

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
ИМ. Н.Н. БОГОЛЮБОВА

На правах рукописи



Габдрахманов Ильнур Рамилевич

**Партонные распределения в КХД: методы
дисперсионных соотношений и интегральной
геометрии**

Специальность 1.3.3 — Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Дубна — 2024

Работа выполнена в Лаборатории физики высоких энергий им. В.И.Векслера и А.М. Балдина Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Теряев Олег Валерианович

С электронной версией диссертации можно ознакомиться на официальном сайте Объединенного института ядерных исследований в информационно-телекоммуникационной сети "Интернет" по адресу: <https://dissertations.jinr.ru>. С печатной версией диссертации можно ознакомиться в Научно-технической библиотеке ОИЯИ (г. Дубна, Московская область, ул. Жолио-Кюри, д. 6).

Технический секретарь
диссертационного совета по
теоретической физике ЛТФ,
доктор физико-математических наук

Ю.М. Быстрицкий

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Квантовая хромодинамика (КХД) является фундаментальной теорией для описания сильных взаимодействий. Это неабелева калибровочная теория, построенная на цветовой группе $SU(3)$ и описывающая взаимодействие кварков и глюонов, была мотивирована результатами экспериментов по глубоконеупругому рассеянию (ГНР), в первую очередь бьеркеновским скейлингом - зависимостью структурных функции адронов от кинематических переменных только в комбинации, называемой переменной Бьеркена, $x_B = \frac{Q^2}{2Pq}$ в пределе больших квадратов переданного импульса $Q^2 = -q^2$ - и возникшей в результате партонной моделью.

Согласно партонной модели [1] адрон в высокоэнергетических соударениях эффективно состоит из точечных центров рассеяния - партонов. В совокупности с открытием асимптотической свободы [2; 3] данная модель позволила практически исследовать внутреннюю структуру адронов и свойства составляющих их партонов, впоследствии отождествленных с кварками и глюонами. Асимптотическая свобода подразумевает, что в ГНР эффективный заряд ¹ α_S при больших значениях квадрата переданного импульса Q^2 (т.е. на малых пространственных масштабах) стремится к нулю и кварки можно считать асимптотически свободными. Таким образом, возможно получить пертурбативную (с применением теории возмущений) амплитуду партонного процесса. Однако на малых энергетических масштабах теория возмущений становится неприменимой из-за неограниченного роста эффективного заряда, что физически выражается в нахождении кварков только в связанных адронных состояниях. И, следовательно, необходимо учитывать крупномасштабную (непертурбативную) динамику сильных взаимодействий, ответственных за удержание партонов. Стандартным подходом к решению данной проблемы при больших квадратах переданного импульса Q^2 является факторизация амплитуды процесса на пертурбативную (описывающую процессы на малых пространственно-временных масштабах и вычисляемую по теории возмущений) и непертурбативную (описывающую процессы на больших масштабах) компоненты. Для больших квадратов переданного импульса Q^2 факторизационные теоремы (в частности для инклюзивных процессов [4], эксклюзивного электророждения мезонов [5] и глубоконеупругого комптоновского рассеяния (ГНКР, Deeply Virtual Compton Scattering - DVCS) [6]) выражают главный член асимптотики по большому масштабу $\sim \frac{1}{Q^2}$ амплитуды жестких адронных процессов в виде свертки пертурбативных (жестких) и непертурбативных (мягких) множителей. Мягкие множители определяются как матричные элементы соответствующих партонных операторов между адронными состояниями и, как правило, рассматриваются феноменологически, т.к. на текущий момент нет способа вычислять их аналитически.

¹Наименования бегущая константа связи и эффективный заряд будут далее применяться как синонимы

Одним из наиболее развитых методов расширения области применения пертурбативного подхода является аналитическая теория возмущений (АТВ, analytic perturbation theory (APT)) [7] (также см. обзоры [8],[9]), на которой мы сосредоточимся в дальнейшем. Ключевой идеей подхода является объединение метода ренормгруппы с требованием аналитичности по квадрату переданного импульса, что приводит, в частности, к устранению нефизических сингулярностей эффективного заряда и переходу от степенного ряда по заряду α_s к ряду по аналитическим образам соответствующих степеней заряда A_n .

Основным объектом исследования данной работы являются феноменологические кварковые распределения для эксклюзивных процессов, поэтому остановимся на них более подробно.

Согласно партонной модели в коллинеарном приближении инклюзивное сечение σ глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния в главном твисте выражается в виде свертки сечения $\sigma_p(y, \frac{Q^2}{\mu_F})$ пертурбативного подпроцесса и партонных плотностей $q_i(x, \mu_F)$, характеризующих плотность вероятности данного партона i иметь долю x импульса P адрона - мишени: $\sigma(\mu_F) = \sum_i \int_0^1 dx \sigma_p(x, \frac{Q^2}{\mu_F}) q_i(x, \mu_F)$, где суммированием по i обозначено суммирование по всем партонам.

При рассмотрении эксклюзивных процессов возникает необходимость в непрямой кинематике, когда испускаемый и поглощаемый адроном кварк имеют различные доли импульса. Данное обобщение уже имеет смысл амплитуды вероятности.

Обобщенные партонные распределения (ОПР, generalized parton distribution (GPD)) были введены для описания эксклюзивных амплитуд процессов DVCS [10–12] и глубоконеупругого рождения мезонов (DVMP) [5; 13]. В лидирующем приближении для больших Q^2 эти процессы факторизируются на вычисляемую по теории возмущений часть, отвечающую жесткому рассеянию, и универсальные непертурбативные ОПР [5; 6]. Обобщенные амплитуды распределений (ОАР, generalized distribution amplitude (GDA)) были введены как t-канальный аналог ОПР [10].

Функции TMD (Transverse Momentum dependent parton Distributions), зависящие от доли x коллинеарного импульса и вектора \vec{p}_\perp поперечного импульса $f(x, \vec{p}_\perp)$, могут быть связаны с ОПР дифференциальным соотношением [14].

ОПР активно изучаются экспериментально на установках COMPASS (а также в будущем на AMBER/COMPASS-2) в CERN, CLAS в JLAB и J-PARC в КЕК. Исследования в этой области приобретают все большую актуальность в связи с планами изучения ОПР на будущих установках EIC в BNL и SPD@NICA в ОИЯИ.

Цель работы

Целью данной работы является исследование аналитических свойств амплитуд эксклюзивных и инклюзивных жестких адронных процессов, обобщенных партонных распределений и обобщенных амплитуд распределений с применением математического аппарата интегральной геометрии, разработка аналитических и численных методов как для получения новых распределений так и для прикладного анализа экспериментальных данных эксклюзивных и инклюзивных процессов. А также разработка моделей на основе аналитической теории возмущений (АТВ) для правила сумм Бьёркена в области низких энергий. Для достижения поставленной цели ставились следующие **задачи**:

- Продолжить обобщенные партонные распределения фотона во всю область определения, определив их в нефизической области через обобщенные амплитуды распределения и восстановить двойные распределения фотона с помощью полных обобщенных партонных распределений.
- Получить формулы вычисления двойных распределений из обобщенных партонных распределений в ограниченной области и вычисления вкладов различных каналов. Применить полученные формулы для обобщенных партонных распределений фотона. Вычислить D-член фотона.
- Получить голографическое правило сумм с конечным вычитанием для обобщенных партонных распределений фотона. Применить константное вычитание к описанию сечения электророждения векторных мезонов на примере ρ^0 мезона.
- Вычислить функции квинтэссенции фотона в подходе дуальной параметризации.
- Применить спектральное представление вклада высших твистов к описанию правила сумм Бьёркена в инфракрасной области.
- Продолжить правило сумм Бьёркена к пределу $Q^2 = 0$ с помощью правил сумм Герасимова-Дрелла-Хирна и Буркхарта-Коттингема.
- Применить $1/L$ разложение аналитической теории возмущений к описанию новых прецизионных данных по правилу сумм Бьёркена в области малых Q^2 .

Научная новизна и практическая ценность

Описание адронных процессов в области низких энергий остается трудной задачей для квантовой хромодинамики. В данной работе исследуются как

феноменологические функции описывающие непертурбативную низкоэнергетическую динамику сильновзаимодействующих частиц, так и поведение самих эффективных зарядов.

Ключевой особенностью диссертации является объединение методов дисперсионных соотношений с математическим аппаратом интегральной геометрии в приложении к анализу амплитуд различных процессов в КХД.

Для феноменологических функций обобщенных партонных распределений получены новые методы восстановления из них двойных распределений на основе обратного преобразования Радона, причем несколькими различными способами, в том числе позволяющими вычислить вклады различных каналов. Полученные преобразования применены для фотона в лидирующем твисте. Также для них на примере фотона впервые аналитически применено голографическое правило сумм и вычислен компонент формфактора тензора энергии-импульса, отвечающий за механическую устойчивость частицы-мишени. Это ценно по нескольким причинам. С одной стороны данные методы можно непосредственно применять как для аналитических так и численных расчетов. С другой стороны аналитический пример прекрасно подходит для разработки и тестирования математического аппарата феноменологии в коллинеарной факторизации жестких адронных процессов. В то же время появляется возможность исследовать различные партонные распределения на будущих поляризационных экспериментах на EIC и SPD@NICA. На EIC одними из возможных способов является извлечение ОНР из процесса DDVCS (Double Deeply Virtual Compton Scattering) - дважды глубоко-виртуального комптоновского рассеяния, что требует высокой светимости и способности регистрировать все продукты реакции, а также эксклюзивного фоторождения пар мезонов [15]. На SPD в процессах DVMP (Deeply Virtual Meson Production) - глубоко-неупругого рождения векторных мезонов возможно измерение моментов ОНР. Свертка двух ОНР может быть извлечена из эксклюзивных процессов Дрелла-Яна. ТМД, как одно из основных направлений исследований обеих установок, связаны с ОНР, как было указано выше.

