при этом точность определения координаты варьируется в пределах 2–5% ширины стрипа.

В некоторых случаях при построении трек-сегмента (данная процедура будет описана в следующей главе) часть хитов не проходит проверку на близость к аппроксимированной траектории. Это происходит в случае широкого кластера неравномерной формы распределения заряда относительно максимума. При этом точность восстановления азимутальной координаты для таких кластеров является низкой – более 30% от ширины стрипа. Для случая широкого кластера (или его сложной формы) функция Гатти не применяется. Такие случаи относятся к событиям, когда две или более частиц пролетели вблизи друг друга, индуцируя заряд в широком диапазоне последовательных стрипов. В подобных кластерах, если они не содержат более одного локального максимума, для восстановления координаты использовался простой подход центра тяжести (Center of Gravity – CoG).

Вместо CoG-подхода было предложено разделять подобные кластеры на два, с пропорциональным разделением заряда общего стрипа (рис. 2).



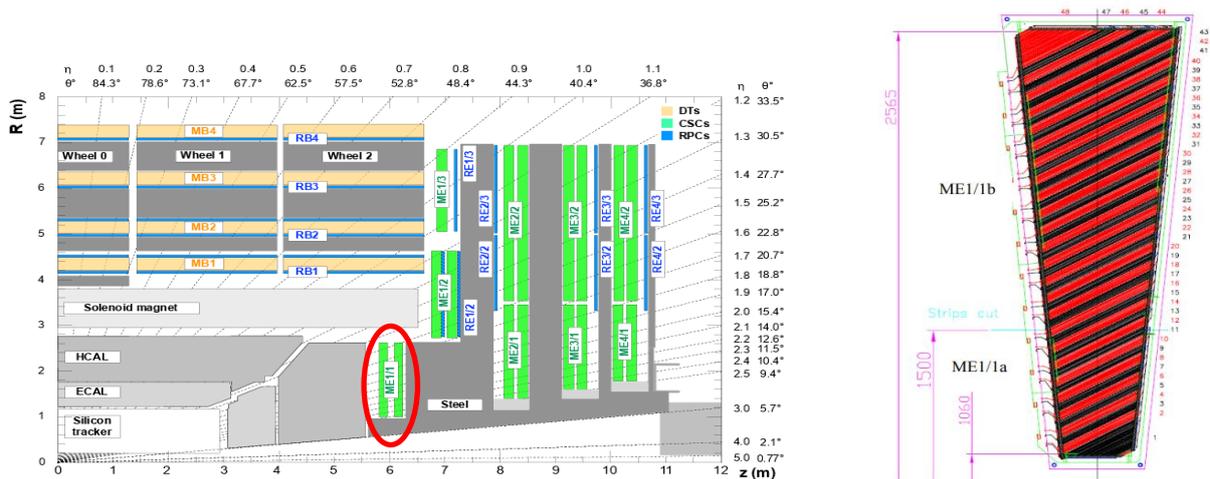
**Рис. 2.** Разделение широкого кластера нерегулярной формы. Цифры на рисунке обозначают номера стрипов. Заряд стрипа №15 разделен между двумя кластерами пропорционально зарядам стрипов №14 и №16.



**Рис 3.** Слева – длина трек-сегмента в хитах; справа – среднеквадратичное отклонение хитов от трек-сегмента –  $\chi^2/NDF$ .

После этого каждый из полученных кластеров фитируется функцией Гатти, и вместо одной получаются две более точные стриповые координаты. Предложенный метод позволил добиться увеличения средней длины трек-сегментов на 0.53 хита, при этом величина  $\chi^2/NDF$  уменьшилась в 2.3 раза (рис. 3).

В разделе 1.3 проведена оптимизация алгоритма реконструкции координат траекторий заряженных частиц в слое с учетом особенностей геометрии камер ME1/1. Специфика геометрии камер ME1/1 станции приводит к падению эффективности реконструкции в некоторых областях этих камер. ME1/1 камеры располагаются ближе всего к точке взаимодействия и пучку (рис. 4, слева) в области псевдобыстроты  $1.5 < |\eta| \leq 2.4$ .



**Рис 4.** Слева – расположение ME1/1 станции в экспериментальной установке; Справа – детальная геометрия ME1/1 камеры.

Эти камеры были полностью спроектированы и собраны в ОИЯИ. Они обладают особой геометрией, которая позволяет реконструировать траектории частиц в условиях высокой светимости коллайдера [1]. Проволоки в этих камерах, в отличие от остальных, ориентированы не перпендикулярно стрипам, а под углом  $29^\circ$ , при этом камера поделена радиально на две части с отдельным считыванием откликов со стрипов (рис. 4, справа).

Вместо ожидаемого монотонного убывания загруженности хитов в камерах с увеличением радиуса наблюдались три нерегулярности: в первой и последней проволочных группах (WG) камер ME1/1, а также в области разреза по стрипам.

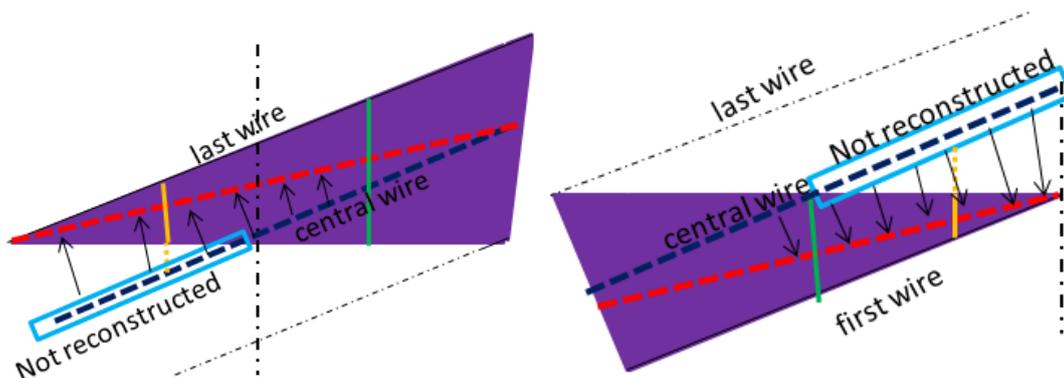
Общий подход к восстановлению координаты на слое аппроксимирует координату пролета частицы как пересечение центральной проволоки, сработавшей WG и восстановленной координаты на стрипах. При этом производится проверка попадания восстановленной координаты в

геометрические пределы камеры для уменьшения числа ложных хитов и устранения краевых эффектов. В силу особой геометрии первой и последней WG в ME1/1 камерах пересечение центральной проволоки и координаты стрипа в значительной части случаев может выходить за допустимые пределы камеры, и такие хиты не восстанавливаются (рис. 5, голубая рамка).

