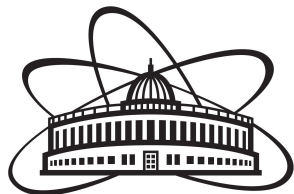


ОБЪЕДИНЁННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи



Парван Александру

**Статистическое описание релятивистских адронных систем в
столкновениях протонов с протонами и тяжёлых ионов**

Специальность 1.3.15 —
«физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Дубна — 2022

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова
Объединённого института ядерных исследований.

С электронной версией диссертации можно ознакомиться на официальном сайте Объединённого института ядерных исследований в информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» по адресу: <https://dissertations.jinr.ru/>.

С печатной версией диссертации можно ознакомиться в Научно-технической библиотеке Объединённого института ядерных исследований (г. Дубна, Московской области, ул. Жолио-Кюри, д. 6)

Учёный секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук

Ю.М. Быстрицкий

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В современной научной парадигме материя на фундаментальном уровне состоит из элементарных частиц – неделимых точечноподобных квантов энергии (фундаментальных частиц размера меньше 10^{-16} см), взаимодействующих посредством калибровочных бозонов в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве-времени событий $\mathbb{R}_{1,3}^4$. Такое представление содержится в Стандартной модели (СМ) [1–3] физики элементарных частиц, которая описывает свойства кварков, лептонов и калибровочных бозонов с большой точностью на уровне электрослабого масштаба, $\Lambda_{EW} \sim 100 - 200$ ГэВ. Стандартная модель обеспечивает удовлетворительное описание всей видимой материи нашей Вселенной. Стандартная модель состоит из теории электрослабого взаимодействия, объединяющей слабое и электромагнитное взаимодействия, и Квантовой хромодинамики (КХД) – единственной теории, описывающей на сегодняшний день сильное взаимодействие. С экспериментальным открытием бозона Хиггса [4, 5], частицы, предсказанной в [6], программа открытия частиц СМ была завершена. Несмотря на успех СМ в описании большинства экспериментов с большой долей точности, в физике элементарных частиц и космологии существует множество открытых проблем, которые в рамках СМ не имеют решения. Такие, как проблема тёмной материи [7], ненулевой массы нейтрино [8], барионной асимметрии Вселенной [9], проблема калибровочной иерархии [10], проблема великого объединения сильного и электрослабого взаимодействий [11], аномальный магнитный момент мюона [12], нарушение барионного и лептонного чисел [13] и др. Поэтому предполагается, что СМ – это эффективная теория поля и должна существовать более фундаментальная теория, объясняющая физику за пределами СМ. Основными экспериментальными сигналами поиска физики за пределами СМ являются [14]: сигналы, включающие лептоны, струи и фотоны с высоким поперечным импульсом (p_T) или недостающим поперечным импульсом; сигналы, включающие долгоживущие частицы; сигналы с усиленными коллимированными массивными адронными струями и др.

Адроны – составные частицы, участвующие во всех четырёх известных типах взаимодействий: сильном, электромагнитном, слабом и гравитационном. Лептоны – это именно те фундаментальные частицы, которые в сильных взаимодействиях не участвуют. Сильное взаимодействие – это одно из фундаментальных взаимодействий, которое ответственно за образование адронов, ядер атомов, а также за распад некоторых нестабильных элементарных частиц (резонансов). Эта сила является короткодействующей с радиусом порядка 10^{-13} см. Время жизни нестабильных частиц, распады которых происходят за счёт сильных взаимодействий, имеет порядок $10^{-22} - 10^{-24}$ с. Такое короткое время жизни связано с большой величиной интенсивности сильного взаимодействия по сравнению с другими силами. В процессах взаимодействий и превращений частиц под действием сильных взаимодействий выполняются все законы сохранения – как аддитивные законы сохранения (энергии, импульса, момента

импульса, зарядов и изоспина), так и мультипликативные (зарядовая четность, P -, T - четности, CP - четность и CPT - инвариантность) [15]. Это одна из особенностей сильного взаимодействия, являющихся источником сильной CP -проблемы, а именно – загадочного сохранения CP симметрии в сильных взаимодействиях [16, 17]. В наши дни для описания сильных взаимодействий кварков и глюонов принято использовать Квантовую хромодинамику [18–20] – неабелеву калибровочную теорию поля, основанную на локальной калибровочной симметрии относительно цветовой группы $SU_c(3)$. Идея кварков как фундаментальных составляющих адронов была введена в [21, 22]. Предполагается, что сильные взаимодействия обладают точной симметрией группы $SU_c(3)$, обеспечивающей безмассовость глюона – неабелева калибровочного бозона, переносчика сильного взаимодействия между цветовыми зарядами кварков [23]. При этом три цветных кварка реализуют фундаментальное представление группы $SU_c(3)$. Глюоны электрически нейтральны, но при этом несут на себя цветовой и антицветовой заряды из-за некоммутативности группы симметрии. Цветовой заряд экспериментально не наблюдаем. Введение цвета в КХД следует из трудностей кварковой модели [24]. Однако утроение кварковых состояний не приводит к увеличению адронных состояний, которые можно классифицировать лишь мультиплетами по квантовым числам ароматов [23]. Поэтому в КХД вводится дополнительный постулат, носящий название конфайнмента или принципа бесцветности: все адронные состояния и физические наблюдаемые – синглеты (инварианты) относительно преобразований цветовой группы [24]. Только бесцветные состояния могут быть наблюдаемы. Специфическая черта КХД – это наличие самодействия глюонного поля. Глюоны переносят цветовой заряд, поэтому они могут взаимодействовать между собой. Эта особенность, характерная для любой неабелевой калибровочной теории, приводит к свойству асимптотической свободы, т.е. уменьшению константы связи на малых расстояниях [23]. Антиэкранировка цветowego заряда при поляризации вакуума КХД виртуальными глюонами, которые размазывают цветовой заряд кварка по окружающей его области пространства, приводит к ослаблению силы цветowego взаимодействия двух кварков при их сближении друг с другом [15]. В КХД эффективная константа связи $\alpha_s(Q^2)$ как функция переданного импульса Q^2 возрастает при малых передаваемых импульсах (больших расстояниях) и логарифмически убывает при больших $Q^2 \rightarrow \infty$ (малых расстояниях) [25]. Физически рост константы связи на больших расстояниях (небольших энергиях) приводит к конфайнменту (удержанию) цветных кварков внутри адронов. Кварки и глюоны не могут существовать вне области их сильного взаимодействия. Другим важным свойством КХД является спонтанное нарушение киральной симметрии [26, 27].

Свойства конфайнмента и асимптотической свободы сильного взаимодействия могут привести к некоторым важным физическим следствиям. В нормальных условиях цветовой заряды в адронах удерживаются неабелевым калибровочным полем, образующим бесцветные нейтральные состояния. Однако при помещении некоторой системы адронов в экстремальные условия при

больших передачах импульса Q^2 , т.е. при больших температурах, и/или в пространственной области, где адроны сильно перекрывают друг друга (больших плотностях) может произойти явление деконфайнмента [28—32], т.е. высвобождения цветового заряда из адронов в ограниченной области пространства вакуума КХД, меньшей по размеру, чем аддитивная сумма размеров всех взаимодействующих адронов, и образования бесцветного нейтрального состояния для системы в целом. Такое особенное состояние вещества принято называть кварк-глюонной плазмой (КГП) [33—36]. Наоборот, при удалении кварков друг от друга в силу того, что эффективный потенциал взаимодействия между кварками посредством глюонного поля линейно растет [37], после достижения энергии критического значения происходит обратный процесс адронизации, когда энергия связи становится достаточно большой для рождения кварк-антикварковой пары и сепарации глюонного поля в две разные бесцветные области, соответствующие двум новым адронам. При этом оба эти явления – цветового деконфайнмента и адронизации – могут привести к появлению кварк-адронного фазового перехода [38—41], т.е. фазового перехода между адронной фазой и фазой КГП. Фазовые переходы КХД обычно принято описывать посредством фазовой диаграммы $T - \mu_B$, зависимости температуры от барионного химического потенциала [42—45]. Точки на этой фазовой диаграмме представляют собой фазовые состояния сильно взаимодействующей системы, а разные фазы такой системы разделены линиями, при пересечении которых КХД система претерпевает фазовый переход. Другим важным фазовым переходом КХД является киральный фазовый переход, связанный с киральной симметрией лагранжиана КХД в приближении безмассовых кварков [42, 46, 47]. Так как сильные взаимодействия при высоких энергиях приближённо инвариантны относительно киральной группы симметрий, то КГП кирально симметрична. Однако спонтанное нарушение киральной симметрии приводит к исчезающим вакуумным средним значениям и генерации динамической массы у безмассовых кварков из-за образования конденсата кварков и антикварков, т.е. кирального конденсата, при образовании адронов.

Эффективным численным рабочим инструментом для теории квантовой хромодинамики, используемым для описания термодинамических свойств кварк-глюонной плазмы и фазовой диаграммы КХД, является решеточная КХД [48—55]. Решеточная КХД – это статистическая модель полей квантовой хромодинамики, построенная на основе равновесной статистической механики и термодинамики. Однако решеточная КХД как фундаментальная теория даёт достоверные результаты для физических величин только при нулевом химическом потенциале. При ненулевых значениях химического потенциала решеточная КХД не может описывать термодинамические состояния КГП из-за возникновения так называемой проблемы знака, т.е. статистическая сумма КХД при ненулевых значениях химического потенциала становится комплексным числом, а термодинамические величины становятся нефизическими. Поэтому поиск происхождения проблемы знака в решёточной КХД и её решения

становится первоочередной задачей физики высоких энергий сильных взаимодействий в непертурбативной области.

Предполагается, что кварк-глюонная плазма образуется при высоких температурах $T > 170$ МэВ или больших значениях барионной плотности $\rho_B \approx (5 - 10)\rho_0$, когда плотность энергии достигает ≈ 1 ГэВ/фм³. В природе эти два условия достигаются в ранней вселенной после большого взрыва и в ядрах нейтронных или кварковых звёзд. Однако в лабораторных условиях кварк-глюонная плазма, возможно, может быть образована только в релятивистских столкновениях тяжёлых ионов высоких энергий [33, 56–61]. Поиск кварк-глюонной плазмы в релятивистских столкновениях тяжёлых ионов был произведен на двух основных установках – RHIC и LHC. Открытие сильно взаимодействующей кварк-глюонной плазмы, имеющей свойства идеальной жидкости, было объявлено совместно четырьмя коллаборациями RHIC [62–65]. На будущих установках FAIR и NICA планируется исследовать свойства КГП при более низких энергиях столкновения. Кварк-глюонная плазма, образованная в столкновениях тяжёлых ионов, существует в пространственном и временном масштабах в несколько фм и несколько фм/с соответственно и не может быть напрямую наблюдаема. Поэтому о её образовании можно судить лишь опосредовано из результатов измерения, наблюдаемых в конечном состоянии процесса столкновений двух ядер. Сигналами КГП в столкновениях тяжёлых ионов могут служить следующие наблюдаемые [47]: 1.) повышенный выход квантовых чисел странности и очарованности, 2.) повышенный выход античастиц, 3.) увеличенный выход термальных фотонов и дилептонов, 4.) потеря энергии партоном в КГП и соответствующий подавленный выход адронов с большими значениями p_T , 5.) коллективный поток и соответствующие азимутальные анизотропии, 6.) модификация свойств тяжёлых мезонов из-за антиэкранировки цветного заряда в КГП, 7.) модификация массы и ширины распада лёгких векторных мезонов из-за восстановления киральной симметрии и др.

Неэкстенсивная статистика Цаллиса, введённая в науку К. Цаллисом [66], представляет собой обобщённую равновесную статистическую механику, построенную на основе математического переопределения статистической энтропии Больцмана-Гиббса и применения принципов равновесной термодинамики. В настоящее время существуют по крайней мере три версии статистики Цаллиса [66, 67], основанные на одной и той же обобщённой энтропии [68–70], известной как энтропия Цаллиса [66, 67] (см. более конкретные пояснения в [71]), которые отличаются друг от друга только определением математических ожиданий операторов. Первый вариант статистики Цаллиса [66, 67, A1, A2], также называемый статистикой Цаллиса-1, определяется стандартным математическим ожиданием, как в статистике Больцмана-Гиббса. Такие математические ожидания согласуются с условием нормировки вероятностей в полном соответствии с требованиями статистической механики и теории вероятностей. Второй вариант статистики Цаллиса (статистика Цаллиса-2) [66, 67, 72] основан на обобщённых математических ожиданиях операторов, которые не

согласуются с условием нормировки вероятностей. Такие нетрадиционные математические ожидания приводят к противоречивой связи между статистической механикой, теорией вероятностей и теорией равновесной термодинамики в силу того, что $\langle 1 \rangle \neq 1$. В третьем варианте статистики Цаллиса [67], называемом статистикой Цаллиса-3, используются нормированные обобщённые математические ожидания операторов. Однако, в отличие от статистики Цаллиса-2, нормированные значения обобщённого математического ожидания статистики Цаллиса-3 согласуются с условием нормировки вероятностей микросостояний. Распределения вероятностей для всех трёх вариантов статистики Цаллиса имеют степенной вид вместо экспоненциального, и в пределе $q \rightarrow 1$ все три версии этой статистики полностью приводятся к статистике Больцмана-Гиббса. Энтропия Цаллиса – неэкстенсивная величина, т.е. при делении системы на две и более подсистем энтропия системы неаддитивна [66], если энтропийный параметр q – фундаментальная константа. При этом средняя энергия системы неаддитивна (неэкстенсивна) для статистики Цаллиса-2 и аддитивна (экстенсивна) для статистики Цаллиса-1 и Цаллиса-3 [67, 71]. Одним из самых больших недостатков статистики Цаллиса-2, кроме неправильно нормированных средних по ансамблю, является тот факт, что распределение вероятностей статистики Цаллиса-2 не инвариантно относительно однородного сдвига энергетического спектра [67, A3]. При этом распределения вероятностей для статистики Цаллиса-1, статистики Цаллиса-3 и q -дуальной статистики инвариантны относительно таких однородных трансляций энергии [A3, 73]. Несмотря на успех статистики Цаллиса в описании экспериментальных данных во многих областях физики, до сих пор теоретическое обоснование статистики Цаллиса [66, 67] далеко от окончательного. Обобщённая статистическая механика Цаллиса по определению формулируется в точке теплового равновесия, так же как и обычная статистика Больцмана-Гиббса, только с обобщённой статистической энтропией. Таким образом, доказательство термодинамической самосогласованности статистики Цаллиса остаётся первоочередной задачей, хотя некоторый прогресс был достигнут. В этом направлении существует несколько подходов [A1, A2, 74–79, A4, A5]. К сожалению, обобщённая статистическая механика Цаллиса имеет проблемы с нулевым законом термодинамики из-за неэкстенсивности энтропии Цаллиса. Было обнаружено, что ни один из вариантов статистики Цаллиса не удовлетворяет нулевому закону термодинамики, если параметр q является универсальной константой. Смотрите критику и последующие обсуждения q -энтропии статистики Цаллиса в работах [80–82]. Для того чтобы решить эту проблему, Абе и др. [74] ввели в рамках канонического ансамбля некую физическую температуру и давление, удовлетворяющие нулевому закону термодинамики. Также было введено экстенсивное представление для неэкстенсивной энтропии Цаллиса [83, 84]. Однако, как было показано в [A4, 85, 86, A6], такие преобразования переменных, включая энтропию, приводят лишь к переходу от термостатистики Цаллиса к экстенсивной статистической механике Гиббса или Реньи, но при этом они не решают проблему нулевого закона термодинамики

для статистики Цаллиса. В [78] было предположено использовать некий неаддитивный микроскопический гамильтониан специального вида, подобный по форме неэкстенсивной энтропии Цаллиса. В этом случае гамильтониан зависит от температуры системы, что влечёт за собой изменение термодинамических соотношений и приводит к потере самосогласованности такой статистической механики. С проблемой нулевого закона термодинамики близко связан принцип аддитивности в термодинамическом пределе. Известно, что равновесная термодинамика – это теория, определённая в термодинамическом пределе. В равновесной термодинамике все термодинамические величины принадлежат классу однородных функций первого (экстенсивные величины) и нулевого (интенсивные величины) порядка. Следовательно концепция термодинамического предела играет решающую роль в сравнении равновесной статистической механики и термодинамики. В этом случае для термодинамических систем граничными эффектами пренебрегают и берутся в учёт только короткодействующие силы взаимодействия. В термодинамическом пределе средние по ансамблю с соответствующим распределением вероятностей должны обеспечивать выполнение нулевого, первого, второго, и третьего законов равновесной термодинамики, а также принцип аддитивности, который делит все термодинамические переменные на экстенсивные и интенсивные. Более того, должны выполняться также фундаментальное уравнение термодинамики, соотношение Гиббса-Дюгема и теорема Эйлера. В работе Абе [79] была предпринята попытка определить термодинамический предел на частном примере идеального газа в каноническом ансамбле. Однако такой термодинамический предел не согласован. Правильное определение термодинамического предела для статистики Цаллиса в частном случае было приведено в Ботет и др. [A6, 87], а для общего случая было разработано в [A1]. Отметим, что важным критерием правильности термодинамического предела является эквивалентность всех ансамблей. Вывод фундаментального уравнения термодинамики для термостатистики Цаллиса на основе распределения вероятностей канонического ансамбля был выполнен в [A4, 86]. По сравнению с предыдущими исследованиями, в работах [A1, A2, A5] был предложен прямой термодинамический метод доказательства нулевого закона термодинамики для статистики Цаллиса, основанный на исследовании термодинамических величин как функций от переменных состояния системы в термодинамическом пределе в соответствии с требованиями равновесной термодинамики. В работе [A1] из математического анализа энтропии Цаллиса было выявлено в общем виде, что в статистике Цаллиса величина $z = 1/(q - 1)$ является экстенсивной переменной, а не константой. В [A1] было доказано, что статистическая механика Цаллиса в микроканоническом ансамбле удовлетворяет всем требованиям равновесной термодинамики и нулевой закон в термодинамическом пределе выполняется лишь в том случае, когда энтропийный индекс $1/(q - 1)$ – экстенсивная переменная состояния системы. То же самое было доказано для канонического и большого канонического ансамблей

статистики Цаллиса в работах [A2, A5]. Аналогичные результаты были получены для статистики Реньи с $z = 1/(q - 1)$ [A7] и неполной неэкстенсивной статистики с $z = q/(1 - q)$ [A8]. Связь с термодинамикой для неэкстенсивной статистики Ландсберга-Ведрала, введённой в работе [A9], была изучена в [A9, A10]. Критика метода мультиномиальных коэффициентов для статистики Цаллиса и Реньи была дана в работе [A11].

Спектры адронов по поперечному импульсу (p_T) несут важную информацию о механизме рождения адронов, образованных в протон-протонных (pp) и ядро-ядерных (AA) столкновениях высоких энергий. Эти распределения позволяют определять многие другие экспериментальные величины [47], такие как коллективные потоки, факторы ядерной модификации, отношения выходов адронов и т. д. В настоящее время для описания экспериментальных распределений по поперечному импульсу частиц, рождённых в протон-протонных реакциях и релятивистских столкновениях тяжёлых ионов при энергиях LHC и RHIC, обычно используются степенные функции [88–93], а также вдохновленные статистикой Цаллиса [66] Цаллиса-подобное распределение [94–99] и феноменологическое распределение Цаллиса по поперечному импульсу [100, A12, 101–104, A13–A16, 105–115]. Феноменологические распределения Цаллиса по поперечному импульсу были введены в работах [102, 116–118] и получили широкое применение в физике высоких энергий. Однако как Цаллиса-подобное распределение по поперечному импульсу, так и феноменологическое распределение Цаллиса имеют проблемы фундаментального характера. В работе [A17] было показано, что в изначальной работе [119] при выводе Цаллиса-подобного классического $[1 - (1 - q)(\varepsilon_p - \mu)/T]^{1-q}$ и квантового $1/([1 - (1 - q)(\varepsilon_p - \mu)/T]^{1-q} \pm 1)$ распределений из статистики Цаллиса [66, 67] в приближении факторизации была допущена математическая неточность, приведшая к нарушению связи между этими одно-частичными распределениями и статистикой Цаллиса. Математическая неточность в [119] заключается в том, что функция распределения вероятностей была получена из принципа максимальной энтропии с использованием обобщённого определения значений математического ожидания для статистики Цаллиса-2, но при этом одночастичные функции распределения были рассчитаны на основе этого распределения вероятностей статистики Цаллиса-2 с использованием стандартного определения значений математического ожидания для нормализованной статистики Цаллиса-1. Эта процедура противоречива и приводит к неверным результатам. Феноменологические распределения Цаллиса были получены в работах [102, 116] путём максимизации обобщённой энтропии идеального газа вместо максимизации энтропии Цаллиса. Этот метод даёт правильные результаты только для обычной статистики Больцмана-Гиббса [120]. Однако в случае статистики Цаллиса такой метод приводит к несогласованным результатам (см. доказательство в [A18]). Более того, недавно было аналитически доказано, что феноменологическое распределение Цаллиса, введённое в работах [102, 116], в случае

безмассовых частиц соответствует приближению нулевого члена для статистики Цаллиса-2 (см. работу [A18]). В случае массивных частиц этот результат был подтвержден в работе [A19]. Статистика Цаллиса-2 по определению математически противоречива [67, A3, A18, A19], так как в этой статистике математические ожидания операторов не согласованы с уравнением нормировки распределения вероятностей, в частности $\langle 1 \rangle \neq 1$. Таким образом, феноменологическое распределение Цаллиса по поперечному импульсу, введённое в работах [102, 116], в случае, когда оно принадлежит статистике Цаллиса [66, 67], основанной на энтропии Цаллиса, не обосновано с точки зрения основ статистической механики. Для того чтобы решить эту проблему и правильно связать феноменологическое распределение Цаллиса с основами статистической механики, в работе [A20] была специально введена новая неэкстенсивная статистика, названная q - дуальной статистикой, в рамках большого канонического ансамбля на основе q - дуальной энтропии вместо энтропии Цаллиса. В этом случае проблема $\langle 1 \rangle \neq 1$ устраняется и феноменологическое распределение Цаллиса становится обоснованным с точки зрения основ статистической механики. В работе [A20] было показано, что феноменологическое распределение Цаллиса эквивалентно одно-частичному распределению по поперечному импульсу для q - дуальной статистики в приближении нулевого члена. Таким образом, феноменологическое распределение Цаллиса [102, 116] обосновано с точки зрения основ статистической механики лишь в том случае, если оно принадлежит q - дуальной статистике вместо статистики Цаллиса [A20]. Следует отметить, что q - дуальная статистика в рамках канонического ансамбля впервые была введена в физику в работе [A3].