Впервые "массивная" аналитическая теория возмущений в сочетании с правилами сумм Буркхарда-Коттингема и Герасимова-Дрелла-Хирна применена к экспериментальным данным правила сумм Бьёркена для продолжения до $Q^2 = 0$. Проведено сравнение применения различных модификаций аналитической теории возмущений к анализу экспериментальных данных.

Положения, выносимые на защиту

1. В рамках факторизационного представления построен новый подход к анализу амплитуд эксклюзивных жестких процессов, сочетающий методы интегральной геометрии и исследование аналитических свойств. Получено новое представление для обратного преобразования Радона, справедливое во всей области аналитичности амплитуды, описывающей

глубоконеупругое комптоновское рассеяние и электророждение адронов.

2. Данные преобразования применены аналитически к фотонным обобщенным партонным распределениям и получены двойные распределения для фотона. Также для них получено голографическое правило сумм с конечным вычитанием, связанным с гравитационным форм-фактором адрона. Эти результаты находятся в согласии с критерием механической устойчивости облака виртуальных фермионных (кварк-антикварковых) пар. Вычислены функции квинтэссенции - базовые функции дуальной параметризации. Константное вычитание успешно применено к описанию сечения электророждения векторных мезонов на примере ρ^0 мезона.
3. Построены новые модели спектральных функций высших твистов правила сумм Бёркена. Получено хорошее согласие с экспериментальными данными при малых значениях Q^2 . Проведено сравнение различных модификаций аналитической теории возмущений.

Апробация работы: доклады

- Advanced Studies Institute. SPIN-Praha-2011, Карлов Унив., ОИЯИ, Прага, Чехия. **Analytic properties of photonic GPDs**, I.R. Gabdrakhmanov, O.V. Teryaev, 2011
- Drell-Yan Scattering and the Structure of Hadrons, *ECT**, Тренто, Италия **Finite Subtractions for Meson Electroproduction and Exclusive Drell-Yan**, I.R. Gabdrakhmanov, O.V. Teryaev, 2012
- XXI International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems, JINR, Dubna, Russia **Subtractions in exclusive vector meson production**, I.R. Gabdrakhmanov, O.V. Teryaev, 2012
- 48th Karpacz Winter School of Theoretical Physics, Institute for Theoretical Physics, Wroclaw, Ladek-Zdroj, Poland. Poster: **Analytic properties of $\gamma^*\gamma$ scattering amplitudes**, I.R. Gabdrakhmanov, O.V. Teryaev, 2012
- **Analytic properties of photonic GPDs** National Center for Nuclear Research, Warsaw, Poland, 2012
- DSPIN-17, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia **Infrared models for the Bjorken sum rule in the APT approach**, I.R. Gabdrakhmanov, O.V. Teryaev, V.L. Khandramai, 2017

- AYSS-2019, JINR, OMUS, Dubna, Russia, JINR, Dubna, Russia **Cross channel Radon tomography**, I.R. Gabdrakhmanov, D. Muller, O.V. Teryaev, 2019
- **Radon Tomography In QCD Phenomenology**, DSPIN-19, ОИЯИ, Дубна, Россия I.R. Gabdrakhmanov, D. Muller, O.V. Teryaev, 2019
- **Integral geometry approach to exclusive processes in QCD** Международный математический институт имени Л. Эйлера, Санкт-Петербург, 2019
- **Партонные распределения в КХД: методы дисперсионных соотношений и интегральной геометрии**, семинар по материалам диссертации, ЛТФ ОИЯИ, Дубна, 2022
- **Партонные распределения в КХД: методы дисперсионных соотношений и интегральной геометрии**, семинар по материалам диссертации, ЛФВЭ ОИЯИ, Дубна, 2023

Личный вклад

Все результаты, приведенные в диссертации, за исключением введения, получены лично автором, либо при его непосредственном участии.

Публикации:

Материалы диссертации опубликованы в шести работах [A1–A6], все результаты получены совместно с соавторами опубликованных работ.

Объем и структура диссертации

Диссертация включает в себя введение, 3 главы и заключение. Объем диссертации: 94 страницы, 22 рисунка и 3 таблицы. Список литературы содержит 147 наименований.

Содержание диссертации

Во введении рассматривается современное состояние КХД и подходы к исследованию аналитических свойств амплитуд эксклюзивных и инклюзивных жестких процессов.

Обобщенные партонные распределения (ОПР) определяют амплитуду вероятности адрону испустить кварк с коллинеарной долей импульса $(x + \xi)$ и поглотить соответственно $(x - \xi)$, как изображено на Рис.(1), где $P = \frac{P_i + P_f}{2}$, $\xi = \frac{P_i^+ - P_f^+}{P_i^+ + P_f^+}$ - т.н. 'асимметрия' - доля коллинеарного импульса, переданного

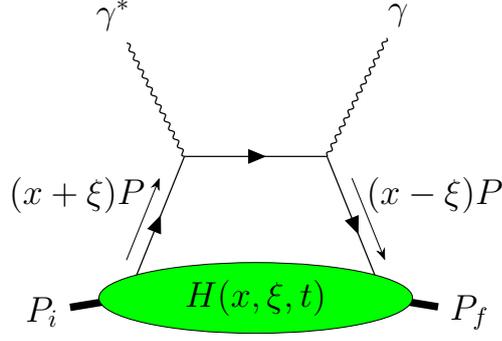


Рис. 1: Диаграмма глубоконеупругого комptonовского рассеяния

адроном. Название объясняется тем, что в пределе прямой кинематики ОПР сводятся к партонным плотностям:

$$\begin{aligned} H(x,0,0) &= q(x) && \text{для } x > 0, \\ H(x,0,0) &= -\bar{q}(-x) && \text{для } x < 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $q(x)$ и $\bar{q}(x)$ плотности кварков и антикварков соответственно. Область определения: $-1 < \xi < 1$, $-1 < x < 1$.

Широкий интерес к ОПР вызван тем, что они описывают непертурбативную динамику партонов на уровне амплитуд. В частности, моменты ОПР по x непосредственно связаны со спиновой структурой протона [16], с гравитационным формфактором кварков и глюонов [17; 18] а также с распределением давления и сдвиговых напряжений внутри нуклона [19]. Что недавно было применено к вычислению распределения давления в протоне [20], используя зависимость ОПР от квадрата переданного импульса. Обширные обзоры, посвященные ОПР, их интерпретации и феноменологии даны в [21; 22].

В контексте переменных на световом конусе

$$\begin{aligned} v^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 \pm v^3), && \mathbf{v} = (v^1, v^2) \\ v^2 &= 2v^+v^- - \mathbf{v}^2 \end{aligned} \quad (2)$$

кварковые ОПР в случае барионов определяются через матричные элементы кварковых операторов [23]:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ixP^+z^-} \langle p' | \bar{q}(-z) \gamma^+ q(z) | p \rangle \Big|_{z^+=0, \mathbf{z}=0} \\ &= \frac{1}{2P^+} \left[H^q(x, \xi, t) \bar{u}(p') \gamma^+ u(p) + E^q(x, \xi, t) \bar{u}(p') \frac{i\sigma^{+\alpha} \Delta_\alpha}{2m} u(p) \right], \\ &\frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ixP^+z^-} \langle p' | \bar{q}(-z) \gamma^+ \gamma_5 q(z) | p \rangle \Big|_{z^+=0, \mathbf{z}=0} \\ &= \frac{1}{2P^+} \left[\tilde{H}^q(x, \xi, t) \bar{u}(p') \gamma^+ \gamma_5 u(p) + \tilde{E}^q(x, \xi, t) \bar{u}(p') \frac{\gamma_5 \Delta^+}{2m} u(p) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

| | Спиральность адрона | |
|------------------------------------|---------------------|------------------------|
| | сохраняется | меняется |
| Сумма по спиральностям партонов | $H(x, \xi, t)$ | $\tilde{H}(x, \xi, t)$ |
| Разность по спиральностям партонов | $E(x, \xi, t)$ | $\tilde{E}(x, \xi, t)$ |

Таблица 1: Спиральные обобщенные партонные распределения бариона

где ОПР, зависящие от коллинеарных компонент импульса (x, ξ) , определяют следующие спиральные компоненты (спиральность кварков в данном примере сохраняется), см Таб.(1).

Первые меллиновские моменты ОПР соответствуют кварковым вкладам в соответствующие формфакторы:

$$\int_{-1}^1 dx H(x, \xi, t) = F_1(t), \quad \int_{-1}^1 dx E(x, \xi, t) = F_2(t), \quad (4)$$

$$\int_{-1}^1 dx \tilde{H}(x, \xi, t) = g_A(t), \quad \int_{-1}^1 dx \tilde{E}(x, \xi, t) = g_P(t), \quad (5)$$

где $F_1(t)$ и $F_2(t)$ кварковые вклады в формфакторы соответственно Дирака и Паули, а $g_A(t)$ и $g_P(t)$ - аксиальный и псевдоскалярный.

Кроме того, ОПР, как характерные распределения эксклюзивных процессов, несут более детальную информацию о внутренней динамике партонов, нежели партонные плотности. В частности, правило сумм Джи [16] определяет спиновую структуру адрона:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx x [H(x, \xi, t) + E(x, \xi, t)] = J_q(t), \quad (6)$$

где $J_q(0)$ - вклад кварков в полный спин адрона.

Кроме упомянутых правил сумм, ОПР должны удовлетворять множеству дополнительных ограничений, в частности, т.н. полиномиальность [23] ($x^n H$ момент ОПР является в общем случае полиномом $n + 1$ степени), следующая из Лоренц-инвариантности, и позитивность [24; 25] (положительная определенность множества комбинаций ОПР). Для их удовлетворения была разработан ряд параметризаций. В частности параметризация т.н. двойных распределений (ДР) [10; 26]

$$H(x, \xi, t) = \int_{-1}^1 d\beta \int_{-1+|\beta|}^{1-|\beta|} d\alpha \delta(x - \beta - \xi \alpha) F(\beta, \alpha, t), \quad (7)$$

где функция $F(\beta, \alpha, t)$ - двойное распределение, в которой полиномиальность удовлетворяется автоматически.