Эта проблема была устранена для ME1/1 камер путём замены в общем алгоритме центральной проволоки на биссектрису WG, которая выражается через координаты первой, центральной и последней проволок в WG формулами (1) для первой и (2) для последней WG.

$$Y_{\text{красный}} \cong Y_{\text{перв. проволоки}} + |X_{\text{центр. проволоки}}| \cdot \tan \frac{29^\circ}{2}, \quad (1)$$

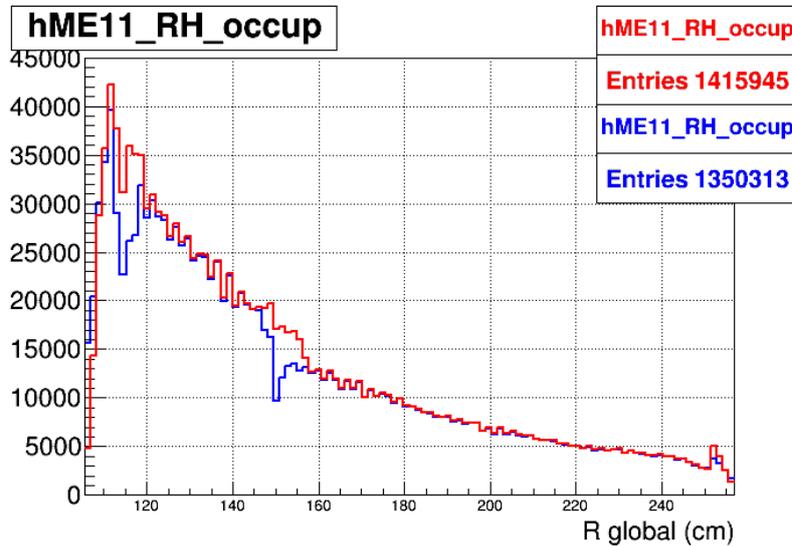
$$Y_{\text{красный}} \cong Y_{\text{послед. проволоки}} - (10.5\text{см} + X_{\text{центр. проволоки}}) \cdot \tan \frac{29^\circ}{2}. \quad (2)$$



**Рис. 5.** Схематичное представление реконструкции хита в первой (слева) и последней (справа) WG в ME1/1 камерах. Используемая радиальная координата в стандартном (синий пунктир) и модифицированном (красный пунктир) алгоритмах.

На первом этапе набора данных (Run1) в ME1/1 станции использовалась аналоговая электроника. Поэтому в процедуре реконструкции хитов для области разреза стрипов в ME1/1 камерах для фильтрации ложных комбинаций проволочной и стриповой информации требовалось применение жесткого геометрического отбора на программном уровне. После замены электроники на цифровую стало возможным модифицировать процедуру восстановления хитов для устранения неэффективности в области разреза стрипов путём подбора порогов для геометрического отбора хитов. При этом уровень ложно восстановленных хитов увеличился незначительно.

В результате внесения всех предложенных изменений в процедуру реконструкции хитов загрузка хитов в ME1/1 камерах стала однородной, как видно на рис. 6.



**Рис. 6.** Загруженность ME1/1 камер относительно расстояния (R) от оси пучка. Синим цветом обозначен стандартный подход, красным – предложенный.

**Вторая глава** посвящена реконструкции трек-сегментов в CSC. Кратко описан предыдущий подход (ST) к реконструкции трек-сегментов. Приводится детальное описание нового разработанного в диссертации алгоритма RU реконструкции трек-сегментов. Показаны результаты сравнительного анализа двух подходов с использованием различных типов экспериментальных и моделированных данных [A1, A3].

Трек-сегмент в CSC представляет собой 3D-объект (3 координаты центра сегмента и 3 направляющих косинуса), полученный прямолинейным фитированием 2D координат с шести слоев камеры. Он описывает траекторию заряженной частицы в рамках одной камеры.

В разделе 2.1 кратко описан алгоритм Spanning Tree (ST) [13], который использовался для реконструкции трек-сегментов с CSC во время набора данных с LHC на 7 ТэВ, 8 ТэВ и части 13 ТэВ. За основу взят метод Spanning Tree для формирования всех возможных комбинаций и поиска тех, которые наиболее соответствуют прямой линии (поиск остовного дерева графа). Кандидаты в трек-сегменты выбираются путём минимизации параметра  $A$ , характеризующего разброс хитов и определяемого (для примера шести слоёв с хитами) по формуле:

$$A = |\theta_{12} - \theta_{23}| + |\theta_{23} - \theta_{34}| + |\theta_{34} - \theta_{45}| + |\theta_{45} - \theta_{56}|, \quad (3)$$

где  $\theta_{ij} \cong \tan^{-1} \Delta x_{ij}/d_{ij}$ ,  $\Delta x_{ij}$  – разность в координате  $x$  между  $i$ -ым и  $j$ -ым слоями,  $d_{ij}$  – расстояние между плоскостями  $i$ -го и  $j$ -го слоёв.

