

**Объединенный институт ядерных исследований
Лаборатория информационных технологий**

На правах рукописи

Сапожников Андрей Александрович

**Моделирование магнитных систем методом
объёмных интегральных уравнений с
кусочно-линейной аппроксимацией поля внутри
ферромагнетика**

Специальность: 05.13.18 - математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 2020

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий
Объединенного института ядерных исследований

*Научный
руководитель:* Акишин Павел Григорьевич,
доктор физико-математических наук,
Лаборатория информационных технологий ОИЯИ,
заместитель начальника Научного отдела
вычислительной физики.

*Официальные
оппоненты:* Ильин Вячеслав Анатольевич,
доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник КК НБИКС-природоподобных
технологий НИЦ «Курчатовский институт».

Геворкян Мигран Нельсонович,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной
информатики и теории вероятностей
ФГАОУ ВО "Российский университет дружбы народов".

С электронной версией диссертации можно ознакомиться на официаль-
ном сайте Объединенного института ядерных исследований в информационо-
телекоммуникационной сети «Интернет» по адресу: <http://dissertations.jinr.ru>.
С печатной версией диссертации можно ознакомиться в Научно-технической
библиотеке ОИЯИ (г. Дубна. Московская область, ул. Жолио-Кюри, д. 6).

Ученый секретарь
диссертационного совета ОИЯИ.05.01.2019.П,
д.ф.-м.н.

Е.В. Земляная

Общая характеристика диссертации

Актуальность работы.

При проектировании и эксплуатации различных физических установок возникает необходимость в изучении распределения генерируемых в устройствах электромагнитных полей. Отметим, что физическое моделирование установок, особенно при выборе оптимального режима работы, вызывает значительные затруднения. Во многих случаях это не представляется возможным, например, когда требуется определить поле внутри ферромагнетика. Как следствие, одним из наиболее востребованных инструментов для этих целей является компьютерное моделирование. Благодаря значительному прогрессу в области вычислительной техники, численные методы стали основным инструментом математического моделирования. Учитывая высокую стоимость магнитных систем, разработка методов численного моделирования магнитостатических полей является актуальной задачей.

Моделирование магнитных систем предполагает решение большого числа проблем, таких как выбор соответствующей математической формулировки исходной задачи, дискретизация непрерывной задачи, выбор метода решения возникающих линейных и нелинейных дискретизованных задач, оценка точности полученных решений, интерпретация полученных результатов, вычисление требуемых вторичных характеристик магнитного поля и других.

Методы расчета магнитостатических полей можно разделить на 3 основных класса: дифференциальные, интегральные и гибридные. Каждый класс методов имеет свои достоинства и недостатки. Для разных электрофизических установок оптимальные методики могут быть различны. Для закрытых магнитных систем лучше подходят дифференциальные методы. Для открытых систем - интегральные или комбинированные методы. В диссертации для трехмерного численного моделирования магнитных систем используется метод объемных интегральных уравнений. Данный подход позволяет значительно сузить область поиска неизвестных величин до области, занятой магнитным материалом, а также автоматически решаются вопросы задания граничных условий и поведение решения на бесконечности. Из недостатков следует отметить сингулярность ядра интегральных уравнений, полностью заполненную матрицу дискретизованных систем и сложности при вычислении матричных элементов. Эффективность применения данного подхода для моделирования магнитных систем зависит от решения перечисленных проблем. Именно этим объясняется использование в наиболее известном программном комплексе GFUN3D [1, 2], основанном на интегральной постановке задачи магнитостатики, только кусочно-постоянной аппроксимации неизвестных в пределах элементов разбиения области при дискретизации уравнений в рамках метода коллокаций. Развиваемый в диссертации подход, отличный от метода коллокаций, основанный на дополнительном интегрировании по элементам разбиения расчетной области с кусочно-линейной аппроксимацией неизвестных в пределах элемента, является актуальным, так как данный подход снимает основную

проблему метода объемных интегральных уравнений - сингулярность ядра, что в свою очередь позволяет нарастить порядок аппроксимации непрерывных уравнений и, как следствие, повысить точность решения исходной задачи. Также в рамках данного подхода удастся построить непрерывные аппроксимации магнитного поля в пределах одного материала.

Целью диссертационной работы является разработка и применение численных методов и программных комплексов для моделирования магнитоэлектрических полей в крупных электрофизических установках. Для достижения этой цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Разработка методов расчёта магнитоэлектрических полей в рамках интегральной постановки с кусочно-линейной аппроксимацией поля внутри ферромагнетика.
2. Создание алгоритмов и программных комплексов для генерации трёхмерных сеток, ориентированных на задачи магнитоэлектрики.
3. Построение алгоритмов и программных комплексов для моделирования токовых обмоток сложной формы, в том числе с учётом специфики сечения коаксиального кабеля. Разработка методов вычисления магнитного поля от токовых обмоток в рамках закона Био-Савара.
4. Решение возникающих нелинейных дискретизованных задач.
5. Применение развитых методов, алгоритмов и программных комплексов для моделирования дипольного магнита эксперимента CBM [3], квадрупольного магнита BOOSTER и дипольного магнита коллайдера ускорительного комплекса NICA [4].

Научная новизна полученных результатов.

Впервые решена проблема моделирования магнитных систем методом объемных интегральных уравнений на основе применения непрерывной кусочно-линейной аппроксимации неизвестных. В рамках решения предложена методика вычисления матричных элементов дискретизованных задач, основанная на понижении кратности возникающих интегралов и использовании кубатурных формул для их расчета в регулярном случае. На основе понятия однородных функций для нерегулярного случая предложены методы редукции сингулярных интегралов к комбинации регулярных интегралов меньшей кратности с дальнейшим их вычислением по кубатурным формулам. Построены итерационные методы решения возникающих нелинейных дискретизованных систем уравнений. Предложена процедура моделирования токовых обмоток, в том числе - впервые для обмоток с коаксиальным кабелем.

Научно-практическая значимость.

