



Биджан Саха

Спинорное поле в эволюции Вселенной

Спинорное поле как источник изотропизации и
ускоренного расширения Вселенной



LAMBERT
Academic Publishing

Биджан Саха

СПИНОРНЫЕ ПОЛЯ В ЭВОЛЮЦИИ ВСЕЛЕННОЙ

Биджан Саха

**СПИНОРНЫЕ ПОЛЯ В ЭВОЛЮЦИИ
ВСЕЛЕННОЙ**

Спинорное поле как источник изотропизации и ускоренного
расширения Вселенной

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum/Imprint (nur für Deutschland/ only for Germany)

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen,

Handelsnamen, Warenbezeichnungen u. a. w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Coverbild: www.ingimage.com

Verlag: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG

Dudweiler Landstr. 99, 66123 Saarbrücken, Deutschland

Telefon +49 681 3720-310, Telefax +49 681 3720-3109

Email: info@lap-publishing.com

Herstellung in Deutschland:

Schalungsdienst Lange o.H.G. Berlin

Books on Demand GmbH, Norderstedt

Reha GmbH, Saarbrücken

Amazon Distribution GmbH, Leipzig

ISBN: 978-3-8433-0565-5

Только для России и стран СНГ

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой,

Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный

Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей.

Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров

общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием

того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Издатель: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG

Dudweiler Landstr. 99, 66123 Saarbrücken, Germany

Telefon +49 681 3720-310, Факс +49 681 3720-3109

Email: info@lap-publishing.com

Напечатано в России

ISBN: 978-3-8433-0565-5

АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2011 принадлежит автору и LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG

и лицензиарам

Все права защищены. Saarbrücken 2011

моим родителям:

Саха Бриндабану Чандре и Шанти Рани

и детям:

*Монике, Кристине и Севастьяну
посвящается*

Оглавление

Введение	1
История развития космологии и космологических моделей	2
Нелинейное спинорное поле	5
1 Взаимодействующие спинорное и скалярное поля во Вселенной типа Бианки-I	11
1.1 Введение	11
1.2 Основные уравнения и соотношения	13
1.2.1 Спинорное поле, его инварианты и ковариантная производная	13
1.2.2 Лагранжиан скалярного поля	15
1.2.3 Лагранжиан взаимодействия	15
1.2.4 Гравитационное поле: краткий обзор Бианки типа-I космологии	16
1.3 Уравнения полей и их общие решения	19
1.3.1 Решения уравнений полей	20
1.4 Инварианты пространства-времени	27
1.5 Физически наблюдаемые величины	29
1.6 Λ -член и его роль в эволюции Вселенной	32
1.7 Космологическая сингулярность и условие энергодоминантности	33
1.8 Качественный анализ полученных решений	34
1.8.1 Нелинейное скалярное поле в отсутствии спинорного поля	45
1.8.2 Нелинейное спинорное и нелинейное скалярное поля с минимальной связью	47
1.8.3 Взаимодействующие спинорное и скалярное поля	47
1.8.4 VI Вселенная заполненная только идеальной жидкостью	52
1.9 Численный анализ результатов	53
1.9.1 $F_1 = S^n$	56
1.9.2 $F_1 = \sin S$	60
1.10 Система с G и Λ зависящими от времени	63
1.11 Система с магнитной жидкостью	65
1.12 Выводы	68