Подробное рассмотрение и анализ результатов использования алгоритма ST показали его существенные недостатки, особенно при

реконструкции событий с высокоэнергичными мюонами. Такие события характеризуются высокой множественностью хитов в камере, что приводит к реконструкции алгоритмом ST большого количества трек-сегментов минимальной длины в три хита, подавляющая часть из которых являются ложными. Более того, так как алгоритм ST перебирает все возможные варианты, для экономии времени в камерах с количеством хитов выше порога реконструкция трек-сегментов не проводится. Тем самым теряется информация о трек-сегментах в этой камере.

В разделе 2.2 кратко описан алгоритм Road Usage (RU) [A1, A3], который был разработан для увеличения эффективности поиска высокоэнергичных мюонов. Он работает быстрее и является менее сложным, чем алгоритм ST, при этом показывает гораздо лучшие результаты при реконструкции жестких мюонов и высокой светимости коллайдера, что приводит к большой множественности фоновых хитов в камере. Схематично алгоритм RU представлен на рис. 7.

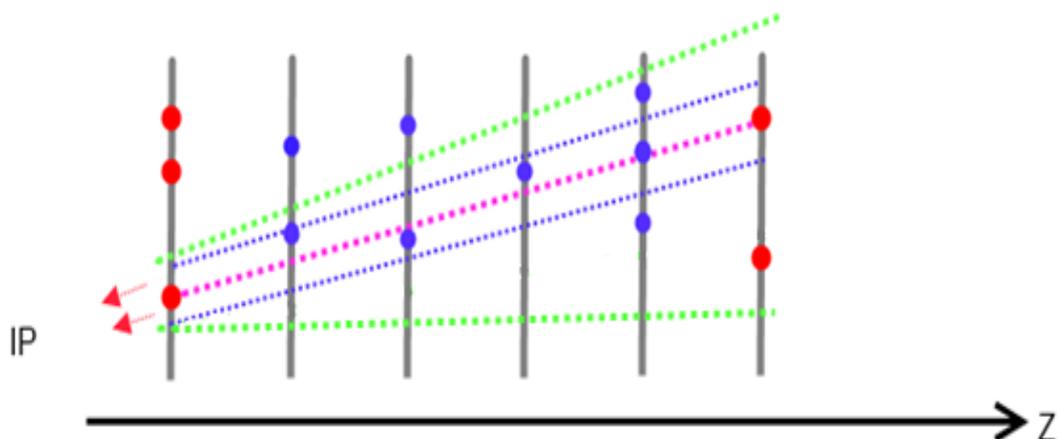


Рис. 7. Иллюстрация алгоритма RU.

В качестве базовых берутся хиты в первом и последнем слоях камеры (красные точки) таким образом, чтобы они были расположены внутри зеленого луча, указывающего в область точки взаимодействия и определяемого условием:

$$\left| \frac{R_{\text{посл}}^2 Z_{\text{перв}} - R_{\text{перв}}^2 Z_{\text{посл}}}{Z_{\text{посл}}} \right| < \Delta R_{\text{пороговый для луча}} \quad (4)$$

Это требование является существенным отличием от алгоритма ST и способствует уменьшению ложных комбинаций. Вдоль линии (фиолетовый пунктир), соединяющей базовые точки, строится «опорная дорога» (синий пунктир). В трек-сегмент добавляются хиты из внутренних слоёв, попадающих в диапазон «опорной дороги», определяемый формулами:

$$|R_{\text{канд}} - R_{\text{оцен}}| < \Delta R_{\text{порог}} , \quad (5)$$

$$|\varphi_{\text{канд}} - \varphi_{\text{оцен}}| < \Delta\varphi_{\text{порог}} . \quad (6)$$

Если этим критериям удовлетворяют более одного хита на слое, то для каждого строится отдельный кандидат в сегменты. Из этих кандидатов с общими точками выбирается наиболее длинный по числу хитов и минимальный по  $\chi^2$ .

$$\chi_N^2 = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{i=1}^N \frac{d_i^2}{\sigma_i^2} < \chi_{\text{пороговое}}^2 , \quad (7)$$

где  $d_i$  – расстояние хита от фитированного трек-сегмента,  $\sigma_i$  – ошибка измерения хита на  $i$ -ом слое,  $N$  – количество хитов в кандидате в сегменты.

Если сегмент не удовлетворяет заданному порогу (7) по  $\chi^2$ , то используется разработанный метод оптимального отбора, который убирает наиболее отдаленные хиты от прямолинейного фита, минимизируя функционал:

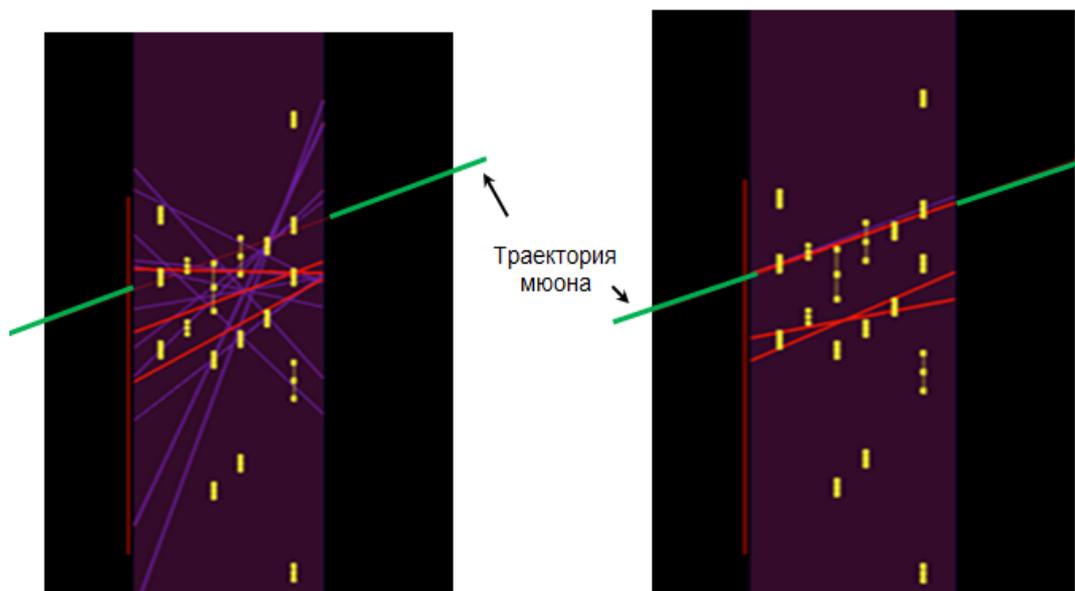
$$\min \sum_i^N |d_i| . \quad (8)$$

Метод оптимального отбора учитывает негауссовый характер зашумленных хитов [14] и более близко описывает принцип работы детектора, чем при отборе в алгоритме ST с использованием общепринятого метода МНК [15].