Впервые точные распределения по поперечному импульсу и в приближении нулевого члена для статистики Цаллиса были найдены в работах [A18, A21, A22]. Эти распределения были вычислены в рамках статистики Цаллиса-1 в ультрарелятивистском приближении для безмассовых частиц Максвелла-Больцмана. В ультрарелятивистском приближении для термодинамических величин статистики Цаллиса удаётся получить точные аналитические выражения [A18, A21, A22]. Для массивных частиц точные результаты удаётся записать только в интегральной форме для всех трёх статистик частиц (Максвелла-Больцмана, Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна) [A19]. Аналитические результаты для массивных частиц в приближении первого и второго членов разложения были найдены в [A23]. Точные распределения по поперечному импульсу и в приближении нулевого члена для q - дуальной статистики в большом каноническом ансамбле были найдены в работе [A20]. Впервые точные распределения по поперечному импульсу для статистики Цаллиса-1 были применены для описания экспериментальных данных для протон-протонных столкновений при энергиях LHC и RHIC в работах [A18, A21].

В настоящее время релятивистская статистическая механика широко используется для описания экспериментальных данных и объяснения явлений в физике высоких энергий, космологии и астрофизике [121—126]. Для этого успешно используются не только распределения вероятностей статистики

Больцмана-Гиббса, но и функции распределения, основанные на обобщённой статистической механике, такие как статистика Цаллиса или Реньи [98, 100, A12, 127]. Любая равновесная статистическая механика строится на основе законов равновесной термодинамики. Поэтому в основе релятивистской статистической механики лежит теория релятивистской термодинамики. В современной физике существует несколько формулировок релятивистской термодинамики движущегося тела на основе специальной теории относительности (СТО). Первые попытки дать релятивистскую формулировку для термодинамики были предприняты ещё Планком [128], Эйнштейном [129], фон Лауэ и другими (см., например, работу [130] и приведённые там ссылки). Однако до сих пор не существует единой окончательной формулировки теории релятивистской термодинамики, и эта проблема фундаментальной физики остаётся открытой [130, 131]. На сегодняшний день существует две основные различные формулировки релятивистской термодинамики. Обе эти формулировки основаны на принципе энтропийной инвариантности, который гласит, что [130]

$$\frac{\delta Q}{T} = dS \quad \text{инвариантно,} \quad (1)$$

где T – температура, Q – количество теплоты, и S – энтропия в лабораторной системе отсчёта K . Первый формализм релятивистской термодинамики, предложенный Эйнштейном, Планком и другими, утверждает, что преобразования Лоренца для температуры и для бесконечно малого обмена теплом равны [128–130]

$$\delta Q = \delta Q' \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad T = T' \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}, \quad (2)$$

где T' – температура, Q' – количество теплоты в системе отсчёта K' , движущейся с постоянной скоростью \mathbf{v} , в которой термодинамическая система покоится, а c – скорость света. Второй основной формализм релятивистской термодинамики, предложенный Отта [132], требует, чтобы преобразования Лоренца для передачи тепла и температуры были определены в виде [130, 132]

$$\delta Q = \frac{\delta Q'}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}. \quad (3)$$

Преобразования Лоренца для температуры в уравнениях (2) и (3) различны и исключают друг друга. Более того, следует также подчеркнуть, что есть и некоторые другие предположения и идеи относительно преобразований Лоренца для термодинамических величин. Эти обсуждения не завершены и ещё пока не привели к окончательному выводу [133–140]. Пока эта проблема релятивистской формулировки термодинамики не решена, единственность формулировки релятивистской статистической механики также все ещё находится под вопросом.

Тем не менее, в работе [A24] была предпринята попытка решить эту проблему основательно. Общая теория релятивистской термодинамики основана на релятивистской механике и равновесной термодинамике. Релятивистская механика и равновесная термодинамика – это две разные теории, которые отличаются по своей сути. Неопределённость в формулировке релятивистской термодинамики после фундаментальных работ Планка и Эйнштейна возникла из-за непонимания того, как правильно объединить эти две теории. Для того, чтобы объединить их и построить релятивистскую термодинамику, необходимо найти общие физические величины, которые присутствуют в обеих этих теориях. Такой общей физической величиной в релятивистской механике и равновесной термодинамике является *энергия*. В равновесной термодинамике энергия – это фундаментальный термодинамический потенциал, т.е. основной термодинамический потенциал, который определяет все остальные термодинамические величины, в том числе и температуру. В релятивистской механике энергия – это гамильтониан динамической системы или нулевая компонента тензора энергии-импульса. Поэтому в работе [A24] и вводится постулат об эквивалентности фундаментального термодинамического потенциала и гамильтониана системы. Этот постулат позволяет самосогласованно соединить термодинамику с релятивистской механикой. Его введение имеет последствия. Так как функция Гамильтона является фундаментальным термодинамическим потенциалом, то из требований релятивистской механики сразу следует, что импульс должен быть независимой переменной состояния системы, а скорость системы – зависимой величиной. В силу того, что импульс – независимая переменная состояния наряду с набором термодинамических переменных состояния, то это однозначно приводит к формализму Планка в формулировке релятивистской термодинамики [A24]. Это устраняет неоднозначность (2), (3) и приводит к преобразованиям Лоренца, согласующимся как с релятивистской механикой, так и с термодинамикой. Таким образом, в формулировке релятивистской термодинамики нет никаких неопределённостей, если следовать строго тем законам, которые приняты в релятивистской механике и равновесной термодинамике. Таким образом, в работе [A24] было доказано, что только планковская формулировка релятивистской термодинамики движущегося тела определена должным образом, а формализм Отта и другие формализмы релятивистской термодинамики не согласованы.

Изучение процесса рождения адронов в столкновениях тяжёлых ионов и протон-протонных реакциях высоких энергий имеет важное значение. Увеличение выхода странных кварков в столкновениях тяжёлых ионов высоких энергий по сравнению с элементарными столкновениями протонов, как было предсказано в работе [141], является одним из признаков образования КГП. Конкретным предсказанием такого механизма является усиление множественного рождения странных частиц, особенно гиперонов. Ещё одним признаком начала деконфайнмента считается ярко выраженный максимум для функции возбуждения K^+/π^+ [142]. Изучение энергетической зависимости различных

адронных наблюдаемых, от AGS и SPS до более высоких энергий RHIC, обнаруживает интересные особенности, которые могут определить местонахождение возможного начала деконфайнмента. Эти наблюдаемые включают поперечные спектры различных типов частиц и их полную множественность. Для анализа таких функций возбуждения (отношений выхода адронов) в столкновениях тяжёлых ионов широко используются адронные статистические модели (см. обзорную статью [143]). Эти модели применимы на стадии химического фризаута. Для описания выхода адронов в столкновениях тяжёлых ионов используются статистические модели, определённые как в большом каноническом, так и в каноническом ансамблях. Большой канонический ансамбль применим в тех случаях, когда заряды системы флуктуируют и сохраняются лишь в среднем посредством химических потенциалов. В том случае, когда заряды системы не флуктуируют и сохраняются точно, применим канонический ансамбль. В столкновениях тяжёлых ионов заряд странности системы точно сохраняется в силу отсутствия в начальном состоянии странных зарядов. Важность точного сохранения странности при рождении адронов в столкновениях тяжёлых ионов была продемонстрирована в работах [144—147], где полный набор выражений для химических факторов был выведен в терминах классической статистики Максвелла-Больцмана с условием сохранения глобальной нейтральной странности $S = 0$. В работе [A25] статистическая модель адронов с точным законом сохранения странности для статистики частиц Максвелла-Больцмана была обобщена на общий случай ненулевой странности. Более того эта модель была обобщена также и на случай квантовой статистики частиц в каноническом ансамбле с точным законом сохранения глобальной странности системы [A25]. Для решения статистической суммы такой модели, как для классической, так и для квантовой статистики частиц, впервые был предложен метод рекуррентных соотношений, разработанный на основе вычислений из [A26—A30]. Этот метод имеет определённые преимущества по сравнению с численным методом, использованным в [148], для классической статистики частиц. Эта модель [A25] может быть использована для анализа будущих экспериментальных данных на NICA для функций возбуждения и абсолютного выхода адронов.

Изучение фазовых переходов в ядерной материи в экстремальных условиях важно для теоретического анализа экспериментов по столкновению тяжёлых ионов при средних и высоких энергиях [47, 149] и для понимания многих критических явлений в астрофизике [150]. Принято считать, что ядерная мультифрагментация, наблюдаемая в ядерных реакциях промежуточной энергии, указывает на фазовый переход первого рода ядерного типа жидкость-газ [151]. Это утверждение основано на концепции возникновения плато на калорической кривой ядерной мультифрагментации (зависимости температуры T от энергии возбуждения E^* ядерной системы), которое было теоретически предсказано в [152] и позже экспериментально обнаружено в столкновениях $Au + Au$ при энергии 600 МэВ/нуклон [153]. Фазовый переход первого рода почти во всех классификационных схемах имеет определение Эренфеста, которое

связано с конечным разрывом в одной или нескольких первых производных соответствующего термодинамического потенциала относительно его переменных состояния [154, 155]. Конкретный тип фазового перехода первого рода связан с конкретным термодинамическим потенциалом [156]. Например, для фазового перехода жидкость-газ наиболее подходящим потенциалом является свободная энергия Гиббса G , и такой фазовый переход описывается разрывами в её первых производных, энтропии и объёме, на кривой сосуществования на диаграмме температуры и давления [155]. При этом энергия на калорической кривой фазового перехода жидкость-газ прерывна в изобарическом ансамбле, но непрерывна в каноническом и микроканоническом ансамблях [A31]. Для магнитной системы свободная энергия F является подходящим термодинамическим потенциалом с разрывом в её первой производной, намагничённости, на кривой сосуществования температуры и магнитного поля [156]. Энергия на калорической кривой для фазового перехода первого рода, связанного со свободной энергией Гельмгольца F , является разрывной в каноническом и микроканоническом ансамблях, поскольку первая производная от F , энтропия, является разрывной [157]. Ядерный фазовый переход жидкость-газ, т.е. фазовый переход первого рода, связанный со свободной энергией Гиббса G , обычно происходит в моделях для взаимодействующего адронного газа, таких как адронная модель релятивистского среднего поля (RMF) [158—166], модель среднего поля с эффективным взаимодействием Скирма [167] и др. Несмотря на то, что эти модели интенсивно исследуются в течение длительного периода времени, фазовый переход жидкость-газ в таких моделях системно до конца не изучен. В работе [A31] был обеспечен целостный и согласованный подход к решению проблемы ядерного фазового перехода жидкость-газ на основе метода термодинамических потенциалов и их первых производных в различных статистических ансамблях и установлены общие критерии фазового перехода жидкость-газ, позволяющие отличить его от фазового перехода первого рода, связанного со свободной энергией F . Для определения этих критериев в [A31] была использована известная релятивистская адронная модель среднего поля [158—161], которая позволила найти согласованное поведение калорической кривой и уравнения состояния (разрыв плотности на изотермах [120, 168]) для ядерного фазового перехода жидкость-газ в различных статистических ансамблях. Следует отметить, что поведение термодинамических величин в адронной модели релятивистского среднего поля с фракционной статистикой было исследовано в работах [A32, A33].

Пертурбативные расчеты адронных наблюдаемых низких энергий в КХД невозможны из-за того, что КХД не содержит малой безразмерной константы связи. Таким образом, решеточная КХД [48], используемая для вычислений и являющаяся одним из численных подходов этой теории, определяет КХД на решётке из точек пространства-времени, а затем экстраполирует наблюдаемые к континуальному пределу. В расчётах решёточной КХД нет никаких адронных степеней свободы. Этот подход полностью сформулирован в терминах кварковых и глюонных полей. Основными термодинамическими величинами, которые

рассчитываются в рамках решёточной КХД, являются давление, плотность энергии и плотность энтропии. Их зависимость от температуры и плотности, обычно обозначаемая как уравнение состояния кварков и глюонов [49—55], даёт самое основное описание равновесных термодинамических свойств сильно-взаимодействующей материи. Самый быстрый рост приведённой плотности энергии ε/T^4 с температурой в решёточной КХД интерпретируется как фазовый переход из адронной фазы в состояние кварк-глюонной плазмы [169]. Поскольку теория решёточной КХД не содержит адронных степеней свободы, существование адронного фазового состояния косвенно выводится из сравнения глобальных термодинамических величин решёточной КХД с результатами других термодинамических моделей, например, модели адронного резонансного газа (HRG) [51, 170—174]. Связь адронов с решёточной КХД из сравнения уравнений состояния моделей решёточной КХД и модели HRG при низких температурах известна как кварк-адронная дуальность или адрон-партоновая дуальность [173]. Предполагается, что именно такое совпадение уравнений состояния этих двух моделей при низких температурах доказывает существование адронной фазы в решёточной КХД. Однако совпадение плотностей энергии (глобальных термодинамических величин) модели HRG и решёточной КХД при низких температурах в небольшом интервале температур без проверки законов сохранения заряда (барионного, электрического и странности) этих систем недостаточно для того, чтобы доказать, что адронные спектры модели HRG действительно эквивалентны адронным спектрам, предсказываемым решёточной КХД при низких температурах. Квантовые числа обеих этих систем должны быть одинаковыми. Но таких расчётов пока не проводилось. Проблема сравнения модели HRG с решёточной КХД состоит в том, что масса в модели HRG создаётся температурой: с повышением температуры возбуждаются новые адронные степени свободы. Таким образом, полные барионные, электрические заряды и заряды странности системы в этой модели не сохраняются при изменении температуры (см., например, ссылку [A25]). Напротив, заряды системы в решёточной КХД сохраняются при изменении температуры, поскольку адронподобные состояния решёточной КХД при низких температурах полностью распадаются на КГП при более высоких температурах. Другой проблемой сравнения модели HRG с решёточной КХД, помимо нарушения законов сохранения квантовых чисел системы в модели HRG, является несоответствие термодинамических величин этих двух моделей в пределе Стефана-Больцмана, т.е. плотность энергии адронов модели HRG при высоких температурах намного выше плотности энергии КГП в решёточной КХД. Правильная плотность энергии идеального адронного газа (связанных состояний кварков и глюонов) при высоких температурах должна быть меньше, чем плотность энергии КГП из-за деконфайнмента (см., например, ссылку [47]). Более того, в этих двух моделях два совершенно разных механизма управляют изменением плотности энергии с температурой. В модели HRG плотность энергии увеличивается не только за счёт увеличения кинетической энергии частиц, но и за счёт образования более тяжёлых адронов. Увеличение

плотности энергии в основном определяется созданием массы с увеличением температуры. В то время как в решёточной КХД рост плотности энергии с температурой связан с ослаблением взаимодействия неабелевых калибровочных полей между цветными кварками без изменения компонентов (полей) системы. Следовательно эквивалентность адронных спектров модели HRG и решёточной КХД при низких температурах находится под вопросом [A34]. Самый простой способ частично решить эти проблемы модели HRG – правильно учесть квантовые числа модели HRG и решёточной КХД в пределе Стефана-Больцмана (когда каждая степень свободы бозонов и $7/8$ степеней свободы фермионов несут одинаковую долю плотности энергии) и масштабировать результаты этих моделей по отношению к их числу степеней свободы. Это позволяет выбрать адекватные фиксированные адронные спектры модели HRG, которые не изменяются с температурой и сохраняют квантовые числа системы. В расчетах решёточной КХД и модели HRG мы имеем две разные физические системы с разным числом типов частиц или полей и разными степенями свободы. Таким образом, эти две разные физические системы несопоставимы на микроскопическом уровне. Однако на уровне макроскопических термодинамических величин (наблюдаемых) есть две возможности для их правильного сравнения. Во-первых, это прямое сравнение плотностей энергии моделей решёточной КХД и HRG, как в работах [51, 170–174]. Другая возможность, которая является предметом работы [A34], состоит в сравнении масштабированных термодинамических величин, которые ставятся в соответствие друг другу. В работе [A34] масштабированные термодинамические величины модели определяются как отношения соответствующих термодинамических величин к эффективному коэффициенту вырождения модели. Работа [A34] следует стандартному определению для эффективного фактора вырождения, данному в статистической механике например в работах [47, 175, 176]. Это определение совместимо с основами статистической механики, поскольку оно не зависит от термодинамических переменных состояния. В работе [A34] было показано, что, с точки зрения масштабированных переменных, кварк-адронная дуальность решёточной КХД и модели адронного резонансного газа исчезает. Однако в работе [A34] было обнаружено, что масштабированные переменные приводят к кварк-адронной дуальности решёточной КХД и квантового идеального газа каонов и антикаонов, а именно идеального газа тех адронов, которые содержат все три кварка u, d, s и их антикварки. Удовлетворительное согласие масштабированных результатов для идеального газа каонов с данными решёточной КХД достигается при больших значениях объёма во всем диапазоне температур.

Процесс образования частиц (адронов) из горячей среды, возникающей в результате столкновений тяжёлых ионов и адрон-адронных реакций на LHC [96, 177–179] и RHIC [94, 180, 181], требует введения конечных температур и объёмов в исследовании квантовой теории поля (КТП). Однако большинство теоретических подходов, используемых для описания термодинамических свойств и/или фазовых переходов для релятивистских квантовых полей (то есть бозонов

и фермионов, которые генерируются в этих процессах), рассматриваются в термодинамическом пределе. В этих моделях бесконечный объём системы вводится напрямую [47, 121, 123] или косвенно посредством применения непрерывных импульсных спектров вместо дискретных собственных значений оператора импульса частиц [172, 182—187]. Таким образом, эффекты конечного размера важны для рассмотрения в статистических теориях, предназначенных для описания ядро-ядерных и протон-протонных столкновений. Они могут существенно влиять как на термодинамические характеристики квантовых полей, так и на фазовую диаграмму КХД в целом [188]. Существуют различные методы квантования полей, такие как канонический метод, метод интегралов по путям и т.д. [189—191]. Термодинамические свойства фазовой диаграммы КХД описываются как формализмом канонического квантования (вторичное квантование) [186, 192], так и формализмом интегралов по путям [24]. Численные расчёты в рамках формализма интегралов по путям методом Монте-Карло, например в случае решёточной калибровочной теории, позволяют изучать непертурбативные эффекты, например те, которые проявляются в фазовых переходах КХД [193]. Все эти методы квантования поля эквивалентны [189, 190]. Формализм статистической механики согласуется с нулевым законом термодинамики при условии, что термодинамический потенциал статистического ансамбля, который содержит всю информацию о физической системе, является однородной функцией первого порядка относительно экстенсивных переменных состояния [A1, A2, A5, A31, 194, A35]. Для большинства физических систем это условие выполняется в термодинамическом пределе. Проблема свойств однородности термодинамических величин в случае решёточной КХД, которая, как ожидается, должна точно описывать фазовые переходы для релятивистских квантовых полей, участвующих в столкновениях тяжёлых ионов, до сих пор строго не изучена. Считается, что усиление аномалии следа является мерой взаимодействия как в чистой калибровочной теории на решётке [195], так и в полной решёточной КХД [196—198]. В приближённых численных расчётах решёточной КХД, приведённых, например, в [197—199], трудно проверить свойства однородности термодинамического потенциала системы. Следовательно, чтобы исследовать эту проблему, необходимо рассмотреть точно решаемую статистическую модель для свободного релятивистского квантового поля на конечной решётке и тщательно проанализировать эффекты конечного объёма, а также её континуальный предел [200]. Точные аналитические результаты для статистической суммы нейтрального скалярного поля на конечной решётке как в конфигурационном, так и в импульсном пространствах были получены в работах [201, A36]. При этом в работе [A36] были изучены термодинамические свойства и поправки конечного объёма к термодинамическим величинам скалярного поля как на конечной решётке, так и в непрерывном пределе при конечной температуре и объёме.

Целью данной работы является:

1. Дать общее определение обобщённой равновесной статистической механике с произвольным определением статистической энтропии и доказать термодинамическую согласованность (нулевой закон термодинамики) статистической механики Цаллиса;
2. Ввести в физику высоких энергий точное p_T - распределение статистической механики Цаллиса, применить её к описанию экспериментальных данных для pp столкновений высоких энергий и обосновать феноменологическое распределение Цаллиса по поперечному импульсу с точки зрения основ статистической механики;
3. Дать самосогласованное определение для релятивистской термодинамики и устранить неопределённости, существующие в её формулировке;
4. Построить квантовую статистическую модель адронов с точным законом сохранения странности и применить её для описания выхода адронов в столкновениях тяжёлых ионов высоких энергий;
5. Выявить основные свойства для фазового перехода первого рода во взаимодействующей релятивистской адронной материи в разных статистических ансамблях на основе адронной релятивистской модели среднего поля в большом каноническом ансамбле;
6. Найти связь между решёточной КХД и адронной фазой. Сформулировать масштабную кварк-адронную дуальность решёточной КХД и модели каон-антикаонного газа при всех значениях температуры путём введения эффективных факторов вырождения;
7. Найти новый прямой метод интегрирования по путям для точного вычисления статистической суммы нейтрального скалярного поля на решётке без необходимости совершения поворота Вика и переходу к евклидову пространству, который, возможно, позволит найти решение проблемы знака в решёточной КХД.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Рассмотреть детально элементы обобщённой равновесной статистической механики: геометрию и симметрии пространства-времени (псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}_{1,3}^4$), основные уравнения квантовой механики и принципы равновесной термодинамики;
2. Рассмотреть группы Лоренца и Пуанкаре, описывающие псевдоортогональные, ортогональные и трансляционные симметрии псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}_{1,3}^4$, а также группу Галилея, описывающую симметрии расслоенных евклидовых пространств \mathbb{R}^1 и \mathbb{R}^3 ;
3. Сформулировать общую схему построения и верификации обобщённой равновесной статистической механики с произвольным определением статистической энтропии;

4. Рассмотреть статистическую механику Цаллиса-1 в микроканоническом, каноническом и большом каноническом ансамблях и найти новый математический метод доказательства нулевого, первого и второго принципов равновесной термодинамики в термодинамическом пределе;
5. Рассмотреть статистические механики Цаллиса-1 и Цаллиса-2 в большом каноническом ансамбле и найти для этих статистик как точные распределения по поперечному импульсу, так и p_T - распределения в приближении нулевого члена в рамках релятивистского идеального газа со статистикой частиц Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака и Максвелла-Больцмана;
6. Сформулировать q -дуальную неэкстенсивную статистическую механику в большом каноническом ансамбле и найти точное распределение по поперечному импульсу и в приближении нулевого члена в рамках релятивистского идеального газа со статистикой частиц Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака и Максвелла-Больцмана;
7. Доказать, что феноменологическое распределение Цаллиса по поперечному импульсу обосновано с точки зрения основ статистической механики лишь в случае, если оно принадлежит q -дуальной статистике вместо статистики Цаллиса;
8. Показать, что введение в релятивистскую термодинамику принципа эквивалентности гамильтониана релятивистской системы и фундаментального термодинамического потенциала, помимо принципа инвариантности энтропии, введет к устранению неопределённостей в формулировке релятивистской термодинамики движущегося тела и подтверждению формализма Планка для преобразований Лоренца термодинамических величин;
9. Сформулировать метод рекуррентных уравнений для нахождения точных решений для статистической суммы и средних по ансамблю для статистической модели адронов со статистикой Максвелла-Больцмана с точным законом сохранения странности;
10. Сформулировать квантовую статистическую модель адронов со статистикой Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака с точным законом сохранения странности и вывести систему рекуррентных уравнений для нахождения точных решений для статистической суммы и средних по ансамблю;
11. Исследовать функцию возбуждения K^+/π^+ посредством точно решаемой квантовой статистической модели адронов с точным законом сохранения странности;
12. Вычислить термодинамические величины адронной релятивистской модели среднего поля в различных статистических ансамблях и исследовать свойства фазового перехода первого рода посредством введения конструкции Максвелла;

13. Исследовать кварк-адронную дуальность решёточной КХД и модели адронного резонансного газа при низких температурах и сформулировать масштабную кварк-адронную дуальность решёточной КХД и модели каон-антикаонного газа при всех значениях температуры путём введения эффективных факторов вырождения;
14. Сформулировать модифицированный метод интегралов по путям для решения статистической суммы нейтрального скалярного поля, основанный на дискретизации обратной температуры вместо интервала времени и использовании операторов поля и векторов состояния в представлении Шредингера, заданных в нулевой момент времени.
15. Вычислить в общем виде статистическую сумму для нейтрального скалярного поля на решётке в одном пространственном измерении с периодическими и антипериодическими граничными условиями вдоль пространственной оси в рамках метода интегралов по путям как в конфигурационном, так и в импульсном пространстве и результат обобщить на трёхмерное импульсное пространство.

