

Объединенный институт ядерных исследований

На правах рукописи

Жабицкий Вячеслав Михайлович

**Динамика пучка в синхротронах
с цифровыми системами подавления
когерентных колебаний заряженных частиц**

01.04.20 – Физика пучков заряженных частиц и ускорительная техника

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Дубна – 2013

Работа выполнена в Лаборатории физики высоких энергий им. В.И. Векслера и А.М. Балдина Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

Агафонов Алексей Вениаминович,

доктор физико-математических наук,

Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, г. Москва;

Зенкевич Павел Романович,

доктор физико-математических наук,

Институт теоретической и экспериментальной физики, г. Москва;

Фещенко Александр Владимирович,

доктор физико-математических наук,

Институт ядерных исследований Российской академии наук, г. Москва.

Ведущая организация:


Институт физики высоких энергий, г. Протвино Московской области.

Защита состоится «_____» _____ 2013 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д720.001.03 при Лаборатории ядерных проблем им. В.П. Джемелова Объединенного института ядерных исследований по адресу:
141980 г. Дубна Московской области, ул. Жолио-Кюри, д. 6.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан «_____» _____ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук



Ю.А. Батусов

Общая характеристика работы

Представлены результаты теоретического исследования динамики пучка в синхротронах с системами подавления когерентных колебаний заряженных частиц на основе оригинальных моделей с целью уточнения имеющихся закономерностей и выявления ограничений, обусловленных использованием цифровых методов обработки сигналов в цепи обратной связи системы подавления. Выявлены количественные и качественные закономерности для сдвигов частот и декрементов затухания когерентных колебаний сгустков в синхротроне при наличии системы подавления, согласующиеся с экспериментальными данными, полученными на Большом Адронном Коллайдере (LHC) на протонном пучке.

Актуальность работы

Разработка, проектирование, модернизация и эксплуатация ускорительных комплексов протонов и ионов, таких как LHC (ЦЕРН), У-70 (ИФВЭ, Протвино), FAIR (GSI, Дармштадт), NICA (ОИЯИ), включающих в себя несколько синхротронов с высокими требованиями физического эксперимента к интенсивности и фазовой плотности пучка или коллайдер с предельно возможной светимостью, сопровождаются решением научно-технических задач ускорительной физики и техники, среди которых можно выделить пять проблем, относящихся к заявленной теме диссертации:

1. Достижение высокой интенсивности пучка заряженных частиц.
2. Сохранение фазовой плотности пучка при переводе из синхротрона-инжектора в принимающий синхротрон.
3. Обеспечение повторяемости расчетных параметров пучка в различных ускорительных циклах.
4. Контроль параметров синхротрона с требуемой точностью без заметного ухудшения качества пучка при длительных циклах ускорения и накопления.
5. Внедрение цифровых технологий в управляющей системе, обеспечивающей демпфирование когерентных колебаний сгустков.

Повышение интенсивности пучков заряженных частиц является одной из основных задач в ускорительной физике и технике. Одним из факторов ограничения интенсивности пучка в синхротронах и накопителях являются когерентные неустойчивости. Число обнаруженных к настоящему времени различных типов когерентных неустойчивостей весьма велико. Обусловленные ими ограничения на интенсивность ускоряемого пучка заставляют разрабатывать методы их изучения и подавления. С этой целью в современных синхротронах широко используются системы подавления (СП) когерентных колебаний пучка заряженных частиц [L1]. В таких системах демпфирующий дефлектор осуществляет коррекцию импульса пролетающих заряженных частиц пропорционально их отклонению от положения равновесия, измеренному в предшествующие моменты времени с помощью датчика положения центра тяжести пучка. Подобные СП позволили существенным образом повысить интенсивность ускоряемого пучка. В связи с этим в составе современных протонных синхротронов функционируют системы подавления когерентных колебаний, обеспечивающие, как это отмечено в литературном обзоре диссертации, декремент затухания колебаний $\alpha \lesssim 0.012$. При этом актуален вопрос о требованиях к СП в зависимости от интенсивности ускоряемых сгустков и структуры ускоряемого пучка.

В современных ускорительных комплексах, в составе которых функционируют несколько синхротронов, при переводе сгустков из синхротрона-инжектора в принимающий синхротрон неизбежно возникают отклонения инжектируемых сгустков от расчетных положений их устойчивого равновесия. При этом инжектируемые заряженные частицы, циркулируя в синхротроне, совершают малые колебания вблизи своего положения устойчивого равновесия: бетатронные колебания в поперечном направлении (вертикальной и горизонтальной плоскостях) относительно мгновенной замкнутой орбиты (деформированной или расчетной) в ведущем магнитном поле и синхротронные колебания в продольном направлении относительно синхронной фазы. Из-за ошибок инжекции эти малые колебания частиц, вследствие их электромагнитного взаимодействия с другими

частицами, могут инициировать совместные колебания выделенной группы частиц (сгустка) и становиться когерентными. Вследствие энергетического разброса частиц в инжектируемом пучке малые когерентные колебания переходят в некогерентные (процесс естественного затухания когерентных колебаний), что сопровождается увеличением линейных размеров сгустков. Происходит уменьшение фазовой плотности пучка. Так, на ускорительном комплексе ЦЕРН, в составе которого цепочка из четырех синхротронов, нормализованный поперечный эмиттанс пучка возрастает почти в 1.5 раза в основном из-за ошибок инжекции. В связи с этим необходимо подавлять когерентные колебания сгустков после инжекции с высоким темпом за промежутки времени, которые должны быть короче времени перехода когерентных колебаний в некогерентные. Поэтому актуальны оценки предельных темпов подавления в контексте допусков на рост эмиттанса пучка в условиях двух конкурирующих процессов (естественного затухания и подавления когерентных колебаний).

Система подавления когерентных колебаний, будучи установленной на синхротроне и настроенной в соответствии с выбранной рабочей точкой по числу колебаний за оборот Q_0 , должна обеспечивать стабильное подавление когерентных колебаний при вариации Q_0 . В литературе отсутствуют сведения о допусках на величину изменения Q_0 , которые необходимы при проектировании СП.

При исследовании динамики пучка в синхротроне при наличии СП используются дифференциальные уравнения малых колебаний [L2]:

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \frac{F_d(x(t - \tau))}{m_0 \gamma},$$

где Ω — циклическая частота колебаний заряженной частицы с массой m_0 в фокусирующем электромагнитном поле, γ — релятивистский фактор, τ — величина задержки сигнала в цепи обратной связи. Рекомендации [L2], получающиеся в сглаженном приближении при эмпирической замене импульсной силы $F_d(x)$ на диссипативную, пропорциональную скорости \dot{x} , как минимум необходимо уточнить при использовании цифровой СП, поскольку результирующая сила воздей-

ствия дефлектора на пучок пропорциональна суперпозиции сигналов с датчика положения, зафиксированных на нескольких оборотах.

Основным направлением проектирования и развития СП является применение методов цифровой обработки сигналов в цепи обратной связи. Существующие предсказания по тактовой частоте цифровых систем подавления и оценки влияния шумов квантования на рост эмиттанса пучка не приводят к каким-либо ограничениям, обусловленным использованием цифровых технологий. Вместе с тем отсутствуют предсказания по возможным ограничениям на величины декрементов когерентных колебаний при использовании цифровых СП.

Основные параметры ускорительного цикла контролируются и регулируются с помощью цепей обратной связи в процессе ускорения. При измерении параметров пучка в ряде случаев используются методы импульсного гармонического воздействия на сгусток, например, с помощью электромагнитного толкателя. Эти воздействия могут быть систематическими (например, с целью контроля качества пучка после инжекции) или случайными (например, при измерении частот бетатронных колебаний в произвольный момент времени в пределах ускорительного цикла). Амплитуда возбужденных когерентных колебаний должна быть достаточной по величине для детектирования сигналов и измерения параметров колебаний с требуемой точностью. Однако система подавления, обеспечивая затухание когерентных колебаний, приводит к неизбежному сокращению промежутка времени, в течение которого измеряемый сигнал может быть идентифицирован на уровне шумов. Поэтому необходимы оценки для величин и продолжительности действия сил возбуждения когерентных колебаний при наличии СП с учетом их возможного влияния на рост эмиттанса.

Актуальность перечисленных выше физических задач и поиск путей их решения явились мотивацией к выполнению данной работы.

Цель диссертационной работы:

– построение физико-математической модели, описывающей динамику пучка заряженных частиц после инжекции и при ускорении под влиянием управляю-

- ших воздействий цифровой системы обратной связи, приводящих к затуханию когерентных колебаний;
- получение аналитических решений, позволяющих сопоставить расчетные данные (например, декременты затухания когерентных колебаний) с экспериментально наблюдаемыми характеристиками колебательного процесса в максимально приближенных к эксперименту условиях, в том числе при темпах подавления, близких к предельно возможным;
 - сопоставление результатов разработанной модели с получающимися в линейном приближении решениями уравнений динамики пучка при использовании метода Крылова—Боголюбова—Митропольского и методов решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом;
 - формулирование перечня спецификаций для физико-технических обоснований проектов цифровых систем подавления в новых синхротронах с учетом опыта создания такой системы для ЛНС (ЦЕРН) в совместном проекте ЦЕРН и ОИЯИ.

Научная новизна

Приведены результаты теоретического исследования динамики сгустков заряженных частиц в синхротронах с цифровыми системами обратной связи с помощью методов дискретного анализа:

- уточнены зависимости и выявлены ограничения для декрементов затухания и частот когерентных бетатронных колебаний от величины баланса фаз, численно равной разности между набегом фазы бетатронных колебаний частицы при пролете от измерительного датчика до демпфирующего дефлектора и изменением фазы управляющего сигнала в цепи обратной связи;
- впервые продемонстрировано, что при использовании цифровых фильтров в цепи обратной связи систем подавления с задержкой сигнала более чем на один оборот возникают дополнительные к бетатронным моды колебаний сгустков, которые влияют на область устойчивости движения частиц;
- введено новое понятие: сепаратриса для декрементов затухания когерентных поперечных колебаний; приведен метод расчета, позволяющий установить кон-

фигурацию сепаратрисы и карты изолиний для декрементов затухания; показано, что высота сепаратрисы зависит от параметров цифрового фильтра и величины баланса фаз.