2	Нелинейные спинорные поля в анизотропной Вселенной, заполненной вязкой жидкостью	71
2.1	Введение	71
2.2	Уравнения Эйнштейна и их общие решения	73
2.3	Точные решения	79
2.3.1	Система с вязкой жидкостью	79
2.3.2	Система с нелинейным спинорным полем и вязкой жидкостью	83
2.3.3	Система с взаимодействующими спинорным и скалярным полями и вязкой жидкостью	87
2.4	Качественный анализ	90
2.4.1	Система с вязкой жидкостью	93
2.4.2	Система с нелинейным спинорным полем и вязкой жидкостью	96
2.4.3	Система с взаимодействующими спинорным и скалярным полями и вязкой жидкостью	98
2.4.4	Качественный анализ полной системы	117
2.5	Эволюция с обострением	121
2.5.1	Обострение	122
2.5.2	Бесконечность	123
2.6	Выводы	126
3	Ранняя инфляция, изотропизация и позднее ускорение Вселенной типа Бианки-I	129
3.1	Введение	129
3.2	Основные уравнения	136
3.3	Анализ полученных решений при заданной правой части	139
3.3.1	Модель с космологической постоянной	139
3.3.2	Модель с квинтэссенцией	143
3.3.3	Случай с газом Чаплыгина	145
3.3.4	Случай квинтэссенцией с модифицированным уравнением состояния	146
3.4	Спинорное поле как альтернативный источник ускоренного расширения	147
3.5	Спинорная модель идеальной жидкости	154
3.5.1	Моделирование идеальной жидкости с помощью нелинейного спинорного поля	154
3.5.2	Моделирование идеальной жидкости с помощью взаимодействующих спинорного скалярного полей	158
3.6	Выводы	158
4	Нелинейные спинорное и скалярное поля в модели Бианки VI	161
4.1	Введение	161
4.2	Гравитационное поле	162
4.3	Уравнения полей и их решения	164
4.3.1	Нелинейное спинорное поле в отсутствии скалярного поля	164

4.3.2	Спинорное поле с индуцированной нелинейностью	175
4.4	Численные решения	176
4.4.1	Численный анализ решения в случае самодействия	176
4.4.2	Численный анализ с индуцированной нелинейностью	179
4.5	Выводы	184
5	Статические плоско-симметричные решения взаимодействующих спи- норного и скалярного полей в ОТО	187
5.1	Введение	187
5.2	Плоско-симметричное гравитационное поле	189
5.3	Уравнения полей и их решения	191
5.4	Точные решения основных уравнений и их физические интерпретации	194
5.4.1	Нелинейное спинорное и линейное скалярное поля	198
5.4.2	Нелинейное скалярное поле в отсутствии спинорного поля	208
5.5	Численные решения	211
5.6	Выводы	212
	Заключение	213
	Приложение 1	215
	Классическое спинорное поле	215
	Приложение 2	219
	Связь между инвариантами, построенными из билинейных спинорных форм	219
	Приложение 3	225
	Пространственно-временная сингулярность	225
	Bibliography	244

Введение

Вопрос об эволюции Вселенной занимал умы людей еще с незапамятных времен. Но только за последние несколько десятилетий, благодаря научно-техническому прогрессу, который позволил сделать достаточно точные и достоверные астрономические наблюдения, космология стала привлекательной и самостоятельной научной дисциплиной. Хотя в космологии имеется ряд проблем, в данной диссертации рассматриваются наиболее актуальные проблемы современной космологии, а именно: проблема начальной сингулярности, проблема изотропизации изначально анизотропной Вселенной и проблема позднего ускоренного расширения Вселенной, т.е., ускорение, которое мы наблюдаем в настоящее время.

В настоящее время крупномасштабная структура Вселенной трактуется с использованием однородной и изотропной модели Фридмана-Робертсона-Уокера. Мизнер - известный классик в области астрофизики и космологии - сформулировал ряд теоретических аргументов в пользу существования анизотропной фазы эволюции Вселенной. Подтверждением его гипотезы послужил эксперимент, в котором была обнаружена анизотропия реликтового излучения, состоящая в температурной флуктуации излучения черного тела (The Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). В результате был произведен пересмотр некоторых фундаментальных предположений космологии. Возникла модель изначально анизотропной Вселенной, которая со временем переходит в изотропное состояние. Эта модель дополняет и обогащает модель Фридмана-Робертсона-Уокера.

После открытия реликтового излучения теория горячей Вселенной сразу стало общепринятой [30]. Любые решения общей теории относительности, описывающие динамику расширения Вселенной, продолженные назад во времени, при всех разумных уравнениях состояния приводят к начальной сингулярности (**Большому Взрыву**), которая характеризуется бесконечной плотностью и температурой вещества. Проблема существования начальной (космологической) сингулярности является одной из наиболее серьезных проблем физической космологии. В данной диссертации изучена возможность ее устранения.