Вследствие указанных свойств ОПР двойные распределения имеют область определения $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, являются четными функциями от α и объединяют в себе элементы обоих каналов: как партонной плотности так и амплитуды распределения. А именно - партонная плотность это интеграл от ДР вдоль вертикальной линии $\beta = x$ (как видно на Рис.(2)):

$$q(x) = \int_{-1+|x|}^{1-|x|} d\alpha F(x, \alpha, 0). \quad (8)$$

Было показано [27; 28], что с учетом замены переменных данная параметризация является преобразованием Радона (ПР) [29] (преобразование широко применяемое в задачах томографии) от ДР. Т.о., ОПР является интегралом от ДР по линии с наклоном $-1/\xi$ и пересекающей ось β в точке x , как изображено на Рис. (2)

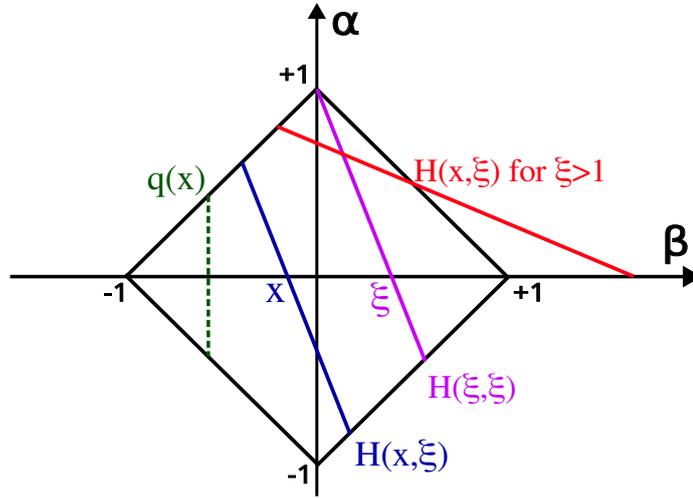


Рис. 2: Двойное распределение $F(\beta, \alpha)$ и интегралы от него: по наклонным отрезкам - обобщенное партонное распределение $H(x, \xi)$, по вертикальному отрезку - партонная плотность $q(x)$.

В работах [30; 31] были вычислены ОПР и ОАР, соответственно, исключительно в рамках квантовой электродинамики путем вычисления амплитуд ГНКР виртуального фотона на фотоне в лидирующем твисте и коллинеарной кинематике (с нулевой поперечной компонентой переданного импульса). Позднее были получены обобщения для ненулевого прицельного параметра [32; 33]. Это позволяет аналитически применять имеющийся математический аппарат КХД на тестовой фотонной модели.

В первой главе исследуются аналитические свойства фотонных ОПР, расширение их в нефизическую область с помощью ОАР. Разрабатываются новые способы обратного преобразования Радона для ОПР, а также исследуется их связь с дисперсионными соотношениями.

Стандартное выражение параметризации ДР:

$$H(x, \xi) = \int_{-1}^1 d\alpha \int_{-1+|\alpha|}^{1-|\alpha|} d\beta (F(\beta, \alpha) + \xi \delta(\beta) D(\alpha)) \delta(x - \beta - \alpha \xi). \quad (9)$$

где ДР четно по z : $F(\beta, \alpha, t) = F(\beta, -\alpha, t)$. Здесь и далее примем, что ξ *положительна*. Чтобы гарантировать условие полиномиальности, описанное выше, был введен D-член в правой части (9)[34]. Он входит в ОПР в виде нечетной функции $D(\alpha) = -D(-\alpha)$. Из определения следует, что D-член можно вычислить как предел

$$D(\alpha) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} H(\alpha \xi, \xi, t) \quad \text{для} \quad |x| \leq 1. \quad (10)$$

Заметим, что полные ОПР на интервале $-1 \leq x \leq 1$ представляют собой сумму кваркового и антикваркового вкладов, определенных соответственно на интервалах $-\xi \leq x \leq 1$ и $-1 \leq x \leq \xi$, а соответствующие ДР на $\beta \geq 0$ и $\beta \leq 0$. В дальнейшем по умолчанию будем считать, что D-член уже вычтен, и ДР ограничено неотрицательными β , таким образом

$$H(x, \xi, t) - D(x, \xi, t) \Rightarrow H(x, \xi, t) = \int_0^1 d\beta \int_{-1+\beta}^{1-\beta} d\alpha \delta(x - \beta - \xi) F(\beta, \alpha, t), \quad (11)$$

где ДР имеет компактную область определения $0 \leq \beta \leq 1$ и $|\alpha| \leq 1 - \beta$. Так, что для ОПР $|\xi| \leq 1$ и $-\xi \leq x \leq 1$, применяя представление [35]:

$$H(x, \xi, t) = \theta(x + \xi) \omega(x, \xi, t) + \theta(x - \xi) \omega(x, -\xi, t), \quad (12)$$

выражено через функции

$$\omega(x, \xi, t) = \frac{1}{\xi} \int_0^{\frac{x+\xi}{1+\xi}} d\beta F(\beta, (x - \beta)/\xi, t). \quad (13)$$

Обратим внимание, что полные ОПР, в свою очередь:

$$H_i(x, \xi, t) = H(x, \xi, t) \pm H(-x, \xi, t), \quad (14)$$

соответственно, для поляризованных и неполяризованных ОПР.

В кросс-канале ОАР аналогичное (12) представление имеет вид [36]:

$$\Phi(z, \zeta, t) = \theta(\zeta - z) \varpi(z, \zeta, t) - \theta(z - \zeta) \varpi(-z, -\zeta, t), \quad (15)$$

где

$$\omega(x, \xi, t) = \varpi\left(\frac{x}{\xi}, \frac{1}{\xi}, t\right). \quad (16)$$

Преобразование Радона (11) также гарантирует, что ОПР можно однозначно расширить на всю плоскость (x, ξ) (вследствие того, что это Фурье образ аналитической функции [10; 35] как будет показано далее.

Первая часть первой главы посвящена рассмотрению различных способов обратного преобразования Радона обобщенных партонных распределений. В литературе хорошо известны 2 способа обратного преобразования Радона: через преобразование Фурье и т.н. обратное проецирование с фильтрацией. В последнем случае термин возникший в обработке сигналов означает следующее. Производная по доле импульса вместе интегралом Гильберта служат фильтром, а последующее интегрирование по ξ - обратным проецированием. Как будет показано далее в комплексной плоскости для ОПР фильтр не требуется, и достаточно одного интеграла.

Покажем, как теорема о связи преобразований Фурье и Радона в совокупности с аналитическими свойствами ОПР позволяет вывести новый способ вычисления ДР.

Совершим обратное преобразование Фурье по x , где ограничимся $|\xi| < 1$,

$$\mathfrak{F}^{-1}[H](\kappa, \xi, t) = \int_{-1}^1 dx e^{-i\kappa x} H(x, \xi, t). \quad (17)$$

Подставив определение параметризации ДР (11) получаем двойное обратное преобразование Фурье от ДР

$$\mathfrak{F}^{-1}[H](\kappa, \xi, t) = \mathfrak{F}_2^{-1}[f](\kappa, \xi, \kappa, t) \equiv \int_0^1 d\beta \int_{-1+\beta}^{1-\beta} d\alpha e^{-i\kappa\beta - i\kappa\xi\alpha} f(\beta, \alpha, t), \quad (18)$$

оно является аналитической функцией по κ и ξ . Следовательно можно убрать ограничение $|\xi| < 1$ аналитическим продолжением (АС) по ξ . Проведя прямое преобразование Фурье получим ОПР, расширенное на всю область определения

$$H(x, \xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa e^{i\kappa x} \text{AC} \mathfrak{F}^{-1}[H](\kappa, \xi, t). \quad (19)$$

Т.о. ДР можно получить двойным прямым преобразованием Фурье [A5],

$$f(\beta, \alpha, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\kappa\beta + i\lambda\alpha} \mathfrak{F}^{-1}[H](\kappa, \lambda/\kappa, t), \quad (20)$$

обратного преобразования Фурье от

$$\mathfrak{F}^{-1}[H](\kappa, \xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\kappa x} H(x, \xi, t) \quad (21)$$

расширенного ОПР H или аналитического продолжения

$$\mathfrak{F}^{-1}[H](\kappa, \xi, t) = \text{AC} \mathfrak{F}^{-1}[H](\kappa, \xi, t)$$

непосредственно ОПР.

Воспользуемся известным обращением ОПР из [27], основанных на стандартной формуле, и сдвинем интегрирование по x :

$$f(\beta, \alpha, t) = \frac{-1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\partial}{\partial \beta} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} \mathbf{H}(x + \beta + \xi\alpha, \xi, t), \quad (22)$$

Проведя преобразование координат для нефизической части ОПР, соответствующей ОАР:

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{x}{\eta}, \\ \eta \rightarrow \frac{1}{\eta}, \end{cases} \quad (23)$$

и учтя четность по ξ получим выражение ДР отдельно для вкладов s и t каналов (соответственно из ОПР и ОАР) [A5]

$$\begin{aligned} f(\beta, \alpha, t) &= \int_0^1 d\xi f(\beta, \alpha, t|\xi), \\ f(\beta, \alpha, t|\xi) &= f_{\text{GPD}}(\beta, \alpha, t|\xi) + f_{\text{GDA}}(\beta, \alpha, t|\xi), \\ f_{\text{GPD}}(\beta, \alpha, t|\xi) &= \frac{-1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \text{PV} \int_{-\xi}^1 dx \frac{2(x - \beta)}{(x - \beta)^2 - \xi^2 \alpha^2} H(x, \xi, t), \\ f_{\text{GDA}}(\beta, \alpha, t|\xi) &= \frac{-1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \text{PV} \int_{-1}^1 dx \frac{2(x - \xi\beta)}{(x - \xi\beta)^2 - \alpha^2} H(x, \xi, t). \end{aligned} \quad (24)$$

В работе [37] Д. Мюллер показал, что для ОПР, обладающих LFWF (Light Front Wave Function overlap representation - представление перекрытия волновых функций на световом конусе) представлением, ДР можно получить однократным интегрированием в комплексной плоскости "внешней" DGLAP ($x > \xi$) ОПР $H^{\text{out}}(x, \xi, t)$

$$f(\beta, \alpha, t) = \frac{-1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \beta} \int_{-i\infty}^{i\infty} dr \frac{1 - \beta + \alpha}{(1 + \alpha + r\alpha)^2} H^{\text{out}}\left(\frac{\beta + r\alpha}{1 + \alpha + r\alpha}, \frac{r - (1 + r)\beta}{1 + \alpha + r\alpha}, t\right), \quad (25)$$

где $|\alpha| \leq 1 - \beta$ и $0 \leq \beta \leq 1 - \beta$.