Практическая значимость

Разработанные в диссертации методы позволяют упростить качественный анализ цифровых систем подавления когерентных колебаний, а также усовершенствовать методы и оценки их характеристик с учетом найденных аналитических решений без трудоемких численных расчетов.

Достоверность и эффективность предложенных расчетных методов позволяют использовать их при проектировании современных синхротронов для выявления новых цифровых методов обработки детектируемых сигналов, не нарушающих условий устойчивости движения частиц, но повышающих помехоустойчивость управляющих процессов и позволяющих работать с меньшими уровнями входных сигналов и демпфирующих воздействий.

Разработанные методы применены автором диссертации для анализа режимов работы системы подавления когерентных поперечных колебаний пучка в ЛНС (ЦЕРН) и сопоставления проектных и фактических характеристик системы подавления, созданной в совместном проекте ЦЕРН и ОИЯИ.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту

1. Результаты исследования динамики пучка в синхротронах с системами обратной связи, основанного на использовании методов дискретной математики.
2. Результаты расчетных и экспериментальных данных для сдвигов частот и декрементов затухания когерентных поперечных колебаний протонов в ЛНС.
3. Оригинальный подход для учета флуктуаций положения рабочей точки по числу бетатронных колебаний в синхротроне с цифровой системой обратной связи, приводящий к новому понятию – сепаратриса для декрементов затухания.
4. Доказано, что сдвиги частот и декременты затухания когерентных колебаний, вычисленные в линейном приближении по величине коэффициента обратной связи для сглаженных уравнений динамики пучка с помощью метода Крылова—

Боголюбова—Митропольского и методов решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, совпадают с соответствующими выражениями, вычисленными при использовании методов дискретного анализа.

5. Аналитический подход к решению задачи о подавлении остаточных колебаний сгустков после инъекции в синхротрон с цифровой системой обратной связи, имеющей нелинейную передаточную характеристику.

6. Основные результаты разработки, наладки и эксплуатации системы подавления когерентных поперечных колебаний пучка в ЛНС, обладающей существенными элементами новизны в принятых технических решениях.

Апробация работы

Результаты, приведенные в диссертации, докладывались на научных семинарах ОИЯИ, обсуждались в ускорительном подразделении ЦЕРН в связи с работами по созданию систем подавления когерентных колебаний пучка в ЛНС, докладывались на Международных конференциях по физике и технике ускорителей заряженных частиц, проходивших

– в России: RuPAC'94 [16, 17], RuPAC'98 [21], RuPAC'08 [23], RuPAC'10 [25, 26], RuPAC'12 [15],

– в зарубежных странах: HEAC'93 [18], PAC'93 [10], EPAC'94 [19], EPAC'96 [20], COOL'97 [8, 9], PAC'97 [11], EPAC'98 [12], PAC'99 [13], EPAC'00 [22], Sarantsev'05 [1], EPAC'08 [14], HIAT'09 [24], Sarantsev'09 [3], Sarantsev'11 [4].

Достоверность и обоснованность

Основные результаты физико-математического исследования цифровых систем подавления когерентных колебаний пучка заряженных частиц в синхротронах подтверждены экспериментальными работами, выполненными на Большом Адронном Коллайдере (ЛНС, ЦЕРН) при изучении поперечной динамики пучка при рекордных энергиях протонов от 450 ГэВ до 4 ТэВ.

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 36 печатных работах, из них 9 статей в рецензируемых журналах [1–9] и 17 статей в трудах конференций [10–26].

Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Полученные лично автором результаты опубликованы в виде 8 статей [1–8] в рецензируемых журналах, 10 докладов [11–13, 15, 19–22, 24, 26] в трудах конференций и 5 сообщений ОИЯИ [27, 29, 33, 34] и ЦЕРН [35].

В перечне устных докладов на международных конференциях включены 2 доклада [23, 25], которые диссертант представлял от имени коллаборации “LHC Damper” как первые экспериментальные результаты по наладке системы подавления когерентных поперечных колебаний протонного пучка в LHC.

Подготовка других публикаций [9, 10, 14, 16–18, 28, 30–32, 36] проводилась совместно с соавторами на паритетных началах.

Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 7 глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, библиографии и приложения. Общий объем диссертации 224 страницы, включая 33 рисунка и 3 таблицы. Библиография включает 138 наименований на 18 страницах.

Содержание работы

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту основные положения.

В **Литературном обзоре** приведены научные результаты и экспериментальные данные, которые сопоставляются в диссертации с полученными автором результатами.

В **Главе 1** изложено обоснование физико-математической модели цифровой широкополосной системы подавления когерентных поперечных колебаний

«жесткого» сгустка. Динамика такого одиночного сгустка описывается с помощью линейных матричных уравнений движения заряженной частицы в синхротроне [L3] и линейных разностных уравнений для цифровых фильтров с конечной и бесконечной импульсной характеристикой [L4]. Состояние частицы задается с помощью матрицы-столбца $\hat{X}(n, s)$ на обороте n в точке s орбиты с периметром C_0 . Её первый элемент есть $x(n, s)$ – смещение частицы относительно мгновенной замкнутой (равновесной или деформированной) орбиты, а второй элемент $x'(n, s)$ – угол наклона траектории частицы. Для вычисления функции

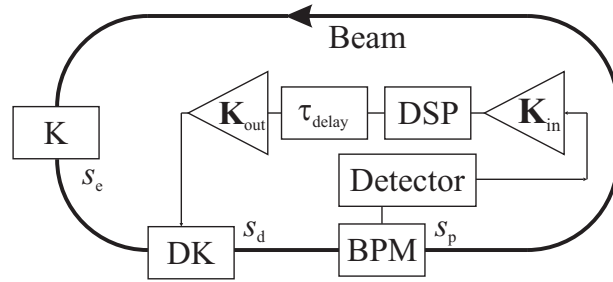


Рис. 1. Структурная схема цифровой системы подавления когерентных колебаний пучка [L2]

ональных зависимостей $\langle x(n, s) \rangle$ и $\langle x'(n, s) \rangle$ для ансамбля частиц «жесткого» сгустка используется процедура усреднения с помощью стационарных в широком смысле функций распределения в соответствии с общепринятыми моделями и предположениями [L5]. Для смещения центра тяжести сгустка $x[n, s]$ и угла наклона его траектории $x'[n, s]$ используется модельное приближение о равенстве дискретных и непрерывных усредненных величин смещений $x[n, s] = \langle x(n, s) \rangle$ и их производных. Такое же соглашение принимается для импульсного воздействия демпфирующего дефлектора $\langle \Delta x'_d(n) \rangle = \Delta x'_d[n]$ и импульсного толкателя $\langle \Delta x'_e(n) \rangle = \Delta x'_e[n]$ (см. рис. 1). Тогда [5, 27]:

$$\hat{X}[n + 1, s] \equiv \hat{X}[n, s + C_0] = \hat{M}(s)\hat{X}[n, s] + \Delta x'_d[n] \hat{M}_d \hat{E} + \Delta x'_e[n] \hat{M}_e \hat{E}, \quad (1)$$

где в матрице-столбце \hat{E} имеем $E_1 = 0$ и $E_2 = 1$. Для матриц перехода $\hat{M}(s_2|s_1)$ из точки s_1 в позицию s_2 используются общепринятые обозначения [L3]:

$$\hat{M}(s) \equiv \hat{M}(s + C_0|s), \quad \hat{M}_d \equiv \hat{M}(s + C_0|s_d), \quad \hat{M}_e \equiv \hat{M}(s + C_0|s_e).$$

Дискретное смещение сгустка в датчике положения $x[n, s_p] \equiv x[n]$ отождест-

вляется с дискретным отсчетом на входе радиотехнической цепи обратной связи, пропорциональным входному напряжению $V_{in}[n]$. Поэтому для цепи обратной связи можно записать [5, 27]:

$$\begin{aligned} V_{in}[n] &= (x[n] + \delta x_p) S_{in} K_{in} u[n], \\ V_{fltr}[n] &= \sum_{m=0}^{N_f} b[m] V_{in}[n-m] u[n-m] + \sum_{m=1}^{N_r} c[m] V_{fltr}[n-m] u[n-m], \\ \Delta x'_d[n] &= \kappa S_{out} V_{out}[n] = \kappa S_{out} K_{out} V_{fltr}[n-\hat{q}] u[n-\hat{q}], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\kappa = \pm 1$ — коэффициент, учитывающий полярность подаваемого на дефлектор ДК управляющего напряжения, S_{in} — чувствительность измерительного датчика ВРМ, K_{in} — коэффициент усиления по напряжению входных усилителей, δx_p — погрешность измерения бетатронных смещений колеблющейся частицы в месте расположения ВРМ, S_{out} — передаточная характеристика дефлектора, K_{out} — коэффициент усиления по напряжению выходных усилителей, $u[n]$ — функция Хевисайда, N_f — порядок фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтр), $b[m]$ — коэффициенты КИХ-фильтра в управляющем процессоре DSP, N_r — порядок фильтра с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтр), $c[m]$ — коэффициенты БИХ-фильтра [L4], V_{fltr} — выходное напряжение после фильтра, V_{out} — напряжение на выходе цепи обратной связи. В (2) учтено, что синхронизация отсчётов $V_{in}[n]$ и $V_{out}[n]$ может осуществляться с задержкой на \hat{q} оборотов. Иначе говоря, если $t(0, s_p)$ есть момент пролета частицы сквозь ВРМ после инжекции, $\tau \equiv \tau_{pd}$ — время пролета частицы от ВРМ до ДК, то корректирующий сигнал должен возникнуть в ДК в момент времени $t(\hat{q}, s_d)$ такой, что [5]

$$\tau + \hat{q} T_0 = t(\hat{q}, s_d) - t(0, s_p). \quad (3)$$

Величина \hat{q} далее называется кратностью задержки. Обычно $\hat{q} = 0$ на ускорителях с большой длиной дорожки, однако в электронных синхротронах для выполнения условий синхронизации с учётом реальной задержки в цепи обратной связи приходится выбирать отличные от нуля значения \hat{q} .