Все хиты, собранные в трек-сегменты, исключаются из дальнейшего рассмотрения при наборе последующих трек-сегментов с меньшим числом точек. Если по итогам описанных шагов в камере осталось достаточно неиспользованных хитов, то шаги повторяются без проверки на ориентацию будущего трек-сегмента относительно точки взаимодействия. При этом пороговые значения для «опорных дорог» увеличиваются вдвое. Этот этап позволяет восстановить трек-сегменты от частиц, рожденных во вторичных вершинах, либо от мюонов с низким поперечным импульсом, траектории которых могут искривляться на базе одной камеры под действием магнитного поля.

**Раздел 2.3** посвящен сравнению двух алгоритмов. Каждый модуль программного обеспечения для реконструкции события в поддетекторных системах эксперимента CMS содержит класс со стандартным набором методов и гистограмм для оценки и проверки достоверности работы реконструкции в детекторе – валидатор. Стандартный валидатор для CSC был развит и дополнен различными методами и гистограммами, которые позволяют производить статистическую оценку работы реконструкции симулированных

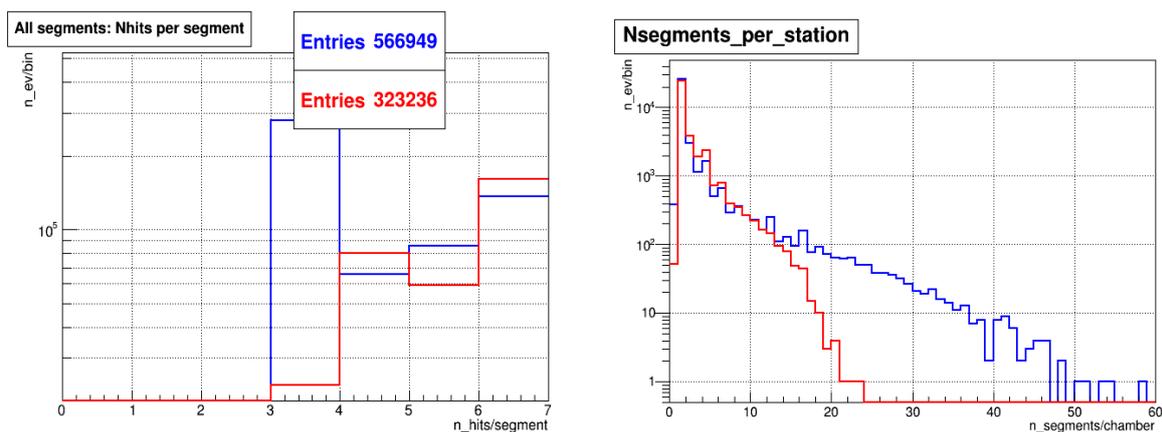
и экспериментальных данных в рамках CSC. Кроме валидатора использовался стандартный инструмент визуализации событий CMS (`cmsShow` – CMS event display tool) для рассмотрения и сравнения работы алгоритмов в отдельно взятом событии. Пример такой визуализации представлен на рис. 8. В данном случае изображены объекты реконструкции симулированного события с мюоном с поперечным импульсом в 1 ТэВ в CSC. Высокий поперечный импульс мюона приводит к рождению электромагнитных ливней в веществе перед камерами, что в свою очередь приводит к большой множественности хитов. На рисунке представлен пример такого события, в котором реконструировалось 84 хита. Каждый хит изображен в виде желтых отрезков, длина которых отображает разброс ошибок измерения. На рис. 8 слева показан результат реконструкции трек-сегментов алгоритмом ST. Всего было построено 15 трек-сегментов (синие и красные линии), большинство из которых состоят из трех хитов. Как видно из рисунка, их ориентация хаотична. На последующих этапах реконструкции траектории мюона три трек-сегмента (красные линии) были ассоциированы с мюоном. Траектория симулированного мюона отображена на рисунках в виде зеленой линии вне камеры и тонкой красной линии внутри. Отметим, что ни один из трех «мюонных» трек-сегментов в алгоритме ST не совпадает с траекторией мюона. На рис. 8 справа представлен результат работы алгоритма RU. Всего было построено четыре трек-сегмента, три были ассоциированы с мюоном, один из которых в точности повторяет траекторию симулированного мюона.



**Рис. 8.** Визуализация смоделированного события прохождения через камеру CSC мюона с  $p_T = 1$  ТэВ. Слева представлен результат реконструкции события алгоритмом ST, справа – алгоритмом RU.