В нашей статье [A5] данный результат был выведен в общем случае, для ОПР не обязательно обладающим LFWF представлением.

Вторая часть первой главы посвящена расширению обобщенных партонных распределению фотона и применению к ним различных методов обратного преобразования Радона.

Амплитуду глубоконеупругого Комптоновского рассеяния можно разложить по тензорному базису [38]

$$T^{\mu\nu\alpha\beta}(\Delta_T = 0) = \frac{1}{4}g_T^{\mu\nu}g_T^{\alpha\beta}A_1 + \frac{1}{8}\left(g_T^{\mu\alpha}g_T^{\nu\beta} + g_T^{\nu\alpha}g_T^{\mu\beta} - g_T^{\mu\nu}g_T^{\alpha\beta}\right)A_2 + \frac{1}{4}\left(g_T^{\mu\alpha}g_T^{\nu\beta} - g_T^{\mu\beta}g_T^{\alpha\nu}\right)A_3$$

Следует отметить, что для фотона $A_2 = 0$, а соответствующие амплитуды определяются свертками:

$$A_1(\xi) = \int_{-1}^1 dx C_+(x, \xi) H_1(x, \xi, 0), \quad A_3(\xi) = \int_{-1}^1 dx C_-(x, \xi) H_3(x, \xi, 0) \quad (26)$$

где

$$C_{\pm}^q(x, \xi) = -2e_q^2 \left(\frac{1}{x - \xi + i\epsilon} \pm \frac{1}{x + \xi - i\epsilon} \right) \quad (27)$$

Фотонные ОПР, полученные из DVCS в работе [30], определены в области $|\xi| < 1$ и $|x| < 1$. Они могут быть расширены в нефизическую область $|\xi| > 1$, путем выражения ОПР через ОАР $\Phi(z, \zeta)$, полученные в [31], в физической для них области $-1 < z < 1, -1 < \zeta < 1$.

В принятой нормировке [21; 30; 31] соотношение между ОПР и ОАР, полученное в работе [27] принимает вид:

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} \text{sgn}(\xi) \Phi\left(\frac{x}{\xi}, \frac{1}{\xi}\right) \quad (28)$$

Опустим здесь и далее множитель $\frac{N_C e_q^2}{4\pi^2} \ln \frac{Q^2}{m^2}$ (т.к. исследуется зависимость только от x, ξ). Применяя (28) к ОПР фотона и получив [A1] таким образом ОПР во всей расширенной области определения мы можем применить обратное проецирование с фильтрацией в стандартной форме.

Применив формулу (22) к неполяризованному ОПР получим:

$$F_{1D}(\beta, \alpha) = [2(1 - |\beta| - |\alpha|) - 1 + \delta(\alpha)] \text{sgn}(\beta). \quad (29)$$

Для поляризованного $H_3(x, \xi)$ получим

$$F_{3D}(\beta, \alpha) = \delta(\alpha) - 1. \quad (30)$$

Далее мы рассмотрели вклады по отдельности каждого из каналов в соответствии с формулами (24). Проведя оба интегрирования мы вычислили отдельные вклады в ДР от ОПР и от ОАР.

В задачах аналитического восстановления ДР будет удобно обратиться к представлению (12), (15). неполяризованные фотонные ОПР [30] и ОАР [31], таким образом, приведут, соответственно, к:

$$\omega_1(x, \xi) = \frac{x + \xi}{2\xi} - \frac{x}{\xi} \frac{x + \xi}{1 + \xi} \Leftrightarrow \varpi_1(x, \xi) = \frac{1 + x}{2} - x \frac{1 + x}{1 + \xi}. \quad (31)$$

Тогда как поляризованные:

$$\omega_3(x, \xi) = \frac{x + \xi}{2\xi} - \frac{1}{\xi} \frac{x + \xi}{1 + \xi} \Leftrightarrow \varpi_3(x, \xi) = -\frac{1 + x}{2} + \frac{1 + x}{1 + \xi}. \quad (32)$$

Пользуясь (10) можно получить компоненту "фиктивного" D-члена

$$d_3(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \text{sign}(x), \quad (33)$$

В силу симметричности поляризованного полного ОПР по x

$H_3^{(+)}(x, \xi) = H_3(x, \xi) + H_3(-x, \xi)$, D-член не вносит физического вклада.

Рассмотрим сначала простейший пример, в котором ОПР (12) построено на функции:

$$\omega^{const}(x, \xi) = \frac{1}{\xi} \frac{x + \xi}{1 + \xi}, \quad (34)$$

являющейся вторым слагаемым поляризованного ОПР $\omega_3(x, \xi)$ (32).

По построению, ОПР определено на интервале $-\xi < x < 1$, а D-член отсутствует. Получим сначала обратное преобразование Фурье при ограниченном $|\xi| \leq 1$

$$\mathfrak{F}^{-1}[H](\kappa, \xi) = \frac{e^{-i\kappa} - e^{i\xi\kappa}}{\xi(1 + \xi)\kappa^2} - \frac{e^{-i\kappa} - e^{-i\xi\kappa}}{\xi(1 - \xi)\kappa^2} \quad (35)$$

аналитична по ξ , проведя аналитическое продолжение по переменной $\lambda = \xi\kappa$ получаем

$$\mathfrak{F}_2^{-1}[F](\kappa, \lambda) = \mathfrak{F}^{-1}[H](\kappa, \lambda/\kappa) = \frac{e^{-i\kappa} - e^{i\lambda}}{\lambda(\kappa + \lambda)} - \frac{e^{-i\kappa} - e^{-i\lambda}}{(\kappa - \lambda)\lambda}. \quad (36)$$

Далее двумерное прямое преобразование Фурье (20) даст искомое ДР (регулярная часть поляризованного ОПР $\omega_3(x, \xi)$ (32))

$$F(\beta, \alpha) = 1 \quad (37)$$

с областью определения $|\alpha| \leq 1 - \beta$ и $0 \leq \beta \leq 1$.

Далее рассмотрим первое слагаемое в $\omega_3(x, \xi)$ (32):

$$\omega_\delta(x, \xi) = \frac{x + \xi}{2\xi} \quad (38)$$

Вычтя компоненту D-члена (33) найдем, что соответствующий вклад в ОПР представляет собой константу на $x \in [0, 1]$:

$$\delta H_3(x, \eta) = \theta(x)\theta(1 - x). \quad (39)$$

Проведя соответствующие преобразования Фурье получим

$$\delta F_3(\beta, \alpha) = \delta(\alpha). \quad (40)$$

Таким образом, в сумме получаем поляризованное ДР:

$$F_3(\beta, \alpha) = \delta(\alpha) - 1. \quad (41)$$

Обращение через обратное преобразование Лапласа продемонстрируем на примере сингулярного слагаемого, присутствующего в обоих ОПР (31), (32):

$$\delta\omega(x, \xi) = \frac{x + \xi}{2\xi} \quad (42)$$

Подставив его в (25) получим

$$\delta F_3(\beta, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dr \frac{1}{(1 + \alpha + r\alpha)^2} \quad \text{для } 0 \leq \alpha \leq 1 - \beta \quad (43)$$

что дает $\delta(\alpha)$.

Аналогично получим регулярные части, соответственно, F_1 и F_3 . Замкнув контур интегрирования в левой полуплоскости и приняв, к примеру, $\alpha > 0$ найдем:

$$\begin{aligned} F_1^{reg}(\beta, \alpha) &= 1 - 2\beta - 2\alpha, \\ F_3^{reg}(\beta, \alpha) &= -1. \end{aligned} \quad (44)$$

Во второй главе исследуется голографическое правило сумм в применении к ОПР, а также связь ОПР с тензором энергии-импульса, и вытекающие из нее механические свойства адронов.

В первой части второй главы рассматривается голографическое правило сумм для фотона с константным вычитанием.

Вклад ОПР в жесткую эксклюзивную амплитуду (в частности в DVCS) в лидирующем твисте определен (опуская множители $-2e_q^2$) как

$$A_{1,3}(\xi, t) = \int_{-1}^1 dx H_{1,3}(x, \xi, t) \left[\frac{1}{x + \xi - i\epsilon} \pm \frac{1}{x - \xi + i\epsilon} \right] \quad (45)$$

или для компактности (учитывая четность ОПР H_1 и H_3 по x и опуская не важные для нас множители) примем:

$$A_{1,3}(\xi, t) = \int_{-1}^1 dx \frac{H_{1,3}(x, \xi, t)}{x + \xi - i\epsilon} \quad (46)$$

$$\text{Im}A_{1,3}(x,t) = \pi H_{1,3}(x,x,t). \quad (47)$$

Заметим, что мнимые части амплитуд A_1 и A_3 в области $x > 0$ отличаются лишь знаком, т.к.

$$H_1(x,x) = -H_3(x,x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (48)$$

Согласно голографическому правилу сумм для ОПР [39] в лидирующем приближении вся информация о коллинеарной структуре адрона с точностью до вычитательной константы содержится в одномерной области:

$$P \int_{-1}^1 \frac{H(x,\xi) - H(x,x)}{x - \xi} dx = \Delta \quad (49)$$

где $P \int$ обозначает главное значение несобственного интеграла, и Δ не зависит от ξ , следовательно,

$$\text{Re}A(\xi) = \frac{P}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\text{Im}A(x)}{x - \xi} dx + \Delta \quad (50)$$

Проинтегрировав полученные ОПР мы получили [A1]:

$$\int_{-1}^1 \frac{H_1(x,\xi) - H_1(x,x)}{x - \xi} dx = 2 \ln 2 \text{ при } |\xi| < 1 \quad (51)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{H_3(x,\xi) - H_3(x,x)}{x - \xi} dx = 0 \text{ при } |\xi| < 1 \quad (52)$$

Полученный значения согласуются с (49) с правой частью (62).