Для решения полученной системы линейных разностных уравнений (1) и (2) можно использовать преобразование Лорана (\mathcal{Z} -преобразование) [L4]:

$$\mathbf{y}(z, s) \equiv \mathcal{Z}\{y[n, s]\} = \sum_{n=0}^{\infty} y[n, s] z^{-n}, \quad y[n, s] = 0 \quad \forall n < 0, \quad s \in [0, C_0], \quad (4)$$

$$y[n, s] \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{\mathbf{y}(z, s)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \mathbf{y}(z, s) z^{n-1} dz = \sum_r \text{Res}[\mathbf{y}(z_r, s) z_r^{n-1}; z_r],$$

где Γ – замкнутый контур, окружающий все особые точки z_r функции $\mathbf{y}(z, s)$ на комплексной z -плоскости, причем $|z_r| < 1$. После выполнения \mathcal{Z} -преобразования в уравнениях (1) и (2) получаются следующие выражения [5, 27]:

$$\hat{\mathbf{X}}(z, s) = \frac{z\hat{I} - \hat{\mathbf{M}}^{-1} \det \hat{\mathbf{M}}}{\det(z\hat{I} - \hat{\mathbf{M}})} \left(z\hat{X}[0, s] + \frac{\hat{g}(z) \delta x_p}{(1 - z^{-1})(\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p)^{1/2}} \hat{M}_d \hat{E} + \mathcal{Z}\{\Delta x'_e[n]\} \hat{M}_e \hat{E} \right). \quad (5)$$

Здесь \hat{I} – единичная матрица, $\hat{X}[0, s]$ – начальное состояние сгустка, а матрица $\hat{\mathbf{M}}$ имеет вид

$$\hat{\mathbf{M}} \equiv \hat{\mathbf{M}}(Q_0, z, s) = \hat{M}(s) + \frac{\hat{g}(z)}{(\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p)^{1/2}} \hat{M}_d \hat{T} \hat{M}(s_p|s), \quad (6)$$

где $\hat{\beta}_i$ – функции Твисса [L5] в точках расположения ВРМ и ДК, \hat{T} – квадратная 2×2 матрица, в которой $T_{21} = 1$, а все остальные элементы равны нулю. Следует подчеркнуть, что оптические функции Твисса и набег бетаатронных фаз в матрицах $\hat{M}(s)$, $\hat{M}_d(s + C_0|s_d)$ и $\hat{M}(s_p|s)$ заданы на орбите, где число бетаатронных колебаний за оборот равно Q_0 . Это отражено в определении матрицы $\hat{\mathbf{M}}$ в (6), где зависимость от Q_0 указана в явном виде как $\hat{\mathbf{M}}(Q_0, z, s)$. Функция $\hat{g}(z)$, входящая в (5) и (6), определена следующим образом [5]:

$$\hat{g}(z) = z^{-\hat{q}} \kappa \mathbf{K}(z) S_{\text{in}} S_{\text{out}} \sqrt{\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p}. \quad (7)$$

В (7) введено обозначение $\mathbf{K}(z) \equiv K_{\text{in}} K_{\text{out}} H(z)$ для передаточной функции радиотехнической части цепи обратной связи, зависящей от передаточной функции [L4] цифрового фильтра $H(z) = \mathcal{Z}\{V_{\text{ftr}}[n]\}$:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{V_{\text{ftr}}[n]\} = \left(b[0] + \sum_{m=1}^{N_f} b[m] z^{-m} \right) \left(1 - \sum_{m=1}^{N_r} c[m] z^{-m} \right)^{-1}. \quad (8)$$

Собственные значения z_r есть решения характеристического уравнения [5, 27]:

$$\begin{aligned} \det \left(z_r \hat{I} - \hat{\mathbf{M}}(Q_0, z_r, s) \right) &\equiv z_r^2 - z_r \operatorname{tr} \hat{\mathbf{M}}(Q_0, z_r, s) + \det \hat{\mathbf{M}}(Q_0, z_r, s) \\ &= z_r^2 - (2 \cos \mu + \hat{g}(z_r) \sin(\mu - \eta)) z_r + 1 - \hat{g}(z_r) \sin \eta = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mu = 2\pi Q_0$ есть набег фазы бетатронных колебаний за оборот, а η – от ВРМ до ДК. Уравнение (9) при $\hat{g} = 0$ есть квадратное уравнение, имеющее два комплексно-сопряжённых корня $z_{1,2} = \exp(\pm j 2\pi Q_0)$, т.е. хорошо известное решение для бетатронных колебаний [L5]. В этом случае величина $\arg z_{1,2} = 2\pi \{Q_0\}$ есть приращение фазы бетатронных колебаний за оборот ($\{Q_0\}$ – дробная часть Q_0 : $-0.5 < \{Q_0\} \leq 0.5$), которое фиксируется как наблюдаемая величина в сигнале с датчика положения [L2]. Этому приращению можно сопоставить циклическую частоту Ω_β и абсолютную величину Q_β для $\{Q_0\}$:

$$Q_\beta \equiv |\{Q_0\}|, \quad \Omega_\beta \equiv Q_\beta \omega_0, \quad \omega_0 \equiv 2\pi/T_0, \quad \Omega_\beta T_0 = 2\pi Q_\beta.$$

Величины Ω_β и Q_β далее будут использоваться в качестве характеристики минимальной моды бетатронных колебаний. С учетом принятого в радиотехнике правила соответствия $\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{K}(z = \exp(j\omega T_0))$ для $\hat{g}(z)$ можно записать [5]:

$$\hat{g}(z) = g z^{-\hat{q}} \frac{\chi \mathbf{K}(z)}{\mathbf{K}_0}, \quad g \equiv S_{\text{in}} S_{\text{out}} \mathbf{K}_0 \sqrt{\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p}, \quad \mathbf{K}_0 \equiv |\mathbf{K}(\Omega_\beta)|,$$

где $g \equiv |\hat{g}(\Omega_\beta)|$ – коэффициент обратной связи, причем $|\Delta \mathbf{x}'_d(\Omega_\beta)| (\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p)^{1/2} = g |\mathbf{x}_d(\Omega_\beta)|$. При $g \neq 0$ физический смысл имеют решения, для которых все моды колебаний являются затухающими ($|z_r| < 1$). Следовательно, для асимптотических решений [L4] можно записать для $\hat{\mathbf{X}}(z, s)$ из (5):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{X}[n, s] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \hat{\mathbf{X}}(z, s) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, все полюсы z_r функции $(z - 1)\hat{\mathbf{X}}(z, s)$ должны лежать внутри круга единичного радиуса, то есть влияние погрешностей δx_p в $\hat{\mathbf{X}}(z, s)$ должно быть исключено. Это возможно, если [5, 24, 27]

$$\hat{g}(z = 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b[0] + \sum_{m=1}^{N_f} b[m] = 0.$$

Последнее достигается благодаря применению в цепи обратной связи узкополосного заграждающего фильтра (notch filter, $H_n(z) = (1 - z^{-1})$) [24, 27].

Приближенные решения характеристического уравнения при $g \ll 1$ есть

$$z_{1,2} = \exp \left(\pm j 2\pi \left(Q_0 - \frac{g\kappa |\mathbf{K}(\omega)|}{4\pi K_0} e^{\mp j \Psi} \right) \right) = e^{-\alpha \pm j 2\pi \{Q\}}, \quad (11)$$

где введены следующие обозначения [5, 15]:

$$\begin{aligned} \omega &= (\pm Q_\beta + k) \omega_0, & \Psi &= \eta + 2\pi \hat{q} Q_0 - \arg \mathbf{K}(\omega), \\ \alpha &= \frac{g |\mathbf{K}(\omega)|}{2K_0} \kappa \sin \Psi, & \{Q\} &= \{Q_0\} - \frac{g |\mathbf{K}(\omega)|}{4\pi K_0} \kappa \cos \Psi, \\ \mathbf{K}(\omega) &= K_{in} K_{out} H(z = e^{j\omega T_0}), & K_0 &= |\mathbf{K}(\Omega_\beta)|, \quad \kappa \sin \Psi(\Omega_\beta) > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Определяющим параметром в (11) является баланс фаз Ψ , величина которого равна разности набега фазы бетатронных колебаний ($\eta + 2\pi \hat{q} Q_0$) для частицы при пролете от датчика положения до дефлектора (с учетом кратности задержки \hat{q}) и изменения фазы детектируемого сигнала $\arg \mathbf{K}(\omega)$ в цепи обратной связи. Декремент затухания максимален в резонансном случае, когда [5, 15]

$$|\sin \Psi| = 1 \quad \Rightarrow \quad \{Q\} = \{Q_0\}. \quad (13)$$

Таким образом, оптимальные условия для затухания колебаний могут быть получены при $\hat{q} = 0$ не только в случае $|\sin \eta| = 1$, что является обычным требованием при проектировании СП, но и при отклонении от этого условия для набега фазы бетатронных колебаний от датчика положения до дефлектора, если такое отклонение может быть скомпенсировано цифровым фильтром.

Поскольку $\hat{g}(z) \propto z^{-\hat{q}-N_f}$ при $N_r < N_f$, то характеристическое уравнение (9) является алгебраическим уравнением степени $(2 + \hat{q} + N_f)$ относительно z . Коэффициенты уравнения (9) — действительные числа. Следовательно, такое алгебраическое уравнение имеет парные комплексно-сопряжённые корни и/или различные вещественные корни (в частных случаях некоторые из вещественных корней могут совпадать). Решая алгебраическое уравнение (9), можно получить уточненные зависимости для декрементов затухания при росте величин коэффициента обратной связи g с учетом передаточной функции $H(z)$, зависящей от структурной схемы цифрового фильтра согласно (8). Таким образом, при использовании цифровых фильтров в цепи обратной связи систем подавления с

задержкой сигнала более чем на один оборот возникают дополнительные моды колебаний сгустков, которые ограничивают область устойчивости движения частиц при высоком темпе подавления колебаний [3, 5, 27].