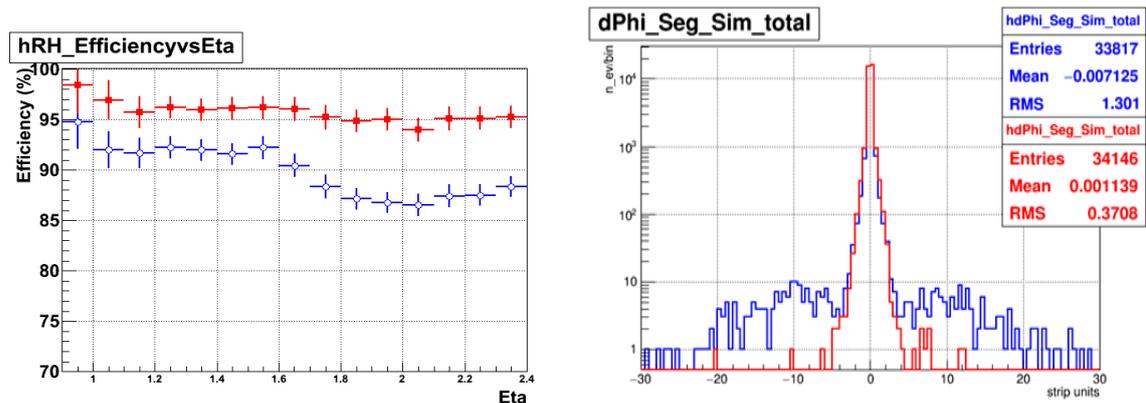
Тестирование и внедрение нового алгоритма вместо предыдущего в официальный пакет программ CMS требуют проведения сравнительного анализа работы двух алгоритмов на различных типах данных. При этом были использованы наборы данных Монте-Карло со сгенерированными различными типами взаимодействий и экспериментальные данные разных периодов набора.

Основной задачей являлась демонстрация преимуществ нового алгоритма по сравнению с предыдущим. Сравнительный анализ параметров работы алгоритмов показал, что алгоритм RU не уступает алгоритму ST по качеству реконструкции для событий с низкой множественностью хитов в камере и дает растущий выигрыш с увеличением множественности хитов. Наибольшее преимущество алгоритма RU получено на данных с ТЭВ-ными мюонами, где увеличивается число полноточных (6 хитов) трек-сегментов (рис. 9, слева). В то же время реконструировано в 12 раз меньше коротких треххитовых трек-сегментов (рис. 9, слева), большая часть из которых обычно относится к ложным срабатываниям от частиц электромагнитного сопровождения мюона. В результате множественность трек-сегментов снизилась, при этом, как видно по числу входов в первый бин (интервал) гистограммы (рис. 9, справа), число случаев, когда в камере не удалось реконструировать ни одного трек-сегмента, уменьшилось в 8 раз.



**Рис. 9.** Слева – количество хитов в трек-сегментах; справа – множественность трек-сегментов в камере на событие. Приведены результаты, полученные с помощью алгоритма ST (голубая гистограмма) и алгоритма RU (красная гистограмма).

Как видно из рис. 10 слева, эффективность реконструкции мюонных трек-сегментов повысилась. При этом провал, наблюдавшийся при больших значениях псевдобыстроты, был устранен. Среднеквадратичное отклонение (Root Mean Square – RMS) азимутальной (точной) координаты реконструированных мюонных трек-сегментов и траектории симулированного мюона уменьшилось в 3.5 раза (рис. 10, справа).



**Рис. 10.** Слева – эффективность реконструкции мюонных трек-сегментов относительно псевдобыстроты; справа – разница в точной координате трек-сегмента и симулированной траекторией мюона. Приведены результаты, полученные с помощью алгоритма ST (голубая гистограмма) и алгоритма RU (красная гистограмма)

Одним из пунктов, необходимых для внедрения новых алгоритмов в пакет программ CMSSW, является оценка скорости его работы. В случае алгоритма RU было необходимо показать, что он как минимум не медленнее алгоритма ST. Результаты замеров времени различных модулей реконструкции показали, что реконструкция трек-сегментов алгоритмом RU производится в среднем в  $\sim 2$  раза медленнее, чем алгоритмом ST, но при этом среднее время полной реконструкции события на 18% быстрее при использовании алгоритма RU. Это достигается за счёт уменьшения количества ложных трек-сегментов, что сокращает число переборов на последующих этапах реконструкции траектории мюона фильтром Калмана [16].

Алгоритм RU был внедрен в CMSSW в 2016 году, а начиная с набора экспериментальных данных в 2017 году он стал алгоритмом, используемым по умолчанию для реконструкции трек-сегментов в CSC. В 2019 году он был адаптирован для реконструкции в проектировавшихся GEM-детекторах для модернизации мюонной системы CMS. В 2021 году алгоритм RU стал использоваться по умолчанию для триггера высокого уровня (High Level Trigger) в CSC CMS.

**Третья глава** содержит результаты разработки комплекса программ реконструкции траекторий заряженных частиц в дрейфовых камерах (DCH) эксперимента BM@N [A2, A4, A5]. Кратко описаны эксперимент BM@N и камеры DCH. Проиллюстрированы результаты работы программного комплекса реконструкции на различных типах данных.

В разделе 3.1 описана экспериментальная установка BM@N (Барионная материя на Нуклотроне), которая является первым действующим

экспериментом на ускорительном комплексе NICA-Нуклотрон. Цель эксперимента BM@N – изучение взаимодействий релятивистских пучков тяжелых ионов с фиксированными мишенями [17]. Максимальная кинетическая энергия протонов составляет 13 ГэВ. Максимальная кинетическая энергия ионов с отношением  $Z/A = 0.5$  составляет 6 ГэВ/нуклон. Например, проектная максимальная кинетическая энергия ядер золота с  $Z/A = 0.4$  равна 4.5 ГэВ/нуклон, а планируемая плотность пучка ионов золота для BM@N составляет  $10^6 \text{ с}^{-1}$ . В 2018 году экспериментом BM@N были получены данные на пучках ядер углерода, аргона и криптона. Ускорение пучков более тяжелых ионов (вплоть до ядер золота) стало возможным после модернизации Нуклотрона в 2020 году. Рабочая область эксперимента BM@N находится в промежуточном диапазоне между экспериментами на SIS и NICA/FAIR и частично перекрывает энергетический диапазон эксперимента HADES.