Научная новизна:

1. Впервые была доказана термодинамическая согласованность статистической механики Цаллиса и, в частности, показано выполнение нулевого закона термодинамики и экстенсивность энтропии Цаллиса в термодинамическом пределе;
2. Впервые были получены точные решения для распределения по поперечному импульсу статистики Цаллиса и применены к описанию экспериментальных данных для pp столкновений;
3. Впервые доказано, что феноменологическое распределение Цаллиса по поперечному импульсу эквивалентно p_T - распределению статистики Цаллиса-2 в приближении нулевого члена;
4. Впервые в физику была введена q -дуальная статистическая механика на основе q -дуальной энтропии (введённой также впервые);
5. Впервые было доказано, что феноменологическое распределение Цаллиса по поперечному импульсу эквивалентно p_T - распределению q -дуальной статистики в приближении нулевого члена и оно обосновано с точки зрения основ статистической механики лишь в том случае, если оно принадлежит q -дуальной статистике вместо статистики Цаллиса;
6. Впервые было дано самосогласованное определение для релятивистской термодинамики, устраняющее неопределённости, существовавшие в её формулировке, и обосновывающее единственность формализма Планка для преобразований Лоренца термодинамических величин;
7. Впервые был сформулирован метод рекуррентных уравнений для нахождения точных решений для статистической суммы и средних по ансамблю для статистической модели адронов со статистикой Максвелла-Больцмана с точным законом сохранения странности;

8. Впервые была предложена квантовая статистическая модель адронов с точным законом сохранения странности и найдена система рекуррентных уравнений для точного решения статистической суммы и средних по ансамблю;
9. Впервые для КГП обнаружено свойство масштабной кварк-адронной дуальности;
10. Впервые были найдены в явном виде симметричные квадратичные матрицы A и B , определяющие статистическую сумму нейтрального скалярного поля на решётке в модифицированном методе континуального интегрирования в конфигурационном и импульсном пространствах в одном пространственном измерении.

Практическая значимость

1. Результаты, представленные в диссертации, для точных распределений по поперечному импульсу и в приближении нулевого члена как для статистики Цаллиса-1, так и для q -дуальной статистики, имеют важное значение в ядерной физике и физике высоких энергий для анализа экспериментальных данных для p_T - распределений адронов, измеренных в pp и AA столкновениях при энергиях LHC, RHIC, FAIR и NICA;
2. Устранение неопределённостей в формулировке релятивистской механики позволит обосновать фундаментальную теорию для релятивистской статистической механики, которую можно будет использовать в физике высоких энергий, ядерной физике и астрофизике;
3. Точные результаты, полученные методом рекуррентных уравнений для квантовой статистической модели адронов с точным законом сохранения странности, важны для анализа экспериментальных данных по выходу адронов, измеренных в pp и AA столкновениях при энергиях SPS, RHIC и LHC;
4. Полученные точные результаты для адронного фазового перехода 1-го рода в различных статистических ансамблях имеют значение в предсказании поведения термодинамических величин для адрон-КГП фазового перехода 1-го рода в точках на кривой сосуществования, а также в критической точке;
5. Введённый модифицированный метод континуального интегрирования и точные результаты для статистической суммы нейтрального скалярного поля на решётке значимы для поиска новых методов решения проблемы знака решёточной КХД.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Строго доказана термодинамическая согласованность статистической механики Цаллиса в микроканоническом, каноническом и большом каноническом ансамблях в термодинамическом пределе при условии, что энтропийная величина $z = 1/(q-1)$ – экстенсивная переменная состояния системы. Из определения энтропии Цаллиса в микроканоническом

ансамбле найдено, что энтропийный индекс z и энтропия Цаллиса – экстенсивные величины.

2. Впервые найдены точные распределения по поперечному импульсу адронов в рамках статистической механики Цаллиса в большом каноническом ансамбле для статистики частиц Ферми-Дирака, Бозе-Эйнштейна и Максвелла-Больцмана. Эти распределения впервые были применены для описания экспериментальных данных для адронов, рождённых в pp столкновениях при энергиях LHC и RHIC.
3. Впервые введена q -дуальная статистическая механика на основе q -дуальной энтропии (также впервые введённой). Строго доказано, что феноменологическое распределение Цаллиса по поперечному импульсу обосновано с точки зрения основ статистической механики лишь при условии, что оно принадлежит q -дуальной статистике, а не статистике Цаллиса.
4. Решена известная проблема неоднозначной формулировки релятивистской термодинамики. Доказано, что введение принципа эквивалентности динамического гамильтониана системы и фундаментального термодинамического потенциала в дополнение к принципу инвариантности энтропии устраняет неопределённости в определении релятивистской термодинамики. Дополнительный принцип приводит к преобразованиям Лоренца для термодинамических величин в формулировке Планка, которые согласуются как с релятивистской механикой, так и с равновесной термодинамикой, и опровергает преобразования Лоренца для термодинамических величин в формулировке Отта, противоречащих основам как релятивистской механики, так и равновесной термодинамики.
5. Предложена квантовая адронная статистическая модель с точным законом сохранения странности системы, описывающая выход адронов, образованных в столкновениях тяжёлых ионов при высоких энергиях. В рамках этой квантовой модели впервые сформулирован метод рекуррентных уравнений для нахождения точных выражений для статистической суммы и средних по ансамблю. Для классической адронной статистической модели с точным законом сохранения странности также был введен метод рекуррентных уравнений и получен результат как для нулевых, так и для ненулевых значений странности. Классическая и квантовая статистические модели адронов с точным законом сохранения странности были применены для описания экспериментальных данных. В результате был объяснён, выявленный в столкновениях тяжёлых ионов высоких энергий ярко выраженный максимум функции возбуждения K^+/π^+ .
6. Впервые обнаружена масштабированная кварк-адронная дуальность между решёточной КХД с $N_f = 2 + 1$ ароматами и релятивистской моделью каон-антикаонного (K^\pm, K^0, \bar{K}^0) идеального газа при всех

значениях температуры на основе введения эффективных факторов вырождения для кварк-глюонных полей и адронного газа.

7. Впервые найдены в явном виде симметричные квадратичные матрицы A и B , определяющие посредством их детерминантов статистическую сумму для вещественного скалярного поля на решётке в одномерном пространственном измерении в конфигурационном и импульсном пространствах с периодическими и антипериодическими граничными условиями вдоль пространственной оси.

Апробация работы. Результаты исследований, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на научных специализированных семинарах по ядерной физике, физике высоких энергий и элементарных частиц в научных центрах: ОИЯИ (ЛТФ, ЛФВЭ), IFIN-HH (Бухарест) и KFKI (Будапешт). Кроме того, эти результаты были представлены на международных конференциях: 13th National Meeting on Nuclear Physics (KFKI, Javorkut, Hungary, 2006), Int. workshop Relativistic nuclear physics: from Nuclotron to LHC energies (BITP, Kiev, Ukraine, 2007), ISHEPP XIX (JINR, Dubna, 2008), ISHEPP XXI (JINR, Dubna, 2012), ISHEPP XXII (JINR, Dubna, 2014), ISHEPP XXIII (JINR, Dubna, 2016), Meeting of the working group on theory of hadronic matter under extreme conditions (JINR, Moscow, Dubna, 2016), Int. Workshop on Simulations of HIC for NICA energies (JINR, Dubna, 2017), DSPIN-17 (BLTP, JINR, Dubna, 2017), MMCP2017 (LIT, JINR, Dubna, 2017), Adv. Many-Body and Statistical Methods in Mesoscopic Systems III (IFIN-HH, Busteni, Romania, 2017), ISHEPP XXIV (JINR, Dubna, 2018), II Int. Workshop on Simulations of HIC for NICA energies (JINR, Dubna, 2018), 12th APCTP-BLTP JINR Joint Workshop "Modern problems in nuclear and elementary particle physics" (APCTP-BLTP/JINR, Busan, South Korea, 2018), 13th APCTP-BLTP JINR Joint Workshop "Modern problems in nuclear and elementary particle physics" (APCTP-BLTP/JINR, Dubna, 2019), Int. Workshop on Nuclear and Particles Physics (Almaty, Kazakhstan, 2022). Этот результат также докладывался на 54-ой Сессии Программно-консультативного комитета по ядерной физике (ОИЯИ, Дубна, 24-25 июня 2019).

Личный вклад. Основная часть работ, вошедших в диссертацию, – это работы диссертанта без соавторов. Личный вклад диссертанта в две работы, написанные в соавторстве и вошедшие в диссертацию, является определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 36 печатных изданиях, 29 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 33 – в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 5 – в тезисах докладов и 2 – в главах книг.

Эти публикации распределены следующим образом: Eur. Phys. J. A – 9, Phys. Lett. A – 5, Physica A – 5, Nucl. Phys. A – 2, J. Phys. A – 2, Phys. Rev. Lett. – 1, Phys. Lett. B – 1, J. Phys. G – 1, Ann. Phys. – 1, ЯФ – 1, ТМФ – 1, EPJ Web Conf. – 3, PoS – 1, Conf. book's proc. – 1, Chapter in book (InTech) – 1, Chapter in book (Studium Press LLC) – 1.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 8 глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 329 страниц текста с 29 рисунками и 5 таблицами. Список литературы содержит 305 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся соответствующие цели задачи, излагается научная новизна, практическая значимость работы и даются основные положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** даётся формулировка общих правил построения обобщённой равновесной статистической механики на основе геометрии пространства-времени, микросостояний динамических систем, теории вероятностей, обобщённой энтропии, макросостояний равновесной термодинамики и единого принципа термодинамического равновесия. Для этого в **первом параграфе** детально рассматривается геометрия и свойства симметрии пространства-времени специальной теории относительности. В **первых трёх подпараграфах** приводятся общие определения для псевдориманова и псевдоевклидова пространств, а также математическое определение для пространства событий. Пространство событий представляет собой многообразие M_n , состоящее из элементарных событий. Элементарное событие – идеализация реального физического процесса, происходящего в малой области пространства за короткий промежуток времени [202]. Каждому элементарному событию ставится в соответствие точка $M \in M_n$. Введение скалярного произведения (метрики) в многообразии событий M_n ведет к превращению этого многообразия в векторное пространство. Выбор конкретного векторного пространства, а также его метрики зависит от рассматриваемой физической теории и заложенной в ней геометрии.

В **четвертом подпараграфе** определяется пространство-время специальной теории относительности. Показан вывод метрики, квадрата длины интервала и 4-мерности пространства-времени СТО из постулата инвариантности скорости света во всех инерциальных системах отсчёта и дополнительного требования, обобщающего форму изотропного инвариантного интервала длины на случай ненулевых его значений [202]. Показано, что пространство-время СТО представляет собой 4-мерное псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}_{1,3}^4$ типа (1,3), в котором скалярное произведение имеет вид [202]

$$ds^2 = \overrightarrow{MM}^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g_{i'j'} dx^{i'} dx^{j'}, \quad (4)$$

где $(g_{ij}) = (g_{i'j'}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, $i, j = 0, 1, 2, 3$ и $i', j' = 0', 1', 2', 3'$. Приводится общее определение скалярного произведения двух векторов, квадрата длины вектора и пространственно-временного интервала между двумя любыми

событиями в пространстве $\mathbb{R}_{1,3}^4$. Даются векторы координатного репера и взаимного координатного репера пространства $\mathbb{R}_{1,3}^4$.

В *пятом подпараграфе* вводится матричное представление для элементов псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}_{1,3}^4$ в виде взаимно однозначного отображения γ , задающего изоморфизм между пространством $\mathbb{R}_{1,3}^4$ и пространством комплексных матриц четвёртого порядка,

$$\gamma : \mathbb{R}_{1,3}^4 \rightarrow \text{Mat}(4, \mathbb{C}). \quad (5)$$

Любой элемент $\mathbf{x} = x_\mu \mathbf{e}^\mu$ из пространства $\mathbb{R}_{1,3}^4$ представляется матрицей $\underline{\mathbf{x}} \in \text{Mat}(4, \mathbb{C})$:

$$\underline{\mathbf{x}} = \gamma(\mathbf{x}) \quad \text{для} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_{1,3}^4. \quad (6)$$

Для элементов из пространства $\mathbb{R}_{1,3}^4$ в матричном представлении $\text{Mat}(4, \mathbb{C})$ вводится операция скалярного произведения:

$$(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}})_M \equiv \frac{1}{4} \text{Tr}(\underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{z}}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}). \quad (7)$$

Найдено, что векторы взаимного координатного репера пространства $\mathbb{R}_{1,3}^4$ в матричном представлении выражаются гамма-матрицами Дирака, являющимися генераторами алгебры Клиффорда $Cl(1,3)$:

$$\underline{\mathbf{e}}^\mu = \gamma(\mathbf{e}^\mu) = \gamma^\mu, \quad (8)$$

причём

$$(\underline{\mathbf{e}}^\mu, \underline{\mathbf{e}}^\nu)_M = (\gamma^\mu, \gamma^\nu)_M = \frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = g^{\mu\nu}, \quad (9)$$

где γ^μ – матрицы Дирака. В этом случае имеем:

$$(\underline{\mathbf{e}}^0)^2 = (\mathbf{e}^0)^2 = 1, \quad (\underline{\mathbf{e}}^k)^2 = (\mathbf{e}^k)^2 = -1 \quad (k = 1, 2, 3), \quad (10)$$

где $(\underline{\mathbf{e}}^\mu)^2 = (\underline{\mathbf{e}}^\mu, \underline{\mathbf{e}}^\mu)_M = g^{\mu\mu}$. Таким образом, в матричном представлении любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{1,3}^4$ может быть представлен в виде разложения по матрицам Дирака (генераторам алгебры Клиффорда $Cl(1,3)$) с ковариантными координатами x_μ :

$$\underline{\mathbf{x}} = \gamma(\mathbf{x}) = x_\mu \gamma(\mathbf{e}^\mu) = x_\mu \underline{\mathbf{e}}^\mu = x_\mu \gamma^\mu. \quad (11)$$

Матричное скалярное произведение двух векторов в матричном представлении равно обычному скалярному произведению этих же векторов в векторном представлении.

В *шестом подпараграфе* изучаются симметрии пространства-времени или псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}_{1,3}^4$, описываемые группой Лоренца. Приводится общее определение группы и определение группы движений данной метрики – преобразований координат пространства, образующих группу и сохраняющих метрику этого пространства. В псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}_{1,3}^4$ типа

(1,3), соответствующем СТО, существует два типа преобразований координат, сохраняющих метрику этого пространства (две группы движений пространства): линейные преобразования пространства, оставляющие неподвижной точку начала отсчёта O (группа Лоренца), и сдвиги начала координат (группа трансляций). Показан последовательный вывод преобразований Лоренца из общего преобразования координат в пространстве $\mathbb{R}_{1,3}^4$ с ненулевыми значениями якобианов перехода при выполнении требования линейности функций, а также требования сохранения метрики псевдоевклидова пространства, т.е. движения метрики, оставляющего неподвижной точку начала отсчёта. Для конкретного вывода элементов матрицы преобразования Лоренца решается система уравнений для преобразования метрического тензора при движении метрики с метрическим тензором пространства $\mathbb{R}_{1,3}^4$:

$$g_{ij} = \Lambda_i^{0'} \Lambda_j^{0'} - \Lambda_i^{1'} \Lambda_j^{1'} - \Lambda_i^{2'} \Lambda_j^{2'} - \Lambda_i^{3'} \Lambda_j^{3'}. \quad (12)$$

Преобразования Лоренца образуют полную группу Лоренца, изоморфную псевдоортогональной группе $O(1,3)$. Выводятся псевдоортогональные преобразования Лоренца (бусты) из системы уравнений для преобразования метрического тензора. Общее решение этой системы уравнений выражается через гиперболические функции. Получается четыре разных решения, соответствующих четырём классам связности. Решения первого класса связности – это собственные ортохронные или специальные преобразования Лоренца, соответствующие собственной ортохронной группе Лоренца $SO_+(1,3)$ или специальной группе Лоренца L_+^{\uparrow} . Эти преобразования Лоренца в терминах параметра скорости v выражают собой СТО. Также были выписаны уравнения для преобразований Лоренца в терминах параметра скорости v для второго, третьего и четвёртого классов связности. Однако эти преобразования не образуют группы, так как они не содержат единичных элементов.

Выводятся ортогональные преобразования Лоренца (вращения) в пространстве $\mathbb{R}_{1,3}^4$ в каждой из трёх плоскостей евклидова пространства \mathbb{R}^3 из решения системы уравнений для преобразования метрического тензора при движении метрики. Общие решения этой системы уравнений выражаются через тригонометрические функции. Для каждой из плоскостей в \mathbb{R}^3 имеется 32 решения (матриц преобразования), соответствующих вращениям в положительном направлении времени, и 32 решения для отрицательного (обратного) направления времени. Ортогональные преобразования Лоренца в \mathbb{R}^3 разделяются на 4 класса связности в зависимости от киральности вращающейся координатной системы K' и значений $\Lambda_j^{3'}$. Найдены формулы перехода между преобразованиями, принадлежащими разным классам связности, и преобразованиями из одного и того же класса. Получены соотношения для перехода между вращениями по часовой стрелке и против часовой стрелки. Ортогональные преобразования Лоренца в \mathbb{R}^3 из первого класса связности образуют специальную ортогональную группу $SO(3)$. Однако преобразования из второго, третьего и четвёртого классов связности не образуют группы, так как они не содержат единичных элементов.

Было сделано предположение, что с каждым ортогональным преобразованием связан определённый тип частиц. Например, частицы могут быть преобразованы по правой системе координат из первого класса связности с $\Lambda_0^{0'} = 1$ и $R_{z,\mathcal{R}}^{(0,a,1,1)}$, а античастицы – по левой системе координат из второго класса связности с $\Lambda_0^{0'} = -1$ и $R_{z,\mathcal{L}}^{(2,a,1,-1)}$, полученной из правой системы координат инверсией временной и всех пространственных осей. Это означает, что частицы и античастицы преобразуются по двум разным несовместимым системам координат, движущимся в различных направлениях по времени, в соответствии с интерпретацией Фейнмана для решений уравнения Дирака с отрицательной энергией.

В *седьмом подпараграфе* вычислены генераторы собственной ортохронной группы Лоренца $SO_+(1,3)$ для псевдоортогональных преобразований Лоренца и специальной ортогональной группы $SO(3)$ для ортогональных преобразований Лоренца. Выведены коммутационные соотношения для генераторов группы Лоренца в различных представлениях. Выписаны матрицы преобразования Лоренца в форме матричной экспоненциальной функции с генераторами и параметрами группы, заданными в 4-мерных обозначениях.

В *восьмом подпараграфе* выведены в общем виде преобразования Пуанкаре (неоднородные преобразования Лоренца) из бесконечно маленького 4-интервала длины при движении метрики пространства $\mathbb{R}_{1,3}^4$, образующие группу Пуанкаре. Выведен закон умножения двух преобразований и вычислен обратный элемент для группы Пуанкаре. Группа Пуанкаре – это полупрямое произведение собственной ортохронной подгруппы Лоренца и подгруппы трансляций. Найдены генераторы подгруппы трансляций. Преобразования Пуанкаре представлены в виде экспоненциальной функции. Выведены коммутационные соотношения генератора подгруппы трансляций с остальными генераторами группы Пуанкаре. Выписаны операторы Казимира группы Пуанкаре: квадрат генератора трансляций и квадрат 4-вектора Паули-Любанского.

В *девятом подпараграфе* были вычислены дифференциальные операторы (генераторы) группы Пуанкаре относительно десяти независимых параметров этой группы в пространстве функций из условия инвариантности скалярной функции относительно преобразований Пуанкаре для координат в пространстве $\mathbb{R}_{1,3}^4$.

В *десятом подпараграфе* получены волновые уравнения группы Пуанкаре в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}_{1,3}^4$. Из дифференциальных операторов группы Пуанкаре относительно параметров подгруппы трансляций построен вектор дифференциального оператора 4-импульса, разложенный по векторам взаимного базиса псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}_{1,3}^4$, который имеет вид

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{e}^\mu P_\mu = i\hbar \mathbf{e}^\mu \partial_\mu. \quad (13)$$

В матричном представлении $\text{Mat}(4,\mathbb{C})$ в пространстве $\mathbb{R}_{1,3}^4$ этот вектор принимает вид

$$\underline{\hat{\mathbf{P}}} = \gamma(\hat{\mathbf{P}}) = \underline{\mathbf{e}}^\mu P_\mu = i\hbar \underline{\mathbf{e}}^\mu \partial_\mu = i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu, \quad (14)$$

где матрицы \underline{e}^μ для векторов взаимного базиса в матричном представлении выражаются через гамма-матрицы Дирака. Было выявлено, что уравнение на собственные значения для этого дифференциального вектора в матричном представлении в пространстве $\mathbb{R}_{1,3}^4$ в точности совпадает с уравнением Дирака:

$$\underline{\hat{P}}\psi = mc\psi \quad \text{или} \quad \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0, \quad (15)$$

где собственное значение m – положительное действительное число \mathbb{R} , называемое массой, и $\underline{e}^\mu = \gamma^\mu$. Таким образом, было обнаружено, что уравнение Дирака есть уравнение на собственные значения для вектора дифференциального оператора 4-импульса в матричном представлении $\underline{\hat{P}}$ в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}_{1,3}^4$, компоненты которого являются дифференциальными операторами группы Пуанкаре, соответствующими параметрам подгруппы трансляций. При этом масса частицы – это собственное значение оператора $\underline{\hat{P}}$ в матричном представлении пространства $\mathbb{R}_{1,3}^4$. Уравнение на собственные значения для квадрата оператора $\underline{\hat{P}}$ в матричном представлении даёт уравнение Клейна-Гордона. Таким образом, было доказано, что уравнение Дирака и уравнение Клейна-Гордона есть следствие трансляционной симметрии псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}_{1,3}^4$.