Создан программный комплекс 3DFEMMESH генерации трехмерных конечно - элементных сеток, учитывающий специфику моделирования магнитных систем, имеющий графический интерфейс для ввода начальных данных и визуальной оценки качества построенного разбиения. Реализован контроль качества полученной сетки. Генератор включен в библиотеку программ JINRLIB [5]. Создан программный комплекс Winding generator для моделирования токовых обмоток с различным поперечным сечением, включая востребованные в последнее время обмотки с коаксиальным сечением кабеля. В его состав включены типовые параметризованные обмотки, такие как Solenoid, Racetrack, Bedstead, а также обмотки для мультипольных корректоров.

Разработанная методика применялась для моделирования дипольного магнита эксперимента СВМ, квадрупольного магнита BOOSTER и дипольного магнита коллайдера ускорительного комплекса NICA. Построенные модели токовых обмоток использовались для вычисления поля в мультипольных корректирующих магнитах комплекса NICA.

Достоверность результатов.

На основе методов и программ, описанных в диссертации, проводилось моделирование различных магнитных систем, которые, в свою очередь, рассчитывались с помощью дифференциальной методики (программный комплекс TOSCA [6]). Сравнение полученных результатов показало хорошее согласие дифференциальной и интегральной методик. Проводилось также сравнение расчётов магнитного поля от токовых обмоток в вакууме вдоль оси соленоида с постоянной плотностью тока в поперечном сечении с результатами, полученными аналитически. Сравнение результатов расчётов также показало их хорошее согласие.

Соответствие паспорту специальности.

Диссертация соответствует требованиям специальности 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Её цель, задачи и результаты отвечают трем пунктам паспорта специальности:

п. 1. «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений».

п. 3. «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий».

п. 4. «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Положения, выносимые на защиту.

1. Совокупность методов для моделирования магнитных систем в рамках интегральной постановки, основанных на дополнительном интегрировании по элементам разбиения расчетной области с кусочно-линейной аппроксимацией неизвестных, снимающих проблему сингулярности в яд-

рах интегральных уравнений, позволяющих строить непрерывные решения и повышать порядок численной аппроксимации.

2. Методы вычисления матричных элементов дискретизованных задач, основанные на понижении кратности интегралов и редукции сингулярных интегралов к комбинации регулярных, что обеспечивает возможность применения в расчетах кубатурных формул.
3. Процедура моделирования токовых обмоток из 20-узловых конечных элементов серендипова типа, включая обмотки с коаксиальным сечением кабеля, обеспечивающая эффективный расчет магнитного поля от токовых источников в рамках закона Био-Савара.
4. Комплексы программ, реализующие разработанные подходы и обеспечивающие эффективную генерацию конечно-элементных сеток для моделирования электрофизических устройств сложной геометрии:
 - (a) Mesh Generator – для магнитных систем с однородной фронтальной топологией.
 - (b) 3DFEMMESH – для магнитных систем сложной геометрической конфигурации.
 - (c) Winding generator – для моделирования сложных токовых обмоток с различным поперечным сечением, включая обмотки с коаксиальным сечением кабеля.
 - (d) Программные комплексы графического представления и анализа трёхмерных конечно-элементных сеток, моделей токовых обмоток и результатов моделирования магнитных систем.

Апробация работы.

Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах ЛИТ ОИЯИ, на международных конференциях и совещаниях:

1. XXI International Symposium on Nuclear Electronics I& Computing (NEC'2007), Varna, Bulgaria, 2007.
2. International Conference on Mathematical Modeling and Computational Physics (ММСР 2009). ОИЯИ, Дубна, Россия.
3. International Conference on Mathematical Modeling and Computational Physics (ММСР 2013). ОИЯИ, Дубна, Россия.
4. International Conference on Mathematical Modeling and Computational Physics (ММСР 2017). ОИЯИ, Дубна, Россия.

Публикации.

Основные результаты опубликованы в следующих работах, из них 4 статьи в рецензируемых изданиях, рекомендованных Положением ОИЯИ о присуждении учёных степеней:

1. Моделирование токовых обмоток с различным сечением кабеля. Акишин П.Г., Сапожников А.А., Вестник Российского университета дружбы народов, Серия Математика. Информатика. Физика, ISSN:0869-8732, Изд.: Российский университет дружбы народов, 2(2), 113-119, 2010.
2. Метод объемных интегральных уравнений в задачах магнитостатики. Акишин П. Г., Сапожников А.А., Вестник Российского университета дружбы народов, Серия Математика. Информатика. Физика, ISSN:0869-8732, Изд.: Российский университет дружбы народов, 2, 310-315, 2014.
3. Linear Approximation of Volume Integral Equations for the Problem of Magnetostatics. Akishin P., Sapozhnikov A., European Physical Journal Web of Conferences, 173, 03001, 2018.
4. The volume integral equation method in magnetostatic problem. Akishin P., Sapozhnikov A., Peoples' Friendship University of Russia, Discrete and continuous models and applied computational science, 2019;27(1):60-69. ISSN: 2658-4670, 2019.
5. Three-dimensional mesh-generator for finite element method applications. Akishin P.G., Sapozhnikov A.A., Scientific report 2006-2007. LIT. Изд.:JINR, Dubna, 2007-179, 215-219, 5-9530-0167-3, 2007.
6. Automatic 3D Mesh Generator. Akishin P.G., Sapozhnikov A.A., Fischer E., Schnizer P., Communications of JINR, P11-2008-149, Dubna, 2008.
7. Моделирование токовых обмоток сложной конфигурации. Акишин П.Г., Сапожников А.А., JINR LIT. Scientific report 2008-2009, Изд.: JINR, 2009-196, 99-102, 978-5-9530-0237-0, 2009.
8. Расчет поля от токовых обмоток методом интегральных уравнений. Акишин П.Г., Сапожников А.А., JINR LIT. Scientific report 2010-2011, Изд.: JINR, 2011-130, 131-134, 978-5-9530-0312-4, 2011.
9. Объемные интегральные уравнения магнитостатики с линейной конечно-элементной аппроксимацией намагниченности. Акишин П.Г., Сапожников А.А., Scientific Report 2012-2013. LIT JINR, Изд.: JINR, Dubna, 2014-26, 148-150, 978-5-9530-0381-0, 2014.
10. Magnetic field calculations with the volume integral equation method for CBM dipole magnet. P.G. Akishin, A.A. Sapozhnikov, V.P. Ladygin, CBM Progress Report 2018, Darmstadt 2019, 123-124, GSI-2019-01018, doi:10.15120/GSI-2019-01018.