До недавнего времени считалось, что наша Вселенная расширяется с замедлением. Настоящую сенсацию вызвало открытие в 1998 году в ходе изучения спектров излучения при взрывах сверхновых, что Вселенная на самом деле расширяется с ускорением. Теория, способная объяснить ускоренное расширение, пока еще далека от завершения. В связи с этим проблема ускоренного расширения Вселенной - одна

из самых актуальных в современной космологии.

После появления первой модели инфляционной космологии, использующей в качестве источника гравитационного поля скалярное поле, ему придавалось большое значение. Использование скалярного поля дало возможность конструировать довольно большое количество космологических моделей. Однако возник вопрос, могут ли другие поля играть значимую роль в космологии. Оказалось, что в качестве такого поля может служить спинорное поле, которое более чувствительно к гравитации, и как следствие может играть важную роль для устранения ряда проблем, возникающих в обычных подходах.

В настоящей книге рассматриваются несколько проблем, а именно: проблема начальной сингулярности, изотропизация изначально анизотропной Вселенной, проблема ускоренного расширения, а также роль нелинейного спинорного поля в эволюции Вселенной. В данной главе кратко рассмотрены общие вопросы, связанные с перечисленными выше проблемами.

История развития космологии и космологических моделей

Еще в древности люди, наблюдая ночное небо, пытались понять природу Вселенной, моделировать ее эволюцию. Даже несколько столетий назад люди считали, что Земля плоская. Аристотель полагал, что Земля неподвижна, а Солнце, Луна, планеты и звезды вращаются вокруг нее по круговым орбитам. В модели Птолемея Земля являлась центром Вселенной. Только в 1514 году Коперник предложил иную модель, поместив в центр мира Солнце. Но прошло почти столетие, пока Галилей и Кеплер не поддержали эту модель, опираясь на наблюдательные данные. А объяснение того, почему планеты обращаются вокруг Солнца, появились только в 1687 году в "Математических началах натуральной философии" Исаака Ньютона. Модель Ньютона была еще далека от совершенства - пространство и время были вроде арены, где разыгрывается спектакль с участием Земли, Солнца и других небесных тел. Время и пространство в модели Ньютона были абсолютными - хотя понятие абсолютного пространства не согласовывалось с его теорией. После появления теории электромагнетизма Максвелла, в которой электромагнитные волны распространяются со скоростью света, была сделана попытка принять гипотезу эфира, чтобы согласовать теорию Максвелла с законами Ньютона. Попытки спасти теорию эфира не увенчались успехом. Только в 1905 году, когда Эйнштейн предложил свою специальную теорию относительности, всякая надобность в эфире отпала благодаря отказу от абсолютного времени. Фундаментальный постулат Эйнштейна, называемый принципом относительности, гласит, что все законы физики должны быть одинаковыми для всех свободно движущихся наблюдателей независимо от их скоростей. И это было верно как для законов движения Ньютона, так и для теории Максвелла. Специальная теория хорошо объясняла постоянство скорости света для всех наблюдателей и описывала явления при движе-

нии со скоростями, близкими к скорости света, но все же оказалась несовместима с теорией тяготения Ньютона. Это вынудило Эйнштейна в 1917 году предложить еще одну доктрину, которая называется общей теорией относительности. Но даже в это время вера в статическую Вселенную была очень сильна и Эйнштейн был настолько уверен в этом, что ввел в общую теорию относительности так называемую космологическую постоянную. Современная картина Вселенной начала проясняться только в 1924 году после того, как Эдвин Хаббл доказал существование многочисленных галактик вне пределов Млечного Пути. Самое же главное произошло немного позже, когда в 1929 Хаббл экспериментально показал, что Вселенная расширяется и навсегда похоронил идею статичности Вселенной. Долгое время оставалось незамеченным, что первое предсказание о расширяющейся Вселенной было сделано Фридманом в 1922 году [134]. Большую известность эта модель получила только после появления работы Робертсона (Robertson) [235, 236, 237] и Уокера (Walker) [304] и стала известной как модель Фридмана-Робертсона-Уокера (Friedmann-Robertson-Walker (FRW) model). С более подробной историей развития космологии можно ознакомиться в знаменитых книгах Хокинга [153, 154].