Во втором параграфе были даны определения микросостояний для любой физической системы в рамках квантовой механики. В квантовой механике микросостояния системы задаются векторами состояния квантовой системы, которые являются элементами гильбертова пространства. Мы получили, что уравнение Шредингера есть уравнение на собственные значения для дифференциального генератора группы Галилея относительно трансляций во времени в пространстве \mathbb{R}^1 и оператора энергии в пространстве \mathbb{R}^3 , составленного из генераторов группы Галилея относительно пространственных трансляций. Таким образом, волновые уравнения квантовой механики появляются вследствие симметрий расслоенных евклидовых пространств \mathbb{R} и \mathbb{R}^3 , выражающихся преобразованиями подгруппы трансляций группы Галилея. Это означает, что квантовая механика обусловлена геометрией пространства-времени в пределе $c \rightarrow \infty$.

Рассмотрены чистые и смешанные состояния квантовых систем, заданных векторами состояния в гильбертовом пространстве. В методе смешанных квантовых состояний для каждого элемента гильбертова пространства, заданного вектором состояния, вводится дополнительная вероятность p_i , являющаяся собственным значением статистического оператора, $\hat{\rho}(t)|\Psi_i(t)\rangle = p_i|\Psi_i(t)\rangle$. Показано, что в равновесном состоянии квантовой системы статистический оператор не зависит от времени и является функцией только от гамильтониана системы и от нескольких дополнительных макроскопических переменных состояния, определяемых требованиями равновесной термодинамики, $\hat{\rho}_{eq} \equiv \hat{\rho}_{eq}(\hat{H})$. В состоянии равновесия среднее значение оператора \hat{A} не зависит от времени и выражается следующим образом:

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}[\hat{A}\hat{\rho}_{eq}(\hat{H})], \quad \text{Tr}\hat{\rho}_{eq}(\hat{H}) = 1. \quad (16)$$

В третьем параграфе дано определение макросостояния для любой физической системы в рамках равновесной термодинамики. Дано определение термодинамической системы. Перечислены основные требования к выделению термодинамической системы из множества всевозможных макроскопических систем. Математически любая термодинамическая система задаётся термодинамическим потенциалом и набором независимых переменных состояния, соответствующих разным условиям выделения физической системы из окружающего мира. Введен общий математический аппарат для описания различных термодинамических систем на основе метода термодинамических потенциалов. Свойства термодинамической системы полностью определяются фундаментальным термодинамическим потенциалом (энергией) как функцией от независимых переменных термодинамического состояния, $f = f(x_1, \dots, x_n)$. Первые и вторые частные производные от фундаментального термодинамического потенциала по переменным состояния задают по определению термодинамические величины (наблюдаемые)

$$df = \sum_{i=1}^n u_i dx_i, \quad u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (17)$$

а его первый дифференциал выражает первый закон термодинамики (закон сохранения энергии). Условия симметрии для матричных элементов квадратичной формы второго дифференциала фундаментального термодинамического потенциала приводят к термодинамическим соотношениям Максвелла. Фундаментальный термодинамический потенциал, набор переменных состояния и его первые производные образуют полный набор переменных, описывающих данную термодинамическую систему. Приведена общая математическая схема вывода различных термодинамических потенциалов из фундаментального термодинамического потенциала. Существует два типа потенциалов. Первый термодинамический потенциал $g = g(u_1, \dots, u_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ получается из фундаментального термодинамического потенциала преобразованием Лежандра и изменением m переменных состояния с их сопряжёнными переменными:

$$g = f - \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = f - \sum_{i=1}^m u_i x_i. \quad (18)$$

Второй термодинамический потенциал $h = h(x_1, \dots, x_{k-1}, f, x_{k+1}, \dots, x_n)$ получается из фундаментального термодинамического потенциала путём выражения какой-либо одной переменной состояния через остальные переменные состояния и фундаментальный термодинамический потенциал:

$$h = x_k(x_1, \dots, x_{k-1}, f, x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (19)$$

Для этих двух классов потенциалов были найдены соответствующие им наборы независимых переменных состояния и их первых и вторых производных по

переменным состояниям при переходе от фундаментального термодинамического потенциала к первому или второму термодинамическому потенциалу. Найдены условия выпуклости (вогнутости) для любого термодинамического потенциала.

Принцип аддитивности в определении термодинамических систем требует, чтобы в равновесной термодинамике все функции от переменных состояний принадлежали к классу однородных функций нулевого или первого порядка. Однородная функция k -го порядка удовлетворяет соотношению

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \quad (20)$$

и теореме Эйлера

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = k f, \quad (21)$$

где (x_1, \dots, x_m) – экстенсивные переменные состояния, а (x_{m+1}, \dots, x_n) – интенсивные переменные состояния. Однородные функции первого порядка – экстенсивны, а нулевого порядка – интенсивны. Показано в общем виде, что при разделении системы на две подсистемы экстенсивные функции аддитивны:

$$f^{1+2}(x_1^{1+2}, \dots, x_n^{1+2}) = f^1(x_1^1, \dots, x_n^1) + f^2(x_1^2, \dots, x_n^2), \quad (22)$$

а интенсивные функции имеют одно и то же значение:

$$f^{1+2}(x_1^{1+2}, \dots, x_n^{1+2}) = f^1(x_1^1, \dots, x_n^1) = f^2(x_1^2, \dots, x_n^2). \quad (23)$$

Показано, что нулевой закон термодинамики требует, чтобы температура системы была интенсивной величиной.

В четвертом параграфе сформулирована общая схема построения обобщённой равновесной статистической механики. Равновесная статистическая механика представляет собой симбиоз трёх теорий: равновесной термодинамики, механической теории и теории вероятностей. Для её построения задаётся вероятностное пространство, состоящее из пространства элементарных событий, алгебры событий и вероятностей этих событий. Каждому микросостоянию заданной физической системы ставится в соответствие элементарное случайное событие, которое реализуется не достоверно, а с определённой долей вероятности. Множество микросостояний системы образует пространство элементарных событий. Каждому микросостоянию ставится в соответствие вероятность, являющаяся функцией от переменных микроскопического состояния и от переменных макроскопического состояния. Форма вероятности микросостояния и её зависимость от набора независимых переменных макроскопического состояния определяется из принципа термодинамического равновесия с произвольным определением статистической энтропии и статистическим определением экстенсивных термодинамических величин (средних по ансамблю). Принцип

термодинамического равновесия предполагает вычисление равновесных вероятностей микросостояний из условного экстремума термодинамического потенциала в точке термодинамического равновесия:

$$(d\Phi)_{X^1, \dots, X^n} = 0, \quad \Phi = Y - \lambda\varphi, \quad (24)$$

где

$$Y = Y(\{\hat{\rho}_{eq}\}, X) = \text{Tr}[\hat{\rho}_{eq}\hat{Y}(\{\hat{\rho}_{eq}\}, X)] \quad (25)$$

– термодинамический потенциал, φ – уравнение связи, λ – произвольная константа и

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{\rho}_{eq}} \right)_{X^1, \dots, X^n} = 0. \quad (26)$$

При этом форма равновесного распределения вероятностей и вид обобщённой статистической механики определяется видом статистической энтропии:

$$S = S(\{\hat{\rho}_{eq}\}, X) = \text{Tr}[\hat{\rho}_{eq}\hat{S}(\{\hat{\rho}_{eq}\}, X)], \quad (27)$$

где $\hat{S}(\{\hat{\rho}_{eq}\}, X)$ – произвольная функция от статистического оператора $\hat{\rho}_{eq}$ и термодинамических переменных состояния (X^1, \dots, X^n) .

Определены условия термодинамической самосогласованности для обобщённой статистической механики. Для этого равновесное распределение вероятностей и средние значения динамических величин должны удовлетворять фундаментальному уравнению термодинамики (первому и второму законам термодинамики) и все полученные статистические величины в термодинамическом пределе должны принадлежать к классу однородных функций первого или нулевого порядка. Дана математическая формулировка обобщённой равновесной статистической механики для частных статистических ансамблей, соответствующих первому и второму термодинамическим потенциалам. Выведены равновесные распределения вероятностей для каждого из этих видов термодинамического потенциала и вычислены в общем виде основные термодинамические соотношения.

Во **второй главе** даётся микроскопическое обоснование равновесной обобщённой статистической механики на основе статистической энтропии Цаллиса. Нормализованная статистика Цаллиса или статистика Цаллиса-1 [66] определяется обобщённой энтропией с вероятностями p_i микросостояний системы, нормированными на единицу [66, 67],

$$S = \sum_i \frac{p_i^q - p_i}{1 - q}, \quad \sum_i p_i = 1, \quad (28)$$

и стандартным математическим ожиданием

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i A_i, \quad (29)$$

где $q \in \mathbb{R}$ – реальный параметр, принимающий значения $0 < q < \infty$. Статистика Цаллиса-1 была рассмотрена в трёх ансамблях: микроканоническом, каноническом и большом каноническом. Распределения вероятностей микросостояний в статистике Цаллиса-1 были найдены на основе принципа термодинамического равновесия. Во всех трёх ансамблях было строго доказано, что статистика Цаллиса-1 удовлетворяет требованиям равновесной термодинамики в термодинамическом пределе при условии, что энтропийная переменная $z = 1/(q - 1)$ является экстенсивной переменной состояния системы.

В первом параграфе рассматривается статистика Цаллиса в микроканоническом ансамбле. Показано, что распределение вероятностей статистики Цаллиса в микроканоническом ансамбле равновероятно и эквивалентно микроканоническому распределению вероятностей статистики Больцмана-Гиббса. Получено общее уравнение для энтропии Цаллиса в микроканоническом ансамбле в виде

$$S = z \left(1 - W^{-\frac{1}{z}}\right) = z \left(1 - e^{-\frac{S_G}{z}}\right) \quad \text{для } |z| < \infty, \quad (30)$$

$$S = S_G = \ln W \quad \text{для } |z| = \infty, \quad (31)$$

где $W = \sum_i \delta_{E,E_i} \delta_{V,V_i} \delta_{N,N_i}$ – статистический вес и S_G – энтропия Больцмана-Гиббса. Найдены дифференциальные соотношения для термодинамических величин: температуры, давления, химического потенциала и величины Ξ , сопряжённой к переменной состояния z . Вычислено фундаментальное уравнение термодинамики. По сравнению с фундаментальным уравнением термодинамики для статистики Больцмана-Гиббса, в статистике Цаллиса появляется добавочный член Ξdz , где

$$\Xi = T \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)_{E,V,N} = T \left[1 - W^{-\frac{1}{z}} \left(1 - \ln W^{-\frac{1}{z}} \right) \right] \quad \text{для } |z| < \infty, \quad (32)$$

$$\Xi = T \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)_{E,V,N} = \Xi_G = 0 \quad \text{для } |z| = \infty. \quad (33)$$

В первом подпараграфе рассмотрена термодинамика микроканонического ансамбля для статистики Цаллиса. Из формулы для энтропии (30) следует, что энтропия Цаллиса в микроканоническом ансамбле – экстенсивная переменная, если энтропийная переменная z – экстенсивная переменная состояния системы. Было показано, что в этом случае в термодинамическом пределе $\tilde{z} = z/N = \text{const}$ статистика Цаллиса удовлетворяет термодинамическому принципу аддитивности и соответственно всем требованиям равновесной термодинамики. Температура системы – интенсивная переменная, т.е. выполняется нулевой закон термодинамики, а все остальные функции от переменных состояния системы – либо однородные функции первой степени (экстенсивны), либо однородные функции нулевой степени (интенсивны). Экстенсивность энтропии Цаллиса в микроканоническом ансамбле приводит к выполнению теоремы Эйлера, фундаментального уравнения термодинамики и уравнения Гиббса-Дюгема.

Это приводит также к выполнению первого и второго принципов равновесной термодинамики. В пределе Гиббса $\tilde{z} \rightarrow \pm\infty$, все выражения для статистики Цаллиса приводятся к соответствующим им выражениям для статистики Больцмана-Гиббса.

Во *втором и третьем подпараграфах* рассмотрен нерелятивистский идеальный газ в микроканоническом ансамбле для конечной системы и в термодинамическом пределе соответственно. На частном примере идеального газа в термодинамическом пределе было подтверждено в явном виде, что в статистике Цаллиса в микроканоническом ансамбле энтропийный индекс z – экстенсивная переменная состояния, которой соответствует термодинамическая сила Ξ , энтропия Цаллиса S – экстенсивная функция состояния и формализм Цаллиса удовлетворяет всем законам и требованиям равновесной термодинамики.

Во *втором параграфе* рассматривается статистика Цаллиса в каноническом ансамбле. Показано, что равновесное распределение вероятностей для статистики Цаллиса в каноническом ансамбле принимает вид

$$p_i = \left[1 + \frac{1}{z+1} \frac{\Lambda - E_i}{T} \right]^z, \quad (34)$$

$$1 = \sum_i \delta_{V,V_i} \delta_{N,N_i} \left[1 + \frac{1}{z+1} \frac{\Lambda - E_i}{T} \right]^z, \quad (35)$$

где $\Lambda \equiv \lambda - T = \Lambda(T, V, N, z)$ – функция нормировки, являющаяся решением уравнения (35). Вычислены общие выражения для термодинамического потенциала канонического ансамбля, свободной энергии Гельмгольца, энтропии, энергии, давления, химического потенциала и сопряжённой силы Ξ . Найдена однозначная связь статистической механики Цаллиса с равновесной термодинамикой. Выведено дифференциальное уравнение для термодинамического потенциала F . Строго выведено фундаментальное уравнение термодинамики из дифференциала энтропии и получены выражения для первого и второго законов термодинамики. Тем самым было аналитически доказано, что равновесное распределение вероятностей микросостояний удовлетворяет фундаментальному уравнению термодинамики, первому и второму законам термодинамики и сохраняет преобразование Лежандра. По сравнению со статистикой Больцманна-Гиббса в статистике Цаллиса в фундаментальном уравнении термодинамики появляется добавочный член Ξdz , связанный с работой сопряжённой силы Ξ при изменении переменной состояния z , где

$$\Xi = -\frac{\partial F}{\partial z} = T \sum_i \delta_{V,V_i} \delta_{N,N_i} p_i \left[1 - p_i^{1/z} \left(1 - \ln p_i^{1/z} \right) \right] \text{ для } |z| < \infty, \quad (36)$$

$$\Xi = -\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{для } |z| = \infty. \quad (37)$$

Показано, что для статистики Цаллиса в каноническом ансамбле выполняются все термодинамические соотношения относительно свободной энергии Гельмгольца.

В *первом и втором подпараграфах* рассмотрен нерелятивистский идеальный газ в каноническом ансамбле – для конечной системы и в термодинамическом пределе соответственно. На частном примере нерелятивистского идеального газа в термодинамическом пределе $\tilde{z} = z/N = const$ при условии, что переменная z – экстенсивная переменная состояния, было строго доказано в явном виде выполнение принципа аддитивности, нулевого закона термодинамики, теоремы Эйлера и соотношения Гиббса-Дюгема для статистики Цаллиса в каноническом ансамбле. Было показано, что все термодинамические величины являются либо однородными функциями первой степени (экстенсивными), либо однородными функциями нулевой степени (интенсивными) от переменных состояния системы. В частности, получено, что энтропия, свободная энергия и энергия – экстенсивные величины, а температура, давление, химический потенциал и переменная Ξ – интенсивные переменные.

В *третьем подпараграфе* в рамках нерелятивистского идеального газа идентичных частиц в термодинамическом пределе строго доказана эквивалентность канонического и микроканонического ансамблей для статистики Цаллиса при условии, что z – экстенсивная переменная состояния. Это свойство эквивалентности ансамблей является ключевым для выявления непротиворечивости статистической механики и термодинамики.

В *третьем параграфе* рассматривается статистика Цаллиса в большом каноническом ансамбле. Термодинамический потенциал большого канонического ансамбля в терминах вероятностей p_i был найден из фундаментального термодинамического потенциала с помощью преобразования Лежандра. Показано, что равновесное распределение вероятностей для статистики Цаллиса в большом каноническом ансамбле принимает вид

$$p_i = \left[1 + \frac{1}{z+1} \frac{\Lambda - E_i + \mu N_i}{T} \right]^z, \quad (38)$$

$$1 = \sum_i \delta_{V,V_i} \left[1 + \frac{1}{z+1} \frac{\Lambda - E_i + \mu N_i}{T} \right]^z, \quad (39)$$

где $\Lambda \equiv \lambda - T = \Lambda(T, V, \mu, z)$ – функция нормировки, являющаяся решением уравнения (39). Было показано, что в терминах вероятностей p_i термодинамические величины статистики Цаллиса имеют те же дифференциальные термодинамические соотношения и статистические определения, что и для статистики Больцмана-Гиббса. Это следствие теплового равновесия и структуры преобразования Лежандра. Было показано, что в статистике Цаллиса экстенсивная переменная состояния z порождает ненулевую сопряжённую силу Ξ :

$$\Xi = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} = T \sum_i \delta_{V,V_i} p_i \left[1 - p_i^{1/z} (1 - \ln p_i^{1/z}) \right]. \quad (40)$$

Найдено выражение для дифференциала термодинамического потенциала. Строго выведено фундаментальное уравнение термодинамики из дифференциала

термодинамического потенциала большого канонического ансамбля и преобразования Лежандра. По сравнению со статистикой Больцмана-Гиббса в статистике Цаллиса в фундаментальном уравнении термодинамики появляется добавочный член Ξdz . Получены выражения для первого и второго законов термодинамики.

В *первом и втором подпараграфах* получены точные аналитические соотношения для термодинамических величин (термодинамического потенциала и его первых производных) для нерелятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана в рамках статистики Цаллиса в большом каноническом ансамбле для конечной системы и в термодинамическом пределе соответственно. В большом каноническом ансамбле термодинамические величины нерелятивистского идеального газа выражаются в виде сумм по переменной N . Для нахождения выражений термодинамических величин в термодинамическом пределе $z_v = z/V = const$ вводится специальная процедура, когда сумма по N для конкретной термодинамической величины аппроксимируется её максимальным членом, который даёт основной вклад. Были получены аналитические выражения для плотности термодинамического потенциала, плотности энергии, плотности частиц, давления, плотности энтропии и переменной Ξ в термодинамическом пределе. Показано выполнение теоремы Эйлера, принципа аддитивности и нулевого закона термодинамики. Таким образом, на частном примере нерелятивистского идеального газа в большом каноническом ансамбле было доказано, что статистика Цаллиса удовлетворяет требованиям равновесной термодинамики в термодинамическом пределе $z_v = z/V = const$, когда энтропийная переменная z является экстенсивной переменной состояния системы, т.е. термодинамический потенциал является однородной функцией первого порядка по отношению к экстенсивным переменным состояния системы. Выявлено, что соотношение однородности для термодинамического потенциала большого канонического ансамбля для статистики Цаллиса, $p = -\omega - \Xi z_v$, отличается от соответствующего соотношения для статистики Больцмана-Гиббса, $p = -\omega$.

В *третьем подпараграфе* аналитически доказана эквивалентность канонического и большого канонического ансамблей статистики Цаллиса в термодинамическом пределе. В *четвертом подпараграфе* строго доказана эквивалентность микроканонического и большого канонического ансамблей в термодинамическом пределе.

В *пятом подпараграфе* численно исследуется поведение нерелятивистского нейтронного идеального газа Максвелла-Больцмана в рамках статистики Цаллиса в большом каноническом ансамбле. Численно доказано, что при больших значениях объёма V в термодинамическом пределе плотность термодинамического потенциала ω становится однородной функцией первого порядка по экстенсивным переменным состояния V и z . Изучено поведение термодинамических величин идеального газа как в термодинамическом пределе, так

и в пределе Больцмана-Гиббса. Произведено сравнение поведения термодинамических величин статистики Больцмана-Гиббса и статистики Цаллиса в термодинамическом пределе.

В третьей главе вычисляются адронные распределения по поперечному импульсу – как точные, так и в приближении нулевого члена – для релятивистских массивных частиц со статистикой Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака и Максвелла-Больцмана в большом каноническом ансамбле в рамках статистики Цаллиса-1, Цаллиса-2 и q -дуальной статистики. Ультрарелятивистские распределения по поперечному импульсу, как точные, так и в приближении нулевого члена, вычисляются только для частиц со статистикой Максвелла-Больцмана в большом каноническом ансамбле в рамках статистики Цаллиса-1 и Цаллиса-2. Точные распределения по поперечному импульсу как для массивных, так и для ультрарелятивистских частиц со статистикой Максвелла-Больцмана в рамках статистики Цаллиса-1 были использованы для описания экспериментальных данных для заряженных пионов, образующихся в pp столкновениях высоких энергий.