Личный вклад.

Содержание диссертации, а также основные результаты и положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора. Представленные в диссертации результаты по разработке методов, комплексов программ и проведению вычислений получены либо самим автором, либо при его определяющем участии. Автором лично разработаны методы и программное обеспечение для генерации конечно-элементных сеток, моделирования токовых обмоток, графического представления и анализа результатов моделирования магнитных систем.

Содержание диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения.

Во введении обоснована актуальность исследования, дан обзор литературы по изучаемой проблеме, поставлены цель и задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость.

Первая глава посвящена задаче нахождения распределения магнитного поля, создаваемого стационарными токами в проводниках с изотропным ферромагнитным материалом. В качестве основного подхода используется метод объемных интегральных уравнений.

В первом параграфе приводится интегральная постановка задачи магнитостатики. Пусть $\bar{B}(\bar{a})$, $\bar{H}(\bar{a})$, $\bar{M}(\bar{a})$ есть индукция, напряженность и намагниченность магнитного поля в точке \bar{a} . В случае отсутствия поверхностных токов и токов, протекающих по ферромагнетику, величины \bar{B} , \bar{H} удовлетворяют уравнениям Максвелла. Также справедливы следующие нелинейные соотношения [7, 8]:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \frac{\bar{B}(\bar{a})}{\mu(|\bar{B}(\bar{a})|)\mu_0}, \quad \bar{M}(\bar{a}) = \frac{\bar{B}(\bar{a})}{\mu_0} - H(\bar{a}), \quad (1)$$

где μ_0 – абсолютная магнитная проницаемость вакуума, $\mu(x)$ – магнитная проницаемость, которая вне железа тождественно равная единице, а внутри железа есть нелинейная функция, характеризующая связь между \bar{H} и \bar{B} для данного типа ферромагнетика. На границе раздела сред с различными магнитными характеристиками выполняются условия непрерывности нормальной \bar{B} и тангенциальной составляющей \bar{H} :

$$(\bar{n}, (\bar{B}_2 - \bar{B}_1)) = 0, \quad [\bar{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1)] = \bar{0}, \quad (2)$$

где \bar{n} – единичный вектор нормали к поверхности раздела сред.

Данные уравнения неудобны для непосредственного нахождения вектор-функций $\bar{H}(\bar{a})$, $\bar{B}(\bar{a})$, и существует большое число постановок, вытекающих из них.

Напряжённость магнитного поля может быть вычислена из следующего

интегрального уравнения:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^S(\bar{a}) + \frac{1}{4\pi} \nabla_{\bar{a}} \int_G \left(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}}, \quad (3)$$

где $\bar{H}^S(\bar{a})$ – поле от токовых обмоток, G – область, заполненная ферромагнетиком. Поле $\bar{H}^S(\bar{a})$ может быть найдено по закону Био-Савара [9]:

$$\bar{H}^S(\bar{a}) = \frac{1}{4\pi} \text{Rot}_{\bar{a}} \int_{R^3} \frac{\bar{J}(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{a}|} dv_{\bar{x}}, \quad (4)$$

где $\bar{J}(\bar{x})$ – плотность тока в точке \bar{x} .

Второй параграф посвящен методу, реализованному в программном комплексе GFUN3D [1, 2]. В данном комплексе, базирующемся на интегральной постановке задачи магнитостатики, для дискретизации уравнений используется метод коллокаций и кусочно-постоянная аппроксимация неизвестных в пределах элемента разбиения области.

Метод коллокаций не позволяет нарастить кусочно-постоянное приближение неизвестных по причине сингулярности ядра объемных интегральных уравнений. Замена метода коллокаций дополнительным интегрированием по элементам разбиения расчетной области позволяет разрешить возникающие проблемы и, как следствие, нарастить порядок аппроксимации задачи.

В третьем параграфе описан метод, в котором точка наблюдения \bar{a}_i в G_i заменяется интегрированием по G_i [10]:

$$\bar{H}_i \int_{G_i} dv_{\bar{a}} = \int_{G_i} \bar{H}^S(\bar{a}) dv_{\bar{a}} + \sum_{j=1}^N \int_{G_j} dv_{\bar{a}} \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi} \left[\int_{G_j} \left(\bar{M}_j, \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}} \right], \quad (5)$$

где $i = \overline{1, N}$.

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{B} &= (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_N)^T, \\ \hat{M}(\hat{B}) &= (\mu_0 \bar{M}(\bar{B}_1), \mu_0 \bar{M}(\bar{B}_2), \dots, \mu_0 \bar{M}(\bar{B}_N))^T, \\ \hat{H}^S &= \left(\mu_0 \int_{G_1} \bar{H}^S(\bar{a}) dv_{\bar{a}}, \mu_0 \int_{G_2} \bar{H}^S(\bar{a}) dv_{\bar{a}}, \dots, \mu_0 \int_{G_N} \bar{H}^S(\bar{a}) dv_{\bar{a}} \right)^T, \\ [A] &= \begin{bmatrix} [A_{11}] & \cdots & [A_{1N}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [A_{N1}] & \cdots & [A_{NN}] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Элементами матрицы $[A]$ являются коэффициенты $[A_{ij}]$, такие, что для любого постоянного вектора \bar{M} справедливо соотношение:

$$[A_{ij}]\bar{M} = \int_{G_i} dv_{\bar{a}} \frac{\nabla_a}{4\pi} \left[\int_{G_j} \left(\bar{M}, \nabla_a \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}} \right]. \quad (6)$$

Пусть $[C]$ – диагональная матрица размера $[3N \times 3N]$ с элементами по диагонали $(c_1, c_1, c_1, c_2, c_2, c_2, \dots, c_N, c_N, c_N)$, где $c_i = \int_{G_i} dv$.