Экспериментальная установка BM@N представляет собой детекторную систему, нацеленную на измерение характеристик заряженных частиц путем восстановления траектории их движения в магнитном поле. Идентификация частиц осуществляется с помощью времяпролетной методики, а для измерения центральности взаимодействия используется адронный калориметр. Импульс заряженных частиц и их множественность измеряются системами внутреннего и внешнего трекеров. Внешний трекер состоит из двух дрейфовых камер.

Дрейфовые камеры представляют собой газовые детекторы, используемые для реконструкции траекторий заряженных частиц. Две дрейфовые камеры плоскостного типа, использовавшиеся на эксперименте NA48 в ЦЕРНе [18], были включены в экспериментальную установку BM@N в качестве внешнего трекера.

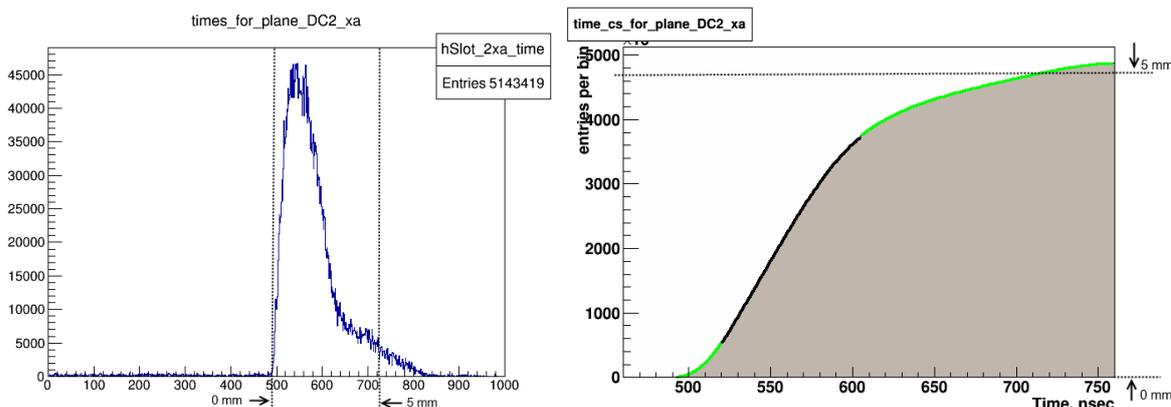
Каждая дрейфовая камера состоит из четырех пар координатных плоскостей  $x$ ,  $y$ ,  $u$  и  $v$ . Проволоки  $x$ -плоскостей ориентированы вертикально, а проволоки последующих пар располагаются под углами  $90^\circ$  и  $\pm 45^\circ$ . Шаг сигнальных проволок составляет  $\Delta = 10 \text{ мм}$ , при этом проволоки комплементарных плоскостей смещены на половину проволочного шага  $\Delta/2$  для разрешения лево-правой неопределенности при восстановлении координаты пролетевшей частицы.

В разделе 3.2 описан разработанный комплекс программ реконструкции траекторий заряженных частиц в DCH, состоящий из трех основных этапов:

- реконструкция координаты из временного отклика с проволоки на слое;

- построение трек-сегментов, используя координаты на слоях камеры;
- глобальная реконструкция траекторий частиц из трек-сегментов обеих камер.

Принцип работы дрейфовой камеры состоит в измерении времени от момента прохождения пучка через триггерную систему до момента регистрации сигнала от заряженной частицы на сигнальной проволоке (рис. 11, слева). Восстановление координат на конкретной плоскости выполняется с помощью передаточной функции (рис. 11, справа), которая преобразует время дрейфа в расстояние пролетевшей частицы от сигнальной проволоки.



**Рис. 11.** Слева – временное распределение сигналов на плоскости; справа – его интегральная форма.

Передаточные функции определяются для каждого из 16-ти слоёв (2 камеры по 8 слоёв) по отдельности из-за наблюдаемых различий в работе слоёв камер. Оптимальной конфигурацией для текущего режима работы ДСН является разбиение передаточной функции на три интервала, фитированных полиномами различных степеней. Это значительно улучшает пространственное разрешение по сравнению с простейшим подходом, когда интегральная форма аппроксимируется прямой линией [19].

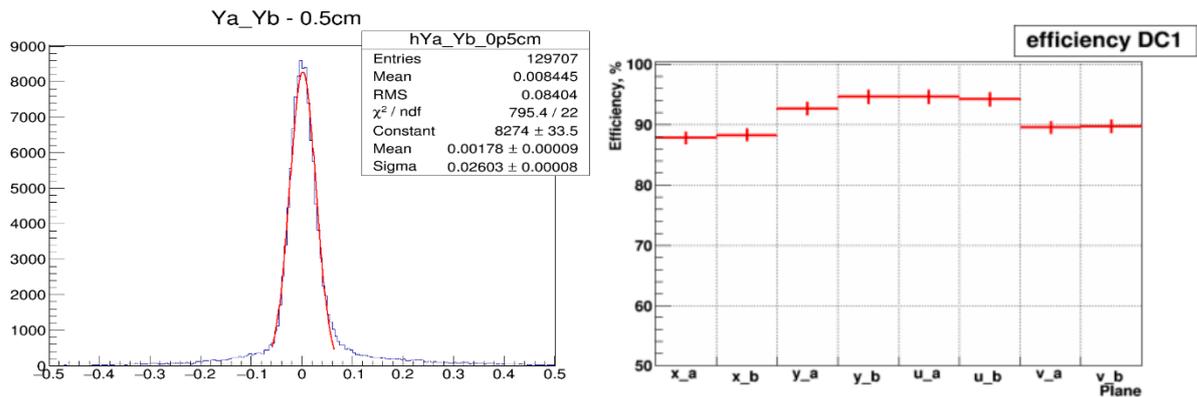
Зная номер сработавшей проволоки и восстановленное расстояние до проволоки, получаем координату на плоскости. Пространственное разрешение каждой спаренной плоскости можно оценить по формуле:

$$\delta_{ab} = d_a + d_b - \frac{\Delta}{2} \quad (9)$$

где  $d_a$  – расстояние от координаты частицы до проволоки на первой плоскости,  $d_b$  – расстояние до проволоки во второй плоскости, а  $\Delta/2 = 5$  мм – смещение положения проволоки между комплементарными плоскостями. Пространственное разрешение в слое, достигаемое при использовании экспериментальных данных, варьируется от 184 до 352 мкм для разных