Мы получили, что H_1 и H_3 удовлетворяют голографическому правилу сумм также и в нефизической области $|\xi| > 1$, [A1] как и предсказывалось в [40],

$$\int_{-\xi}^{\xi} \frac{H_1(x,\xi) - H_1(x,x)}{x - \xi} dx = 2 \ln 2 \text{ при } |\xi| > 1, \quad (53)$$

$$\int_{-\xi}^{\xi} \frac{H_3(x,\xi) - H_3(x,x)}{x - \xi} dx = 0 \text{ при } |\xi| > 1 \quad (54)$$

Как видно, вычитательные константы не зависят от ξ [41], для любых конечных ξ .

Во второй части второй главы вычисляются партонные распределения фотона в подходе дуальной параметризации.

В дуальной параметризации партонные распределения представлены в виде бесконечного ряда t-канальных обменов [42]. $N(x,t)$ - т.н. функция квинт-эссенции, может быть восстановлена из эксклюзивной амплитуды процесса:

$$N(x,t) = \frac{2}{\pi} \frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} \int_{\frac{2x}{1+x^2}}^1 \frac{d\xi}{\xi^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\xi - \frac{2x}{1+x^2}}} \left\{ \frac{1}{2} \text{Im}A(\xi,t) - \xi \frac{d}{d\xi} \text{Im}A(\xi,t) \right\}, \quad (55)$$

Подставляя $\pi H(\xi, \xi)$ получим квинтэссенцию для фотона

$$N_1(x) = -N_3(x) = \frac{(x-1)(x^2 + 2x \log(x) - 1)}{(x+1)^2}, \quad (56)$$

изображенную на Рис. (3). Как видно, $N_1(x) = -N_3(x)$ т.к. то же верно и для мнимых частей соответствующих амплитуд, см. (48)

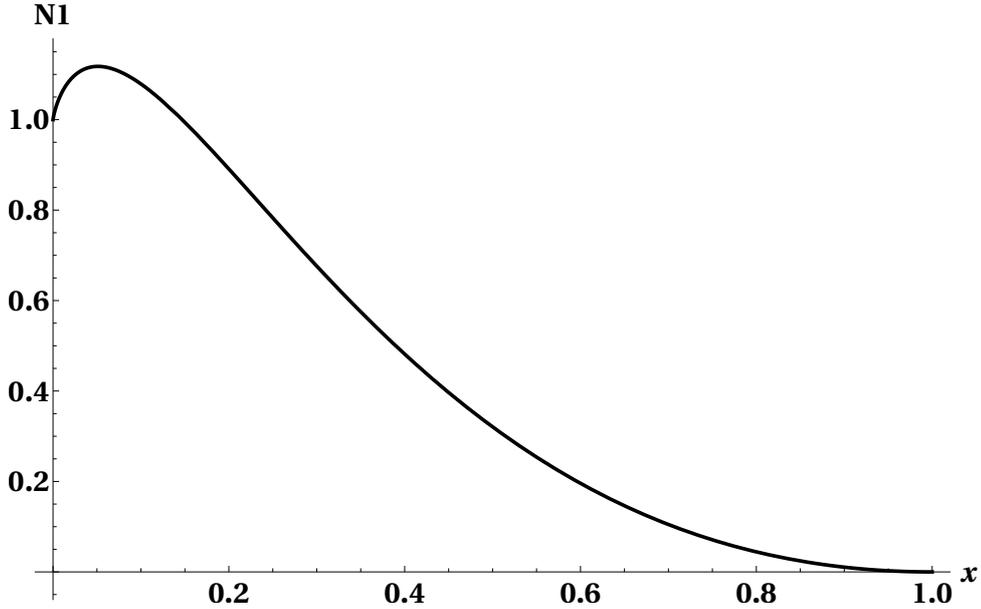


Рис. 3: Функция квинтэссенции $N_1(x) = -N_3(x)$ фотона в дуальной параметризации.

Как было показано в работе [43] уравнение, связывающее мнимую часть амплитуды и квинтэссенцию, есть в точности преобразование Абеля [44]. Т.е. оно может быть интерпретировано как двумерная проекция некоторой аксиально симметричной функции

$$m(\omega) = \frac{M(\omega)}{\omega} \quad (57)$$

$$ImA(\xi, t) = \int_{\xi}^1 \frac{d\omega}{\omega} M(\omega, t) \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\omega - \xi}} \quad (58)$$

Для фотона

$$m(\omega) = \frac{\sqrt{1 - \omega^2} + \omega \tanh^{-1}(\sqrt{1 - \omega^2})}{\omega(\omega + 1)^{3/2}}. \quad (59)$$

В третьей части второй главы вычисляется D-член и гравитационный формфактор фотона. Оценивается влияние конечного вычитания, обусловленного D-членом на сечение электророждения ρ_0 мезона.

Моменты ОПР тесно связаны с механическими свойствами адрона [19]. Рассмотрим разложение матричного элемента тензора энергии-импульса по гравитационным формфакторам:

$$\begin{aligned} \langle P' | \hat{T}_{\mu\nu}(0) | P \rangle &= \bar{N}(p') \left[M_2(t) \frac{\bar{P}_\mu \bar{P}_\nu}{m_N} + J(t) \frac{i \bar{P}_{\{\mu} \sigma_{\nu\} \rho} \Delta^\rho}{m_N} \right. \\ &\quad \left. + d(t) \frac{1}{5m_N} (\Delta_\mu \Delta_\nu - g_{\mu\nu} \Delta^2) \pm \bar{c}(t) g_{\mu\nu} \right] N(p). \quad (60) \end{aligned}$$

Формфактор $d(t)$ связан с D-членом адрона $D(\alpha, t)$. А именно является первым коэффициентом в разложении D-члена по полиномам Гегенбауэра $C_n^{3/2}(\alpha)$.

Найдем D-члены фотонных ОПР (H_1 и H_3) основываясь [40] на

$$D(\alpha) = \Phi(\alpha, 0), \quad (61)$$

отсюда, подразумевая здесь и далее коэффициент $\frac{N_C e_q^2}{4\pi^2} \ln \frac{Q^2}{m^2}$, получаем [A1]

$$\begin{aligned} D_1(\alpha) &= (|\alpha| - 1)(2|\alpha| + 1) \text{sgn}(\alpha) \\ D_3(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (62)$$

Из разложения $D_1(\alpha)$ по полиномам Гегенбауэра $d_1 = -\frac{5}{6}$ [A1].

Отметим, что отрицательный знак (при положительных α) D-члена, как и d_1 соответствует критериям механической устойчивости облака виртуальных фермионных (кварк-антикварковых) пар. Аналогичный результат был получен для ядер в вакууме [34], ядерной материи [45] и нетопологических солитонов Q-balls [46]. В недавней работе [20] измерялось распределение давления в протоне на основе экспериментальных данных по глубоконеупругому комптоновскому рассеянию и восстановленный гравитационный формфактор $d(t)$ также имел отрицательный знак, что соответствует механической устойчивости протона.

Оценим качественное влияние вычитательной константы на инклюзивные сечения рождения векторных мезонов, в особенности с учетом их отклонения

от предсказанных. Исследуем недавние данные на средних энергиях в с.ц.м. W (CLAS [47], CORNELL, HERA [48; 49], E-665 [50] и HERMES [51])

Было показано [5], что вклад валентных кварков в коллинеарную амплитуду электророждения продольного ρ^0 с сохранением спиральности определяется [52]:

$$A_{collinear}^{val} = \int_{-1}^1 dx \frac{1}{\sqrt{2}} (e_u H^u(x, \xi) - e_d H^d(x, \xi)) \left\{ \frac{1}{x + \xi - i\epsilon} + \frac{1}{x - \xi + i\epsilon} \right\} \quad (63)$$

Применим стандартный анзац ДР:

$$f_i(\beta, \alpha) = h_i(\beta) \frac{\Gamma(2n_i + 2)}{2^{2n_i+1} \Gamma^2(n_i + 1)} \frac{[(1 - |\beta|)^2 - \alpha^2]}{(1 - |\beta|)^{2n_i+1}}, \quad (64)$$

где в качестве $h_i(\beta)$ возьмем параметризацию Голоскокова-Кролла (GK) [53]:

$$h_i(\beta) = \beta^{-\delta_i} (1 - \beta)^{2n_i+1} \sum_{j=0}^3 c_{ij} \beta^{j/2} \quad (65)$$

Обе широко применяемые параметризации GK и VGG (M. Vanderhaeghen, P. A. Guichon, M. Guidal [54]) в приложении к ρ^0 , ρ^+ и ω обеспечивают хорошее согласие с экспериментальными данными на высоких энергиях, но демонстрируют снижение сечений при уменьшении $W \lesssim 10$ GeV тогда как экспериментальные данные напротив показывают значительный рост. Было предложено [55] добавлять обобщенный вклад на основе D-члена в ОПР в форме параметризации VGG в целях устранить указанное расхождение.