Имеется достаточно большое количество экспериментальных данных, указывающих на то, что крупномасштабная структура Вселенной настолько проста и симметрична, что может быть с высокой точностью описана моделью Фридмана-Робертсона-Уокера. Флуктуации в реликтовом излучении - одно из критических доказательств такого предположения. Поэтому анизотропия, которая недавно наблюдалась по температуре реликтового излучения, породила массу вопросов и привела к пересмотру некоторых фундаментальных предположений космологии [206], а именно: Вселенную стали описывать как изначально анизотропную, со временем переходящую в изотропное состояние.

Космологические модели, рассматриваемые в литературе, можно разделить на несколько групп [201]:

1) Пространственно-однородные и изотропные модели. Это космологическая модель Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера и "стандартная модель". Такие модели впервые были изучены Фридманом (Friedmann) [134], Робертсоном (Robertson) [235, 236] и Уокером (Walker) [304]. Хотя пространственно-однородные и изотропные модели Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW) широко используются как хорошие аппроксимации настоящей и начальной стадий эволюции вселенной, крупномасштабное распределение материи в наблюдаемой вселенной, в основном представленной в форме дискретной структуры, не показывает однородности в высших порядках. Напротив, реликтовое излучение, что существенно в микроволновой области, чрезвычайно однородно. В декартовых координатах это распределение задается метрикой

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (1)$$

где $a(t)$ - масштабный фактор. Самая распространенная версия этой модели задается с помощью сферических координат и имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \right], \quad (2)$$

где $R(t)$ - неизвестная функция времени, а k - некоторая постоянная, принимающая значения $+1, 0, -1$. При $k = -1$ или $k = 0$ пространство оказывается бесконечным (открытым), при $k = 0$ оно плоское, а при $k = +1$ оно конечное (закрытое), хотя и неограниченное.

2) Пространственно-однородные и анизотропные модели. Это модели типа Бианки, исключение составляет модель Кантовского-Сакса (Kantowski-Sachs) с $S^2 \times R^2$ топологией.

Модели Бианки в компактной форме можно записать следующим образом [245]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)e^{-2mz} dx^2 - b^2(t)e^{2nz} dy^2 - c^2(t) dz^2. \quad (3)$$

Метрика (3) описывает модель Бианки-VI (BVI). При $m = n$ она переходит в Бианки-V (BV), при $n = 0$ она превращается в Бианки-III (BIII), полагая $m = n = 0$ в (3) имеем метрику I (BI).

Другие модели Бианки задаются метрикой:

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t)(dx - h(y)dz)^2 - R^2(t)(dy^2 + f^2(y)dz^2), \quad (4)$$

где $f(y) = \{y, \sin(y), \sinh(y)\}$, и $h(y) = \{-y^2/2, \cos(y), -\cosh(y)\}$ при $\delta = -(d^2 f / dy^2) / f$. $\delta = 0$ соответствует модели Бианки-II (BII), $\delta = +1$ - Бианки-IX (BIX) и $\delta = -1$ - Бианки-VIII (BVIII).

Пространство-время Кантовского-Сакса (Kantowski-Sachs) можно определить как [163]

$$ds^2 = -d\tau^2 - H(\tau)dr^2 - R^2(\tau) \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2 \right), \quad (5)$$

где τ - космологическое время.

3) Изотропные, но неоднородные модели. Это сферически-симметричные модели, в частности, модель Толмана-Бонди, которая была впервые обсуждена в работе Леметра [197]. В общем случае сферически-симметричная метрика имеет вид

$$ds^2 = Y^2 \left[\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2 \right) \right] + e^{2\lambda} dr^2 - e^{2\nu} dt^2, \quad (6)$$

где $Y = Y(r, t)$, $\lambda = \lambda(r, t)$, и $\nu = \nu(r, t)$.

Метрика Толмана-Бонди задается в виде [139]

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{Y'^2}{1 - kr^2} dr^2 + Y^2 \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2 \right), \quad (7)$$

где $Y = Y(r, t)$. Здесь штрих означает производную по r . Индекс $k = 0, \pm 1$ соответствует плоской, замкнутой и открытой геометрии соответственно.

4) Модели с двумя игнорируемыми координатами, обычно с парой коммутирующих векторов Киллинга. Это могут быть плоско-симметричные или цилиндрически-симметричные модели. Плоско-симметричные модели задаются метрикой [295]

$$ds^2 = e^{2\chi} dt^2 - e^{2\alpha} dx^2 - e^{2\beta} (dy^2 + dz^2), \quad (8)$$

где скорость света c принята равной единице и χ , α , β есть функция от x и t .