плоскостей. Наилучший результат для  $Y$ -плоскостей –  $\sigma_y = 184$  мкм показан на рис. 12 слева, где

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sigma_{\delta_{ab}} \cdot \quad (10)$$



**Рис. 12.** Слева – пространственное разрешение для  $Y$ -плоскости; Справа – эффективность реконструкции хита в слое.

После восстановления всех возможных парных и одноплоскостных координат они собираются в сегменты. Процедура реконструкции сегмента основана на алгоритме «опорных дорог». Сначала формируется пара координат  $X$  и  $Y$ .  $U$  и  $V$  являются повернутыми декартовыми координатами и могут быть оценены по формулам:

$$U = \frac{Y-X}{\sqrt{2}}, \quad V = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Зная эти оценки, ищем их в восстановленном наборе координат. Если мы находим координату, попадающую в выбранный коридор (опорную дорогу), мы добавляем ее в сегмент. Пределы коридора выбирались как  $3\sigma$  распределения разности восстановленных и расчетных координат. На первом шаге учитываются только парные координаты. Если нам не удастся добавить парную координату из конкретной плоскости, мы ищем одиночную координату отдельно на комплементарной плоскости.

Результирующий сегмент фитируется методом МНК для получения его параметров, таких как наклоны и глобальные координаты сегмента. Анализируя доли пропущенных плоскостей на реконструированных сегментах, можно оценить эффективность каждой плоскости. Она представлена на рис. 12 справа. Эффективность реконструкции для всех плоскостей составляет  $\sim 90\%$ .

Последний этап реконструкции траектории частицы в системе камер DCN заключается в сопоставлении сегмента из первой камеры с соответствующим сегментом из второй камеры. Два сегмента должны

удовлетворять допустимым коридорам разностей по углу и глобальным координатам. Если они соответствуют этим критериям, они собираются в глобальный трек, который в дальнейшем используется для глобального трекинга и для привязки траектории частицы к информации из ToF-детектора, используемого для идентификации частиц.

**Раздел 3.3** содержит результаты апробации разработанного алгоритма на различных типах данных. Пучок ионов искривляется, проходя через магнитное поле. После детального выравнивания системы камер DCH относительно друг друга и относительно остальных систем трекинговых детекторов (MWPC и GEM) импульс пучка можно оценить по экспериментальным данным [20] согласно формуле:

$$P_{beam} = \frac{0.3 \cdot \int Bdl}{\sin \alpha_{out} - \sin \alpha_{in}}, \quad (12)$$

где  $\int Bdl$  – интеграл магнитного поля в Тл·м,  $\alpha_{in}$  – угол траектории частицы до магнита, которая оценивается с помощью системы детекторов MWPC,  $\alpha_{out}$  – угол траектории частицы после магнита, которая оценивается с помощью системы детекторов DCH, 0.3 представляет собой коэффициент преобразования Тл·м в ГэВ/с.

Номинальное значение импульса пучка можно определить по формуле:

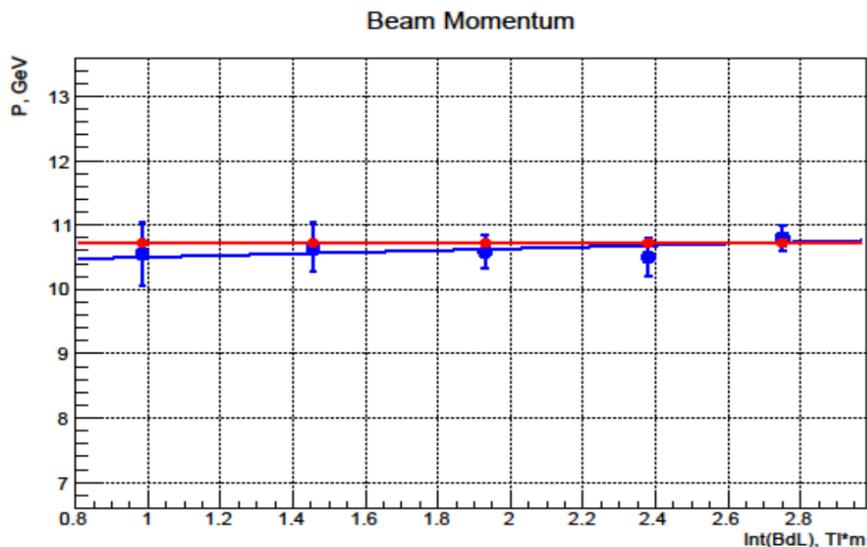
$$P_{beam} = \frac{A}{Z} * \sqrt{(E/n + M_p)^2 - M_p^2}, \quad (13)$$

где  $A$  – массовое число иона,  $Z$  – число протонов,  $E/n$  – энергия пучка на нуклон, а  $M_p$  – масса протона.

Импульс пучка оценивается для различных значений интегралов магнитного поля, чтобы получить полную иллюстрацию работы метода. Результаты для пучка углерода с энергией 4.5 ГэВ/нуклон представлены на рис. 13. Красная линия – номинальное значение импульса пучка, рассчитанное по формуле (13) и равное 10.7 ГэВ/с. Пять точек, фитированных синей линией, представляют собой значения, оцененные по экспериментальным данным. Они удовлетворяют номинальным значениям в пределах ошибок. Разрешение улучшается с увеличением значений интегралов магнитного поля от 4% до 1.8% и составляет ~2% для выбранного значения интеграла поля для набора физических данных.

Полная цепочка реконструкции моделированных данных в дрейфовых камерах эксперимента BM@N была разработана [A2]. Результаты реконструкции данных МК и эксперимента находятся в хорошем согласии

(пространственное разрешение соответственно составило 129 мкм и 122 мкм), что подтверждает правильную настройку процедуры реконструкции данных МК.