В работе [A2] мы применяем параметризацию GK со вкладом D-члена. А именно, используем первый коэффициент его разложения по полиномам Гегенбауэра:

$$D^q(\alpha) = (1 - z^2) \sum_{i=0}^{\infty} d_i C_{2i+1}^{3/2} \quad (66)$$

полученным из киральной кварк-солитонной модели [56]:

$$d_1^{CQM} = d_1^u = d_1^d = -\frac{4.0}{N_f} \quad (67)$$

Для простоты пренебрежем влиянием поперечных импульсов:

$$A_{collinear}(W) = A_{collinear}^{val}(W) + A_{collinear}^{sea}(W) + A_{collinear}^g(W), \quad (68)$$

где валентный вклад имеет добавку связанную с D-членом:

$$A_{collinear}^{val}(W) \rightarrow A_{collinear}^{val}(W) + \Delta(W), \quad (69)$$

где

$$\Delta(W) = \int_{-\xi}^{\xi} dx \frac{1}{\sqrt{2}} (e_u - e_d) D\left(\frac{x}{\xi}\right) \left\{ \frac{1}{x + \xi} + \frac{1}{x - \xi} \right\}, \quad (70)$$

Вышеупомянутое голографическое правило сумм подразумевает независимость вычитательного вклада от W . В то же время было показано[41], что вычитание также слабо зависит от виртуальности фотона Q^2 .

$$\sigma(W) \approx \sigma_0(W) \left| \frac{A_{Collinear}(W) + a \cdot \Delta}{A_{Collinear}(W)} \right|^2, \quad (71)$$

Т.к. зависимость вычитания от поперечных степеней свободы неизвестна, мы добавили фактор a , характеризующий возможную зависимость от поперечной динамики и t . Известно, что учет поперечных степеней свободы может повышать сечение на порядок. Поэтому разумно ожидать коэффициент около $\sqrt{10} \approx 3$.

Численные данные для вычислений следующие: $\langle Q^2 \rangle = 4\text{GeV}$, $N_f = 5$ и $t = 0$. Экспериментальные точки и исходная зависимость $\sigma_0(W)$ взяты из [57].

Фитирование данных ρ_0 мезона дает $a \approx 4.8$. Возможная интерпретация нашего результата следующая. При высоких энергиях вкладом валентных кварков можно пренебречь, однако при энергиях меньше 10 GeV их вклад и, в особенности, вклад D-члена становится определяющим для сечения.

В третьей главе модифицированная аналитическая теория возмущений (АТВ) применяется к описанию правила сумм Бьёркена в инфракрасной области.

В первой части третьей главы приводится обзор современного состояния аналитической теории возмущений. В частности описывается подход представления разложения эффективного заряда по обратным логарифмам $1/L$ ($L = \ln(\frac{Q^2}{\Lambda^2})$) в виде ряда по операторам от однопетлевого эффективного заряда. Также предлагается подход массивной теории возмущений, в которой вводится эффективная масса глюона в качестве инфракрасного регулятора.

Во второй части третьей главы аналитическая теория возмущений применяется к анализу экспериментальных данных по правилу сумм Бьёркена.

Правило сумм Бьёркена (ПСБ) [58; 59] определяется как интеграл от разности первых моментов спиновых структурных функций g_1 протона и нейтрона по переменной Бьёркена при фиксированном Q^2 :

$$\Gamma_1^{p-n}(Q^2) = \int_0^1 [g_1^p(x, Q^2) - g_1^n(x, Q^2)] dx. \quad (72)$$

В форме операторного разложения ПСБ записывается ([60; 61]) как:

$$\Gamma_1^{p-n}(Q^2) = \frac{|g_{A/V}|}{6} \left[1 - \Delta_{\text{Bj}}(Q^2) \right] + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mu_{2i}}{Q^{2i-2}}, \quad (73)$$

где $|g_{A/V}| = 1.2762 \pm 0.0005$ [62] нуклонный аксиальный заряд. Член $\Delta_{Vj}(Q^2)$ представляет собой пертурбативные поправки. Последний член (73) - непертурбативные вклады высших твистов (НТ). Здесь и далее во всех вычислениях мы принимаем число активных ароматов кварков $n_f = 3$.

Для ограничения роста констант связи при $Q^2 \rightarrow 0$ применим двухпетлевую модель "массивной" АТВ [63] - приближенное решение уравнения ренормгруппы:

$$A_1(Q^2) \equiv \alpha^{MPT}(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0\beta_0 L^* + \alpha_0\beta_1 \ln [1 + \alpha_0\beta_0 L^*] / \beta_0}, \quad (74)$$

где $L^* = \ln \left(\frac{Q^2 + M_{gl}^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right),$

а M_{gl}^2 - эффективная масса глюона. Для вычисления констант связи следующих порядков ограничимся однопетлевыми рекуррентными соотношениями:

$$A_{k+1}(Q^2) = -\frac{Q^2 + M_{gl}^2}{k} \frac{d}{dQ^2} A_k(Q^2) \quad (75)$$

Примем естественное предельное условие

$$\Gamma_1^{p-n}(Q^2 = 0) = 0, \quad (76)$$

следующее из конечности сечений в пределе реальных фотонов.

Аналогично [64; 65], где правила сумм Герасимова-Дрелла-Хирна² [66],[67] и Буркхарда-Коттингема [68] применялись для гладкого продолжения (фиксируя значение и первую производную) $\Gamma_1^{p-n}(Q^2)$ в непертурбативную область малых Q^2 получим предельное значение для его производной в инфракрасном пределе $Q^2 = 0$:

$$\frac{d}{dQ^2} \Gamma_1^{p-n}(Q^2 = 0) = \frac{-(\mu_p - 1)^2 + \mu_n^2}{8M^2}, \quad (78)$$

где $\mu_p = 2.79$ и $\mu_n = -1.91$ магнитные моменты (в ядерных магнетонах $\mu_N = \frac{e\hbar}{2M}$) протона и нейтрона [62] соответственно, $M = 0.938$ GeV - масса нуклона.

Применим ресуммирование бесконечного ряда высших твистов в виде

²Правило сумм Герасимова-Дрелла-Хирна [66],[67] связывает аномальный магнитный момент нуклона и разность сечений фотопоглощения параллельного σ_P и антипараллельного σ_A ему спина фотона:

$$\frac{2\pi e^2 \mu_A^2}{M^2} = \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} (\sigma_P(\nu) - \sigma_A(\nu)), \quad (77)$$

свертки с некоторой спектральной функцией, предложенное в [69]³:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n+2}^{p-n} \left(\frac{M_{HT}^2}{Q^2} \right)^n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) M_{HT}^2}{Q^2 - x M_{HT}^2} dx, \quad (79)$$

В качестве спектральной функции рассмотрим распределение Брейта-Вигнера [70]:

$$\Delta_{HT}(Q^2) = \mu_4^{p-n} \frac{M_{HT}^2 (M_{HT}^2 + Q^2)}{(M_{HT}^2 + Q^2)^2 + M_{HT}^2 \sigma^2}. \quad (80)$$

Профитировав данные для $0 \leq Q^2 \leq 5 \text{ GeV}$ в подходе МРТ с точностью до четвертого порядка теории возмущений с шириной $\sigma = \sigma_{\rho_0}$ мезона получим [A4] в четырехпетлевом варианте фит: для эффективной массы глюона $M_{gl}^2 = 0.509 + 0.043 - 0.044 \text{ GeV}^2$, массы высших твистов $m_{HT}^2 = 0.245 + 0.309 - 0.202 \text{ GeV}^2$ и коэффициента $\mu_4^{p-n} = -0.059 + 0.003 - 0.024$.

Случай δ -функции Дирака в качестве спектральной функции мы рассмотрели в работе [A3], получив в четвертом порядке ТВ для эффективной массы глюона $M_{gl}^2 = 0.546 \text{ GeV}^2$, массы высших твистов $m_{HT}^2 = 0.143 \text{ GeV}^2$ и коэффициента $\mu_4^{p-n} = -0.055$.

Как можно видеть найденные массы и коэффициенты высших твистов имеют близкие значения. Результаты фитирования демонстрируют слабую зависимость от ширины спектральной функции высшего твиста, что с одной стороны не исключает возможность обмена ρ_0 мезоном, в то же время говорит о том, что более простая модель нулевой ширины дает удовлетворительное описание процесса.

Также отметим, что полученные выше значения μ_4 согласуются с полученным ранее, в частности, $\mu_4 = -0.050 \pm 0.002$ в [71] в АТВ для более узкого интервала Q^2 . На основе данных эксперимента EG1-DVCS детектора CLAS лаборатории Т. Джефферсона в рамках ТВ были получены [72] значения $\mu_4 = -0.021 \pm 0.016$. Путем анализа уравнений эволюции партонных плотностей в подходе обрванных моментов на основе уже упомянутых данных EG1-DVCS, а также COMPASS было получено [73] значение $\mu_4 = -0.047 \pm 0.02$.

Стоит, однако, заметить, что полученные в диссертации коэффициенты μ_4 строго говоря не являются коэффициентами при слагаемом $\sim \frac{1}{Q^2}$, а являются коэффициентами при спектральной функции, формально включающей в себя все коэффициенты μ_{2n+2} , при этом, конечно, μ_4 дает наибольший вклад.

С появлением новых прецизионных данных лаборатории им. Т. Джефферсона [74] экспериментов EG4 на поляризованных протонах и дейтронах, а также E97110 на поляризованном ${}^3\text{He}$, появилась возможность для более

³Ключевая идея состоит в представлении каждого коэффициента μ_{2n+2}^{p-n} в виде n -го момента некоторой спектральной функции $\mu_{2n+2}^{p-n} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^{n-1} dx$ таким образом, что получившаяся сумма геометрической прогрессии позволит представить результат в виде простой свертки (79).

точного анализа АТВ и ее модификаций, в особенности, в области малых Q^2 . Мы сосредоточимся на исследовании поведения кривой на диапазоне $0.021 \text{ GeV}^2 < Q^2 < 0.6 \text{ GeV}^2$.