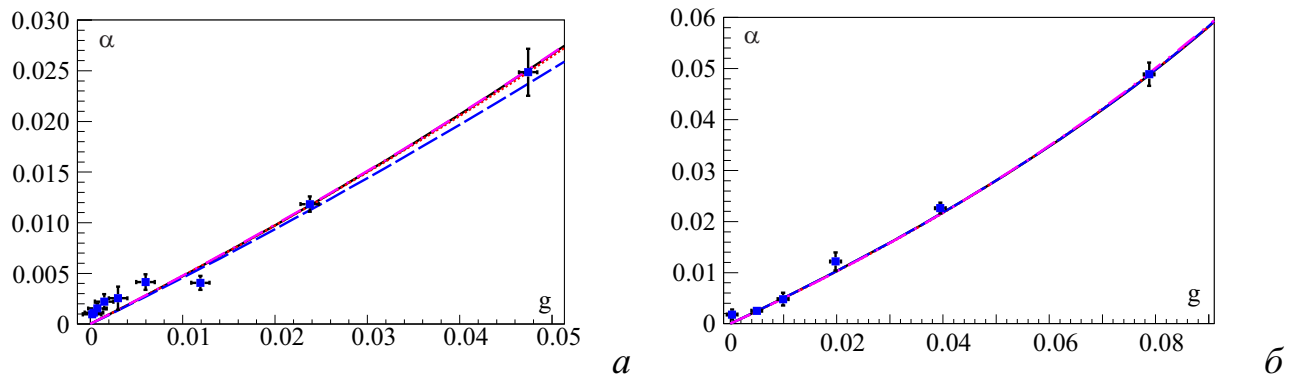


Рис. 2. Расчетные декременты затухания и результаты измерений горизонтальных (а) и вертикальных (б) когерентных поперечных колебаний пучка протонов с энергией 3.5 ТэВ в LHC [5, 15]

Так, в системе подавления когерентных поперечных колебаний пучка в LHC используются последовательно соединенные notch-фильтр и фильтр Гильберта [5]. На рис. 2 продемонстрировано совпадение экспериментальных данных с расчетными зависимостями $\alpha(g)$ для декрементов затухания колебаний при рекордной энергии 3.5 ТэВ протонного пучка в LHC в широком диапазоне величин коэффициента обратной связи ($g \leq 0.08$) вплоть до значений, для которых декремент затухания колебаний ($\alpha \leq 0.05$) по крайней мере в четыре раза превосходит достигнутый на других протонных синхротронах уровень ($\alpha \simeq 0.012$) [5, 15].

Результаты первой главы опубликованы в работах [3, 5, 8, 10, 15, 20, 24, 27].

В **Главе 2** приведены результаты исследования проблемы о конфигурации области устойчивого затухания когерентных поперечных колебаний сгустков при вариации основных параметров синхротрона, влияющих на бетатронное движение частицы [4, 8, 19]. Динамика взаимодействующих сгустков в синхротроне для отклонений $x_m[n]$ на каждом n -м обороте ($m \in [1, K_b]$, K_b – число сгустков) описывается с помощью линейных дифференциальных уравнений, в которых электромагнитное взаимодействие сгустков задано с помощью хвостовых полей, и линейных разностных уравнений для напряжений $V_m[n]$, возникающих

в цифровых фильтрах. Для решения полученной системы линейных уравнений использован метод \mathcal{Z} -преобразования. Возникающая после \mathcal{Z} -преобразования система линейных уравнений для $\mathbf{x}_m(z) = \mathcal{Z}\{x_m[n]\}$ с постоянными коэффициентами с помощью общеизвестной процедуры [L6] приводится к нормальным координатам $\mathbf{v}_m(z)$. В итоге получается характеристическое уравнение для собственных значений z_r , по форме совпадающее с характеристическим уравнением для «жесткого» сгустка (9), в котором, однако, фазовые набег для поперечных колебаний должны быть вычислены с учетом эффективного числа бетатронных колебаний за оборот $\mathbf{Q}_m(z_r) = Q_c + \Delta\mathbf{Q}_m(z_r)$ для конкретной моды колебательного процесса, описываемого с помощью нормальных координат $\mathbf{v}_m(z_r)$ (здесь $Q_c = Q_0 + \Delta Q_0$, где ΔQ_0 – квазистатическая поправка к Q_0). Каждому собственному значению z_r можно сопоставить циклическую частоту $\omega_{(k)}$, так что $j\omega_{(k)}T_0 = j2\pi k + \ln z_r(\mathbf{Q}_m)$, где k – целое число. Поскольку в первом приближении по силе взаимодействия сгустков при выключенной системе подавления имеем $z_r = \exp(\pm j2\pi Q_c)$, то для комплексных поправок $\Delta\mathbf{Q}_m(\omega_{(k)})$ в этом же приближении получаются выражения, совпадающие с известным результатом для неустойчивостей сгустков [32] и сплошного пучка [35] в зависимости от частоты $\omega_{(k)} = (\pm\{Q_c\} + k)\omega_0$. Наряду с периодичностью частот собственных волн, равной $k\omega_0$, для каждого k происходит расщепление $\omega_{(k)}$ на K_b спутников вследствие того, что $\Delta\mathbf{Q}_m$ есть функция от $K_b^{-1} \ln z_r$. Для большого числа сгустков K_b максимальный разброс $\Delta\mathbf{Q}^{(\max)}$ для спутниковых мод возникает в синхротронах с большой протяженностью орбиты в случае проникновения электромагнитного поля сгустков сквозь стенки вакуумной камеры с апертурой $2b$ [32]:

$$\Delta\mathbf{Q}^{(\max)}(\omega_{(k)}) = -\frac{2\nu_b K_b}{1 + j\omega_{(k)}T_1}, \quad \nu_b = \frac{r_0 N_b \hat{\beta}_{\text{av}}}{2\pi\gamma_0 b^2},$$

где T_1 – время диффузии поля в проводящие стенки камеры; ν_b – параметр, характеризующий взаимодействие сгустков; N_b – число частиц в сгустке; r_0 – классический радиус частицы [L5]; $\hat{\beta}_{\text{av}}$ – среднее значение $\hat{\beta}$ -функции по длине орбиты. Разброс частот спутниковых мод пропорционален инкременту неустойчивости $\nu_b K_b$. Набег фазы бетатронных колебаний η от датчика до дефлектора

зависит от $(Q_c + \text{Re } \Delta \mathbf{Q}^{(\max)}(\omega_{(k)}))$. Поэтому обеспечить строгое выполнение оптимальных условий (13) для подавления всех мод когерентных поперечных колебаний взаимодействующих сгустков одновременно невозможно [32].

Таким образом, наряду с зависимостью декремента затухания α от коэффициента обратной связи g возникает зависимость декремента от эффективной величины Q или от мгновенной величины Q при случайном смещении δQ_0 положения рабочей точки относительно расчетной величины Q_0 . Трехмерную

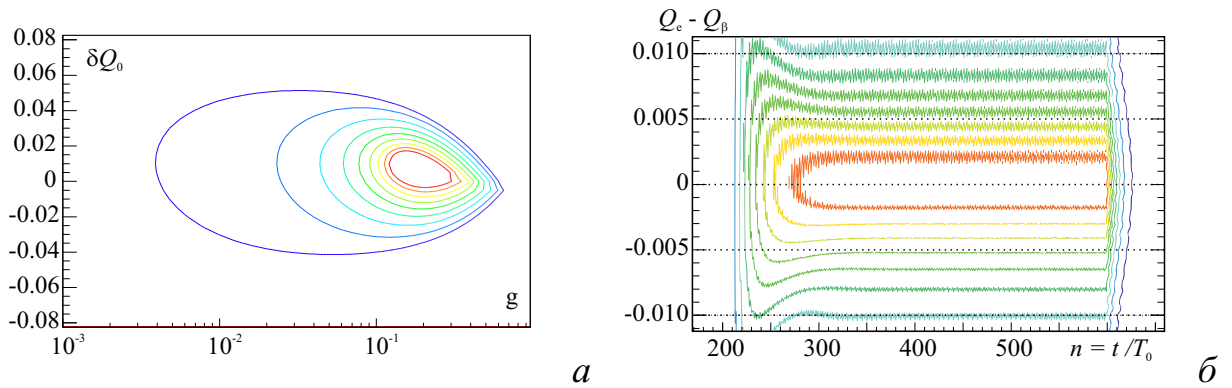


Рис. 3. Карты: (а) изолиний $\alpha(g, \delta Q_0) = \alpha_l$ [4] и (б) изоамплитуд $a_c(n, Q_e - Q_\beta) = a_l$ [5]

зависимость $\alpha(g, \delta Q_0)$ как функции двух переменных можно представить на плоскости $(g, \delta Q_0)$ в виде карты изолиний [4] — семейства линий, для каждой из которых величина декремента имеет постоянное значение α_l , например:

$$\alpha(g, \delta Q_0) = \alpha_l, \quad \alpha_0 = T_0/\tau_{\text{dec}}, \quad \alpha_l = l/80 \quad \forall l \in [1, 8],$$

где τ_{dec} — постоянная времени фазового перемешивания частиц. На рис. 3а приведен пример такой карты изолиний для СП с фильтром Гильберта [4]. Поскольку декремент подавления когерентных колебаний T_0/τ_d должен превосходить величину $\alpha_0 = T_0/\tau_{\text{dec}}$, то замкнутую кривую $\alpha(g, \delta Q_0) = \alpha_0$ можно отождествлять с сепаратрисой для декрементов затухания когерентных поперечных колебаний. Высота сепаратрисы зависит от параметров цифрового фильтра и баланса фаз [4]. Это означает, что требования к стабильности положения рабочей точки в синхротроне должны формулироваться с учетом высоты сепаратрисы.