Рассмотрен общий формализм статистики Цаллиса-1 и статистики Цаллиса-2 в большом каноническом ансамбле. Распределения вероятностей микросостояний системы, нормировочные уравнения и средние по ансамблю термодинамических величин для обоих формализмов неэкстенсивной статистики были выражены аналитически через соответствующие величины статистики Больцмана-Гиббса с использованием интегрального представления для гамма-функции. Найдены точные результаты для релятивистского идеального газа массивных частиц со статистикой Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака и Максвелла-Больцмана в большом каноническом ансамбле. Точные аналитические результаты выражены в общем виде через бесконечные суммы, члены которых заданы в интегральном представлении. Получены точные распределения по поперечному импульсу для релятивистских массивных частиц со статистикой Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака и Максвелла-Больцмана в большом каноническом ансамбле в рамках статистики Цаллиса-1 и Цаллиса-2. Точные распределения по поперечному импульсу для статистики Цаллиса-1 принимают вид

$$\frac{d^2 N}{dp_T dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_T m_T \cosh y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{q}{1-q}} e^{-t\left[1 + \frac{q-1}{q} \frac{\Lambda}{T}\right]} \frac{(-\beta' \Omega_G(\beta'))^n}{e^{\beta'(m_T \cosh y - \mu)} + \eta} dt \quad \text{для } q < 1 \quad (41)$$

и

$$\frac{d^2 N}{dp_T dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_T m_T \cosh y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}{n!} \frac{i}{2\pi} \oint_C (-t)^{\frac{q}{1-q}} e^{-t\left[1+\frac{q-1}{q}\frac{\Lambda}{T}\right]} \frac{(-\beta' \Omega_G(\beta'))^n}{e^{\beta'(m_T \cosh y - \mu)} + \eta} dt \quad \text{для } q > 1, \quad (42)$$

где p_T и y – переменные поперечного импульса и быстроты соответственно, $m_T = \sqrt{p_T^2 + m^2}$ – поперечная масса частицы и параметр η обозначает статистику частиц Ферми-Дирака ($\eta = 1$), Бозе-Эйнштейна ($\eta = -1$) и Максвелла-Больцмана ($\eta = 0$). В частности, для классической статистики частиц Максвелла-Больцмана члены разложения в ряд могут быть явно записаны в виде интегралов от целых степеней модифицированных функций Бесселя. Точное распределение по поперечному импульсу для статистики Цаллиса-1 со статистикой частиц Максвелла-Больцмана принимает вид

$$\frac{d^2 N}{dp_T dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_T m_T \cosh y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{q}{1-q}-n} e^{-t\left[1+\frac{q-1}{q}\frac{\Lambda - m_T \cosh y + \mu(n+1)}{T}\right]} \left(K_2\left(\frac{t(1-q)m}{qT}\right)\right)^n dt \quad \text{для } q < 1 \quad (43)$$

и

$$\frac{d^2 N}{dp_T dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_T m_T \cosh y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right) \frac{i}{2\pi} \oint_C (-t)^{\frac{q}{1-q}-n} e^{-t\left[1+\frac{q-1}{q}\frac{\Lambda - m_T \cosh y + \mu(n+1)}{T}\right]} \left(K_2\left(\frac{t(1-q)m}{qT}\right)\right)^n dt \quad \text{для } q > 1. \quad (44)$$

В рамках статистики Цаллиса-1 и статистики Цаллиса-2 рассмотрен также ультрарелятивистский идеальный газ частиц с классической статистикой Максвелла-Больцмана в большом каноническом ансамбле. Для ультрарелятивистского идеального газа члены разложения в ряд могут быть явно проинтегрированы и конечный результат выражается только через аналитические функции. Точное распределение по поперечному импульсу для ультрарелятивистских частиц Максвелла-Больцмана в большом каноническом ансамбле для статистики

Цаллиса-1 принимает вид

$$\frac{d^2 N}{dp_T dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_T^2 \cosh y \sum_{N=0}^{N_0} \frac{\tilde{\omega}^N}{N!} h_0(0) \left[1 + \frac{q-1}{q} \frac{\Lambda - p_T \cosh y + \mu(N+1)}{T} \right]^{\frac{1}{q-1} + 3N}, \quad (45)$$

где N_0 – верхняя граница суммирования.

Для релятивистского и ультрарелятивистского идеальных газов было введено приближение нулевого члена, сохраняющее в суммах лишь член нулевого порядка. Были найдены аналитические формулы для распределений по поперечному импульсу в приближении нулевого члена для всех трёх статистик частиц (Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака и Максвелла-Больцмана) для статистики Цаллиса-1

$$\frac{d^2 N}{dp_T dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_T m_T \cosh y \sum_{k=0}^{\infty} (-\eta)^k \left[1 + (k+1) \frac{1-q}{q} \frac{m_T \cosh y - \mu}{T} \right]^{\frac{1}{q-1}} \quad \text{для } \eta = -1, 1, \quad (46)$$

$$\frac{d^2 N}{dp_T dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_T m_T \cosh y \left[1 + \frac{1-q}{q} \frac{m_T \cosh y - \mu}{T} \right]^{\frac{1}{q-1}} \quad \text{для } \eta = 0 \quad (47)$$

и статистики Цаллиса-2

$$\frac{d^2 N}{dp_T dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_T m_T \cosh y \sum_{k=0}^{\infty} (-\eta)^k \left[1 + (k+1)(q-1) \frac{m_T \cosh y - \mu}{T} \right]^{\frac{q}{1-q}} \quad \text{для } \eta = -1, 1, \quad (48)$$

$$\frac{d^2 N}{dp_T dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_T m_T \cosh y \left[1 + (q-1) \frac{m_T \cosh y - \mu}{T} \right]^{\frac{q}{1-q}} \quad \text{для } \eta = 0. \quad (49)$$

Было обнаружено, что популярное феноменологическое распределение Цаллиса для статистики частиц Максвелла-Больцмана, предложенное в работе [116] и широко используемое в физике высоких энергий, точно совпадает с распределением по поперечному импульсу в приближении нулевого члена (49) для ненормированной статистики Цаллиса-2. Более того, было также обнаружено, что это феноменологическое распределение Цаллиса может быть получено из приближения нулевого члена (47) нормированной статистики Цаллиса-1 путём преобразования энтропийного параметра $q \rightarrow 1/q$. Однако в то же время было выявлено, что феноменологические распределения Цаллиса для квантовой

статистики частиц, предложенные также в работе [116], не соответствуют ни точным, ни приближённым результатам как для статистики Цаллиса-1, так и для статистики Цаллиса-2.

Было обнаружено, что в диапазонах значений энтропийного параметра, относящихся к процессам физики высоких энергий ($q < 1$ для Цаллиса-1 и $q > 1$ для Цаллиса-2), точная статистика Цаллиса расходится. Статистика Цаллиса сходится только при $q = 1$, т.е. в пределе статистики Больцмана-Гиббса. Однако есть несколько членов в разложениях в ряд вблизи члена нулевого порядка, которые конечны и имеют физический смысл в процессах физики высоких энергий. Число этих физических членов зависит от значения q и бесконечно увеличивается при $q \rightarrow 1$. Поэтому для получения физических результатов статистика Цаллиса была регуляризована путем введения в разложения в ряд верхней границы обреза.

Обнаружено, что, в отличие от случая безмассовых частиц, в случае массивных частиц нарушается q -дуальность статистики Цаллиса-1 и Цаллиса-2. Однако q -дуальность для этих неэкстенсивных формализмов в приближении нулевого члена сохраняется как для массивных, так и для безмассовых частиц для всех трёх статистик частиц (Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака и Максвелла-Больцмана).

Известно, что в статистике Цаллиса-2 по определению обобщённые математические ожидания термодинамических величин не согласованы с условием нормировки вероятностей микросостояний, в частности $\langle 1 \rangle \neq 1$. Это приводит к тому, что статистика Цаллиса-2 противоречит основам статистической механики. В ней нарушена правильная связь между термодинамическими величинами и теорией вероятностей, а также первым и вторым началами термодинамики. Феноменологическое распределение Цаллиса по поперечному импульсу эквивалентно распределению по поперечному импульсу для статистики Цаллиса-2 в нулевом приближении. Поэтому феноменологическое распределение Цаллиса по поперечному импульсу, рассмотренное в рамках статистики Цаллиса, не обосновано с точки зрения основ статистической механики.

Для того чтобы обосновать известное феноменологическое распределение Цаллиса по поперечному импульсу, в этой главе специально была введена q -дуальная статистика на основе q -дуальной энтропии, полученной из энтропии Цаллиса мультипликативным преобразованием энтропийного параметра $q \rightarrow 1/q$:

$$S = q \sum_i \frac{p_i^{1/q} - p_i}{q - 1}, \quad (50)$$

где $q \in \mathbb{R}$ – реальный параметр, принимающий значения $0 < q < \infty$. Здесь q -дуальная неэкстенсивная статистика, основанная на этой статистической энтропии и правильно определённых математических ожиданиях термодинамических величин, была сформулирована в рамках большого канонического ансамбля.

Термодинамический потенциал был получен из фундаментального термодинамического потенциала преобразованием Лежандра. Равновесное распределение вероятностей микросостояний системы было выведено на основе принципа термодинамического равновесия. Уравнение нормировки и статистические средние значения были выражены аналитически через соответствующие величины статистики Больцмана-Гиббса с использованием интегрального представления гамма-функции, а экспоненциальная функция, содержащая термодинамический потенциал, была разложена в ряд. Получены точные аналитические формулы для распределений по поперечному импульсу для релятивистских массивных частиц со статистикой Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака и Максвелла-Больцмана в рамках q -дуальной статистики в большом каноническом ансамбле:

$$\frac{d^2 N}{dp_T dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_T m_T \cosh y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{q-1}} e^{-t[1+(1-q)\frac{\Lambda}{T}]} \frac{(-\beta' \Omega_G(\beta'))^n}{e^{\beta'(m_T \cosh y - \mu)} + \eta} dt, \quad (51)$$

где

$$-\beta' \Omega_G(\beta') = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \ln \left[1 + \eta e^{-\beta'(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)} \right]^{\frac{1}{\eta}} \quad (52)$$

есть термодинамический потенциал для релятивистского идеального газа статистики микросостояний Больцмана-Гиббса и $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

В настоящем исследовании было обнаружено, что феноменологическое распределение Цаллиса для статистики частиц Максвелла-Больцмана, введённое в работах [102, 116], эквивалентно распределению по поперечному импульсу q -дуальной неэкстенсивной статистики в приближении нулевого члена:

$$\frac{d^2 N}{dp_T dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_T m_T \cosh y \left[1 - (1-q) \frac{m_T \cosh y - \mu}{T} \right]^{\frac{q}{1-q}}. \quad (53)$$

Это демонстрирует, что правильная связь между феноменологическим распределением Цаллиса и фундаментальной теорией статистической механики обеспечивается q -дуальной энтропией вместо энтропии Цаллиса, так как q -дуальная статистика правильно определена, по сравнению со статистикой Цаллиса-2, поскольку математические ожидания величин в этом формализме согласуются с условием нормировки вероятностей, в частности $\langle 1 \rangle = 1$. Таким образом, было доказано, что хорошо известное феноменологическое одночастичное распределение Цаллиса термодинамически обосновано только в том случае, если оно принадлежит q -дуальной неэкстенсивной статистике вместо статистики Цаллиса.

Точное аналитическое ультрарелятивистское распределение адронов по поперечному импульсу для статистики Цаллиса-1 было использовано для описания экспериментальных данных для заряженных пионов, образующихся в

pp столкновениях высоких энергий. Найдена энергетическая зависимость параметров как для феноменологического распределения Цаллиса по поперечному импульсу, так и для точного распределение адронов по поперечному импульсу для статистики Цаллиса-1. Мы обнаружили, что результаты феноменологического распределения Цаллиса отклоняются от результатов статистики Цаллиса-1 только при малых энергиях NA61/SHINE, когда значение энтропийного параметра близко к единице. При более высоких энергиях, когда значения энтропийного параметра существенно отклонены от единицы, феноменологическое распределение Цаллиса удовлетворительно воспроизводит результаты статистики Цаллиса-1.

Точное распределение по поперечному импульсу для массивных релятивистских частиц со статистикой Максвелла-Больцмана в рамках статистики Цаллиса-1 было использовано для описания экспериментальных данных для отрицательно заряженных пионов, полученных коллаборациями ALICE и NA61/SHINE в протон-протонных столкновениях. Было показано, что по сравнению с безмассовым распределением Цаллиса в ультрарелятивистском пределе учёт массы пионов в формализме Цаллиса существенно улучшает описание спектров поперечного импульса малых p_T пионов при небольших энергиях столкновения.

В четвертой главе решается существующая в современной физике проблема неоднозначной формулировки релятивистской термодинамики движущегося тела. Было выявлено, что применявшейся до сих пор принцип энтропийной инвариантности необходим, но не достаточен для правильной формулировки релятивистской термодинамики. Применение лишь одного этого принципа без дополнительных условий приводит к неоднозначной формулировке преобразований Лоренца для термодинамических величин. Было найдено, что для решения этой проблемы необходимо введение ещё одного добавочного принципа, помимо принципа инвариантности энтропии, устанавливающего эквивалентность динамического гамильтониана системы и фундаментального термодинамического потенциала, который приводит к однозначным преобразованиям Лоренца для термодинамических величин и правильной связи между релятивистской механикой и термодинамикой. В настоящей работе основная идея формулировки релятивистской термодинамики движущегося тела основана на принципе эквивалентности полной динамической энергии системы, задаваемой функцией Гамильтона H , и фундаментального термодинамического потенциала E как функции от переменных состояния (S, V, N, \mathbf{P}) :

$$E(S, V, N, \mathbf{P}) \equiv H(\mathbf{P}, M(S, V, N)), \quad (54)$$

где S, V, N и \mathbf{P} – энтропия, объём, число частиц и импульс системы в лабораторной системе отсчёта K . Причём Гамильтониан H является сложной функцией, зависящей от термодинамических переменных состояния S, V, N только через массу покоя M тела, которая является релятивистским инвариантом, но при этом может изменяться инфинитезимально только термодинамически при

квазистатическом переходе из одного термодинамического состояния в другое близлежащее состояние. Строго доказано, что формализм, основанный на принципе эквивалентности гамильтониана и фундаментального термодинамического потенциала и принципе инвариантности энтропии, приводит к планковской теории релятивистской термодинамики, которая строго согласуется как с релятивистской механикой, так и с термодинамикой. Таким образом, добавочный принцип эквивалентности гамильтониана и фундаментального термодинамического потенциала устанавливает однозначное определение для преобразований Лоренца для термодинамических величин и устраняет неоднозначность формулировки релятивистской термодинамики.

Обнаружено, что в случае, когда гамильтониан является функцией импульса как независимой переменной динамического состояния, в полном соответствии с требованиями релятивистской механики,

$$E(S,V,N,\mathbf{P}) \equiv H(\mathbf{P},M(S,V,N)) = \sqrt{\mathbf{P}^2 c^2 + M^2(S,V,N)c^4}, \quad (55)$$

где импульс \mathbf{P} – независимая переменная состояния, получается однозначно планковский формализм релятивистской термодинамики. То есть преобразования Лоренца для термодинамических величин в точности совпадают с релятивистскими преобразованиями формализма Планка:

$$S = S', \quad V = \frac{V'}{\gamma}, \quad N = N', \quad (56)$$

$$T = \frac{T'}{\gamma}, \quad p = p', \quad \mu = \frac{\mu'}{\gamma}, \quad (57)$$

где

$$T' \equiv \left(\frac{\partial E'}{\partial S'} \right)_{V',N'}, \quad p' \equiv - \left(\frac{\partial E'}{\partial V'} \right)_{S',N'}, \quad \mu' \equiv \left(\frac{\partial E'}{\partial N'} \right)_{S',V'} \quad (58)$$

есть температура, давление и химический потенциал термодинамической системы в системе отсчёта K' , в которой тело покоится. Однако в случае, когда гамильтониан является функцией скорости как независимой переменной динамического состояния, вопреки требованиям релятивистской механики,

$$\begin{aligned} E(S,V,N,\mathbf{v}) &\equiv H(\mathbf{P}(S,V,N,\mathbf{v}),M(S,V,N)) \\ &= \sqrt{\mathbf{P}^2(S,V,N,\mathbf{v})c^2 + M^2(S,V,N)c^4} \\ &= \gamma(\mathbf{v})c^2 M(S,V,N), \end{aligned} \quad (59)$$

где скорость \mathbf{v} – независимая переменная состояния, получается формализм Отта для релятивистской термодинамики. В этом случае преобразования Лоренца для термодинамических величин совпадают с релятивистскими преобразованиями формализма Отта:

$$T = \gamma T', \quad p = \gamma^2 p', \quad \mu = \gamma \mu'. \quad (60)$$

В механике из преобразований Лежандра следует, что лагранжиан – функция скорости как независимой переменной состояния, а гамильтониан – функция импульса как независимой переменной состояния. Следовательно формализм Планка полностью удовлетворяет этому принципу, а формализм Отта нарушает это требование по определению.

Выведен первый закон термодинамики и дифференциал лагранжиана в каждом из этих двух формализмов. Обнаружено, что в формализме Планка первый закон термодинамики ковариантен, преобразования Лоренца справедливы не только для энергии, но и для её дифференциалов, а преобразование Лежандра для функции Лагранжа сохраняется:

$$dE' = \gamma(dE - \mathbf{v}d\mathbf{P}) = u^\mu dP_\mu \quad \text{или} \quad \frac{dE'}{c} = \gamma \left(\frac{dE}{c} - \beta dP_{\parallel} \right), \quad (61)$$

где $u^\mu = \gamma(c, \mathbf{v})$ – четыре-скорость, $dP^\mu = (dE/c, d\mathbf{P})$ и уравнение

$$dE' = T' dS' - p' dV' + \mu' dN', \quad (62)$$

которое является первым законом термодинамики в системе отсчёта K' , в которой тело покоится. Напротив, в формализме Отта первый закон термодинамики не является ковариантным, преобразование Лоренца для дифференциалов энергии не выполняется и преобразование Лежандра функции Лагранжа нарушается:

$$dE' = \frac{1}{\gamma} (dE - \gamma^2 \mathbf{P} d\mathbf{v}) \quad \text{или} \quad \frac{dE'}{c} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{dE}{c} - \gamma^2 P_{\parallel} d\beta \right). \quad (63)$$

Таким образом, формализм Отта релятивистской термодинамики, который получается из предположения, что скорость является независимой переменной гамильтоновой функции, несовместим с гамильтоновым и лагранжевым формализмами релятивистской механики. Это доказывает, что теория Отта для релятивистской термодинамики является несогласованной и поэтому неправильной.

В **пятой главе** исследуется ярко выраженный максимум для функции возбуждения K^+/π^+ (в виде пика), выявленного в столкновениях тяжёлых ионов при высоких энергиях посредством статистической модели адронов как с классической, так и с квантовой статистикой частиц с точным законом сохранения заряда странности системы по каноническому ансамблю и сохранением барионного и электрического зарядов системы в среднем по большому каноническому ансамблю. В *первом параграфе* рассматривается статистическая модель адронов с классической статистикой частиц Максвелла-Больцмана с точным законом сохранения заряда странности системы. В *первом подпараграфе* рассматривается прямой метод решения статистической суммы для статистической модели адронов с классической статистикой частиц Максвелла-Больцмана с точным законом сохранения заряда странности системы. Во *втором подпараграфе* для точного решения статистической суммы с классической статистикой частиц впервые

был введен метод рекуррентных уравнений. Для канонической статистической суммы с законом точного сохранения странности имеем выражение

$$Z_S = Z^{(0)} \sum_{S_+=0}^{\infty} \sum_{S_-=0}^{\infty} \delta(-S_- + S_+ - S) Z_{S_+}^{(+)} Z_{S_-}^{(-)}, \quad (64)$$

где статистические суммы для положительных $Z_{S_+}^{(+)}$ и отрицательных $Z_{S_-}^{(-)}$ компонент системы со странностью S имеют следующий вид в случае классической статистики частиц:

$$Z_{S_{\mp}}^{(\mp)} = \frac{1}{S_{\mp}} \sum_{\alpha \in M_{\mp}} |s_{\alpha}| Z_{\alpha}^1 Z_{S_{\mp} - |s_{\alpha}|}^{(\mp)} = \frac{1}{S_{\mp}} \sum_{s=1}^{s_{max}} s S_{\mp s} Z_{S_{\mp} - s}^{(\mp)}, \quad (65)$$

$$S_{\mp s} = \sum_{\alpha \in M_{\mp}} \delta_{s, |s_{\alpha}|} Z_{\alpha}^1, \quad 1 \leq s \leq s_{max}, \quad (66)$$

а статистическая сумма $Z^{(0)}$ с нулевой компонентой странности S сводится к следующей производящей функции: $Z^{(0)} = e^{S_0}$ с $S_0 = \sum_{\alpha \in M_0} Z_{\alpha}^1$. Техника рекуррентных уравнений, введённая впервые в такой модели, позволяет делать вычисления для больших ядерных систем, как это уже было ранее продемонстрировано в случае ядерной мультифрагментации [A27]. В *третьем подпараграфе* вычисляются средние по ансамблю для статистической модели адронов с классической статистикой частиц Максвелла-Больцмана с точным законом сохранения заряда странности системы. Среднее число частиц вида α получается путём суммирования средних чисел заполнения по импульсу \vec{p} :

$$\langle n_{\alpha} \rangle_S = \sum_p \langle \nu_{\alpha p} \rangle_S = Z_{\alpha}^1 \frac{Z_{S - s_{\alpha}}}{Z_S}. \quad (67)$$

Во *втором параграфе* впервые была введена статистическая модель адронов с квантовой статистикой частиц (Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака) с точным законом сохранения заряда странности системы и сохранением барионного и электрического зарядов системы в среднем. Для точного решения квантовой статистической суммы и средних по ансамблю впервые был введен метод рекуррентных уравнений. Статистическая сумма квантовой модели сводится к уравнению (64) со статистическими суммами для положительных и отрицательных компонент странности, заданными уравнением:

$$Z_{S_{\mp}}^{(\mp)} = \frac{1}{S_{\mp}} \sum_{\alpha \in M_{\mp}} \sum_{l=1}^{[S_{\mp}/|s_{\alpha}|]} |s_{\alpha}| Z_{\alpha}^l Z_{S_{\mp} - l|s_{\alpha}|}^{(\mp)} = \frac{1}{S_{\mp}} \sum_{s=1}^{s_{max}} \sum_{l=1}^{[S_{\mp}/s]} s S_{\mp s, l} Z_{S_{\mp} - ls}^{(\mp)}, \quad (68)$$

где $Z_0^{(\mp)} = 1$ и новые вспомогательные функции

$$S_{\mp s, l} = \sum_{\alpha \in M_{\mp}} \delta_{s, |s_{\alpha}|} Z_{\alpha}^l, \quad (69)$$

$$Z_{\alpha}^l = y_{\alpha l} \sum_p e^{-\beta l \varepsilon_{\alpha p}}. \quad (70)$$

Величина $y_{\alpha l} = (-1)^{l+1}$ для статистики Ферми-Дирака и $y_{\alpha l} = 1$ для статистики Бозе-Эйнштейна. Отметим, что в случае статистики Максвелла-Больцмана $y_{\alpha l} = \delta_{l,1}$. Уравнение (68) точно следует структуре соответствующего уравнения (65) для классической статистики и может быть решено с помощью метода рекуррентных уравнений. Статистическая сумма с нулевой компонентой странности принимает вид

$$Z^{(0)} = \exp \left(\sum_{l=1}^{\infty} S_{0,l} \right), \quad S_{0,l} = \sum_{\alpha \in M_0} l^{-1} Z_{\alpha}^l, \quad (71)$$

$$Z^{(0)} = \prod_{\alpha \in M_0} \prod_p (1 \pm e^{-\beta \varepsilon_{\alpha p}})^{\pm 1}, \quad |e^{-\beta \varepsilon_{\alpha p}}| < 1, \quad (72)$$

где верхний знак соответствует статистике Ферми-Дирака, а нижний знак соответствует статистике Бозе-Эйнштейна. Среднее число частиц сорта α для странных $\alpha \in M_{\mp}$ и нестранных $\alpha \in M_0$ частиц имеет вид

$$\langle n_{\alpha} \rangle_S = \frac{Z^{(0)}}{Z_S} \sum_{S_+=0}^{\infty} \sum_{S_-=0}^{\infty} \delta(-S_- + S_+ - S) Z_{S_{\pm}}^{(\pm)} \sum_{l=1}^{|S_{\mp}/|s_{\alpha}|} Z_{\alpha}^l Z_{S_{\mp}-l|s_{\alpha}|}^{(\mp)}, \quad \alpha \in M_{\mp}, \quad (73)$$

$$\langle n_{\alpha} \rangle_S = \sum_{l=1}^{\infty} Z_{\alpha}^l, \quad \alpha \in M_0. \quad (74)$$

В третьем параграфе вычисляется функция возбуждения странности K^+/π^+ в зависимости от энергии столкновения для адронных систем, образующихся в столкновениях тяжёлых ионов. В модели включены все мезоны с $m_{\alpha} \lesssim 1.6$ ГэВ и барионы с $m_{\alpha} \lesssim 2$ ГэВ, заданные в Particle Data Group (PDG). При расчётах выхода конкретного сорта адронов учитывается вклад вторичных частиц от распадов более тяжёлых адронов в дополнение к первичной их множественности. Отношения для ширин распада $Br(\gamma \rightarrow \alpha)$ берутся из PDG. Начальное состояние равновесной системы берется из эмпирической кривой химического фризаута $T - \mu_B$. Вычисления проводятся в объёме V с точным законом сохранения странности S . В рамках статистической модели с классической статистикой частиц была исследована энергетическая зависимость функции возбуждения K^+/π^+ для разных значений полной странности. Показано, что

кривая для нулевой странности системы, описываемая классической статистикой частиц Максвелла-Больцмана без учёта слабых распадов, удовлетворительно воспроизводит более ранние результаты статистической модели и согласована с экспериментальными данными при низких энергиях столкновения. Найдено, что теоретические кривые для K^+/π^+ при значении полной странности S отличной от нуля не описывают экспериментальные данные для столкновений тяжёлых ионов. Найдено, что включение квантовой статистики для $S = 0$ несколько снижает отношение K^+/π^+ при энергии столкновения $\sqrt{s} \gtrsim 6$ ГэВ, что более близко к экспериментальным данным по сравнению с классической статистикой частиц. Все кривые для функции возбуждения странности K^+/π^+ сильно превышают экспериментальные данные при высоких энергиях столкновения $\sqrt{s} \gtrsim 8$ ГэВ. Для более реалистичного описания конечных ядерных систем, образованных в столкновениях тяжёлых ионов в статистической модели с точным законом сохранения странности, были введены два дополнительных уравнения на сохранение средних значений полного барионного B и электрического Q зарядов системы, позволяющих определить объём V и электрический химический потенциал μ_Q системы. Функция возбуждения странности K^+/π^+ была вычислена для конечной ядерной системы с фиксированными значениями B, Q и S . Такая функция возбуждения K^+/π^+ не сильно отличается от предыдущего результата. Однако объём системы V приобретает зависимость от энергии, и его поведение примерно коррелирует с объёмом фризаута пионов, измеренным экспериментально методом НВТ интерференции. Таким образом, получено, что дополнительный учёт сохранения среднего барионного и среднего электрического зарядов системы не меняет заметно функцию возбуждения K^+/π^+ , но при этом обеспечивает термодинамическую согласованность канонического подхода для точного сохранения странности.