Цилиндрически-симметричное пространство-время имеет вид [11, 53, 241]

$$ds^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{2\alpha} dx^2 - e^{2\beta} dy^2 - e^{2\mu} dz^2, \quad (9)$$

где все компоненты метрического тензора зависят только от x . Для удобства часто используются гармонические координаты, удовлетворяющие координатному условию

$$\alpha = \gamma + \beta + \mu. \quad (10)$$

5) Модели с меньшей симметрией, чем вышеуказанные. Пока известно только несколько специальных случаев.

Поскольку, с одной стороны, настоящая Вселенная достаточно изотропна, а с другой, есть основание считать, что у нее была анизотропная фаза эволюции, естественно возникает вопрос о проблеме изотропизации.

Еще не так давно считалось, что расширение Вселенной происходит с замедлением, поэтому когда в 1998 году астрономическое наблюдение показало, что Вселенная на самом деле расширяется с ускорением, в космологии произошел новый поворот, а именно: космологи начали предлагать множество моделей, способных объяснить этот новый феномен.

Нелинейное спинорное поле

После создания общей теории относительности и квантовой теории поля возник интерес к исследованию роли гравитационного взаимодействия в физике элементарных частиц. Нахождение и исследование свойств регулярных локализованных решений нелинейных полевых уравнений (солитонно- или частицеподобных решений) связано с надеждой создать свободную от расходимостей теорию элементарных частиц, которая могла бы описать сложную пространственную структуру частиц, наблюдаемую экспериментально. При этом надо иметь в виду, что нелинейное обобщение теории поля необходимо независимо от вопроса о расходимости, так как учет взаимодействия полей с неизбежностью приводит к появлению в уравнениях поля нелинейных членов. Следовательно, нелинейность надо рассматривать не только как один из способов устранения трудностей теории, но и как отражение объективных свойств поля. Как отмечают Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков [9], полное описание элементарных частиц со всеми их физическими характеристиками (например, магнитными моментами) может дать лишь теория взаимодействующих полей. Поэтому можно сказать, что отдельные

свободные (линейные) поля, представляют собой основу для описания этих частиц в рамках теории взаимодействующих полей.

Нелинейные феномены являются одной из самых популярных тем исследований последних лет. Однако, надо признаться, что нелинейные классические поля не получили должного развития - скорее всего из-за математических трудностей, которые возникают по причине неперенормируемости Ферми- или других типов нелинейных связей [230]. Одной из принципиальных трудностей нелинейной теории поля является проблема выбора полевых уравнений. В настоящее время нет критерия отбора лагранжианов взаимодействия: любая лоренц-инвариантная комбинация полевых функций может представлять собой такой лагранжиан [9]. Нелинейное самодействие может возникать как следствие геометрической структуры пространства-времени, - конкретно, - из-за существования кручения. Иваненко [20, 21] и Родичев [40] показали, что релятивистская теория приводит в некоторых случаях к самодействию четвертой степени. В 1950 году Вейль (Weyl) показал [309], что если аффинные и метрические свойства пространства-времени рассматривать как независимые, то спинорное поле подчиняется или линейному уравнению в пространстве с кручением или нелинейному - в римановом пространстве. Так как самодействие является спин-спиновым, это позволяет приписывать спину динамическую роль и предлагает ключ к пониманию происхождения нелинейности. Этот вопрос далее уточнялся в некоторых работах Утиямы (Utiyama), Киббла (Kibble) и Шамы (Sciama) [302, 179, 280]. Надо отметить, что в большинстве работ, посвященных солитоноподобным решениям, не учитывается собственное гравитационное поле системы взаимодействующих полей, хотя его учет представляет определенный интерес вследствие того, что оно универсально и неэкранируемо, а уравнения гравитационного поля по своей структуре нелинейны. Следствием нелинейности гравитационного поля является принципиальная невозможность введения точечного объекта [32, 39, 57].