В [5] выявлены закономерности для резонансной зависимости амплитуд a_e вынужденных колебаний сгустков в ответ на ограниченное во времени гармоническое воздействие с циклической частотой $\omega_e = (Q_e - Q_\beta)\omega_0$ от параметров цепи обратной связи с цифровым фильтром. Амплитуда вынужденного колебания возрастает при приближении Q_e к Q_β , но не обращается в бесконечность, как это происходит при резонансе в отсутствие СП. Установлено, что коэффициент резонансного усиления амплитуды вынужденных колебаний есть $R_e^{(\max)} = 1/2\alpha$. Трёхмерную зависимость $a_e(n = t/T_0, Q_e - Q_\beta)$ как функцию двух переменных можно представить на плоскости $(n, Q_e - Q_\beta)$ в виде карты изоамплитуд $a_e(n, Q_e - Q_\beta) = a_l$ (см. рис. 3б). Виден эффект смещения максимума резонансной кривой относительно Q_β . Установлено, что этот эффект зависит от баланса

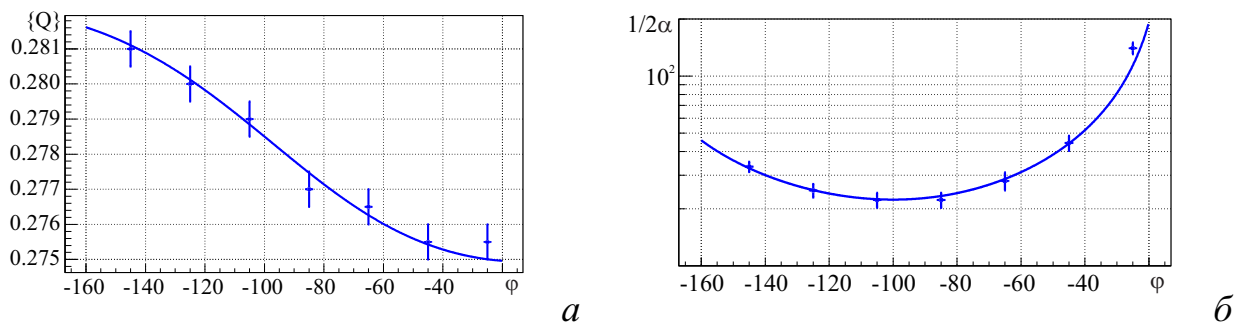


Рис. 4. Расчетные зависимости величины $\{Q\}$ (а) и коэффициента резонансного усиления (б) от фазового параметра φ фильтра Гильберта (сплошные линии) в сопоставлении с результатами экспериментальных измерений [7]

фаз [5]. Данный эффект был применен для тонкой настройки баланса фаз системы подавления когерентных поперечных колебаний протонного пучка с энергией 450 ГэВ в ЛНС. На рис. 4 приведены экспериментальные данные, подтверждающие наличие линейной поправки к когерентной частоте бетатронных колебаний при малом отклонении баланса фаз от оптимального значения [7].

Результаты второй главы опубликованы в работах [3–5, 7, 8, 16, 19, 28, 29, 31, 32, 34, 35].

В **Главе 3** приведены результаты исследования многоканальных систем подавления когерентных поперечных колебаний «жесткого» сгустка.

Основанием для изучения многоканальных систем подавления стали экспериментальные данные, полученные на синхротроне SPS (ЦЕРН) при исследовании устойчивости высокоинтенсивного пучка заряженных частиц при приближении числа бетатронных колебаний к полнцелому числу. Было обнаруже-

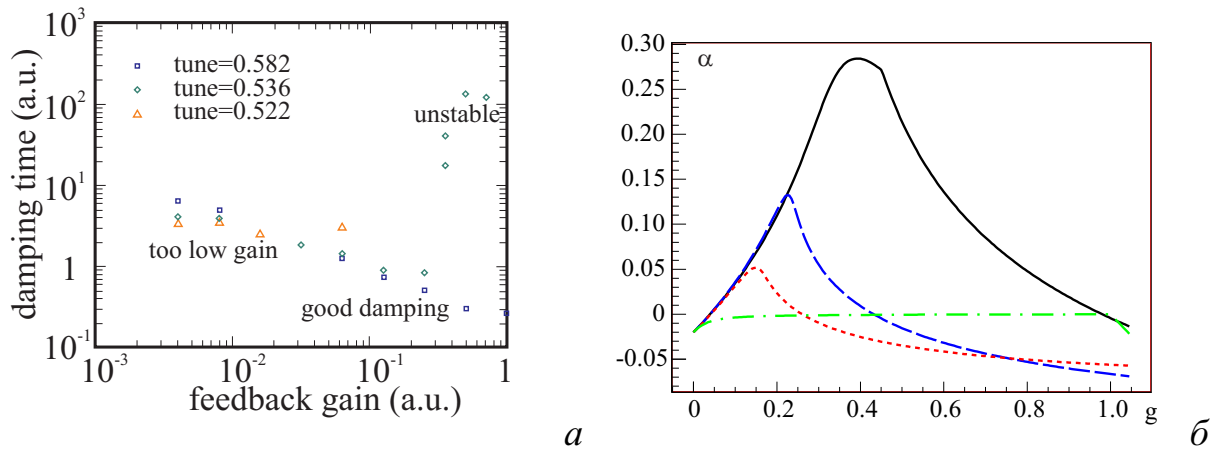


Рис. 5. (а) Результаты измерений постоянной затухания τ_d и (б) расчетные величины декрементов затухания $\alpha = T_0/\tau_d$ в зависимости от g для значений Q_0 : 26.582 (сплошная линия), 26.536 (пунктирная), 26.522 (точечная), 26.500 (штрих-пунктирная) [36]

но, что для величин коэффициента обратной связи, превышающих инкремент неустойчивости, пучок устойчив при $Q_0 = 26.582$, причем постоянная времени затухания уменьшается с ростом g и стабильность пучка в целом улучшается (см. рис. 5а) [36]. Однако при $Q_0 = 26.536$ диапазон величин g , при которых захваченный пучок был устойчив, резко сокращался. Ещё уже данный диапазон был при $Q_0 = 26.522$, причем, начиная с некоторых значений g , не удавалось сохранить пучок даже после инжекции. На рис. 5б представлены расчетные зависимости [36], полученные с учетом результатов предыдущих глав диссертации для области устойчивости пучка по диапазону допустимых величин коэффициента обратной связи при приближении числа бетатронных колебаний к полнцелому числу в синхротронах с одноканальной системой подавления. Видно существенное её сокращение, что соответствует экспериментальным измерениям на SPS.

С учетом этих результатов для классической (одноканальной) системы подавления приведено физико-математическое обоснование многоканальной и бы-

строй (двухканальной) [9, 18] систем подавления когерентных поперечных колебаний пучка заряженных частиц. В результате выполненного исследования [30, 31, 33] динамики пучка в синхротроне с многоканальной системой подавления когерентных поперечных колебаний, основанного на использовании метода дискретных преобразований для решения уравнений бетатронных колебаний, установлено, что при различных расстановках датчиков и дефлекторов, а также связях между ними, включая перекрестные, собственные значения характеристического уравнения зависят от набегов фаз бетатронных колебаний между датчиками и дефлекторами, но не зависят от параметров матрицы Твисса $\hat{\beta}$ и $\hat{\alpha}$ в местах их расположения. Получены аналитические выражения для декрементов затухания колебаний для быстрой СП при оптимальной расстановке датчиков и дефлекторов.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [9, 17, 18, 30, 31, 33, 36].

В **Главе 4** рассмотрены основные физические понятия, математический аппарат и методы решения системы линейных разностных уравнений [6, 26], описывающих продольную динамику заряженных сгустков в синхротроне при наличии системы подавления их когерентных продольных (синхротронных) колебаний. Продемонстрировано, что на плато магнитного поля и при ускорении демпфирование когерентных синхротронных колебаний возможно только при фазовой модуляции ускоряющего ВЧ-напряжения. Показано совпадение экспериментальных данных, полученных на синхротроне PETRA II (бустер для HERA в DESY), и расчетных величин для декрементов затухания когерентных продольных колебаний в апериодическом режиме.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [6, 26].

В **Главе 5** показано, что дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом [L7] описывают динамику пучка в синхротронах с системами обратной связи в рамках сглаженного приближения, традиционно используемого в теоретических исследованиях [L2] и заключающегося в замене локального демпфирующего воздействия непрерывно действующей корректирующей силой.

В [7] продемонстрировано, что для решения таких дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, описывающих динамику пучка в сглаженном приближении в синхротроне с системой обратной связи, можно использовать метод интегральных преобразований (одностороннее преобразование Фурье) и метод усреднения Крылова—Боголюбова—Митропольского (КБМ) [L8]. Например, в синхротроне с системой обратной связи с простейшим КИХ-фильтром сглаженное уравнение поперечной динамики пучка имеет вид [7, 27]

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = \frac{g\kappa\Omega}{T_0 H_0} \sum_{m=0}^{N_f} b[m] \left(x(t - \tau - (m + \hat{q})T_0) + \delta x_0 \right) u(t - \tau - (m + \hat{q})T_0), \quad (14)$$

где H_0 — нормировочная постоянная и $\Omega = Q_0 \omega_0$. Если использовать метод одностороннего преобразования Фурье для решения уравнения (14), то возникает следующее характеристическое уравнение [7]:

$$-\omega^2 + \Omega^2 - \frac{g\kappa\Omega}{T_0 H_0} H(\omega) e^{-j(\tau + \hat{q}T_0)\omega} = 0.$$

Данное уравнение, будучи трансцендентным, имеет бесконечное множество решений. Однако при слабой зависимости передаточной характеристики фильтра от частоты, когда

$$\frac{\Omega}{|H(\Omega)|} \left| \frac{dH(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\Omega} \ll 1,$$

можно воспользоваться методом Эйлера для решения характеристического уравнения, что в первом приближении по малому параметру g для собственных значений $\omega_r = \Omega + \omega_0 \Delta Q + j\alpha/T_0$ приведет к следующим выражениям [7]:

$$\alpha = \frac{g}{2} \frac{|H(\Omega)|}{H_0} \kappa \sin \Psi, \quad \Delta Q = -\frac{g}{4\pi} \frac{|H(\Omega)|}{H_0} \kappa \cos \Psi, \quad (15)$$

где величина баланса фаз есть

$$\Psi(\Omega) = \eta + 2\pi \hat{q} Q_0 - \arg H(\Omega), \quad \eta \equiv \Omega \tau = 2\pi Q_0 \tau / T_0.$$

Здесь $H(\Omega)$ — передаточная характеристика фильтра:

$$H(\Omega) = \sum_{m=0}^{N_f} b[m] e^{-jm\Omega T_0}, \quad m\Omega T_0 \equiv 2\pi m Q_0.$$

В [7] показано, что согласно методу усреднения КБМ для приближенных уравнений $\dot{a} = -\alpha a$ и $\dot{\psi} = (Q_0 + \Delta Q)\omega_0$, относящихся к основной гармонике, для α и ΔQ получаются выражения, совпадающие с (15).