Учитывая (1), систему (5) кратко можно записать в виде:

$$[C]\hat{B} = \hat{H}^S + ([A] + [C])\hat{M}(\hat{B}). \quad (7)$$

Интегрирование по элементу позволяет использовать аппроксимацию намагниченности, отличную от постоянной, например, линейную. Четвёртый параграф посвящён дискретизации уравнений с использованием кусочно-линейной аппроксимации намагниченности.

Пусть область G разбита на тетраэдры $G = \bigcup_{i=1}^N S_i$, удовлетворяющие методу конечных элементов (МКЭ); $\bar{P}_k, k = 1, \dots, L$ – набор всех вершин тетраэдров $\{S_i\}$. Обозначим $\bar{H}(\bar{P}_k) = \bar{H}_k, \bar{M}(\bar{P}_k) = \bar{M}_k, \bar{B}(\bar{P}_k) = \bar{B}_k$. Пусть $f_k(\bar{x})$ – функция формы, ассоциированная с вершиной \bar{P}_k :

$$f_k(\bar{P}_l) = \begin{cases} 1 & , \text{ если } k = l, \\ 0 & , \text{ если } k \neq l. \end{cases}$$

$f_k(\bar{x})$ на каждом тетраэдре – линейная функция. Используя эти обозначения, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^L \int_G f_i(\bar{a}) f_j(\bar{a}) \bar{H}_j dv_{\bar{a}} &= \int_G f_i(\bar{a}) \bar{H}^S(\bar{a}) dv_{\bar{a}} + \\ &+ \sum_{j=1}^L \int_G f_i(\bar{a}) \frac{\nabla_a}{4\pi} \left[\int_G f_j(\bar{x}) \left(\bar{M}_j, \nabla_a \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}} \right] dv_{\bar{a}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $i = \overline{1, L}$.

Пусть $[C]$ есть матрица размерности $[3L \times 3L]$ вида:

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{11}] & \cdots & [C_{1L}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [C_{L1}] & \cdots & [C_{LL}] \end{bmatrix}.$$

Элементами матрицы $[C]$ являются диагональные матрицы размерности $[3 \times 3]$ вида:

$$[C_{ij}] = \int_G f_i(\bar{a}) f_j(\bar{a}) dv_{\bar{a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $[A]$ есть матрица размерности $[3L \times 3L]$ вида:

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & \cdots & [A_{1L}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [A_{L1}] & \cdots & [A_{LL}] \end{bmatrix}.$$

Элементами матрицы $[A]$ являются матрицы размерности $[3 \times 3]$ такие, что для любого постоянного вектора \bar{M} справедливо соотношение:

$$[A_{ij}] \bar{M} = \int_G f_i(\bar{a}) dv_{\bar{a}} \frac{\nabla_a}{4\pi} \left[\int_G f_j(\bar{x}) \left(\bar{M}, \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}} \right]. \quad (9)$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{B} &= (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_L)^T, \\ M(\hat{B}) &= (\mu_0 \bar{M}(\bar{B}_1), \mu_0 \bar{M}(\bar{B}_2), \dots, \mu_0 \bar{M}(\bar{B}_L))^T, \\ \hat{H}^S &= \left(\mu_0 \int_G f_1(\bar{a}) \bar{H}^S(\bar{a}) dv_{\bar{a}}, \dots, \mu_0 \int_G f_L(\bar{a}) \bar{H}^S(\bar{a}) dv_{\bar{a}} \right)^T. \end{aligned}$$

Учитывая (1), систему (8) кратко можно записать в виде:

$$[C] \hat{B} = \hat{H}^S + ([A] + [C]) \hat{M}(\hat{B}). \quad (10)$$

Для практического использования изложенной дискретизации интегральных уравнений необходимо решить следующие задачи:

1. Представление области ферромагнетика в виде объединения тетраэдров, удовлетворяющих МКЭ. По сути, данная задача разбивается на две части: задание начальных данных о разбиваемой области и построение разбиения на тетраэдры. Задача представления начальных данных достаточно трудоёмкая и требует непосредственного участия пользователя в процессе, поэтому необходимо предусмотреть контрольные процедуры проверки соответствия сетки МКЭ.
2. Разработка моделей токовых обмоток на основе их представления в виде объединения 20-узловых конечных элементов серендипова типа.
3. Создание следующих методик:

- (a) расчёт поля от токовых обмоток;
- (b) расчёт матричных коэффициентов (9);
- (c) решение системы нелинейных уравнений (10).

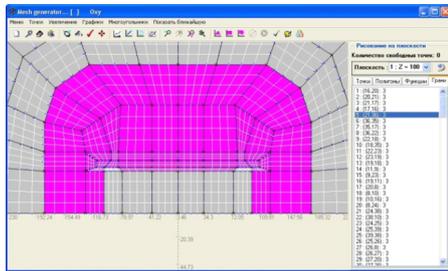
Методы решения этих задач представлены в следующих главах. Следует отметить, что метод объемных интегральных уравнений идеально подходит для использования на многопроцессорных вычислительных системах. Параллельные методы могут быть использованы для вычисления матричных элементов дискретизованной системы уравнений, а также ее правой части.

В главе 2 обсуждаются проблемы, возникающие при создании автоматизированных комплексов генерации сеток. В первом параграфе главы приведены общие требования к генераторам конечно-элементных сеток. Во втором параграфе даётся описание основных подходов к построению сеток [11–13], излагаются наиболее популярные алгоритмы генерации [14], обсуждаются их основные достоинства и недостатки. Форма и размер элементов сетки явно влияют на точность и сходимость численных методов. В связи с этим возникает проблема оценки качества полученных элементов. В третьем параграфе главы приводятся наиболее распространённые критерии качества двумерных и трёхмерных симплексов. Так как оптимальные значения критериев различны, были введены нормированные критерии [11]. Нормализация критериев обеспечивается отношением полученного значения у рассматриваемого элемента к значению этого же критерия для правильного элемента. Под правильным элементом подразумевается равносторонний треугольник или квадрат в двумерном случае, и правильный тетраэдр, куб и правильная треугольная призма в трёхмерном. Таким образом, область значений любого критерия для произвольного элемента будет лежать на отрезке $[0; 1]$. Чем значение критерия ближе к 1, тем качество элемента лучше.