В **шестой главе** исследуется фазовый переход первого рода в релятивистской адронной модели среднего поля на основе метода термодинамических потенциалов и их первых производных в различных статистических ансамблях. В первом параграфе рассматривается релятивистская адронная модель среднего поля. В простейшей реализации модели релятивистского среднего поля эффективный лагранжиан системы низколежащих барионов, взаимодействующих посредством обмена скалярным мезоном σ и промежуточным абелевым калибровочным бозоном $U(1)$, т.е. векторным мезоном ω , имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - (D_\mu^*\bar{\psi})\gamma^\mu\psi] - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2 A_\mu A^\mu \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_s^2\phi^2) + g_s\bar{\psi}\psi\phi, \end{aligned} \quad (75)$$

где $\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$ – изодублет группы $SU(2)$, ψ^1 и ψ^2 – спинорные поля для протонов и нейтронов с общей массой m , γ^μ – гамма-матрицы Дирака, A^μ – действительное изоскалярное векторное поле Прока для ω -мезона с массой m_v ,

ϕ – действительное изоскалярное скалярное поле для σ -мезона с массой m_s и g_v, g_s – константы связи. Причём антисимметричный тензор напряжённости для калибровочного поля и ковариантная производная группы U(1) определяются равенствами

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad D_\mu = \partial_\mu + ig_v A_\mu. \quad (76)$$

В приближении среднего поля на поля A_μ и ϕ накладываются следующие условия:

$$\phi = \phi_0, \quad A_\mu = \delta_\mu^0 A_0, \quad (77)$$

где величины ϕ_0 и A_0 являются константами, не зависящими от x_μ (т.е. $\partial_\mu A_0 = 0$ и $\partial_\mu \phi_0 = 0$).

В статистической модели выражения для термодинамических величин принимают следующий окончательный вид:

$$\Omega = -T \ln Z = -T \sum_{\vec{p}\sigma} \left[\ln(1 + e^{-\frac{\varepsilon_{(+)} - \mu}{T}}) + \ln(1 + e^{-\frac{\varepsilon_{(-)} + \mu}{T}}) \right] - \lambda_{(-)}, \quad (78)$$

$$\rho - \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}\sigma} [\langle n_{\vec{p}\sigma} \rangle - \langle \bar{n}_{\vec{p}\sigma} \rangle] = 0, \quad (79)$$

$$\rho_s - \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}\sigma} \frac{m^*}{E^*} [\langle n_{\vec{p}\sigma} \rangle + \langle \bar{n}_{\vec{p}\sigma} \rangle] = 0, \quad (80)$$

со средними числами заполнения, заданными функциями распределения Ферми-Дирака

$$\langle n_{\vec{p}\sigma} \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_{(+)} - \mu}{T}} + 1}, \quad \langle \bar{n}_{\vec{p}\sigma} \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_{(-)} + \mu}{T}} + 1} \quad (81)$$

и

$$\lambda_{(\mp)} = \frac{1}{2} (a_v \rho^2 \mp a_s \rho_s^2) V, \quad \varepsilon_{(\pm)} = E^* \pm a_v \rho, \quad m^* = m - a_s \rho_s, \quad (82)$$

где $\rho \equiv A_0 g_v / a_v$, $\rho_s \equiv \phi_0 g_s / a_s$, $a_v \equiv g_v^2 / m_v^2 \equiv C_v^2 / m^2$, $a_s \equiv g_s^2 / m_s^2 \equiv C_s^2 / m^2$ и C_v , C_s – безразмерные параметры модели.

Во втором параграфе выявлены основные термодинамические свойства адронного фазового перехода первого рода посредством конструкции Максвелла в рамках большого канонического, канонического и изобарического ансамблей. Установлено, что фазовый переход первого рода в релятивистской модели среднего поля является ядерным фазовым переходом типа жидкость-газ, который связан со свободной энергией Гиббса G , причём его свойства полностью удовлетворяют требованиям общей теории фазовых переходов. Действительно, было обнаружено, что в изобарическом ансамбле свободная энергия Гиббса на нуклон (химический потенциал) для релятивистской модели среднего поля является кусочно-гладкой функцией, а её частные производные первого порядка по переменным состояния (T, p) , т.е. энтропия на нуклон и удельный объём, являются

кусочно-непрерывными функциями. В точках фазового перехода химический потенциал является непрерывной функцией, имеющей излом как функция от p при фиксированном T и как функция от T при фиксированном p , а частные производные первого порядка от химического потенциала по отношению к переменным состояния, энтропия на нуклон и удельный объём, имеют скачкообразные разрывы.

Кроме того, было обнаружено, что в релятивистской модели среднего поля в большом каноническом ансамбле удельный большой потенциал (давление) представляет собой кусочно-гладкую функцию, а её частные производные первого порядка по переменным состояния (T, μ) , т.е. плотность энтропии и плотность барионов, являются кусочно-непрерывными функциями. В точках фазового перехода давление является непрерывной функцией, имеющей острый угол (изгиб) как функция от μ при фиксированном T и как функция от T при фиксированном μ , а первые её производные – плотность энтропии и плотность барионов – имеют скачкообразные разрывы. Однако в каноническом ансамбле определение ядерного фазового перехода жидкость-газ не соответствует критериям, установленным в большом каноническом и изобарическом ансамблях. Производные первого порядка от свободной энергии Гельмгольца на нуклон по переменным состояния, энтропия на нуклон и давление как функции от удельного объёма (барионной плотности) при фиксированной температуре изменяются линейно в области фазового перехода, но как функции температуры при фиксированном удельном объёме – изменяются плавно и имеют изломы в точках пересечения с кривыми сосуществования. В каноническом ансамбле первые производные от свободной энергии не имеют скачков разрыва. Таким образом, ядерный фазовый переход жидкость-газ в релятивистской модели среднего поля характеризуется скачками плотности барионов (удельного объёма) и плотности энтропии (энтропии на нуклон) при постоянных значениях температуры, химического потенциала и давления. Это означает, что для ядерного фазового перехода жидкость-газ в этой модели фазовые диаграммы $T - \mu$ и $T - p$ представлены линиями сосуществования, однако фазовые диаграммы $T - s$ ($T - \tilde{s}$) и $T - \rho$ ($T - v$) изображаются областями сосуществования.

Для релятивистской адронной модели среднего поля рассчитаны калорическая кривая и уравнение состояния. Установлено, что энергия на калорической кривой для ядерного фазового перехода жидкость-газ является разрывной в изобарическом и большом каноническом ансамблях при фиксированных значениях давления и химического потенциала соответственно и непрерывна в каноническом и микроканоническом ансамблях при фиксированных значениях плотности барионов или удельного объёма. Однако барионная плотность на изотермах разрывается в изобарическом и каноническом ансамблях при фиксированных значениях температуры. Выявлен общий критерий для ядерного фазового перехода жидкость-газ в каноническом ансамбле. Этот критерий гласит, что плотность барионов на изотермах должна быть прерывистой при фиксированных значениях температуры, а энергия на калорических кривых должна

быть непрерывной при фиксированных значениях плотности барионов. Следует также отметить, что полученные результаты для фазового перехода первого рода в релятивистской модели среднего поля полностью согласуются с принципами общей теории фазовых переходов.

В **седьмой главе** проведено сравнение уравнений состояния идеального газа адронов и решёточной КХД с $N_f = 2 + 1$ ароматами. Воспроизведены результаты модели адронного резонансного газа по зависимости плотности энергии от температуры, и подтверждена кварк-адронная дуальность при низких температурах в области конфайнмента кварков и глюонов. Однако, после рассмотрения этих результатов в более широком масштабе температур и энергий было обнаружено, что калорические уравнения состояния HRG модели и модели решёточной КХД имеют одинаковое качественное поведение и отличаются лишь масштабом и значениями своих пределов Стефана-Больцмана. Таким образом, было выявлено, что эти величины несоизмеримы, поскольку соответствуют разным наборам степеней свободы. Поэтому для возможности правильного их сравнения они были приведены к одному и тому же масштабу путём уменьшения их степеней свободы делением плотности энергии каждой из этих моделей на соответствующий им эффективный фактор вырождения. Эффективный фактор вырождения кварковых и глюонных полей определяется в виде

$$g_{QCD} = g_g + \frac{7}{8}g_q, \quad (83)$$

$$g_g = 2_{spin} \times (N_c^2 - 1), \quad (84)$$

$$g_q = 2_{spin} \times 2_{q\bar{q}} \times N_c \times N_f. \quad (85)$$

Фактор $7/8$ в уравнении (83) возникает из-за разницы статистик Бозе - Эйнштейна и Ферми-Дирака. Эффективный фактор вырождения адронного газа определяется в следующей форме:

$$g_H = \sum_M g_M + \frac{7}{8} \sum_B g_B, \quad (86)$$

где $g_i = (2J_i + 1)(2I_i + 1)$ – спин-изоспиновый фактор вырождения (анти) мезонов ($i = M$) и (анти) барионов ($i = B$). В настоящей работе были использованы простейшие определения для эффективного фактора вырождения кварк-глюонных полей и эффективного фактора вырождения адронного газа для того, чтобы сохранить суть результатов решёточной КХД.

После применения этой процедуры было получено, что масштабированная плотность энергии HRG модели значительно отклоняется от масштабированной плотности энергии решёточной КХД во всем диапазоне температур T . Таким образом, с точки зрения масштабированных переменных, кварк-адронная дуальность HRG модели исчезает. Однако было обнаружено, что масштабированная плотность энергии решёточной КХД с $N_f = 2 + 1$ ароматами может быть хорошо описана только масштабированной плотностью энергии идеального газа каонов

и антикаонов, а именно теми адронами, которые содержат в себе все три кварка u, d, s и их антикварка. Масштабированная калорическая кривая идеального газа каонов и антикаонов аналогична калорическому уравнению состояния решёточной КХД во всей области температур; однако наилучшее описание данных решёточной КХД достигается при высоких температурах в области деконфайнмента кварков и глюонов. Идеальный газ нуклонов и антинуклонов и идеальный газ низколежащих лёгких неароматизированных мезонов не описывают масштабированные результаты решёточной КХД с $N_f = 2 + 1$ ароматами. Это является результатом того, что эти адроны не содержат кварки s и \bar{s} . Было также обнаружено, что только невозбуждённые каоны и антикаоны с наименьшими массами могут описывать решеточные данные КХД.

Исследованы поправки конечного объёма к термодинамическим величинам идеального газа каонов. Было обнаружено, что масштабированные термодинамические величины решёточной КХД могут быть хорошо описаны идеальным газом каонов только при больших значениях объёма V . При малых значениях объёма и небольших температурах результаты для идеального газа существенно отличаются от данных решёточной КХД. Масштабированная плотность энергии, масштабированное давление и масштабированная энтропия решёточной КХД $(2 + 1)$ хорошо описываются идеальным газом каонов и антикаонов. Однако масштабированная аномалия следа идеального газа имеет ту же тенденцию, что и масштабированная аномалия следа решёточной КХД, но при этом отличается от неё количественно. Масштабированная теплоемкость идеального газа также имеет тенденцию, аналогичную масштабированной теплоемкости решёточной КХД, и совпадает с ней только при высоких температурах. В целом масштабированные термодинамические величины идеального газа каонов и антикаонов согласуются с масштабированными результатами решёточной КХД с $N_f = 2 + 1$ ароматами и демонстрируют аналогичную тенденцию в поведении. Однако следует подчеркнуть, что в идеальном газе каонов и антикаонов фазовые переходы отсутствуют, а в решёточной КХД такое же поведение термодинамических величин приписывается существованию фазового перехода.

В **восьмой главе** вычисляются точные аналитические результаты для статистической суммы нейтрального скалярного поля на конечной решётке как в конфигурационном, так и в импульсном пространствах. В первом параграфе вводится модифицированный метод интегралов по путям для квантовых полей с целью точного решения статистической суммы для вещественного скалярного поля в одномерном пространственном измерении, основанный на дискретизации обратной температуры вместо времени и использующий векторы состояния и операторы поля в представлении Шредингера в момент времени $t = 0$. Была точно вычислена в общем виде статистическая сумма для нейтрального скалярного поля в одном пространственном измерении с периодическими и антипериодическими граничными условиями вдоль пространственной оси в рамках метода интегралов по путям как в конфигурационном, так и в импульсном пространстве.

Статистическая сумма на решётке в конфигурационном пространстве выражается через детерминант матрицы A в виде

$$Z_{lat} = \frac{1}{\sqrt{\det A}}. \quad (87)$$

Симметричная квадратная матрица A размера $n \times n$ для нейтрального скалярного поля была найдена в явном виде. Для периодических граничных условий вдоль пространственной оси x она принимает форму

$$A = I_{N_\sigma} \otimes I_{N_\beta} \left[2 \left(1 + \frac{a_\beta^2}{a_\sigma^2} \right) + a_\beta^2 m^2 \right] - I_{N_\sigma} \otimes C_{N_\beta} - \frac{a_\beta^2}{a_\sigma^2} C_{N_\sigma} \otimes I_{N_\beta}, \quad (88)$$

где I_N – единичная матрица размера $N \times N$, символ \otimes – тензорное произведение, а C_N – матрица размера $N \times N$ вида

$$C_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Для точного решения статистической суммы в конфигурационном пространстве были получены также рекуррентные уравнения. Для перехода из одномерного конфигурационного пространства в одномерное импульсное пространство были использованы дискретные преобразования Фурье. Статистическая сумма в одном пространственном измерении в импульсном пространстве выражается через детерминант матрицы B , которая была вычислена в явном виде посредством дискретных преобразований Фурье. Окончательно получены точные аналитические результаты для статистической суммы в одном пространственном измерении в импульсном пространстве в форме

$$Z_{lat} = \frac{1}{\sqrt{\prod_{k_x=k_{x1}}^{k_{x2}} \prod_{k_\beta=k_{\beta1}}^{k_{\beta2}} G_{I(k_x, k_\beta)}}}, \quad (90)$$

$$G_{I(k_x, k_\beta)} = a_\beta^2 \left[\left(\frac{2}{a_\beta} \sin \frac{a_\beta p_\beta}{2} \right)^2 + \left(\frac{2}{a_\sigma} \sin \frac{a_\sigma p_x}{2} \right)^2 + m^2 \right]. \quad (91)$$

Численно доказана эквивалентность статистических сумм в конфигурационном и импульсном пространствах. Статистическая сумма была обобщена на трёхмерное импульсное пространство:

$$Z_{lat} = \prod_{\vec{k}=k_{\sigma 1}}^{k_{\sigma 2}} \prod_{k_{\beta}=k_{\beta 1}}^{k_{\beta 2}} \frac{1}{\sqrt{a_{\beta}^2(\omega_{\beta}^2 + \omega^2)}}, \quad (92)$$

$$\omega_{\beta} = \frac{2}{a_{\beta}} \sin \frac{a_{\beta} p_{\beta}}{2}, \quad (93)$$

$$\omega = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{2}{a_{\sigma}} \sin \frac{a_{\sigma} p_{\alpha}}{2} \right)^2 + m^2}, \quad (94)$$

где ω – релятивистская одночастичная энергия на решётке, $\theta_{\beta} = 0$ и $p_{\beta} = 2\pi k_{\beta}/\beta$ – частота Мацубары. Основные термодинамические величины большого канонического ансамбля на конечной решётке в трёхмерном импульсном пространстве были получены из статистической суммы с периодическими и антипериодическими граничными условиями вдоль пространственных осей. В частном случае периодических пространственных граничных условий были воспроизведены результаты, впервые полученные другим методом в работе [201].

Во втором параграфе найдены точные аналитические выражения для термодинамических величин нейтрального скалярного поля в континуальном пределе и в пределе $N_{\beta} \rightarrow \infty$, $\beta = const$ и $N_{\sigma} = const$. В обоих пределах термодинамические величины нейтрального скалярного поля делятся на две части: сумму вакуумного и физического членов. В континуальном пределе все вакуумные члены численно расходятся. Однако в пределе $N_{\beta} \rightarrow \infty$, $\beta = const$ и $N_{\sigma} = const$ вакуумные члены являются конечными величинами. В континуальном пределе термодинамические величины нейтрального скалярного поля, полученные с помощью введённого в данной главе модифицированного метода интегралов по траекториям, в точности совпадают с соответствующими им величинами, полученными методом канонического квантования. В частности, в термодинамическом пределе континуальные термодинамические величины для безмассового нейтрального скалярного поля приводятся к своим предельным значениям Стефана-Больцмана.

В третьем параграфе определяются вакуумные и физические члены термодинамических величин на конечной решётке, как в работе [201]. В континуальном пределе эти решеточные величины в точности совпадают с соответствующими им континуальными величинами, полученными с помощью рассматриваемого в данной главе модифицированного метода интегралов по путям. То же самое поведение для них ясно видно и в пределе $N_{\beta} \rightarrow \infty$, $\beta = const$ и $N_{\sigma} = const$.

В заключении приведены основные результаты диссертационной работы и благодарности.

В **Приложении А** рассмотрено классическое пространство-время, которое состоит из физических событий, так же как и пространство событий СТО. В классических теориях каждому событию из многообразия событий M_4 ставится во взаимно-однозначное соответствие точка M из аффинного пространства A^4 . Каждому элементу (точке) из A^4 ставится в соответствие вектор (элемент) t из \mathbb{E}^1 (время) и вектор (элемент) \vec{x} из \mathbb{E}^3 (пространственное расстояние).

В **Приложении Б** преобразования группы Галилея были получены из преобразований группы Пуанкаре в нерелятивистском пределе. Преобразования Галилея представляются в виде произведения матриц сдвига, бустов и вращений в \mathbb{R}^3 . Вычислены обратные преобразования Галилея. Найдены дифференциальные операторы (генераторы) группы Галилея относительно десяти независимых параметров этой группы в пространстве функций из условия инвариантности скалярной функции относительно преобразований Галилея для координат в пространствах \mathbb{E}^1 и \mathbb{E}^3 .

Публикации автора по теме диссертации

- A1. Parvan A. S. Microcanonical ensemble extensive thermodynamics of Tsallis statistics // *Physics Letters A*. — 2006. — Vol. 350, no. 5/6. — P. 331–338.
- A2. Parvan A. S. Extensive statistical mechanics based on nonadditive entropy: Canonical ensemble // *Physics Letters A*. — 2006. — Vol. 360, no. 1. — P. 26–34.
- A3. Parvan A. S. Study of invariance of nonextensive statistics under the uniform energy spectrum translation // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2022. — Vol. 588. — P. 126556.
- A4. Parvan A. S., Biró T. Extensive Rényi statistics from non-extensive entropy // *Physics Letters A*. — 2005. — Vol. 340, no. 5/6. — P. 375–387.
- A5. Parvan A. S. Self-consistent thermodynamics for the Tsallis statistics in the grand canonical ensemble: Nonrelativistic hadron gas // *European Physical Journal A*. — 2015. — Vol. 51, no. 9. — P. 108.
- A6. Botet R., Płoszajczak M., Gudima K. K., Parvan A. S., Toneev V. D. The thermodynamic limit in the non-extensive thermo statistics // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2004. — Vol. 344, no. 3/4. — P. 403–408.
- A7. Parvan A. S., Biró T. S. Rényi statistics in equilibrium statistical mechanics // *Physics Letters A*. — 2010. — Vol. 374, no. 19/20. — P. 1951–1957.
- A8. Parvan A. S., Biró T. S. Equilibrium statistical mechanics for incomplete nonextensive statistics // *Physics Letters A*. — 2011. — Vol. 375, no. 3. — P. 372–378.
- A9. Parvan A. S. Nonextensive statistics of Landsberg-Vedral entropy // *EPJ Web of Conferences*. — 2019. — Vol. 204. — P. 03005.