В синхротроне сглаженное уравнение продольной динамики пучка при наличии системы обратной связи с простейшим КИХ-фильтром имеет вид [7]:

$$\ddot{\xi}(t) + \Omega^2 \xi(t) = \frac{g\kappa}{T_0 H_0} \frac{d}{dt} \left[\sum_{m=0}^{N_f} b[m] \left(\xi(t - \tau - (m + \hat{q})T_0) + \delta\xi_0 \right) u(t - \tau - (m + \hat{q})T_0) \right], \quad (16)$$

где $\xi \equiv \delta\phi_s$ – фазовое отклонение частицы от синхронной фазы, $\Omega \equiv \Omega_s = \nu_s \omega_0$ – циклическая частота синхротронных колебаний, ν_s – число таких колебаний за оборот, $\delta\xi_0$ – статическая погрешность измерения фазового отклонения частицы от синхронной фазы. Выполняя одностороннее преобразование Фурье, получаем следующее характеристическое уравнение [7]:

$$-\omega^2 + \Omega_s^2 + j\omega \frac{g\kappa}{T_0 H_0} H(\omega) e^{-j(\tau + \hat{q}T_0)\omega} = 0.$$

Если обеспечена слабая зависимость передаточной характеристики фильтра от частоты, то, воспользовавшись методом Эйлера, получаем следующие выражения для собственных значений [7]:

$$\omega_r = \Omega_s + j \frac{g\kappa}{T_0 H_0} |H(\Omega_s)| e^{-j\Psi(\Omega_s)} = \Omega_s + \omega_0 \Delta\nu_s + j \frac{\alpha_s}{T_0},$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(\Omega_s) &= \eta + 2\pi\hat{q}\nu_s - \arg H(\Omega_s), & \eta &\equiv \Omega_s \tau = 2\pi\nu_s \tau / T_0, \\ \alpha_s &= \frac{g}{2} \frac{|H(\Omega_s)|}{H_0} \kappa \cos \Psi(\Omega_s), & \Delta\nu_s &= \frac{g}{4\pi} \frac{|H(\Omega_s)|}{H_0} \kappa \sin \Psi(\Omega_s). \end{aligned}$$

Эти же выражения для α_s и $\Delta\nu_s$ нетрудно получить с помощью укороченных уравнений для основной гармонике при использовании метода усреднения КБМ. Вновь следует подчеркнуть, что определяющим параметром асимптотических свойств когерентных синхротронных колебательных мод является величина баланса фаз $\Psi(\Omega_s)$. Подбирая параметры фильтра $b[m]$, можно обеспечить оптимальные условия ($\sin \Psi(\Omega_s) = 0$) для подавления когерентных синхротронных

колебаний, когда декремент затухания колебаний максимален и колебательный процесс имеет резонансный характер ($\Delta\nu_s = 0$).

Таким образом, в линейном приближении по величине коэффициента обратной связи для сдвигов частот и декрементов затухания когерентных поперечных и продольных колебаний получаются аналитические выражения, которые совпадают с соответствующими выражениями оригинальных моделей, где использовались методы дискретной математики для учета локальности корректирующего воздействия, пропорционального локальному когерентному смещению сгустка.

Результаты пятой главы опубликованы в работе [7].

В **Главе 6** приведены некоторые результаты исследования динамики пучка в синхротроне с системой подавления когерентных поперечных колебаний с нелинейной передаточной характеристикой цепи обратной связи:

$$\sqrt{\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p} \Delta x'_d[n] = \epsilon f(x[n]), \quad \epsilon = g \kappa,$$

где $f(x[n])$ есть нелинейная функция от $x[n]$. Используя (1) для смещений «жёсткого» сгустка в датчике положения на трех последовательных оборотах при наличии корректирующего демпфирующего воздействия $\Delta x'_d[n]$ в отсутствие внешнего воздействия толкателя ($\Delta x'_e[n] = 0$), в [12] получено следующее уравнение:

$$\begin{aligned} x[n+2] - 2 \cos(\mu) x[n+1] + x[n] &= \\ &= \sqrt{\hat{\beta}_p \hat{\beta}_d} \left(\sin(\mu - \eta) \Delta x'_d[n+1] + \sin(\eta) \Delta x'_d[n] \right). \end{aligned} \quad (17)$$

В [13] для уравнения (17) с малым параметром ϵ , по аналогии с методом усреднения КБМ для нелинейных дифференциальных уравнений, получены следующие укороченные уравнения для амплитуды a_n и фазы ϕ_n основной гармоники $x[n] = a_n \sin \psi_n$:

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dn} &= \frac{g\kappa}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_n \sin \psi_n) \cos(\psi_n + \eta) d\psi_n; \\ \frac{d\phi_n}{dn} &= -\frac{g\kappa}{2\pi a_n} \int_0^{2\pi} f(a_n \sin \psi_n) \sin(\psi_n + \eta) d\psi_n. \end{aligned}$$

Эти выражения по форме совпадают с укороченными уравнениями для нелинейного дифференциального уравнения, в которых фазовый сдвиг $\eta \equiv \psi_{pd}$, связанный с задержкой демпфирующего сигнала, присутствует в явном виде. Отсюда, например, для кубической нелинейности $f(x[n]) = x[n] + (x[n])^3 g_3$ имеем [12]:

$$a_n = \frac{a_0 \exp(-n\alpha)}{\sqrt{1 + (3g_3 a_0^2/4)(1 - \exp(-2n\alpha))}}, \quad \alpha = \frac{g_3 x}{2} \sin \eta.$$

Это выражение для зависимости амплитуды колебаний от времени совпадает с хорошо известным результатом для нелинейного дифференциального уравнения для осциллятора со слабым трением [L8]. Для величины отношения амплитуд линейных и нелинейных колебаний получаем [12, 21]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\text{linear})}{a_n(\text{nonlinear})} = \sqrt{1 + 3g_3 a_0^2/4}.$$

Таким образом, «жесткая» нелинейность ($g_3 > 0$) приводит к небольшому увеличению скорости убывания амплитуды когерентных поперечных колебаний, причем этот эффект квадратичным образом зависит от начальной амплитуды колебаний a_0 . В случае «мягкой» нелинейности ($g_3 < 0$) возникает небольшое уменьшение скорости убывания амплитуды колебаний.

В [13, 21, 22] представлены основные закономерности затухания когерентных поперечных колебаний сгустка для нелинейных характеристик: кулоновское трение, ограниченное по величине корректирующее воздействие. Показано, что такие нелинейные характеристики приводят к появлению дополнительных мод колебаний и к ограничениям областей устойчивого движения частиц.

В [2, 6] установлены количественные закономерности увеличения эмиттанса пучка $\Delta\varepsilon$, возникающего вследствие ошибок инжекции $\Delta\bar{a}_0$, в зависимости от постоянных времен затухания когерентных колебаний τ_d , нарастания когерентной неустойчивости τ_{inst} и перехода когерентных колебаний в некогерентные τ_{dec} в синхротронах с системами обратной связи с линейной и нелинейной передаточной характеристикой цепи обратной связи. Так, для линейной передаточной

характеристики получено [2, 6]:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = \frac{(\Delta\bar{a}_0)^2}{2\sigma_0^2} F_\varepsilon^2; \quad F_\varepsilon = \left(1 + \frac{\tau_{\text{dec}}}{\tau_d} - \frac{\tau_{\text{dec}}}{\tau_{\text{inst}}}\right)^{-1}, \quad (18)$$

где σ_0 – среднеквадратичный размер инжектируемого пучка. Обозначим:

$$\frac{1}{\tau_d} - \frac{1}{\tau_{\text{inst}}} \geq \frac{\kappa}{\tau_{\text{dec}}}.$$

Если $\Delta\bar{a}_0 \simeq \sigma_0$, то относительный рост эмиттанса $\Delta\varepsilon/\varepsilon$ при $\kappa = 1$ составляет 12.5 %. Такую величину прироста эмиттанса можно оценивать как предельно допустимое значение. Если предполагается, что относительный рост эмиттанса $\Delta\varepsilon/\varepsilon$ должен быть не более 5 %, то есть $F_\varepsilon^2 < 0.1$, то $\kappa \geq 2$.

Результаты шестой главы опубликованы в работах [2, 6, 12, 13, 21, 22].

В **Главе 7** приведено описание системы подавления когерентных поперечных колебаний пучка в LHC (“LHC Dampers”), которая предназначена [23, 25]:

- для демпфирования когерентных поперечных колебаний, возникающих из-за ошибок инжекции,
- для подавления когерентных поперечных неустойчивостей,
- для очистки межсгусткового пространства от фоновых частиц в сепаратрисах, которые не используются в режиме столкновения сгустков,
- для возбуждения когерентных поперечных колебаний при проведении измерений, связанных с исследованиями поперечной динамики пучка.

Созданная система подавления поперечных колебаний протонного пучка с рекордно высокой энергией 0.45 – 4 ТэВ, работающая в составе крупномасштабного сверхпроводящего синхротрона-накопителя, обладает существенными элементами новизны в принятых технических решениях [1, 14, 23]:

- большая величина интеграла отклоняющего поля в демпфирующих дефлекторах (около 900 кВ на оборот, на пластинах дефлектора номинальное напряжение ± 7.5 кВ на частоте 1 МГц);
- цифровая обработка информационных сигналов вследствие длительных задержек сигналов обратной связи, кратных периоду обращения пучка $T_0 = 88.93$ мкс по орбите с периметром $C_0 = 26658.883$ м;

- малая нижняя граничная частота системы поперечной обратной связи (большой периметр орбиты) и учет особенностей изменения импедансов устройств и пучка с частотой (полоса частот 3 кГц – 1 МГц для уровня -3 дБ от V_{\max});
- отсутствие резонансов вплоть до проектной частоты (40 МГц) следования сгустков для усилителей и до ускоряющих частот (400 МГц), отвечающих структуре пучка, для дефлекторов;
- адаптация конструкции высоковольтных дефлекторов пучка к криогенно-вакуумному окружению и к образованию электронных облаков.