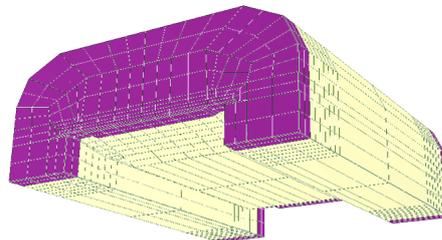
Далее приводится описание авторских программных комплексов по созданию сеток.

В четвёртом параграфе описывается программный комплекс Mesh generator, базирующийся на MAPPING [15] методе построения сеток. Суть метода заключается в построении двумерного разбиения и продолжении его в пространство по третьей координате. Данный метод эффективен при описании несложных геометрических областей с одинаковой топологией на всех уровнях. Для улучшения качества построенной сетки при ее измельчении используется предварительно разработанная библиотека стандартных разбиений. На рисунке 1a изображено окно программы с формой для задания двумерного разбиения, на рисунке 1b – итоговое разбиение дипольного магнита.

Пятый параграф посвящен программному комплексу 3DFEMMESH, базирующемуся на комбинации прямых методов и методов отображения [12]. Область разбиения представляется в виде объединения трёхмерных макроэлементов серендипова типа: гексаэдров, тетраэдров, треугольных призм, пирамид, а также их изопараметрических аналогов. Для получения детализирован-



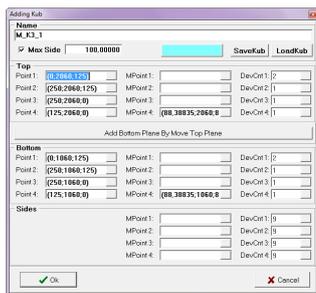
a.



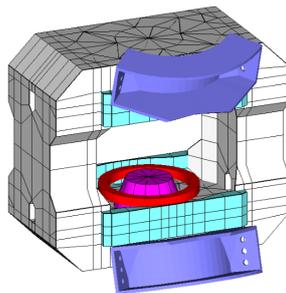
b.

Рис. 1. Моделирование дипольного магнита в программе Mesh generator.

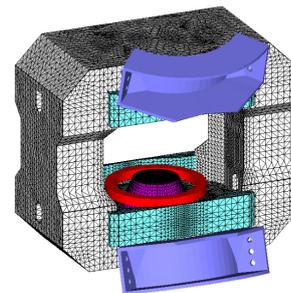
ного разбиения в программе реализована функция сгущения сетки с помощью введения весового коэффициента для узлов. На рисунке 2а изображена форма для задания макроблоков, на рисунке 2б - область разбиения, представленная в виде объединения макроблоков, на рисунке 2с - итоговое разбиение.



a.



b.



c.

Рис. 2. Моделирование дипольного магнита в программе 3DFEMMESH.

Глава 3 посвящена моделированию токовых обмоток и вычислению поля от токовых источников.

В первом параграфе главы приводится описание программного комплекса Winding generator для построения токовых обмоток. Процесс конструирования обмотки состоит из двух шагов: построения поперечного сечения и задания токовой линии центра. В программе реализован параметризованный ввод типовых обмоток, таких как Solenoid, Racetrack и Bedstead, а также обмоток для мультиполюсных корректоров. Геометрию сечения для них можно выбрать стандартную или заранее сконструированную. В результате работы программы обмотка представляется в виде объединения 20-узловых конечных элементов серендипова типа. На рисунке 3а изображена модель обмотки дипольного магнита с коаксиальным кабелем, на рисунке 3б - модель обмотки квадрупольного магнита с коаксиальным кабелем, на рисунке 3с - модель суммарной обмотки мультиполюсного корректора.

В четвёртом параграфе рассматриваются вопросы, связанные с вычисле-

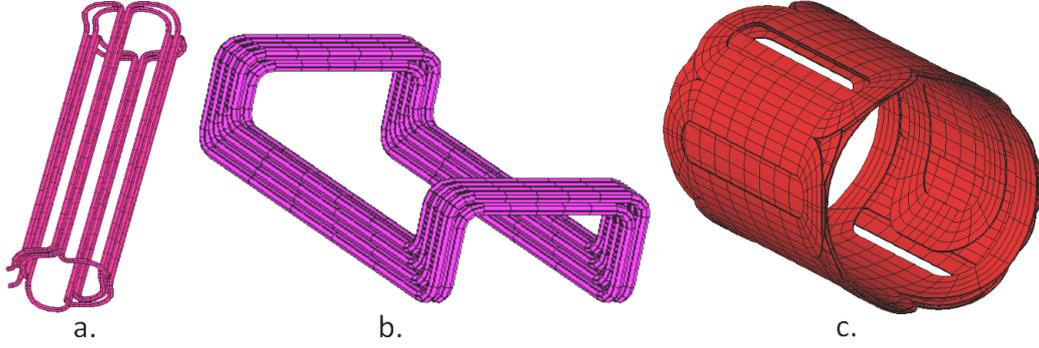


Рис. 3. Примеры моделей токовых обмоток в программе Winding generator.

нием поля от токовых обмоток $\vec{H}^S(\vec{a})$ с использованием закона Био-Савара:

$$\vec{H}^S(\vec{a}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left[\nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \times \vec{J}_i^S(\vec{x}) \right] dV_x, \quad (11)$$

где $\{\Omega_i, i = 1, N\}$ – элементы токовых обмоток, $\vec{J}_i^S(\vec{x})$ – плотность тока в i -ом элементе, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

В качестве элементов обмотки рассматриваются 20-узловые элементы серендинова типа, удовлетворяющие МКЭ. Пусть $\{\Omega_i\}$ есть набор токовых элементов, $\{P_i\}$ – вершины серендинова элемента Q_i . Тогда для любого $(\alpha, \beta, \gamma)^T$ из единичного куба $U = \{[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]\}$ мы ставим в соответствие вектор $\vec{x} = \sum_{i=1}^{20} \vec{P}_i f_i(\alpha, \beta, \gamma)$, где $\{f_i(\alpha, \beta, \gamma)\}$ – функции формы.