Применим [A6] $1/L$ разложение по операторам АТВ из [75]:

$$\Delta_{MA,Bj}^{(k)}(Q^2) = \frac{4}{\beta_0} \left(\tilde{A}_{MA}^{(k)} + \sum_{m=2}^k \tilde{d}_{m-1} \tilde{A}_{MA,\nu=m}^{(k)} \right), \quad (81)$$

где коэффициенты \tilde{d}_k получены из d_k (d_k соответствуют стандартному ряду ТВ). В свою очередь d_1 , d_2 и d_3 вычислены прямо [76; 77], значение d_4 точно неизвестно, однако имеются оценки [78]

Для нулевой ширины спектральной функции результаты приведены в Таб.(2) и для ширины ρ_0 мезона в Таб.(3). Следует заметить, что малая

| Порядок | $M^2, \text{ GeV}^2$ | $\hat{\mu}_{MA,4}, \text{ GeV}$ | $\chi^2/(\text{d.o.f.})$ |
|---------|----------------------|---------------------------------|--------------------------|
| LO | 1.631 ± 0.301 | -0.166 ± 0.001 | 0.789 |
| NLO | 1.545 ± 0.287 | -0.155 ± 0.001 | 0.757 |
| N^2LO | 1.417 ± 0.241 | -0.156 ± 0.002 | 0.728 |
| N^3LO | 1.429 ± 0.248 | -0.157 ± 0.002 | 0.747 |
| N^4LO | 1.462 ± 0.259 | -0.157 ± 0.001 | 0.754 |

Таблица 2: Результаты фитирования разложения по операторам для $\sigma = 0$ при $0.021 \text{ GeV}^2 < Q^2 < 0.6 \text{ GeV}^2$

| Порядок | $M^2, \text{ GeV}^2$ | $\hat{\mu}_{MA,4}, \text{ GeV}$ | $\chi^2/(\text{d.o.f.})$ |
|---------|----------------------|---------------------------------|--------------------------|
| LO | 1.592 ± 0.300 | -0.168 ± 0.002 | 0.788 |
| NLO | 1.505 ± 0.286 | -0.157 ± 0.002 | 0.755 |
| N^2LO | 1.378 ± 0.242 | -0.159 ± 0.002 | 0.728 |
| N^3LO | 1.389 ± 0.247 | -0.159 ± 0.002 | 0.747 |
| N^4LO | 1.422 ± 0.259 | -0.159 ± 0.002 | 0.754 |

Таблица 3: Результаты фитирования разложения по операторам для $\sigma = \Gamma_\rho$ при $0.021 \text{ GeV}^2 < Q^2 < 0.6 \text{ GeV}^2$

дисперсия результатов объясняется учетом только статистических погрешностей. Как можно видеть, варианты $\sigma = 0$ и $\sigma = \Gamma_\rho$ дают близкие результаты. Качество фитов очень высокое, что выражается в малых значениях χ^2 , при этом фитирование для различных порядков ТВ дает сходные результаты.

В заключении приведены основные результаты исследований, которые состоят в следующем:

1. В разделе (1.1) построен новый подход к анализу эксклюзивных амплитуд жестких процессов в рамках коллинеарной факторизации, применяющий аналитические свойства амплитуд с математическим аппаратом интегральной геометрии. Получены различные формы обратного преобразования Радона для обобщенных партонных распределений, пригодные как для аналитических так и численных расчетов.
2. Разработанный математический аппарат применен аналитически к фотонным ОПР в разделе (1.2). ОПР были расширены во всю область определения. Были вычислены двойные распределения фотона, в частности с разделением вкладов из ОПР и ОАР. В разделе (2.2) вычислены функции квинтэссенции фотона в подходе дуальной параметризации.
3. Для ОПР в разделе (2.1) получено голографическое правило сумм с конечным вычитанием, связанным с гравитационным формфактором адрона. Полученные результаты находятся в согласии с критерием механической устойчивости облака кварк-антикварковых пар. Константное вычитание успешно применено к описанию сечения электророждения векторных мезонов на примере ρ^0 мезона в разделе (2.3.1).
4. В главе (3) построены новые модели спектральных функций высших твистов для правила сумм Бьёркена на основе распределения Брейта-Вигнера. Получено хорошее согласие с экспериментальными данными при малых значениях Q^2 . Правила сумм Герасимова-Дрелла-Хирна и Буркхарта-Коттингема применены для продолжения в инфракрасную область. Проведено сравнение различных модификаций аналитической теории возмущений.

Публикации автора по теме диссертации

- A1. *Gabdrakhmanov I. R., Teryaev O. V.* Analyticity and sum rules for photon GPDs // *Phys. Lett. B.* — 2012. — Т. 716. — С. 417–424.
- A2. *Gabdrakhmanov I., Teryaev O.* QCD motivated subtractions in hard photonic and mesonic reactions // *PoS.* — 2012. — Т. Baldin-ISHEPP—XXI. — С. 035.
- A3. *Khandramai V. L., Teryaev O. V., Gabdrakhmanov I. R.* Infrared modified QCD couplings and Bjorken sum rule // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2016. — Т. 678, № 1. — С. 012018.
- A4. *Gabdrakhmanov I. R., Teryaev O. V., Khandramai V. L.* Infrared models for the Bjorken sum rule in the APT approach // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2017. — Т. 938, № 1. — С. 012046.
- A5. *Gabdrakhmanov I. R., Müller D., Teryaev O. V.* Inverse Radon transform at work // *Phys. Part. Nucl. Lett.* — 2019. — Т. 16, № 6. — С. 625–637.
- A6. Bjorken Sum Rule with Analytic Coupling at Low Q^2 Values / I. R. Gabdrakhmanov, N. A. Gramotkov, A. V. Kotikov, D. A. Volkova, I. A. Zemlyakov // *JETP Letters.* — 2023. — Т. 118.

Список литературы

1. *Feynman R. P.* Very high-energy collisions of hadrons // *Phys. Rev. Lett.* — 1969. — Т. 23. — С. 1415–1417. — [494(1969)].
2. *Politzer H. D.* Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? // *Phys. Rev. Lett.* — 1973. — Т. 30. — С. 1346–1349. — [,274(1973)].
3. *Gross D. J., Wilczek F.* Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories // *Phys. Rev. Lett.* — 1973. — Т. 30. — С. 1343–1346. — [,271(1973)].
4. *Collins J. C., Soper D. E., Sterman G.* Factorization of Hard Processes in QCD // *Perturbative quantum chromodynamics.* — Singapore : World Scientific, 1989. — С. 1–92. — (Advanced series on directions in high energy physics).
5. *Collins J. C., Frankfurt L., Strikman M.* Factorization for hard exclusive electroproduction of mesons in QCD // *Phys. Rev. D.* — 1997. — Т. 56. — С. 2982–3006.
6. *Collins J. C., Freund A.* Proof of factorization for deeply virtual Compton scattering in QCD // *Phys. Rev. D.* — 1999. — Т. 59. — С. 074009.
7. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Analytic QCD running coupling with finite IR behavior and universal $\bar{\alpha}_s(0)$ value. — 1996. — Апп. — arXiv: [hep-ph/9604363](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9604363).
8. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Ten years of the Analytic Perturbation Theory in QCD // *Theor. Math. Phys.* — 2007. — Т. 150. — С. 132–152.
9. *Stefanis N. G.* Taming Landau singularities in QCD perturbation theory: The Analytic approach // *Phys. Part. Nucl.* — 2013. — Т. 44. — С. 494–509.
10. Wave functions, evolution equations and evolution kernels from light ray operators of QCD / D. Müller, D. Robaschik, B. Geyer, F. M. Dittes, J. Hořejši // *Fortsch. Phys.* — 1994. — Т. 42. — С. 101–141.
11. *Radyushkin A. V.* Scaling limit of deeply virtual Compton scattering // *Phys. Lett. B.* — 1996. — Т. 380. — С. 417–425.
12. *Ji X.-D.* Deeply virtual Compton scattering // *Phys. Rev. D.* — 1997. — Т. 55. — С. 7114–7125.

13. *Radyushkin A. V.* Asymmetric gluon distributions and hard diffractive electroproduction // *Phys. Lett. B.* — 1996. — T. 385. — C. 333–342.
14. Relating transverse structure of various parton distributions / T. Maji, C. Mondal, D. Chakrabarti, O. V. Teryaev // *JHEP.* — 2016. — T. 01. — C. 165.
15. The case for an EIC Theory Alliance: Theoretical Challenges of the EIC / R. Abir [и др.]. — 2023. — Май. — arXiv: [2305.14572](https://arxiv.org/abs/2305.14572) [[hep-ph](https://arxiv.org/abs/2305.14572)].
16. *Ji X.-D.* Gauge-Invariant Decomposition of Nucleon Spin // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — T. 78. — C. 610–613.
17. *Teryaev O. V.* Spin structure of nucleon and equivalence principle. — 1999. — Апр. — arXiv: [hep-ph/9904376](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9904376).
18. *Teryaev O. V.* Gravitational form factors and nucleon spin structure // *Front. Phys. (Beijing).* — 2016. — T. 11, № 5. — C. 111207.
19. *Polyakov M.* Generalized parton distributions and strong forces inside nucleons and nuclei // *Phys.Lett.* — 2003. — T. B555. — C. 57–62.
20. *Burkert V. D., Elouadrhiri L., Girod F. X.* The pressure distribution inside the proton // *Nature.* — 2018. — T. 557, № 7705. — C. 396–399.
21. *Diehl M.* Generalized parton distributions // *Phys.Rept.* — 2003. — T. 388. — C. 41–277. — Habilitation thesis.
22. *Belitsky A., Radyushkin A.* Unraveling hadron structure with generalized parton distributions // *Phys.Rept.* — 2005. — T. 418. — C. 1–387.
23. *Ji X.-D.* Off forward parton distributions // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics.* — 1998. — T. 24, № 7. — C. 1181–1205.
24. *Pire B., Soffer J., Teryaev O.* Positivity constraints for off - forward parton distributions // *Eur. Phys. J. C.* — 1999. — T. 8. — C. 103–106.
25. *Pobylitsa P. V.* Solution of polynomiality and positivity constraints on generalized parton distributions // *Phys. Rev.* — 2003. — T. D67. — C. 034009.
26. *Radyushkin A. V.* Nonforward parton distributions // *Phys. Rev. D.* — 1997. — T. 56. — C. 5524–5557.
27. *Teryaev O.* Crossing and radon tomography for generalized parton distributions // *Phys.Lett.* — 2001. — T. B510. — C. 125–132.
28. Twist three analysis of photon electroproduction off pion / A. V. Belitsky, D. Mueller, A. Kirchner, A. Schafer // *Phys. Rev. D.* — 2001. — T. 64. — C. 116002.
29. *Radon J.* Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math-Nat. Kl.* — 1917. — T. 69. — C. 262–277.