В ОИЯИ и на российских предприятиях создано уникальное оборудование (мощные широкополосные усилители и высоковакуумные дефлекторы) для системы подавления “LHC Damper” в совместном проекте ЦЕРН – ОИЯИ, предназначенное для работы в новой области энергий. Проектные параметры этого оборудования достигнуты, а для амплитуды корректирующего воздействия — превышены: получена величина отклоняющего поля более 11 кВ в полосе частот до 100 кГц, что превышает проектный уровень 10.5 кВ [25].

На рис. 6 представлены измеренные зависимости величин когерентных бетатронных смещений одного сгустка с числом протонов $\sim 1 \times 10^{11}$ от номера оборота после инжекции [25]. Получена величина постоянной времени затухания колебаний $\tau_d = 40 T_0$, что соответствует проектному значению. Минимальная величина τ_d составляет около 10 оборотов при энергии инжекции [L1].

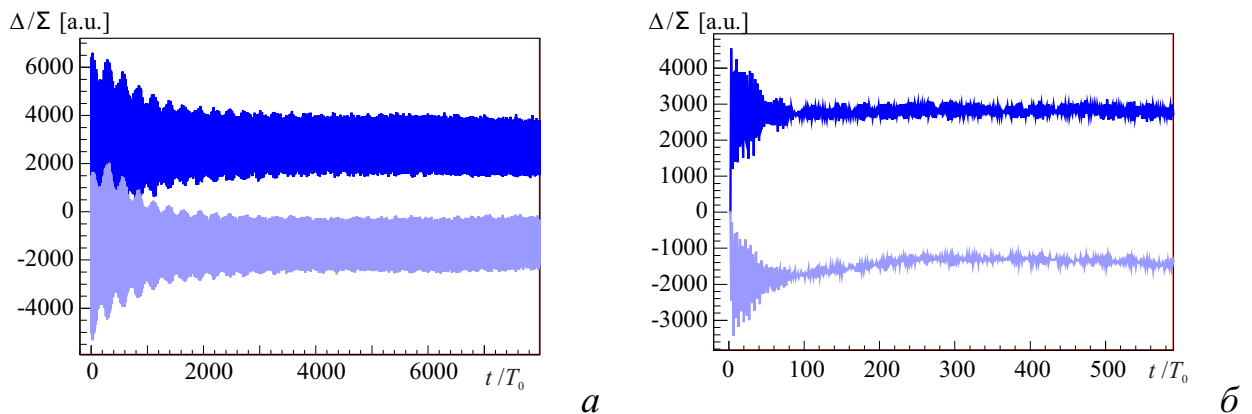


Рис. 6. Подавление горизонтальных ошибок при инжекции (beam 1) при выключенной (а) и включенной (б) СП; сигналы с датчиков $Q7$ (верхний луч) и $Q9$ (нижний луч) [25]

Для настройки системы подавления когерентных бетатронных колебаний протонного пучка в ЛНС были использованы методики, основанием для которых стали результаты, полученные автором настоящей диссертации (см. рис. 2 и рис. 4). Качественные и количественные закономерности для допусков и ограничений для систем подавления когерентных поперечных колебаний взаимодействующих сгустков подтверждены экспериментальными данными, полученными на ЛНС при формировании протонного пучка высокой интенсивности при инжекции и максимальной энергии протонного пучка 4 ТэВ.

Система подавления когерентных поперечных колебаний протонного пучка и пучка ионов свинца в ЛНС успешно использовалась и безотказно функционировала в период с мая 2010 г. до окончания Run I в феврале 2013 г. для подавления ошибок инжекции с максимально возможным декрементом затухания колебаний, для стабилизации пучка при ускорении и при соударениях [L1].

Результаты седьмой главы опубликованы в работах [1, 5, 14, 15, 23, 25].

В **Заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

1. Разработана оригинальная концепция исследования физики пучков в синхротронах с системами подавления когерентных колебаний заряженных частиц, что позволило выявить качественно новые ограничения и закономерности устойчивого затухания колебаний частиц, обусловленные цифровыми методами обработки сигналов в цепи обратной связи.

2. Предложены новые подходы для решения фундаментальных задач динамики сгустков в синхротронах с системами обратной связи, основанные на методах дискретного анализа, позволяющие проводить аналитические расчеты устойчивых режимов затухания когерентных колебаний сгустков в широком диапазоне величин коэффициента обратной связи:

- установлено, что определяющим параметром для собственных частот когерентных поперечных (бетатронных) и продольных (синхротронных) колебаний является величина баланса фаз, численно равная разности между набегом фазы

когерентных колебаний частицы при пролете от детектора до демпфирующего дефлектора и изменением фазы детектируемого сигнала в цепи обратной связи;

- доказано, что при использовании цифровых фильтров в цепи обратной связи систем подавления с задержкой сигнала более чем на один оборот возникают дополнительные к бетатронным моды колебаний сгустков, которые ограничивают область устойчивости движения частиц.

3. Продемонстрировано совпадение расчетных зависимостей и экспериментальных данных для декрементов затухания когерентных поперечных колебаний протонного пучка в ЛНС при энергии 3.5 ТэВ в широком диапазоне величин коэффициента обратной связи.

4. Доказана перспективность разработанной физико-математической концепции для решения задач устойчивости взаимодействующих сгустков в синхротронах с системами обратной связи:

- получен новый результат о расщеплении когерентной частоты взаимодействующих сгустков на спутательные моды, что обусловлено структурой пучка, и сформулировано заключение о невозможности обеспечения строгого выполнения оптимальных условий для подавления когерентных колебаний сгустков вследствие разброса частот спутательных мод, который пропорционален инкременту неустойчивости;

- продемонстрировано, что область устойчивости пучка по диапазону допустимых величин коэффициента обратной связи при приближении числа бетатронных колебаний к полуцелому числу в синхротронах с классической (одноканальной) системой подавления существенно сокращается, что соответствует экспериментальным измерениям на синхротроне SPS (ЦЕРН);

- представлено физико-математическое обоснование новой быстрой системы подавления когерентных поперечных колебаний с двумя цепями обратной связи, которая может обеспечить подавление бетатронных колебаний независимо от их фазы в местах расположения измерительных датчиков.

5. Введено новое понятие «сепаратриса для декрементов затухания когерентных

поперечных колебаний», ставшее основой подхода для учета влияния флуктуаций положения рабочей точки по числу бетатронных колебаний на декременты затухания когерентных колебаний сгустка с учетом структурной схемы цепи обратной связи. Установлено, что требуемая стабильность положения рабочей точки в синхротроне должна обеспечиваться с учетом высоты сепаратрисы.

6. Выявлены закономерности для резонансной зависимости амплитуд вынужденных колебаний сгустков в синхротроне от параметров цифровой цепи обратной связи. Уточнена зависимость смещения максимума резонансной кривой от величины баланса фаз. Данный эффект был применен для тонкой настройки баланса фаз системы подавления когерентных поперечных колебаний протонного пучка в ЛНС. Приведены экспериментальные данные, подтверждающие наличие линейной поправки к когерентной частоте бетатронных колебаний при малом отклонении баланса фаз от оптимального значения.

7. Доказано, что сдвиги частот и декременты затухания когерентных колебаний, вычисленные в линейном приближении по величине коэффициента обратной связи для сглаженных уравнений динамики пучка с помощью метода Крылова—Боголюбова—Митропольского и методов решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, совпадают с соответствующими выражениями, вычисленными при использовании методов дискретного анализа.

8. Изложен аналитический подход к решению задачи о подавлении остаточных колебаний сгустков после инъекции в синхротрон с цифровой системой обратной связи, имеющей нелинейную передаточную характеристику. Для решения разностных нелинейных уравнений динамики пучка использован приближенный подход, аналогичный методу усреднения Крылова—Боголюбова—Митропольского. Выявлены основные закономерности затухания когерентных колебаний сгустка для ряда нелинейных передаточных характеристик.

9. Установлены закономерности увеличения эмиттанса пучка, возникающего вследствие ошибок инъекции, в зависимости от декремента затухания когерентных колебаний, инкремента когерентной неустойчивости и постоянной перехода

когерентных колебаний в некогерентные в синхротронах с системами обратной связи с линейной и нелинейной передаточной характеристикой.

10. Приведены основные результаты разработки, наладки и эксплуатации системы подавления когерентных поперечных колебаний пучка в ЛНС, обладающей существенными элементами новизны в принятых технических решениях.

Список публикаций

1. Жабицкий В. М. Системы подавления поперечных колебаний пучка в современных синхротронах // Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3, вып. 7(136). С. 96–102.
2. Жабицкий В. М. О росте эмиттанса пучка вследствие ошибок инжекции в синхротронах с нелинейными системами подавления когерентных поперечных колебаний // Письма в ЭЧАЯ. 2008. Т. 5, вып. 1(143). С. 86–93.
3. Жабицкий В. М. Устойчивость ионного пучка в синхротронах с цифровыми системами подавления когерентных поперечных колебаний // Письма в ЭЧАЯ. 2010. Т. 7, вып. 7(163). С. 742–747.
4. Жабицкий В. М. Устойчивость пучка в синхротронах с цифровой системой подавления когерентных поперечных колебаний в зависимости от частоты бетатронных колебаний // Письма в ЭЧАЯ. 2012. Т. 9, No.4–5(174-175). С. 563–568.
5. Жабицкий В. М. Отклик пучка на переходный процесс в синхротронах с цифровой системой подавления когерентных поперечных колебаний // Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, No.1(178). С. 120–129.
6. Жабицкий В. М. О росте продольного эмиттанса сгустков из-за ошибок инжекции в синхротронах с системой демпфирования когерентных продольных колебаний // Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, No.2(179). С. 236–244.
7. Жабицкий В. М. Динамика пучка в синхротронах с системами обратной связи // Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, No.6(183). 11 с. (в печати).
8. Zhabitsky V.M. Transverse Feedback System with a Digital Filter // Nucl. Inst. & Meth. in Phys. Res. A. 1997. Vol. 391. Pp. 96–99.
9. Gleibman E.M., Zhabitsky V.M., Ivanov I.N., Kononov G.I., Lebedev N.I., Likhachev A.G., Melnikov V.A., Malakhov N.A., Pilyar N.V., Rukojatkina T.V., Scheulin A.S., Merker S.E., Mikheev M.S. System for initial betatron oscillation damping for UNK I stage beam // Nucl. Inst. & Meth. in Phys. Res. A. 1997. Vol. 391. Pp. 100–102.
10. Zhabitsky V.M., Korenev I.L., Yudin L.A. Transverse Feedback System with Digital Filter // Proc. of the 1993 Particle Accelerator Conference, 17–20 May 1993, Washington, USA. IEEE, 1993. Pp. 2543–2545. ISBN: 0-7803-1203-1.