- A10. *Anghel D. V., Parvan A. S.* The statistics of mesoscopic systems and the physical interpretation of extensive and non-extensive entropies // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2018. — Vol. 51, no. 44. — P. 445002.
- A11. *Parvan A. S.* Critique of multinomial coefficients method for evaluating Tsallis and Renyi entropies // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2010. — Vol. 389, no. 24. — P. 5645–5649.
- A12. *Cleymans J., Lykasov G. I., Parvan A. S., Sorin A. S., Teryaev O. V., Worku D.* Systematic properties of the Tsallis distribution: Energy dependence of parameters in high energy p–p collisions // *Physics Letters B*. — 2013. — Vol. 723, no. 4/5. — P. 351–354.
- A13. *Parvan A. S.* Non-extensive statistics effects in transverse momentum spectra of hadrons // *Proceedings of Science*. — 2015. — Vol. Baldin ISHEPP XXII. — P. 077.
- A14. *Parvan A. S., Teryaev O. V., Cleymans J.* Systematic comparison of Tsallis statistics for charged pions produced in pp collisions // *European Physical Journal A*. — 2017. — Vol. 53, no. 5. — P. 102.
- A15. *Bhattacharyya T., Cleymans J., Mogliacci S., Parvan A. S., Sorin A. S., Teryaev O. V.* Non-extensivity of the QCD p_T -spectra // *European Physical Journal A*. — 2018. — Vol. 54, no. 12. — P. 222.
- A16. *Cleymans J., Azmi M. D., Parvan A. S., Teryaev O. V.* The Parameters of The Tsallis Distribution at the LHC // *EPJ Web of Conferences*. — 2017. — Vol. 137. — P. 11004.
- A17. *Parvan A. S., Bhattacharyya T.* Remarks on the phenomenological Tsallis distributions and their link with the Tsallis statistics // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2021. — Vol. 54, no. 32. — P. 325004.
- A18. *Parvan A. S.* Ultrarelativistic transverse momentum distribution of the Tsallis statistics // *European Physical Journal A*. — 2017. — Vol. 53, no. 3. — P. 53.
- A19. *Parvan A. S., Bhattacharyya T.* Hadron transverse momentum distributions of the Tsallis normalized and unnormalized statistics // *European Physical Journal A*. — 2020. — Vol. 56, no. 2. — P. 72.
- A20. *Parvan A. S.* Equivalence of the phenomenological Tsallis distribution to the transverse momentum distribution of q -dual statistics // *European Physical Journal A*. — 2020. — Vol. 56, no. 4. — P. 106.
- A21. *Parvan A. S.* Comparison of Tsallis statistics with the Tsallis-factorized statistics in the ultrarelativistic pp collisions // *European Physical Journal A*. — 2016. — Vol. 52, no. 12. — P. 355.
- A22. *Parvan A. S.* Transverse momentum distributions of hadrons in the Tsallis-1 and Tsallis-2 statistics // *EPJ Web of Conferences*. — 2017. — Vol. 138. — P. 03008.

- A23. *Bhattacharyya T., Parvan A. S.* Analytical results for the classical and quantum Tsallis hadron transverse momentum spectra: the zeroth order approximation and beyond // *European Physical Journal A.* — 2021. — Vol. 57, no. 6. — P. 206.
- A24. *Parvan A. S.* Lorentz transformations of the thermodynamic quantities // *Annals of Physics.* — 2019. — Vol. 401. — P. 130–138.
- A25. *Toneev V. D., Parvan A. S.* Canonical strangeness and distillation effects in hadron production // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics.* — 2005. — Vol. 31, no. 7. — P. 583–597.
- A26. *Parvan A. S., Toneev V. D., Gudima K. K.* Caloric curve and multifragmentation in heavy-ion collisions at intermediate energies // *Physics of Atomic Nuclei.* — 1999. — Vol. 62, no. 9. — P. 1497–1506.
- A27. *Parvan A. S., Toneev V. D., Płoszajczak M.* Quantum statistical model of nuclear multifragmentation in the canonical ensemble method // *Nuclear Physics A.* — 2000. — Vol. 676, no. 1–4. — P. 409–451.
- A28. *Gudima K. K., Parvan A. S., Płoszajczak M., Toneev V. D.* Nuclear multifragmentation in nonextensive statistics: Canonical formulation // *Physical Review Letters.* — 2000. — Vol. 85, no. 22. — P. 4691–4694.
- A29. *Parvan A. S.* An algebraic method for the exact solution of the partition function of the canonical ensemble in nuclear multifragmentation // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2004. — Vol. 140, no. 1. — P. 977–986.
- A30. *Parvan A. S.* Quantum Statistical Nuclear Multifragmentation // *Energy Science and Technology, Vol. 4: Nuclear Energy* / ed. by R. Prasad, S. Sivakumar, U. C. Sharma, J. N. Govil. — USA : Studium Press LLC, 2015. — Chap. 5. P. 129–159.
- A31. *Parvan A. S.* Caloric curve for nuclear liquid-gas phase transition in relativistic mean-field hadronic model // *Nuclear Physics A.* — 2012. — Vol. 887. — P. 1–21.
- A32. *Anghel D. V., Parvan A. S., Khvorostukhin A. S.* Fractional exclusion statistics applied to relativistic nuclear matter // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2012. — Vol. 391, no. 7. — P. 2313–2321.
- A33. *Anghel D. V., Parvan A. S., Khvorostukhin A. S.* Fractional exclusion statistics in a relativistic mean field model // *Proceedings of the XIX International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems.* Vol. 1. — 2008. — P. 167–172.
- A34. *Parvan A. S.* Scaled variables and the quark-hadron duality // *European Physical Journal A.* — 2020. — Vol. 56, no. 7. — P. 192.
- A35. *Parvan A. S.* Foundation of equilibrium statistical mechanics based on generalized entropy // *Recent advances in thermo and fluid dynamics* / ed. by M. Gorji-Bandpy. — Rijeka : InTech, 2015. — Chap. 11. P. 303–331.

- A36. *Parvan A. S.* Finite size effects in the thermodynamics of a free neutral scalar field // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2018. — Vol. 496. — P. 410—433.

Список литературы

1. *Glashow S. L.* Partial-symmetries of weak interactions // *Nuclear Physics*. — 1961. — Vol. 22, no. 4. — P. 579—588.
2. *Weinberg S.* A model of leptons // *Physical Review Letters*. — 1967. — Vol. 19, no. 21. — P. 1264.
3. *Окунь Л. Б.* Лептоны и кварки. — 6-е изд. — М. : Изд-во ЛКИ, 2013. — 352 с.
4. *Aad G.* [et al.], ATLAS Collaboration. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC // *Physics Letters B*. — 2012. — Vol. 716, no. 1. — P. 1—29.
5. *Chatrchyan S.* [et al.], CMS Collaboration. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC // *Physics Letters B*. — 2012. — Vol. 716, no. 1. — P. 30—61.
6. *Higgs P. W.* Broken symmetries and the masses of gauge bosons // *Physical Review Letters*. — 1964. — Vol. 13, no. 16. — P. 508.
7. *Bertone G., Hooper D., Silk J.* Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints // *Physics Reports*. — 2005. — Vol. 405, no. 5/6. — P. 279—390.
8. *Capozzi F., Lisi E., Marrone A., Montanino D., Palazzo A.* Neutrino masses and mixings: Status of known and unknown 3ν parameters // *Nuclear Physics B*. — 2016. — Vol. 908. — P. 218—234.
9. *Canetti L., Drewes M., Shaposhnikov M.* Matter and Antimatter in the Universe // *New Journal of Physics*. — 2012. — Vol. 14, no. 9. — P. 095012.
10. *Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G. R.* The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter // *Physics Letters B*. — 1998. — Vol. 429, no. 3. — P. 263—272.
11. *Frampton P. H., Lee B.-H.* SU (15) grand unification // *Physical Review Letters*. — 1990. — Vol. 64, no. 6. — P. 619.
12. *Holzbauer J. L.* The Muon g-2 Experiment overview and status as of June 2016 // *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 770. — IOP Publishing, 2016. — P. 012038.
13. *Fileviez Pérez P.* New paradigm for baryon and lepton number violation // *Physics Reports*. — 2015. — Vol. 597. — P. 1—30.
14. *Rappoccio S.* The experimental status of direct searches for exotic physics beyond the standard model at the Large Hadron Collider // *Reviews in Physics*. — 2019. — Vol. 4. — P. 100027.

15. *Ишханов Б. С., Капитонов И. М., Юдин Н. П.* Частицы и атомные ядра: учебник. — Изд. 2-е, испр. и доп. — М. : Изд. ЛКИ, 2007. — 584 с.
16. *Mannel T.* Theory and phenomenology of CP violation // Nuclear Physics B (Proceedings Supplements). — 2007. — Vol. 167. — P. 170—174.
17. *Banerjee H., Chatterjee D., Mitra P.* Is there still a strong CP problem? // Physics Letters B. — 2003. — Vol. 573. — P. 109—114.
18. *'t Hooft G.* The birth of asymptotic freedom // Nuclear Physics B. — 1985. — Vol. 254. — P. 11—18.
19. *Gross D. J., Wilczek F. E.* Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories // Physical Review Letters. — 1973. — Vol. 30, no. 26. — P. 1343.
20. *Politzer H. D.* Reliable perturbative results for strong interactions? // Physical Review Letters. — 1973. — Vol. 30, no. 26. — P. 1346.
21. *Gell-Mann M.* A schematic model of baryons and mesons // Physics Letters. — 1964. — Vol. 8, no. 3. — P. 214—215.
22. *Zweig G.* An SU₃ model for strong interaction symmetry and its breaking; Version 2. — 1964. — URL: <https://cds.cern.ch/record/570209> ; Version 1 is CERN preprint 8182/TH.401, Jan. 17, 1964.
23. *Андреев И. В.* Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. — 192 с.
24. *Muta T.* Foundations of quantum chromodynamics: An introduction to perturbative methods in gauge theories. — Singapore : World Scientific, 1987. — 409 p.
25. *Deur A., Brodsky S. J., Téramond G. F. de.* The QCD running coupling // Progress in Particle and Nuclear Physics. — 2016. — Vol. 90. — P. 1—74.
26. *Иоффе Б. Л., Лунатов Л. Н., Фадин В. С.* Физика элементарных частиц: Квантовая хромодинамика. Т. 1. — 2-е изд. перераб. и доп. — М. : Изд. Юрайт, 2019. — 408 с.
27. *Shuryak E. V.* The QCD vacuum, hadrons and the superdense matter. — Singapore : World Scientific, 1988.
28. *Collins J. C., Perry M. J.* Superdense matter: neutrons or asymptotically free quarks? // Physical Review Letters. — 1975. — Vol. 34, no. 21. — P. 1353.
29. *Weinberg S.* The First Three Minutes: A Modern View of the Origin of the Universe. — New York : Basic Books, 1977.
30. *Shuryak E. V.* Quantum chromodynamics and the theory of superdense matter // Physics Reports. — 1980. — Vol. 61, no. 2. — P. 71—158.
31. *Müller B.* The Physics of the Quark-Gluon Plasma. — Lecture Notes in Physics. Vol. 225. — Heidelberg : Springer, 1985.

32. *McLerran L.* The physics of the quark-gluon plasma // *Reviews of Modern Physics*. — 1986. — Vol. 58, no. 4. — P. 1021.
33. *Shuryak E. V.* Quark-gluon plasma and hadronic production of leptons, photons and pions // *Physics Letters B*. — 1978. — Vol. 78, no. 1. — P. 150–153.
34. *Bohr H., Nielsen H. B.* Hadron production from a boiling quark soup: A thermodynamical quark model predicting particle ratios in hadronic collisions // *Nuclear Physics B*. — 1977. — Vol. 128, no. 2. — P. 275–293.
35. *Plümer M., Raha S., Weiner R. M.* How free is the quark-gluon-plasma? // *Nuclear Physics A*. — 1984. — Vol. 418. — P. 549–557.
36. *Zajc W. A.* The fluid nature of quark-gluon plasma // *Nuclear Physics A*. — 2008. — Vol. 805, no. 1–4. — P. 283c–294c.
37. *Chodos A., Jaffe R. L., Johnson K., Thorn C. B., Weisskopf V. F.* New extended model of hadrons // *Physical Review D*. — 1974. — Vol. 9, no. 12. — P. 3471.
38. *Freedman B. A., McLerran L. D.* Fermions and gauge vector mesons at finite temperature and density. III. The ground-state energy of a relativistic quark gas // *Physical Review D*. — 1977. — Vol. 16, no. 4. — P. 1169.
39. *Kapusta J. I.* Quantum chromodynamics at high temperature // *Nuclear Physics B*. — 1979. — Vol. 148, no. 3/4. — P. 461–498.
40. *Susskind L.* Lattice models of quark confinement at high temperature // *Physical Review D*. — 1979. — Vol. 20, no. 10. — P. 2610.
41. *Baym G., Hatsuda T., Kojo T., Powell P. D., Song Y., Takatsuka T.* From hadrons to quarks in neutron stars: a review // *Reports on Progress in Physics*. — 2018. — Vol. 81, no. 5. — P. 056902.
42. *Fukushima K., Sasaki C.* The phase diagram of nuclear and quark matter at high baryon density // *Progress in Particle and Nuclear Physics*. — 2013. — Vol. 72. — P. 99–154.
43. *Fodor Z., Katz S. D.* Lattice determination of the critical point of QCD at finite T and μ // *Journal of High Energy Physics*. — 2002. — Vol. 03. — P. 014.
44. *De Forcrand P., Philipsen O.* The QCD phase diagram for small densities from imaginary chemical potential // *Nuclear Physics B*. — 2002. — Vol. 642, no. 1/2. — P. 290–306.
45. *Allton C. R., Ejiri S., Hands S. J., Kaczmarek O., Karsch F., Laermann E., Schmidt C.* Equation of state for two flavor QCD at nonzero chemical potential // *Physical Review D*. — 2003. — Vol. 68, no. 1. — P. 014507.
46. *Brown G. E., Grandchamp L., Lee C.-H., Rho M.* Nature of the chiral restoration transition in QCD // *Physics Reports*. — 2004. — Vol. 391, no. 3–6. — P. 353–361.
47. *Yagi K., Hatsuda T., Miake Y.* Quark-gluon plasma: From big bang to little bang. — Cambridge : Cambridge University Press, 2008.

48. *Miller D. E.* Lattice QCD calculations for the physical equation of state // *Physics Reports*. — 2007. — Vol. 443, no. 2. — P. 55–96.
49. *Bazavov A.* [et al.]. Equation of state in (2+1)-flavor QCD // *Physical Review D*. — 2014. — Vol. 90, no. 9. — P. 094503.
50. *Borsányi S., Fodor Z., Hoelbling C., Katz S. D., Krieg S., Szabo K. K.* Full result for the QCD equation of state with 2+ 1 flavors // *Physics Letters B*. — 2014. — Vol. 730. — P. 99–104.
51. *Bazavov A.* [et al.]. QCD equation of state to $O(\mu B6)$ from lattice QCD // *Physical Review D*. — 2017. — Vol. 95, no. 5. — P. 054504.
52. *Philipsen O.* The QCD equation of state from the lattice // *Progress in Particle and Nuclear Physics*. — 2013. — Vol. 70. — P. 55–107.
53. *Burger F., Müller-Preussker M.* Towards the equation of state of quark-gluon matter from lattice QCD with Wilson twisted mass fermions // *Nuclear and Particle Physics Proceedings*. — 2015. — Vol. 261. — P. 83–92.
54. *Hegde P.* The QCD equation of state to $O(\mu B4)$ from lattice QCD // *Nuclear Physics A*. — 2014. — Vol. 931. — P. 851–855.
55. *Caselle M., Nada A., Panero M.* QCD thermodynamics from lattice calculations with nonequilibrium methods: The SU (3) equation of state // *Physical Review D*. — 2018. — Vol. 98, no. 5. — P. 054513.
56. *Freedman B. A., McLerran L. D.* Fermions and gauge vector mesons at finite temperature and density. I. Formal techniques // *Physical Review D*. — 1977. — Vol. 16, no. 4. — P. 1130.
57. *Chin S. A.* Transition to hot quark matter in relativistic heavy-ion collision // *Physics Letters B*. — 1978. — Vol. 78, no. 5. — P. 552–555.
58. *Anishetty R., Koehler P., McLerran L.* Central collisions between heavy nuclei at extremely high energies: The fragmentation region // *Physical Review D*. — 1980. — Vol. 22, no. 11. — P. 2793.
59. *Bjorken J. D.* Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region // *Physical Review D*. — 1983. — Vol. 27, no. 1. — P. 140.
60. *Gyulassy M., Matsui T.* Quark-gluon-plasma evolution in scaling hydrodynamics // *Physical Review D*. — 1984. — Vol. 29, no. 3. — P. 419.
61. *Bzdak A., Esumi S., Koch V., Liao J., Stephanov M., Xu N.* Mapping the phases of quantum chromodynamics with beam energy scan // *Physics Reports*. — 2020. — Vol. 853. — P. 1–87.
62. *Adams J.* [et al.], STAR Collaboration. Experimental and theoretical challenges in the search for the quark-gluon plasma: The STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions // *Nuclear Physics A*. — 2005. — Vol. 757, no. 1/2. — P. 102–183.

63. *Adcox K.* [et al.], PHENIX Collaboration. Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus–nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX collaboration // Nuclear Physics A. — 2005. — Vol. 757, no. 1/2. — P. 184–283.
64. *Arsene I.* [et al.], BRAHMS Collaboration. Quark–gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment // Nuclear Physics A. — 2005. — Vol. 757, no. 1/2. — P. 1–27.
65. *Back B. B.* [et al.], PHOBOS Collaboration. The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC // Nuclear Physics A. — 2005. — Vol. 757, no. 1/2. — P. 28–101.
66. *Tsallis C.* Possible generalization of Boltzmann–Gibbs statistics // Journal of Statistical Physics. — 1988. — Vol. 52, no. 1. — P. 479–487.
67. *Tsallis C., Mendes R. S., Plastino A. R.* The role of constraints within generalized nonextensive statistics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 1998. — Vol. 261, no. 3/4. — P. 534–554.
68. *Wehrl A.* General concept of entropy // Reviews of Modern Physics. — 1978. — Vol. 50. — P. 221–260.
69. *Havrda J., Charvát F.* Quantification method of classification processes. Concept of structural α -entropy // Kybernetika. — 1967. — Vol. 3, no. 1. — P. 30–35.
70. *Daróczy Z.* Generalized information functions // Information and control. — 1970. — Vol. 16, no. 1. — P. 36–51.
71. *Tsallis C.* Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World. — New York : Springer, 2009.
72. *Curado E. M. F., Tsallis C.* Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1991. — Vol. 24, no. 2. — P. L69. — Erratum: // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1991. — Vol. 24. — P. 3187. — Erratum: // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1992. — Vol. 25. — P. 1019.
73. *Di Sisto R. P., Martinez S., Orellana R. B., Plastino A. R., Plastino A.* General thermostistical formalisms, invariance under uniform spectrum translations, and Tsallis q -additivity // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 1999. — Vol. 265, no. 3/4. — P. 590–613.
74. *Abe S., Martinez S., Pennini F., Plastino A.* Nonextensive thermodynamic relations // Physics Letters A. — 2001. — Vol. 281, no. 2/3. — P. 126–130.
75. *Biró T. S., Ván P.* Zeroth law compatibility of nonadditive thermodynamics // Physical Review E. — 2011. — Vol. 83, no. 6. — P. 061147.
76. *Biró T. S.* Is there a Temperature? Conceptual Challenges at High Energy, Acceleration and Complexity. — New York : Springer, 2011.

77. *Biró T. S., Ván P., Barnaföldi G. G., Ürmössy K.* Statistical power law due to reservoir fluctuations and the universal thermostat independence principle // *Entropy*. — 2014. — Vol. 16, no. 12. — P. 6497—6514.
78. *Wang Q. A.* Nonextensive statistics and incomplete information // *European Physical Journal B*. — 2002. — Vol. 26, no. 3. — P. 357—368.
79. *Abe S.* Thermodynamic limit of a classical gas in nonextensive statistical mechanics: Negative specific heat and polytropism // *Physics Letters A*. — 1999. — Vol. 263, no. 4—6. — P. 424—429. — Erratum: // *Physics Letters A*. — 2000. — Vol. 267. — P. 456.
80. *Nauenberg M.* Critique of q -entropy for thermal statistics // *Physical Review E*. — 2003. — Vol. 67, no. 3. — P. 036114.
81. *Tsallis C.* Comment on “critique of q -entropy for thermal statistics” // *Physical Review E*. — 2004. — Vol. 69, no. 3. — P. 038101.
82. *Nauenberg M.* Reply to “comment on ‘critique of q -entropy for thermal statistics’” // *Physical Review E*. — 2004. — Vol. 69, no. 3. — P. 038102.
83. *Abe S.* General pseudoadditivity of composable entropy prescribed by the existence of equilibrium // *Physical Review E*. — 2001. — Vol. 63, no. 6. — P. 061105.
84. *Wang Q. A., Le Méhauté A.* Extensive form of equilibrium nonextensive statistics // *Journal of Mathematical Physics*. — 2002. — Vol. 43, no. 10. — P. 5079—5089.
85. *Toral R.* On the definition of physical temperature and pressure for nonextensive thermostatics // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2003. — Vol. 317, no. 1/2. — P. 209—212.
86. *Vives E., Planes A.* Is Tsallis thermodynamics nonextensive? // *Physical Review Letters*. — 2001. — Vol. 88, no. 2. — P. 020601.
87. *Botet R., Płoszajczak M., González J. A.* Phase transitions in nonextensive spin systems // *Physical Review E*. — 2001. — Vol. 65, no. 1. — P. 015103.
88. *Abelev B. I. [et al.], STAR Collaboration.* Strange particle production in $p+p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV // *Physical Review C*. — 2007. — Vol. 75, no. 6. — P. 064901.
89. *Aamodt K. [et al.], ALICE Collaboration.* Transverse momentum spectra of charged particles in proton–proton collisions at $\sqrt{s} = 900$ GeV with ALICE at the LHC // *Physics Letters B*. — 2010. — Vol. 693, no. 2. — P. 53—68.
90. *Aamodt K. [et al.], ALICE Collaboration.* Production of pions, kaons and protons in pp collisions at $\sqrt{s} = 900$ GeV with ALICE at the LHC // *European Physical Journal C*. — 2011. — Vol. 71, no. 6. — P. 1655.