Определим вектор направления плотности тока как нормированное векторное произведение $\vec{E}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha}$ и $\vec{E}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta}$:

$$\vec{J}^S = \frac{[\vec{E}_1 \times \vec{E}_2]}{\|[\vec{E}_1 \times \vec{E}_2]\|}. \quad (12)$$

Тогда вклад одного i -ого элемента в итоговое поле можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \vec{I}_i &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Q_i} \frac{[\vec{J}^S \times (\vec{x} - \vec{a})]}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^3} \cdot Crd \cdot dV_x = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_U \frac{[\vec{J}^S \times (\vec{x} - \vec{a})]}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^3} \cdot Crd \cdot D \cdot d\alpha \cdot d\beta \cdot d\gamma, \end{aligned} \quad (13)$$

где Crd – плотность тока, а D – якобиан преобразования:

$$D = \left\| \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_1}{\partial \beta} & \frac{\partial x_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_2}{\partial \beta} & \frac{\partial x_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_3}{\partial \beta} & \frac{\partial x_3}{\partial \gamma} \end{array} \right) \right\|. \quad (14)$$

Следует отметить, что выражение, стоящее под знаком интеграла в (13), имеет сложную нелинейную структуру по переменным интегрирования. Получить точные аналитические формулы для этого интеграла удастся в исключительных случаях. В регулярном случае для его вычисления используются кубатурные формулы. Далее описывается приём, позволяющий в сингулярном случае свести интеграл (13) к сумме ограниченных интегралов, которая находится численно.

На основе предложенных методов был создан комплекс программ расчета магнитного поля от токовых источников в вакууме. Тестирование комплекса проводилось на примере расчета магнитного поля соленоида с постоянной плотностью тока в поперечном сечении. Сравнение результатов расчёта на оси соленоида показало хорошее согласие с аналитикой.

В **Главе 4** сформулированы методы вычисления матричных элементов возникающих дискретизованных систем линейных уравнений. Расчёты сводятся к вычислениям шестикратных, в общем случае сингулярных интегралов типа (9).

В первом параграфе главы предложены методы сведения шестикратных интегралов по двум тетраэдрам к комбинации четырёхкратных интегралов по двум треугольникам. Учитывая, что $\{f_k(\bar{x})\}$ есть линейные функции, объемные интегралы из (9) можно редуцировать к поверхностным интегралам:

$$\begin{aligned}
J_{m,i,k}^{n,j,l} &= \int_{G_m} \int_{G_n} \left[f_i(\bar{x}) f_j(\bar{a}) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial a_l} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right] dv_{\bar{x}} dv_{\bar{a}} = \\
&= \oint_{\partial G_m} \oint_{\partial G_n} \frac{f_i(\bar{x}) f_j(\bar{a}) (d\bar{S}_x, \bar{e}_k) (d\bar{S}_a, \bar{e}_l)}{|\bar{x} - \bar{a}|} - 0.5 \frac{\partial f_i^m(\bar{x})}{\partial x_k} \frac{\partial f_j^n(\bar{a})}{\partial a_l} \oint_{\partial G_m} \oint_{\partial G_n} \frac{(d\bar{S}_x, d\bar{S}_a)}{|\bar{x} - \bar{a}|} - \\
&\quad - 0.5 \frac{\partial f_i^m(\bar{x})}{\partial x_k} \oint_{\partial G_m} \oint_{\partial G_n} f_j(\bar{a}) (dS_a, \bar{e}_l) \frac{((\bar{x} - \bar{a}), d\bar{S}_x)}{|\bar{x} - \bar{a}|} - \\
&\quad - 0.5 \frac{\partial f_j^n(\bar{a})}{\partial a_l} \oint_{\partial G_m} \oint_{\partial G_n} f_i(\bar{x}) (dS_x, \bar{e}_k) \frac{((\bar{a} - \bar{x}), d\bar{S}_a)}{|\bar{a} - \bar{x}|}, \tag{15}
\end{aligned}$$

где $f_i^m(\bar{x})$ - распределение функции f_i на тетраэдре G_m .

Так как область интегрирования G_m состоит из тетраэдров, то её граница $\{\partial G\}$ состоит из треугольников. Таким образом вычисление выражений из (15) сводится к различным вариантам интегрирования по двум треугольникам.

Исходя из требований метода конечных элементов, существуют четыре варианта взаимного расположения треугольников в пространстве: треугольники не пересекаются, имеют одну общую вершину, имеют две общих вершины, и треугольники совпадают. В случае, когда треугольники не пересекаются, возможно применение кубатурных формул. Однако для остальных случаев это

невозможно из-за сингулярности подынтегральных выражений. Для вычисления подобных интегралов используется метод однородных функций.

Во втором параграфе главы продемонстрирована процедура устранения сингулярности подынтегральной функции на примере простейшего сингулярного интеграла:

$$J_0 = \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_x dS_y}{|\bar{x} - \bar{y}|}. \quad (16)$$

В параграфе 4.2.1 для интеграла (16) рассматривается случай, когда треугольники имеют одну общую вершину (рисунок 4а).

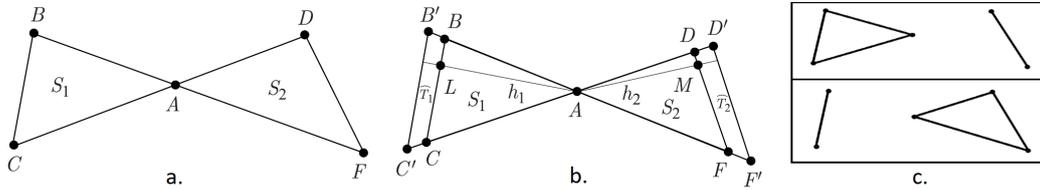


Рис. 4. Сведение интегрирования по двум треугольникам с общей вершиной к сумме интегралов по треугольнику и ребру.