11. Zhabitsky V.M. Damping of Injection Oscillations // Proc. of the 1997 Particle Accelerator Conference, 12–16 May 1997, Vancouver, Canada. IEEE, 1998. Pp. 2329–2331. ISBN: [0-7803-4376-X](#).
12. Zhabitsky V. M. Theory of a Transverse Feedback System with a Nonlinear Transfer Function // Proc. of the Sixth European Particle Accelerator Conference, 22–26 June 1996, Stockholm, Sweden. Institute of Physics, 1998. Pp. 1380–1382. ISBN: [0-7503-0579-7](#).
13. Zhabitsky V.M. Nonlinear Damping of Injection Oscillations // Proc. of the 1999 Particle Accelerator Conference, 29 March – 2 April 1999, New York, USA. IEEE, 1999. Pp. 1222–1224. ISBN: [0-7803-5573-3](#).
14. Baudrenghien P., Höfle W., Killing F., Kojevnikov I., Kotzian G., Louwerse R., Montesinos E., Rossi V., Schokker M., Thepenier E., Valuch D., Gorbachev E. V., Lebedev N. I., Makarov A. A., Rabtsun S. V., Zhabitsky V.M. LHC Transverse Feedback System and its Hardware Commissioning // Proc. of the 11th European Particle Accelerator Conference, 23–27 June 2008, Genoa. The European Physical Society Accelerator Group (EPS-AG), 2008. Pp. 3266–3268. ISBN: [978-92-9083-315-4](#).
15. Zhabitsky V.M. Transient Response of a Digital Transverse Feedback System in Synchrotrons // Proc. of XXIII Russian Particle Accelerators Conference RuPAC-2012, 24–28 September 2012, St.Petersburg, Russia. Saint Petersburg State University, 2012. Pp. 73–75. ISBN: [3-95450-125-0](#).
16. Жабицкий В.М., Коренев И.Л., Юдин Л.И. Подавление резистивной неустойчивости сгруппированного пучка с использованием цепей обратной связи // XIII Всесоюзное Собрание по ускорителям заряженных частиц, 13–15 октября 1992, Дубна. Т. I. ОИЯИ D9-92-455, Дубна, 1993. С. 78–81.
17. Жабицкий В.М., Чернов П.А. Влияние ошибок в расстановке датчиков и толкателей на параметры системы подавления резистивной неустойчивости в I ступени УНК // XIII Всесоюзное Собрание по ускорителям заряженных частиц, 13–15 октября 1992, Дубна. Т. I. ОИЯИ D9-92-455, Дубна, 1993. С. 82–86.
18. Ivanov I. N., Zhabitsky V. M., Korenev I. L., Yudin L. A., Kopylov L. I. Requirements to the Feedback System to Damp Resistive Instability (I Stage UNK) // Proc. of the XVth International Conference on High Energy Accelerators, 20–24 July 1992, Hamburg, Germany. Vol. II. World Scientific, 1993. Pp. 1034–1036.
19. Zhabitsky V. M. Theory of Multi-Bunch Resistive Wall Instability Damping using Feedback System with a Digital Filter // Proc. of the Fourth European Particle Accelerator Conference, 27 June – 1 July 1994, London, England. World Scientific, 1994. Pp. 1090–1092.
20. Zhabitsky V.M. Transverse Feedback System with a Digital Filter and Additional

- Delay // Proc. of the Fifth European Particle Accelerator Conference, 10–14 June 1996, Sitges, Spain. Institute of Physics, 1996. Pp. 1833–1835.
21. Жабицкий В. М. Нелинейный режим подавления остаточных колебаний пучка после инжекции в синхротрон // XVI Собрание по ускорителям заряженных частиц, 20–22 октября 1998, Протвино. Т. 2. ИФВЭ, 1999. С. 134–139.
 22. Zhabitsky V. M. Nonlinear Damping of Injection Oscillations // Proc. of the Seventh European Particle Accelerator Conference, 26–30 June 2000, Vienna. European Physical Society Interdivisional Group on Accelerators (EPS-IGA), 2000. Pp. 1933–1935.
 23. Gorbachev E. V., Lebedev N. I., Makarov A. A., Pilyar N. V., Rabtsun S. V., Smolkov R. A., Zhabitsky V. M., Baudrenghien P., Höfle W., Killing F., Kojevnikov I., Kotzian G., Louwerse R., Montesinos E., Rossi V., Schokker M., Thepenier E., Valuch D. LHC Transverse Feedback System: First Results of Commissioning // Proc. of the XXI Russian Particle Accelerators Conference RuPAC-2008, 28 September–3 October 2008, Zvenigorod, Russia. Moscow, 2008. Pp. 97–100.
 24. Zhabitsky V. M. Beam Stability in Synchrotrons with Digital Filters in the Feedback Loop of a Transverse Damper // Proc. of the 11th International Conference on Heavy Ion Accelerator Technology, 8–12 June 2009, Venizia (Italy). Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), 2009. Pp. 306–310.
 25. Zhabitsky V. M., Höfle W., Kotzian G., Montesinos E., Schokker M., Valuch D. Beam Tests of the LHC Transverse Feedback System // Proc. of XXII Russian Particle Accelerators Conference RuPAC-2010, 27 September–1 October 2010, Protvino, Russia. ИФЭП, Protvino, 2010. Pp. 275–279.
 26. Zhabitsky V. M. Digital Longitudinal Feedback Systems in Synchrotrons // Proc. of XXII Russian Particle Accelerators Conference RuPAC-2010, 27 September–1 October 2010, Protvino, Russia. ИФЭП, Protvino, 2010. Pp. 224–226.
 27. Жабицкий В. М. Применение Z -преобразования для решения задачи о подавлении свободных колебаний пучка в ускорителе. Сообщение ОИЯИ Р9-91-91. Дубна. 1991. — 14 февраля. 18 с.
 28. Жабицкий В. М., Иванов И. Н., Коренев И. Л., Юдин Л. И. Подавление резистивной неустойчивости в I ступени УНК при цифровой обработке сигнала в цепи обратной связи. Сообщение ОИЯИ Р9-91-99. Дубна. 1991. — 22 февраля. 12 с.
 29. Zhabitsky V. M. Theoretical Treatment of a Classical Transverse Feedback System Using Z -transform. JINR Commun. E9-91-156. Dubna. 1991. — 9 April. 10 p.
 30. Жабицкий В. М., Коренев И. Л., Юдин Л. И. Помехоустойчивость системы подавления когерентных поперечных колебаний пучка в синхротроне. Сообщение ОИЯИ Р9-91-246. Дубна. 1991. — 31 мая. 14 с.
 31. Жабицкий В. М., Коренев И. Л., Юдин Л. И. Система подавления резистивной

- неустойчивости в I ступени УНК с БИХ-фильтром в цепи обратной связи. Сообщение ОИЯИ Р9-91-494. Дубна. 1991. — 13 ноября. 11 с.
32. Жабицкий В. М., Коренев И. Л., Юдин Л. И. Подавление резистивной неустойчивости сгруппированного пучка с использованием цепей обратной связи. Сообщение ОИЯИ Р9-92-309. Дубна. 1992. — 17 июля. 20 с.
 33. Жабицкий В. М. Влияние ошибок в расстановке датчиков и толкателей на параметры системы подавления резистивной неустойчивости в I ступени УНК. Сообщение ОИЯИ Р9-92-310. Дубна. 1992. — 17 июля. 14 с.
 34. Zhabitsky V. M. Beam Stability in Synchrotrons with Digital Filters in the Feedback Loop of a Transverse Damper. JINR Commun. E9-2009-82. Dubna. 2009. — 2 June. 11 p.
 35. Zhabitsky V. M. Transverse Damper System for LHC. SL-RFS Note 91-14, LHC Note 175. CERN, Geneva. 1991. — 13 December. 16 p.
 36. Zhabitsky V. M., Höfle W., Kotzian G. Beam Stability in Synchrotrons with Notch and All-Pass Filters in the Feedback Loop of a Transverse Damper. CERN-BE-2009-013. Geneva. 2009. — 29 April. 12 p.

Цитированная литература

- L1. Höfle W. Progress in Transverse Feedbacks and Related Diagnostics for Hadron Machines // Proc. of 4th International Particle Accelerators Conference IPAC-2013, 12–17 May 2013, Shanghai, China. Physical Review Special Topics – Accelerators and Beams (PRST-AB), 2013. Pp. 3990–3994.
- L2. Lonza M. Multi-bunch feedback system // CAS – CERN Accelerator School: Digital Signal Processing, 31 May – 9 June 2007, Sigtuna, Sweden. CERN–2008–003, Geneva, 2008. Pp. 285 – 330.
- L3. Courant E. D., Snyder H. S. Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron // Annals of Physics. 2000. Vol. 281. Pp. 360–480.
- L4. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Советское радио, 1977. 608 с.
- L5. Лебедев А. Н., Шальнов А. В. Основы физики и техники ускорителей. М.: Энергоатомиздат, 1991. 528 с.
- L6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Наука, 1973. Т. I. 208 с.
- L7. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
- L8. Боголюбов Н. Н. Собрание научных трудов в двенадцати томах. М.: Наука, 2005. Т. III. 605 с.