**Рис. 13.** Оценка импульса ядер углерода в пучке с энергией 4.5 ГэВ/нуклон. Красная линия – номинальное значение импульса пучка. Пять точек, фитированных сплошной синей линией, – значения импульса, оцененные по экспериментальным данным.

В 2017 году комплекс программ реконструкции траекторий частиц в DCH был имплементирован в `bnroot` в виде развитого класса. Для каждого последующего набора экспериментальных данных алгоритм реконструкции подстраивался под условия набора данных и дополнялся новыми методами. В рамках сеансов набора данных физической программы SRC оптимально настроенный трекинг в DCH позволил регистрировать искомые продукты реакции [7, 8].

В **Заключении** приведены основные результаты, и сформулированы основные выводы диссертационной работы.

### Список публикаций автора по теме диссертации

- A1. I. Golutvin, V. Karjavin, V. Palichik, N. Voytishin and A. Zarubin. *A New Segment Building Algorithm for the Cathode Strip Chambers in the CMS Experiment*, EPJ Web of Conferences **108**, 02023, (2016).
- A2. V. Palichik, N. Voytishin. *Reconstruction of Simulated and Experimental Data in the Drift Chambers of the BM@N Experiment*, Phys. Part. Nuclei Lett. **19**, 501–504 (2022).
- A3. V. Palichik, N. Voytishin. *New CSC segment builder algorithm with Monte-Carlo TeV muons in CMS experiment*, Phys. Part. Nuclei **48** №5, 786–788, (2017).

- A4. M. Kapishin, V. Lenivenko, V. Palichik, N. Voytishin. *Nuclotron Beam Momentum Estimation Using Multiwire Proportional Chambers and Drift Chambers in the BM@N Experiment*, EPJ Web of Conferences **173**, 04008, (2018).
- A5. M. Kapishin, V. Lenivenko, V. Palichik, G. Pokatashkin, I. Rufanov, V. Vasendina, N. Voytishin, A. Zinchenko. *Tracking system performance of the BM@N experiment*, EPJ Web of Conferences **214**, 02021 (2019).
- A6. N. Voytishin for CMS Collaboration. *Hit Reconstruction Improvements in the Cathode Strip Chambers of the CMS Experiment*, CEUR Workshop Proceedings **2507**, 120–124, (2019).
- A7. A. Dolbilov, V. Korenkov, V. Mitsyn, V. Palichik, S. Shmatov, T. Strizh, E. Tikhonenko, V. Trofimov, N. Voytishin. *Grid technologies for large-scale projects*, IEEE, 978-606-737-039-3, (2015).

### Список литературы

1. CERN-LHCC-2006-001, CMS-TDR-8-1 (2006).
2. L. Evans, P. Bryant, *LHC Machine*, JINST, **3**, 08, S08001 (2008).
3. M. Kapishin, Eur. Phys. J. A **52**, 213-219 (2016).
4. *NICA White Paper* – <http://theor0.jinr.ru/twiki/cgi/view/NICA/NICAWhitePaper>.
5. D. J. Lange, *The CMS Reconstruction Software*, Journal of Physics: Conference Series, **331**, no. 3, 032020, 2011.
6. Batyuk P., Gertsenberger K., Merts S., Rogachevsky O. *The BmnRoot framework for experimental data processing in the BM@N experiment at NICA*, EPJ Web of Conferences **214**, 05027 ,(2019).
7. M. Patsyuk, T. Atovullaev, A. Corsi, O. Hen, G. Johansson, J. Kahlbow, V. Lenivenko, S. Merts, V. Palichik, V. Panin, Y. Petukhov, E. Piasetzky, M. Rumyantsev, Yu. N. Uzikov, N. Voytishin et al., *BM@N Data Analysis Aimed at Studying SRC Pairs: One-Step Single Nucleon Knockout Measurement in Inverse Kinematics Out of a 48 GeV/c <sup>12</sup>C Nucleus*, Phys. Part. Nuclei, **52**, 631–636, (2021).
8. BM@N Collaboration, *Unperturbed inverse kinematics nucleon knockout measurements with a 48 GeV/c carbon beam*, Nature Physics, **17**, 693–699, (2021).

9. Baznat, M., Botvina, A., Musulmanbekov, G. et al. *Monte-Carlo Generator of Heavy Ion Collisions DCM-SMM*. Phys. Part. Nuclei Lett. **17**, 303–324 (2020).
10. ATLAS Collaboration, *The ATLAS Experiment at the CERN Large Hadron Collider*, JINST, **3**, S08003, (2008).
11. Particle Data Group <https://pdg.lbl.gov/>.
12. E Gatti, A Longoni, H Okuno and P Semenza, Nucl Instr and Meth. **163**, 83, (1979).
13. M. Paneva, *Local reconstruction algorithms in the cathode strip chambers of CMS*, EPJ Web of Conferences **214**, 02014 (2019).
14. Peter J. Huber, *Robust Statistics*, J. Willey & Sons, NY, (1981).
15. С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин; *Прикладная статистика: Исследование зависимостей*, М.: Финансы и статистика, (1985).
16. Fruhwirth R. *Application of Kalman filtering to track and vertex fitting*, Nucl. Instrum. Meth. **A262**. 444–450, (1987).
17. BM@N CDR: [http://nica.jinr.ru/files/BM@N/BMN\\_CDR.pdf](http://nica.jinr.ru/files/BM@N/BMN_CDR.pdf)
18. D. Bederede et al., Nucl. Instr. and Meth., **A 367**, 88 (1995)
19. J. Fedorišin, *Drift Chambers Simulations in BM@N Experiment*, EPJ Web of Conferences **108**, 02021 (2016).
20. Frühwirth, Regler, Bock, *Data Analysis Techniques for High-Energy Physics*, Taschenbuch, 978-0-521-63548-6, (2000).