Основная идея метода заключается в гомотетичном растяжении треугольников относительно их общей вершины (рисунок 4б). За счёт однородности ядра путём замены переменных интеграл по растянутым треугольникам приводится к:

$$J(\lambda) = \lambda^3 \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_{x_1} dS_{y_1}}{|\bar{x}_1 - \bar{y}_1|}. \quad (17)$$

Затем вычисляется производная от $J(\lambda)$ по λ двумя способами: аналитически и как предел разностного отношения $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{(J(\lambda) - J(1))}{(\lambda - 1)}$. Используя аддитивность интеграла как функции множества, по которому он берется, можно получить:

$$J_0 = J(1) = \frac{1}{3} \left[h_1 \int_{BC} \int_{S_2} \frac{dl_{x_1} dS_{y_1}}{|\bar{x}_1 - \bar{y}_1|} + h_2 \int_{DF} \int_{S_1} \frac{dl_{y_1} dS_{x_1}}{|\bar{x}_1 - \bar{y}_1|} \right]. \quad (18)$$

Выражения в правой части (18) есть регулярные интегралы, вычисление которых может быть произведено с использованием кубатурных формул. Таким образом, сингулярный интеграл по двум треугольникам с общей вершиной сводится к комбинации различных конфигураций регулярных интегралов по треугольнику и стороне (рисунок 4с).

В параграфах 4.2.2 и 4.2.3 для интеграла (16) рассматриваются случаи, когда треугольники имеют одну общую сторону, и когда треугольники совпадают. Алгоритм сводится к повторению вышеописанной процедуры относительно разных вершин.

Чтобы применить описанную методику для интеграла (15), его необходимо представить в виде суммы однородных функций. В третьем параграфе главы иллюстрируется способ приведения $f_i(\bar{x}) * f_j(\bar{a})$ к сумме однородных функций относительно их общих вершин, для которых применяется вышеописанная методика. В результате исходные шестикратные сингулярные интегралы представляются в виде комбинации регулярных интегралов меньшей кратности, для расчёта которых возможно применение кубатурных формул.

Пятый параграф главы посвящён итерационным методам решения нелинейных уравнений типа (7) или (10). Сложность задачи заключается в большой размерности дискретизованной системы уравнений, отсутствии хорошего начального приближения и невозможности применения методов Ньютоновского типа. Поэтому для решения использовался комбинированный метод простой итерации:

$$[C]\hat{B}_{k+1} = (\hat{H}^S + ([A] + [C])\hat{M}(\hat{B}_k)), \quad \hat{B}_0 = \bar{0}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Для решения линейных систем уравнений $[C]\bar{x} = \bar{y}$ применялся метод неполного разложения Холецкого в сочетании с методом сопряженных градиентов [16].

В **Главе 5** приводятся примеры моделирования различных магнитных систем с использованием методов, изложенных в диссертации. Описывается детальное построение разбиений различных магнитов на тетраэдры, представлены критерии качества полученных сеток, приводятся численные и графические результаты расчётов, а также сравнение их с результатами известных программных комплексов.

В первом параграфе описывается моделирование двух версий дипольного магнита эксперимента **СВМ** [3]. На рисунке 5а изображено разбиение магнита на тетраэдры, на рисунке 5б – распределение модуля магнитного поля внутри магнита, на рисунке 5с – сравнение результатов расчетов магнитного поля вдоль оси магнита, полученных по изложенной выше методике и по программе TOSCA [6].

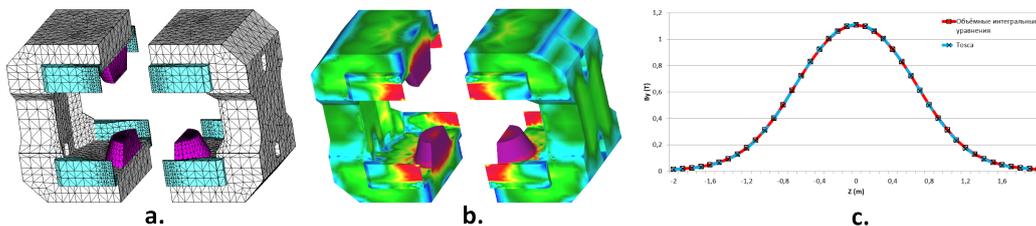


Рис. 5. Моделирование дипольного магнита.

Во втором параграфе приводится описание моделирования квадрупольного магнита **BOOSTER** и дипольного магнита коллайдера для ускорительного комплекса **NICA** [4]. На рисунке 6а изображено разбиение магнита на тетраэдры, на рисунке 6б – распределение модуля магнитного поля внутри магнита,

на рисунке 6с – сравнение результатов расчетов магнитного поля вдоль оси магнита, полученных по изложенной выше методике и по программе TOSCA.

Проведённые вычисления показывают хорошее согласие дифференциальной (программа TOSCA) и интегральной методик.

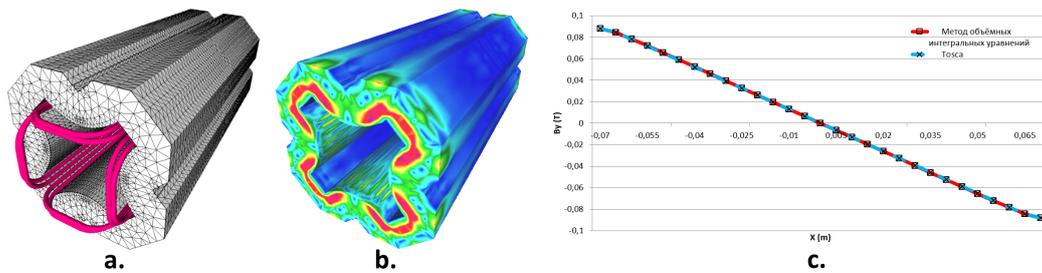


Рис. 6. Моделирование квадрупольного магнита.