Для выяснения принципиальных свойств самосогласованной системы физических полей необходимо располагать точным решением соответствующей системы полевых уравнений. Как известно, отыскание точных решений нелинейных уравнений даже в плоском пространстве-времени является сложной задачей; учет же собственного гравитационного поля в виде системы уравнений Эйнштейна значительно усложняет задачу. Поэтому целесообразно рассматривать модельные системы полей, допускающие точное математическое исследование.

Спецификой общей теории относительности является то, что точные решения уравнений Эйнштейна представляют самостоятельный физический интерес. Это отчасти связано с тем, что основные физические следствия ОТО выводились на основе анализа конкретных точных решений (например, решения Шварцшильда [25]).

В простейшем случае лагранжиан самодействия является квадратом псевдовектора, но можно показать, что возможна и скалярная связь [231]. Отличный обзор по этому поводу можно найти в работе [157]. Нелинейные квантовые дираковские поля были использованы Гейзенбергом [158, 159] в его амбициозной объединенной теории элементарных частиц. После широко известной работы Гросса (Gross) и Невё (Neveu) [147] эти поля вновь стали предметом большого интереса. Нелинейное спинорное по-

ле, которое появляется благодаря симметричной связи между нуклонами, мюонами и лептонами, было изучено Финкельштейном (Finkelstein) с соавторами [133] в классической аппроксимации. Хотя существование фермионов со спином $1/2$ и теоретически, и экспериментально не вызывает сомнений, они описываются квантовыми полями. Возможное оправдание существования классических спинорных полей рассмотрено в работе [64] (см. приложение 1). Отметим, что спинорное поле также можно использовать для моделирования идеальной жидкости в космологии [184, 261, 262, 263]. Отметим также, что система самосогласованных уравнений Эйнштейна-Дирака с космологическим членом была рассмотрена в работе [3].

Благодаря применению в космологии и астрофизике, квантовая теория в искривленном пространстве-времени в последние годы становилась объектом большого интереса. Признаки существования сильного гравитационного поля в нашей вселенной приводят к изучению квантовых эффектов материальных полей во внешнем классическом гравитационном поле. В работах [216, 217] Паркер (Parker) рассматривал поля со спином 0 и $\frac{1}{2}$ соответственно в пространстве-времени Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW), которое не было квантованным. Уравнения, описывающие поля со спином 0, являются ковариантным обобщением уравнения свободного поля в специальной теории относительности, тогда как поля со спином $\frac{1}{2}$ удовлетворяют полностью ковариантным обобщенным уравнениям Дирака. В работе [216] автор показал, что безмассовые поля с нетривиальным (произвольным) спином, описывающие такие частицы, как фотон или гравитон, не рождаются за счет расширения, независимо от его формы.

Рассматриваемый в [217] специальный релятивистский предел дает новые доказательства о связи между спином и статистикой. Показано, что расширение Вселенной в общем приводит к рождению частиц со спином $\frac{1}{2}$, что не верно в случае нулевой и бесконечной массы. Также изучено фридмановское расширение Вселенной, заполненной излучением, особо выделяя эффекты расширения в начальной стадии. После появления работ по скалярным [216] и спинорным (со спином $\frac{1}{2}$) полям [217] множество авторов изучили эту проблему. Современная космология в основном построена на фридманских решениях уравнений Эйнштейна, которые описывают полностью однородную и изотропную Вселенную ("закрытая" и "открытая" модели, т.е. ограниченная и неограниченная Вселенные). Основным свойством этих решений является их нестационарность. Идея расширяющейся Вселенной, вытекающая из этого свойства, подтверждена астрономическими наблюдениями и в настоящее время смело можно предполагать, что изотропные модели в общем адекватно описывают современную стадию развития Вселенной.

Хотя пространственно-однородная и изотропная модель Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ) широко рассматривается как хорошее приближение к настоящей и ранней Вселенной, крупномасштабное распределение материи в наблюдаемой Вселенной, в основном представленное в виде дискретной структуры, не проявляет однородности в высших порядках. А реликтовое излучение, существенное в микроволновой области, сильно однородно. Однако последние космические исследования обнаружили анизотропию в микроволновом фоне. Космический аппарат Cosmic Background Explorer's

differential radiometer обнаружил и измерил реликтовую анизотропию в разных угловых масштабах. Считается, что эта анизотропия скрывает в себе всю историю космической эволюции, начиная с рекомбинационной эры, и рассматривается она как фактор, который может многое говорить о геометрии и составе Вселенной. Ученые надеются, что еще многое в реликтовой анизотропии будет разгадано с помощью исследования микроволновой анизотропии. Существует всеобщее понимание среди космологов, что в реликтовой анизотропии в малом угловом масштабе находится ключ к разгадке формирования дискретной структуры.