30. *Friot S., Pire B., Szymanowski L.* Deeply virtual compton scattering on a photon and generalized parton distributions in the photon // Phys.Lett. — 2007. — T. B645. — C. 153–160.
31. Diphoton Generalized Distribution Amplitudes / M. El Beiyad, B. Pire, L. Szymanowski, S. Wallon // Phys.Rev. — 2008. — T. D78. — C. 034009.
32. *Mukherjee A., Nair S.* Generalized Parton Distributions of the Photon // Phys.Lett. — 2011. — T. B706. — C. 77–81.
33. *Mukherjee A., Nair S.* Generalized Parton Distributions of the Photon for Nonzero ζ // Phys.Lett. — 2012. — T. B707. — C. 99–106.
34. *Polyakov M. V., Weiss C.* Skewed and double distributions in pion and nucleon // Phys.Rev. — 1999. — T. D60. — C. 114017.
35. *Mueller D., Schafer A.* Complex conformal spin partial wave expansion of generalized parton distributions and distribution amplitudes // Nucl. Phys. B. — 2006. — T. 739. — C. 1–59.
36. *Mueller D.* Generalized Parton Distributions – visions, basics, and realities – // Few Body Syst. — 2014. — T. 55. — C. 317–337.
37. *Müller D.* Double distributions and generalized parton distributions from the parton number conserved light front wave function overlap representation. — 2017. — Ноябрь. — arXiv: [1711.09932](https://arxiv.org/abs/1711.09932) [hep-ph].
38. The Two photon particle production mechanism. Physical problems. Applications. Equivalent photon approximation / V. Budnev, I. Ginzburg, G. Meledin, V. Serbo // Phys.Rept. — 1975. — Vol. 15. — P. 181–281.
39. *Teryaev O.* Analytic properties of hard exclusive amplitudes. — 2005. — arXiv: [hep-ph/0510031](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0510031) [hep-ph].
40. *Teryaev O.* Analyticity and end-point behaviour of GPDs // PoS. — 2010. — T. DIS2010. — C. 250.
41. *Anikin I., Teryaev O.* Dispersion relations and subtractions in hard exclusive processes // Phys.Rev. — 2007. — T. D76. — C. 056007.
42. *Polyakov M., Shuvaev A.* On'dual' parametrizations of generalized parton distributions. — 2002. — arXiv: [hep-ph/0207153](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0207153) [hep-ph].
43. *Moiseeva A. M., Polyakov M. V.* Dual parameterization and Abel transform tomography for twist-3 DVCS // Nucl.Phys. — 2010. — T. B832. — C. 241–250.
44. *Abel N.* Auflösung einer mechanischen Aufgabe. // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1826. — T. 1. — C. 153–157.
45. *Kim H.-C., Schweitzer P., Yakhshiev U.* Energy-momentum tensor form factors of the nucleon in nuclear matter. — 2012. — arXiv: [1205.5228](https://arxiv.org/abs/1205.5228) [hep-ph].

46. *Mai M., Schweitzer P.* Energy momentum tensor, stability, and the D-term of Q-balls. — 2012. — arXiv: [1206.2632](https://arxiv.org/abs/1206.2632) [[hep-ph](#)].
47. Electroproduction of $\phi(1020)$ mesons at $1.4 \leq Q^2 \leq 3.8 \text{ GeV}^2$ measured with the CLAS spectrometer / J. Santoro [и др.] // *Phys.Rev.* — 2008. — Т. C78. — С. 025210.
48. Exclusive electroproduction of ρ^0 and J/ψ mesons at HERA / J. Breitweg [и др.] // *Eur.Phys.J.* — 1999. — Т. C6. — С. 603—627.
49. Elastic electroproduction of ρ mesons at HERA / C. Adloff [и др.] // *Eur.Phys.J.* — 2000. — Т. C13. — С. 371—396.
50. Diffractive production of $\rho^0(770)$ mesons in muon proton interactions at 470-GeV / M. Adams [и др.] // *Z.Phys.* — 1997. — Т. C74. — С. 237—261.
51. Spin Density Matrix Elements in Exclusive ρ^0 Electroproduction on H-1 and H-2 Targets at 27.5-GeV Beam Energy / A. Airapetian [и др.] // *Eur.Phys.J.* — 2009. — Т. C62. — С. 659—695.
52. *Vanderhaeghen M., Guichon P. A., Guidal M.* Hard electroproduction of photons and mesons on the nucleon // *Phys.Rev.Lett.* — 1998. — Т. 80. — С. 5064—5067.
53. *Goloskokov S., Kroll P.* The Longitudinal cross-section of vector meson electroproduction // *Eur.Phys.J.* — 2007. — Т. C50. — С. 829—842.
54. *Vanderhaeghen M., Guichon P. A., Guidal M.* Deeply virtual electroproduction of photons and mesons on the nucleon: Leading order amplitudes and power corrections // *Phys.Rev.* — 1999. — Т. D60. — С. 094017.
55. *Guidal M., Morrow S.* Exclusive ρ^0 electroproduction on the proton: GPDs or not GPDs? // *Eur.Phys.J.* — 2007. — Т. A39. — С. 5—31.
56. Off - forward quark distributions of the nucleon in the large N(c) limit / V. Y. Petrov, P. Pobylitsa, M. V. Polyakov, I. Bornig, K. Goeke [и др.] // *Phys.Rev.* — 1998. — Т. D57. — С. 4325—4333.
57. *Goloskokov S.* Generalized Parton Distributions in light meson production // *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* — 2011. — Т. 219/220. — С. 185—192.
58. *Bjorken J. D.* Applications of the Chiral U(6) x (6) Algebra of Current Densities // *Phys. Rev.* — 1966. — Т. 148. — С. 1467—1478.
59. *Bjorken J. D.* Inelastic Scattering of Polarized Leptons from Polarized Nucleons // *Phys. Rev. D.* — 1970. — Т. 1. — С. 1376—1379.
60. *Shuryak E. V., Vainshtein A. I.* Theory of Power Corrections to Deep Inelastic Scattering in Quantum Chromodynamics. 2. Q^4 Effects: Polarized Target // *Nucl. Phys. B.* — 1982. — Т. 201. — С. 141.

61. *Balitsky I. I., Braun V. M., Kolesnichenko A. V.* Power corrections $1/Q^2$ to parton sum rules for deep inelastic scattering from polarized targets // Phys. Lett. B. — 1990. — T. 242. — C. 245–250. — [Erratum: Phys.Lett.B 318, 648 (1993)].
62. Review of Particle Physics / P. A. Zyla [и др.] // PTEP. — 2020. — T. 2020, № 8. — C. 083C01.
63. *Shirkov D. V.* 'Massive' Perturbative QCD, regular in the IR limit // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2013. — T. 10. — C. 186–192.
64. *Soffer J., Teryaev O.* The Role of g_2 in relating the Schwinger and Gerasimov-Drell-Hearn sum rules // Phys. Rev. Lett. — 1993. — T. 70. — C. 3373–3375.
65. *Soffer J., Teryaev O.* QCD radiative and power corrections and generalized GDH sum rules // Phys. Rev. D. — 2004. — T. 70. — C. 116004.
66. *Gerasimov S. B.* A Sum rule for magnetic moments and the damping of the nucleon magnetic moment in nuclei // Sov. J. Nucl. Phys. — 1966. — T. 2. — C. 430–433. — [Yad. Fiz.2,598(1965)].
67. *Drell S. D., Hearn A. C.* Exact Sum Rule for Nucleon Magnetic Moments // Phys. Rev. Lett. — 1966. — T. 16. — C. 908–911.
68. *Burkhardt H., Cottingham W. N.* Sum rules for forward virtual Compton scattering // Annals Phys. — 1970. — T. 56. — C. 453–463.
69. *Teryaev O.* Analyticity and higher twists // Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 2013. — T. 245. — C. 195–198.
70. *Breit G., Wigner E.* Capture of Slow Neutrons // Phys. Rev. — 1936. — T. 49. — C. 519–531.
71. Four-loop QCD analysis of the Bjorken sum rule vs data / V. L. Khandramai, R. S. Pasechnik, D. V. Shirkov, O. P. Solovtsova, O. V. Teryaev // Phys. Lett. — 2012. — T. B706. — C. 340–344.
72. High precision determination of the Q^2 evolution of the Bjorken Sum / A. Deur [и др.] // Phys. Rev. D. — 2014. — T. 90, № 1. — C. 012009.
73. Cut moments approach in the analysis of DIS data / D. Kotlorz, S. V. Mikhailov, O. V. Teryaev, A. Kotlorz // Phys. Rev. D. — 2017. — T. 96, № 1. — C. 016015.
74. Experimental study of the behavior of the Bjorken sum at very low Q^2 / A. Deur [и др.] // Phys. Lett. B. — 2022. — T. 825. — C. 136878.
75. *Kotikov A. V., Zemlyakov I. A.* Fractional analytic QCD beyond leading order // J. Phys. G. — 2023. — T. 50, № 1. — C. 015001.

76. *Chen J.-P., Deur A., Meziani Z.-E.* Sum rules and moments of the nucleon spin structure functions // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2005. — T. 20. — C. 2745—2766.
77. *Chen J.-p.* Spin sum rules and polarizabilities: results from Jefferson lab //. — 11.2006. — arXiv: [nucl-ex/0611024](https://arxiv.org/abs/nuc1-ex/0611024).
78. *Ayala C., Pineda A.* Bjorken sum rule with hyperasymptotic precision // *Phys. Rev. D.* — 2022. — T. 106, № 5. — C. 056023.