При моделировании мультиполюсных корректирующих магнитов ускорительного комплекса NICA возникает проблема вычисления поля от обмоток достаточно сложной геометрии. Для построения моделей подобных токовых обмоток использовался Winding generator. Каждая из обмоток представляет собой составную обмотку из комбинации обмоток типа RaceTrack, спроектированных на поверхность цилиндра. На рисунке 7 изображены модели обмоток различного типа: 7а - дипольная обмотка, 7б - октупольная, 7с - секступольная. Генерация обмоток подобного типа была стандартизирована и включена в отдельную процедуру в комплексе Winding generator.

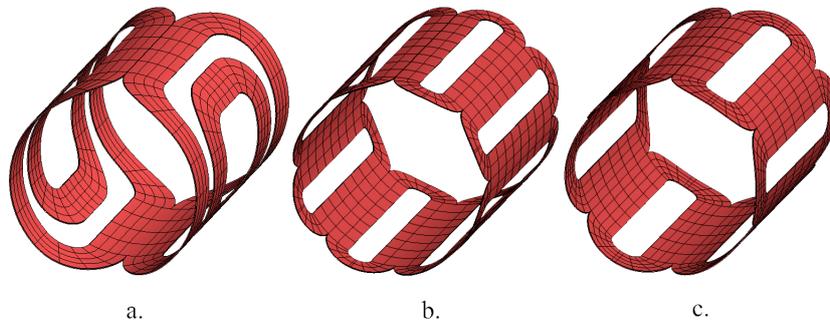


Рис. 7. Моделирование корректирующих обмоток.

В **Заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту:

1. Для объемных интегральных уравнений с линейной аппроксимацией неизвестных в каждом элементе разбиения разработана вычислительная схема, основанная на дополнительном интегрировании по элементам расчетной области. Данный подход позволяет строить непрерывные решения и повышать порядок их численной аппроксимации. В рамках данного подхода предложены методы решения возникающих нелинейных дискретизованных задач.
2. Впервые предложены методы вычисления матричных элементов дискретизованных задач, базирующиеся на понижении кратности возникающих интегралов и использовании кубатурных формул для их расчета в регулярном случае. На основе понятия однородных функций для нерегулярного случая разработаны методы редукции сингулярных интегралов к сумме регулярных интегралов меньшей кратности с дальнейшим их вычислением по кубатурным формулам.
3. Разработан программный комплекс Mesh Generator автоматической генерации трехмерных сеток для магнитных систем с однородной фронтальной топологией. В рамках метода конечных элементов разработан программный комплекс 3DFEMMESH генерации трехмерных сеток, учитывающий специфику моделирования электрофизических устройств. Данные комплексы программ включают в себя утилиты для визуализации и оценки качества полученной сетки на всех стадиях проектирования. Генератор 3DFEMMESH включен в библиотеку программ JINRLIB.
4. Создан программный комплекс моделирования токовых обмоток с различным поперечным сечением, включая востребованные в последнее время обмотки с коаксиальным сечением кабеля. Комплекс включает в себя инструментарий для визуализации создаваемой обмотки на всех стадиях проектирования. В рамках закона Био-Савара предложены методы вычисления магнитного поля от токовых обмоток.
5. Разработанные методы и программные комплексы использовались для моделирования дипольного магнита эксперимента СВМ, квадрупольного магнита BOOSTER и дипольного магнита коллайдера ускорительного комплекса NICA. Результаты моделирования магнитных систем согласуются с расчетами по коммерческим программам, базирующимся на использовании дифференциальной постановки задачи магнитостатики.

Литература

- [1] Armstrong A. G., Collie A. M., Diserens C. J. New Developments in the Magnet Design Computer Program GFUN. RL-75-066. Also in Proc. 5th Int. Conf. on Magnet Technology, Rome.
- [2] Armstrong A. G. GFUN3D User Guide, RL-76-029/A. 1976.
- [3] Compressed Baryonic Matter (CBM).
<http://www.gsi.de/work/forschung/cbmnqm/cbm.htm>.
- [4] Nuclotron-based Ion Collider facility. <http://nica.jinr.ru/>.
- [5] JINRLIB. <http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/3dfemmesh/>.
- [6] Simkin J., Trowbridge C. W. Three dimensional non-linear electromagnetic field computations using scalar potentials. IEE Proc., vol. 127, n.6.
- [7] Stratton J. A. Electromagnetic theory. McGraw-hill, 1941.
- [8] Жидков Е. П. и др. Некоторые вопросы математического моделирования ускорителей // Математическое моделирование. 1994. Vol. 6. n.6. 32–46.
- [9] Jackson J. D. Classical Electrodynamics, 2nd edition, John Wiley, New York. McGraw-hill, 1975.
- [10] Акишин П. Г. Метод интегральных уравнений в задачах магнитостатики: Автореф. дис. канд. физ.мат. наук. 11-83-558. ОИЯИ, Дубна, 1983.
- [11] Щеглов И. А. дис. канд. физ.мат. наук: 05.13.18 Дискретизация сложных двумерных и трёхмерных областей для решения задач математического моделирования. Москва. 2006.
- [12] Галанин М. П., Щеглов И. А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы. М., 2006. 32 с. (Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 10).
- [13] Галанин М. П., Щеглов И. А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы. М., 2006. 32 с. (Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №9).

- [14] Frey P. J., Borouchaki H., George P. L. Delaunay tetrahedralization using an advancing front approach // 5th International Meshing Roundtable: Proceedings // Sandia National Laboratories, Pittsburgh. 1996. P. 31–46.
- [15] Hannaby S. A. A mapping method for mesh generation // Comput. Math. Application. 1988. Vol. 16, no. 9. P. 727–735.
- [16] Meijerink J. A., van der Vorst H. A. An iterative solution method for linear systems, of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix. 1977. Vol. 31, no. 137. P. 148–162.