Теоретические аргументы [204] и последние экспериментальные данные, которые подтверждают существование анизотропной фазы, постепенно переходящей в изотропную, наталкивают на идею рассмотрения модели Вселенной с анизотропным фоном. Я.Б.Зельдович впервые предположил, что начальная изотропизация космологического расширения происходит в результате квантового эффекта рождения частиц вблизи сингулярности [17]. Это предположение в дальнейшем было оправдано множеством авторов [31, 200, 165]. Интерес к изучению уравнения Клейна-Гордона и Дирака в анизотропных моделях возрос после того как Ху (Hu) и Паркер (Parker) [165] показали, что рождение скалярных частиц на анизотропном фоне может устранить анизотропию по мере расширения Вселенной.

Вселенная Бианки типа-I (BI), будучи непосредственным обобщением плоской Вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW), является одной из самых простых моделей анизотропной Вселенной, которая описывает однородную и пространственно-плоскую Вселенную. В отличие от FRW Вселенной, у которой масштабные факторы во всех трех направлениях одинаковы, у BI все эти факторы разные, тем самым и вводится анизотропия. Более того, вблизи сингулярности она ведет себя похоже на Вселенную Казнера даже в присутствии материи и тем самым попадает в рамки общего анализа сингулярностей, проведенного Белинским и соавторами [74]. Далее, во Вселенной, заполненной жидкостью, удовлетворяющей уравнению состояния $p = \zeta \varepsilon$, $\zeta < 1$, было показано, что изначальная анизотропия BI Вселенной быстро исчезает, и она превращается в FRW Вселенную [172]. Поскольку современная Вселенная удивительно изотропна, это свойство делает BI Вселенную самым подходящим кандидатом для изучения возможных эффектов начальной анизотропии на основе сегодняшнего наблюдения. Учитывая важность выше сказанного, разные авторы изучали BI Вселенную с разных точек зрения.

В работе [102] Кименто (Chimento) и Моллераха (Mollerach) исследовалось уравнение Дирака в BI Вселенной и найдены их классические решения. Авторы также утверждают, что для каждого момента существуют только два независимых решения. Еще они показали, что невозможно получить их из решений, найденных для FRW Вселенной с помощью теории возмущений. Одно из полученных решений описывает частицу с определенной спиральностью (helicity), тогда как другое решение представляет анти-частицу с противоположным вращением. Этот факт ставит очень интересную проблему, а именно, частицы со спином $1/2$ не могут выживать в BI пространстве-времени, по крайней мере, если они сохраняют известные свойства в плоском пространстве-времени. Этой проблемой также занимались Кастаньино и дру-

гие (Castagnino *et. al.*)[96]. Было показано, что если уравнения Дирака можно разделить, то существует четыре независимых решения. Спинорные поля в VI Вселенной были также исследованы Белинским и Халатниковым. В своей работе они решили систему уравнений Эйнштейна- Дирака, когда космологическая постоянная и масса спинорного поля исчезают (нейтрино). Они также заметили, что если VI Вселенная заполнена нейтрино, то главные направления расширения изменяются во времени. Используя гамильтонов метод, Анно (Henneaux) изучил Бианки класс A Вселенных, создаваемый спинорным источником, [160, 161]. В [160] им было получено общее решение уравнения Дирака с массой в пространстве-времени типа Бианки-I с космологической постоянной, которое далее было применено ко Вселенной типа Бианки-II [161].