91. *Abelev B.* [et al.], ALICE Collaboration. Pion, kaon, and proton production in central Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV // *Physical Review Letters*. — 2012. — Vol. 109, no. 25. — P. 252301.
92. *Aad G.* [et al.], ATLAS Collaboration. Charged-particle multiplicities in pp interactions measured with the ATLAS detector at the LHC // *New Journal of Physics*. — 2011. — Vol. 13, no. 5. — P. 053033.
93. *Acharya S.* [et al.], ALICE Collaboration. Production of deuterons, tritons, ^3He nuclei, and their antinuclei in pp collisions at $\sqrt{s} = 0.9, 2.76$, and 7 TeV // *Physical Review C*. — 2018. — Vol. 97, no. 2. — P. 024615.
94. *Adare A.* [et al.], PHENIX Collaboration. Measurement of neutral mesons in $p+p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV and scaling properties of hadron production // *Physical Review D*. — 2011. — Vol. 83, no. 5. — P. 052004.
95. *Khachatryan V.* [et al.], CMS Collaboration. Transverse-momentum and pseudorapidity distributions of charged hadrons in pp collisions at $\sqrt{s} = 0.9$ and 2.36 TeV // *Journal of High Energy Physics*. — 2010. — Vol. 02. — P. 041.
96. *Khachatryan V.* [et al.], CMS Collaboration. Transverse-momentum and pseudorapidity distributions of charged hadrons in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV // *Physical Review Letters*. — 2010. — Vol. 105, no. 2. — P. 022002.
97. *Cleymans J., Hamar G., Levai P., Wheaton S.* Near-thermal equilibrium with Tsallis distributions in heavy-ion collisions // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. — 2009. — Vol. 36, no. 6. — P. 064018.
98. *Wong C.-Y., Wilk G., Cirto L. J. L., Tsallis C.* From QCD-based hard-scattering to nonextensive statistical mechanical descriptions of transverse momentum spectra in high-energy pp and $p\bar{p}$ collisions // *Physical Review D*. — 2015. — Vol. 91, no. 11. — P. 114027.
99. *Shen K.-M., Biró T. S., Wang E.-K.* Different non-extensive models for heavy-ion collisions // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2018. — Vol. 492. — P. 2353—2360.
100. *Rybczyński M., Włodarczyk Z.* Tsallis statistics approach to the transverse momentum distributions in pp collisions // *European Physical Journal C*. — 2014. — Vol. 74, no. 2. — P. 2785.
101. *Azmi M. D., Cleymans J.* Transverse momentum distributions in proton–proton collisions at LHC energies and Tsallis thermodynamics // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. — 2014. — Vol. 41, no. 6. — P. 065001.
102. *Cleymans J., Worku D.* The Tsallis distribution in proton–proton collisions at $\sqrt{s} = 0.9$ TeV at the LHC // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. — 2012. — Vol. 39, no. 2. — P. 025006.
103. *Marques L., Andrade-II E., Deppman A.* Nonextensivity of hadronic systems // *Physical Review D*. — 2013. — Vol. 87, no. 11. — P. 114022.

104. *Li B.-C., Wang Y.-Z., Liu F.-H., Wen X.-J., Dong Y.-E.* Particle production in relativistic $pp(\bar{p})$ and AA collisions at RHIC and LHC energies with Tsallis statistics using the two-cylindrical multisource thermal model // *Physical Review D*. — 2014. — Vol. 89, no. 5. — P. 054014.
105. *Biyajima M., Mizoguchi T., Nakajima N., Suzuki N., Wilk G.* Modified Hagedorn formula including temperature fluctuation: Estimation of temperatures at RHIC experiments // *European Physical Journal C*. — 2006. — Vol. 48, no. 2. — P. 597–603.
106. *Marques L., Cleymans J., Deppman A.* Description of high-energy pp collisions using Tsallis thermodynamics: Transverse momentum and rapidity distributions // *Physical Review D*. — 2015. — Vol. 91, no. 5. — P. 054025.
107. *Bhattacharyya T., Cleymans J., Khuntia A., Pareek P., Sahoo R.* Radial flow in non-extensive thermodynamics and study of particle spectra at LHC in the limit of small $(q - 1)$ // *European Physical Journal A*. — 2016. — Vol. 52, no. 2. — P. 30.
108. *Tripathy S., Bhattacharyya T., Garg P., Kumar P., Sahoo R., Cleymans J.* Nuclear modification factor using Tsallis non-extensive statistics // *European Physical Journal A*. — 2016. — Vol. 52, no. 9. — P. 289.
109. *Bhattacharyya T., Cleymans J., Mogliacci S.* Analytic results for the Tsallis thermodynamic variables // *Physical Review D*. — 2016. — Vol. 94, no. 9. — P. 094026.
110. *Bhattacharyya T., Cleymans J., Marques L., Mogliacci S., Paradza M. W.* On the precise determination of the Tsallis parameters in proton–proton collisions at LHC energies // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. — 2018. — Vol. 45, no. 5. — P. 055001.
111. *Shen K.-M.* Analysis on hadron spectra in heavy-ion collisions with a new non-extensive approach // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. — 2019. — Vol. 46, no. 10. — P. 105101.
112. *Shen K., Barnaföldi G. G., Biró T. S.* Hadronization within the non-extensive approach and the evolution of the parameters // *European Physical Journal A*. — 2019. — Vol. 55, no. 8. — P. 126.
113. *Shen K., Barnaföldi G. G., Biró T. S.* Hadron spectra parameters within the non-extensive approach // *Universe*. — 2019. — Vol. 5, no. 5. — P. 122.
114. *Chaturvedi O. S. K., Srivastava P. K., Singh A., Singh B. K.* Universal Freezeout Condition for Charged Hadrons in a Hybrid Approach // *European Physical Journal A*. — 2018. — Vol. 54, no. 3. — P. 46.
115. *Gao L.-N., Liu F.-H., Lacey R. A.* Excitation functions of parameters in Erlang distribution, Schwinger mechanism, and Tsallis statistics in RHIC BES program // *European Physical Journal A*. — 2016. — Vol. 52, no. 5. — P. 137.

116. *Cleymans J., Worku D.* Relativistic thermodynamics: transverse momentum distributions in high-energy physics // *European Physical Journal A.* — 2012. — Vol. 48, no. 11. — P. 160.
117. *Bediaga I., Curado E. M. F., De Miranda J. M.* A nonextensive thermodynamical equilibrium approach in $e^+e^- \rightarrow$ hadrons // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2000. — Vol. 286, no. 1/2. — P. 156—163.
118. *Beck C.* Non-extensive statistical mechanics and particle spectra in elementary interactions // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2000. — Vol. 286, no. 1/2. — P. 164—180.
119. *Büyükkiliç F., Demirhan D., Güleç A.* A statistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases // *Physics Letters A.* — 1995. — Vol. 197, no. 3. — P. 209—220.
120. *Huang K.* *Statistical Mechanics.* — New York : John Wiley, Sons, 1987.
121. *Braun-Munzinger P., Wambach J.* Colloquium: Phase diagram of strongly interacting matter // *Reviews of Modern Physics.* — 2009. — Vol. 81, no. 3. — P. 1031.
122. *Manninen J., Becattini F.* Chemical freeze-out in ultrarelativistic heavy ion collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 130$ and 200 GeV // *Physical Review C.* — 2008. — Vol. 78, no. 5. — P. 054901.
123. *Cleymans J., Gavai R. V., Suhonen E.* Quarks and gluons at high temperatures and densities // *Physics Reports.* — 1986. — Vol. 130, no. 4. — P. 217—292.
124. *Chavanis P.-H., Lemou M., Méhats F.* Models of dark matter halos based on statistical mechanics: The fermionic King model // *Physical Review D.* — 2015. — Vol. 92, no. 12. — P. 123527.
125. *Fortin M., Providência C., Raduta A. R., Gulminelli F., Zdunik J. L., Haensel P., Bejger M.* Neutron star radii and crusts: uncertainties and unified equations of state // *Physical Review C.* — 2016. — Vol. 94, no. 3. — P. 035804.
126. *Oertel M., Gulminelli F., Providência C., Raduta A. R.* Hyperons in neutron stars and supernova cores // *European Physical Journal A.* — 2016. — Vol. 52, no. 3. — P. 50.
127. *Tsallis C., Anjos J. C., Borges E. P.* Fluxes of cosmic rays: A delicately balanced stationary state // *Physics Letters A.* — 2003. — Vol. 310, no. 5/6. — P. 372—376.
128. *Planck M.* Zur dynamik bewegter systeme // *Annalen der Physik.* — 1908. — Vol. 331, no. 6. — P. 1—34.
129. *Einstein A.* // *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik.* — 1907. — Vol. 4. — P. 411—462.
130. *Ter Haar D., Wergeland H.* Thermodynamics and statistical mechanics in the special theory of relativity // *Physics Reports.* — 1971. — Vol. 1, no. 2. — P. 31—54.

131. *Farias C., Pinto V. A., Moya P. S.* What is the temperature of a moving body? // *Scientific Reports*. — 2017. — Vol. 7, no. 1. — P. 17657.
132. *Ott H.* Lorentz-transformation der wärme und der temperatur // *Zeitschrift für Physik*. — 1963. — Vol. 175, no. 1. — P. 70—104.
133. *Arzeliès H.* Sur le concept de temperature en thermodynamique relativiste et en thermodynamique statistique // *Nuovo Cimento B*. — 1965. — Vol. 40, no. 2. — P. 333—344.
134. *Sutcliffe W. G.* Lorentz transformations of thermodynamic quantities // *Nuovo Cimento*. — 1965. — Vol. 39, no. 2. — P. 683—686.
135. *Landsberg P. T.* Does a Moving Body Appear Cool? // *Nature*. — 1966. — Vol. 212, no. 5062. — P. 571—572.
136. *Cavalleri G., Salgarelli G.* Revision of the relativistic dynamics with variable rest mass and application to relativistic thermodynamics // *Nuovo Cimento A*. — 1969. — Vol. 62, no. 3. — P. 722—754.
137. *Newburgh R. G.* Relativistic thermodynamics: Temperature transformations, invariance and measurement // *Nuovo Cimento B*. — 1979. — Vol. 52, no. 2. — P. 219—228.
138. *Montakhab A., Ghodrat M., Barati M.* Statistical thermodynamics of a two-dimensional relativistic gas // *Physical Review E*. — 2009. — Vol. 79, no. 3. — P. 031124.
139. *Biró T. S., Ván P.* About the temperature of moving bodies // *Europhysics Letters*. — 2010. — Vol. 89, no. 3. — P. 30001.
140. *Callen H., Horwitz G.* Relativistic thermodynamics // *American Journal of Physics*. — 1971. — Vol. 39, no. 8. — P. 938—947.
141. *Rafelski J., Müller B.* Strangeness production in the quark-gluon plasma // *Physical Review Letters*. — 1982. — Vol. 48, no. 16. — P. 1066.
142. *Gaździcki M., Gorenstein M. I.* On the early stage of nucleus-nucleus collisions // *Acta Physica Polonica B*. — 1999. — Vol. 30. — P. 2705.
143. *Braun-Munzinger P., Redlich K., Stachel J.* Particle production in heavy ion collisions // *Quark-Gluon Plasma 3* / ed. by R. C. Hwa, X. N. Wang. — Singapore : World Scientific, 2004. — P. 491—599.
144. *Cleymans J., Redlich K., Suhonen E.* Canonical description of strangeness conservation and particle production // *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*. — 1991. — Vol. 51, no. 1. — P. 137—141.
145. *Cleymans J., Oeschler H., Redlich K.* Statistical model description of K^+ and K^- production between 1–10 A GeV // *Physics Letters B*. — 2000. — Vol. 485, no. 1–3. — P. 27—31.

146. *Hamieh S., Redlich K., Tounsi A.* Canonical description of strangeness enhancement from $p-A$ to $Pb-Pb$ collisions // *Physics Letters B.* — 2000. — Vol. 486, no. 1/2. — P. 61–66.
147. *Redlich K., Hamieh S., Tounsi A.* Statistical hadronization and strangeness enhancement from $p-A$ to $Pb-Pb$ collisions // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics.* — 2001. — Vol. 27, no. 3. — P. 413.
148. *Becattini F., Gaździcki M., Keränen A., Manninen J., Stock R.* Chemical equilibrium study in nucleus-nucleus collisions at relativistic energies // *Physical Review C.* — 2004. — Vol. 69, no. 2. — P. 024905.
149. *Bondorf J. P., Botvina A. S., Ilinov A. S., Mishustin I. N., Snepken K.* Statistical multifragmentation of nuclei // *Physics Reports.* — 1995. — Vol. 257, no. 3. — P. 133–221.
150. *Steiner A. W., Prakash M., Lattimer J. M., Ellis P. J.* Isospin asymmetry in nuclei and neutron stars // *Physics reports.* — 2005. — Vol. 411, no. 6. — P. 325–375.
151. *Mishustin I. N.* Possible links between the liquid-gas and deconfinement-hadronization phase transitions // *European Physical Journal A.* — 2006. — Vol. 30, no. 1. — P. 311–316.
152. *Bondorf J. P., Donangelo R., Mishustin I. N., Schulz H.* Statistical multifragmentation of nuclei:(II). Application of the model to finite nuclei disassembly // *Nuclear Physics A.* — 1985. — Vol. 444, no. 3. — P. 460–476.
153. *Pochodzalla J.* [et al.]. Probing the nuclear liquid-gas phase transition // *Physical Review Letters.* — 1995. — Vol. 75, no. 6. — P. 1040.
154. *Ehrenfest P.* *Communications from the Physical Laboratory of the University of Leiden: Supplement. 75b.* — 1933.
155. *Papon P., Leblond J., Meijer P. H. E.* *The physics of phase transitions.* — Berlin : Springer-Verlag, 2006.
156. *Yeomans J. M.* *Statistical mechanics of phase transitions.* — Oxford : Clarendon Press, 1992.
157. *Stanley H. E.* *Introduction to phase transitions and critical phenomena.* — Oxford : Clarendon Press, 1971.
158. *Walecka J. D.* A theory of highly condensed matter // *Annals of Physics.* — 1974. — Vol. 83, no. 2. — P. 491–529.
159. *Serr F. E., Walecka J. D.* A relativistic quantum field theory of finite nuclei // *Physics Letters B.* — 1978. — Vol. 79, no. 1/2. — P. 10–14.
160. *Serot B. D., Walecka J. D.* *The Relativistic Nuclear Many Body Problem // Advances in Nuclear Physics.* — 1986. — Vol. 16. — P. 1–327.

161. *Serot B. D., Walecka J. D.* Recent progress in quantum hadrodynamics // International Journal of Modern Physics E. — 1997. — Vol. 6, no. 04. — P. 515—631.
162. *Silva J. B., Lourenço O., Delfino A., Martins J. S. S., Dutra M.* Critical behavior of mean-field hadronic models for warm nuclear matter // Physics Letters B. — 2008. — Vol. 664, no. 4/5. — P. 246—252.
163. *Avancini S. S., Brito L., Menezes D. P., Providência C.* Instabilities in asymmetric nuclear matter // Physical Review C. — 2004. — Vol. 70, no. 1. — P. 015203.
164. *Avancini S. S., Brito L., Chomaz P., Menezes D. P., Providência C.* Spinodal instabilities and the distillation effect in relativistic hadronic models // Physical Review C. — 2006. — Vol. 74, no. 2. — P. 024317.
165. *Ducoin C., Providência C., Santos A. M., Brito L., Chomaz P.* Cluster formation in compact stars: Relativistic versus Skyrme nuclear models // Physical Review C. — 2008. — Vol. 78, no. 5. — P. 055801.
166. *Ayik S., Yilmaz O., Acar F., Danisman B., Er N., Gokalp A.* Investigations of instabilities in nuclear matter in stochastic relativistic models // Nuclear Physics A. — 2011. — Vol. 859, no. 1. — P. 73—86.
167. *Ducoin C., Chomaz P., Gulminelli F.* Role of isospin in the nuclear liquid–gas phase transition // Nuclear Physics A. — 2006. — Vol. 771. — P. 68—92.
168. *Goodman A. L., Kapusta J. I., Mekjian A. Z.* Liquid-gas phase instabilities and droplet formation in nuclear reactions // Physical Review C. — 1984. — Vol. 30, no. 3. — P. 851.
169. *Aoki Y., Endrődi G., Fodor Z., Katz S. D., Szabó K. K.* The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics // Nature. — 2006. — Vol. 443, no. 7112. — P. 675—678.
170. *Ratti C., Borsanyi S., Fodor Z., Hoelbling C., Katz S. D., Krieg S., Szabó K. K.* Recent results on QCD thermodynamics: lattice QCD versus Hadron Resonance Gas model // Nuclear Physics A. — 2011. — Vol. 855, no. 1. — P. 253—256.
171. *Karsch F.* Thermodynamics of strong interaction matter from lattice QCD and the hadron resonance gas model // Acta Physica Polonica B Proceedings Series. — 2014. — Vol. 7, no. 1. — P. 117—126.
172. *Andronic A., Braun-Munzinger P., Stachel J., Winn M.* Interacting hadron resonance gas meets lattice QCD // Physics Letters B. — 2012. — Vol. 718, no. 1. — P. 80—85.
173. *Andronic A., Braun-Munzinger P., Redlich K., Stachel J.* Decoding the phase structure of QCD via particle production at high energy // Nature. — 2018. — Vol. 561, no. 7723. — P. 321—330.

174. *Vovchenko V., Anchishkin D. V., Gorenstein M. I.* Hadron resonance gas equation of state from lattice QCD // *Physical Review C*. — 2015. — Vol. 91, no. 2. — P. 024905.
175. *Brown G. E., Bethe H. A., Pizzochero P. M.* The hadron to quark/gluon transition // *Physics Letters B*. — 1991. — Vol. 263, no. 3/4. — P. 337–341.
176. *Turko L., Blaschke D., Prorok D., Berdermann J.* Effective degrees of freedom in QCD thermodynamics // *EPJ Web of Conferences*. Vol. 71. — 2014. — P. 00134.
177. *Abelev B.* [et al.], ALICE Collaboration. Transverse momentum distribution and nuclear modification factor of charged particles in $p + Pb$ collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 110, no. 8. — P. 082302.
178. *Chatrchyan S.* [et al.], CMS Collaboration. Measurement of neutral strange particle production in the underlying event in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV // *Physical Review D*. — 2013. — Vol. 88, no. 5. — P. 052001.
179. *Kharlov Y.* [et al.], ALICE Collaboration. Neutral meson production in pp and $Pb - Pb$ collisions at LHC // *Nuclear Physics A*. — 2013. — Vol. 910. — P. 335–338.
180. *Arsene I.* [et al.], BRAHMS Collaboration. Centrality dependent particle production at $y = 0$ and $y \sim 1$ in $Au + Au$ collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV // *Physical Review C*. — 2005. — Vol. 72, no. 1. — P. 014908.
181. *Adams J.* [et al.], STAR Collaboration. Identified hadron spectra at large transverse momentum in $p+p$ and $d+Au$ collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV // *Physics Letters B*. — 2006. — Vol. 637, no. 3. — P. 161–169.
182. *Stöcker H., Greiner W.* High energy heavy ion collisions—probing the equation of state of highly excited hadronic matter // *Physics Reports*. — 1986. — Vol. 137, no. 5/6. — P. 277–392.
183. *Kapoyannis A. S.* The Gibbs equilibrium conditions applied to the QGP–hadron transition curve // *European Physical Journal C*. — 2007. — Vol. 51, no. 1. — P. 135–148.
184. *Lee K. S., Heinz U.* Phase structure of strange matter // *Physical Review D*. — 1993. — Vol. 47, no. 5. — P. 2068.
185. *Kähärä T., Tuominen K.* Degrees of freedom and the phase transitions of two-flavor QCD // *Physical Review D*. — 2008. — Vol. 78, no. 3. — P. 034015.
186. *Shao G. Y., Di Toro M., Greco V., Colonna M., Plumari S., Liu B., Liu Y. X.* Phase diagrams in the hadron–Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model // *Physical Review D*. — 2011. — Vol. 84, no. 3. — P. 034028.
187. *Tiwari S. K., Srivastava P. K., Singh C. P.* Description of hot and dense hadron-gas properties in a new excluded-volume model // *Physical Review C*. — 2012. — Vol. 85, no. 1. — P. 014908.

188. *Braun J., Klein B., Schaefer B.-J.* On the phase structure of QCD in a finite volume // *Physics Letters B.* — 2012. — Vol. 713, no. 3. — P. 216–223.
189. *Greiner W., Reinhardt J.* *Field quantization.* — Berlin Heidelberg : Springer, 1996.
190. *Kapusta J. I.* *Finite-temperature field theory.* — London : Cambridge University Press, 1989.
191. *Greiner W., Schramm S., Stein E.* *Quantum Chromodynamics.* — Berlin Heidelberg : Springer, 2007.
192. *Strodthoff N., Schaefer B.-J., von Smekal L.* Quark-meson-diquark model for two-color QCD // *Physical Review D.* — 2012. — Vol. 85, no. 7. — P. 074007.
193. *Gattringer C., Lang C. B.* *Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation.* – *Lecture Notes in Physics.* Vol. 788. — Berlin Heidelberg : Springer, 2010.
194. *Prigogine I., Kondepudi D.* *Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures.* — Chichester : John Wiley, Sons, 1998.
195. *Boyd G., Engels J., Karsch F., Laermann E., Legeland C., Lütgemeier M., Petersson B.* Equation of state for the $SU(3)$ gauge theory // *Physical Review Letters.* — 1995. — Vol. 75, no. 23. — P. 4169.
196. *Borsányi S., Fodor Z., Hoelbling C., Katz S. D., Krieg S., Szabo K. K.* Full result for the QCD equation of state with $(2+1)$ - flavors // *Physics Letters B.* — 2014. — Vol. 730. — P. 99–104.
197. *Borsányi S. [et al.].* The QCD equation of state with dynamical quarks // *Journal of High Energy Physics.* — 2010. — Vol. 11. — P. 077.
198. *Borsányi S., Fodor Z., Hoelbling C., Katz S. D., Krieg S., Szabo K. K.* Continuum EoS for QCD with $N_f = 2 + 1$ flavors // *Proceedings of Science.* — 2014. — Vol. LATTICE2013. — P. 155.
199. *Aoki Y., Fodor Z., Katz S. D., Szabo K. K.* The QCD transition temperature: Results with physical masses in the continuum limit // *Physics Letters B.* — 2006. — Vol. 643, no. 1. — P. 46–54.
200. *Redlich K., Zalewski K.* Finite volume corrections and low momentum cuts in the thermodynamics of quantum gases. — 2016. — Nov. — arXiv: [1611.03746 \[nucl-th\]](https://arxiv.org/abs/1611.03746).
201. *Engels J., Karsch F., Satz H.* Finite size effects in euclidean lattice thermodynamics for non-interacting Bose and Fermi systems // *Nuclear Physics B.* — 1982. — Vol. 205, no. 2. — P. 239–252.
202. *Рашевский П. К.* *Риманова геометрия и тензорный анализ.* — 6-е изд. — М. : Изд-во ЛКИ, 2008. — 664 с.