В работах [164, 203, 106] разные авторы изучали поведение гравитационной волны в VI Вселенной. В [203] уравнения эволюции для малых возмущений в метрике, плотности энергии и скорости были получены для анизотропной вязкой VI Вселенной. Было показано, что полученные решения не зависят ни от уравнений состояния космической жидкости, ни от ее вязкости. Авторы также показали, что гравитационные волны не обязательно должны быть поперечными в анизотропно расширяющейся VI Вселенной, а продольные компоненты гравитационной волны физически не существенны. В работе [106] Чо (Cho) и Спелиотополас (Speliotopoulos) изучили распространение классических гравитационных волн в VI Вселенной. Они нашли, что гравитационные волны в VI Вселенной не эквивалентны двум безмассовым скалярным полям с минимальной связью, как это бывает в FRW Вселенной. По причине их тензорной природы, гравитационные волны более чувствительны к анизотропии пространства-времени, чем скалярное поле, и в результате в уравнениях индуцируется эффективный массовый член. Более того, они нашли связь между двумя поляризованными состояниями гравитационных волн, что отсутствует в FRW Вселенной.

Решения для однородных моделей типа FRW с линейными и нелинейными (с квадратной псевдовекторной нелинейностью) спинорными полями были получены в работе [23]. В работе [189, 27] доказана теорема об индуцировании квадратичной псевдовекторной нелинейности у спинорного поля кручением пространства-времени. Теорема об индуцировании в пространстве Вейля квадратичной векторной нелинейности у спинорного поля была доказана в [182]. В [26] получено решение для стационарной космологической модели со взаимодействующими спинорными и электромагнитными полями. В работе [190] получено решение для стационарной космологической модели с вращением типа Геделя с массивным спинорным полем. А для случая с нестационарной вращающейся космологической модели соответствующее решение получены в [187]. Доказано, что в аффинно-метрической теории гравитации у спинорного поля индуцируются квадратичные скалярные, псевдоскалярные, векторные и псевдовекторные нелинейности [183].

Нелинейное спинорное поле (НЛСП) во внешнем FRW космологическом гравитационном поле было рассмотрено в работе [54]. Тут мы хотели бы заметить, что присутствие особой (сингулярной) временной точки в пространстве-времени является еще одним важным свойством изотропной модели. Присутствие такой сингулярной

точки означает, что время ограничено. Мотивацией введения нелинейного члена в лагранжиан спинорного поля является необходимость ответить на естественный вопрос, который возникает в связи с присутствием сингулярной точки, т.е. действительно ли присутствие сингулярной точки является внутренне присущим свойством релятивистских космологических моделей или это просто следствие упрощения реальности, которое делается в этих моделях. Работа Шикина показывает, что введения нелинейных спинорных полей недостаточно для устранения сингулярности в FRW Вселенной. Естественным продолжением этой работы было введение анизотропии в модели и анализ уравнений нелинейных спинорных полей во внешнем космологическом поле типа Бианки-I [44]. В этой работе мы рассмотрели нелинейный член в лагранжиане спинорного поля как произвольную функцию всех возможных инвариантов, построенных из билинейных спинорных форм. В ней мы также изучили возможность устранения начальной сингулярности. Тут хотел бы заметить, что хотя введение нелинейного спинорного поля в систему при некоторых конкретных выборах порождает регулярное решение, но оно достигается за счет нарушения условия энерго-доминантности в теореме Хоукинга-Пенроуза [155].

В последние годы мы исследовали поведение самосогласованных нелинейных спинорных полей во Вселенной типа Бианки-I [239, 269] как в присутствии идеальной жидкости, так и при ее отсутствии. Далее были подготовлены работы [60, 1, 270], в которых мы рассмотрели самосогласованную систему взаимодействующих спинорных и скалярных полей. Недавно нами была исследована [271, 243] роль космологической постоянной (Λ), которая наряду с гравитационной постоянной Ньютона (G) рассматривается как фундаментальная константа в теории гравитации Эйнштейна [122, 123]. Надо заметить, что помимо VI широко исследуются и другие модели Бианки. Здесь уместно назвать работы дубнинских физиков [5, 141, 98, 99, 100]. Отметим также, что нелинейные спинорные поля в рамках квантовой космологии рассматриваются в работе [185].

В наблюдательной астрономии имеются данные о постоянной Хаббла и плотности энергии, относящиеся к различным этапам эволюции Вселенной. Мы предполагаем возможным восстановить параметры наших моделей (коэффициенты вязкости, нелинейности спинорного и скалярного полей и др.), используя эти данные, чтобы затем воспроизвести предположительно ход реальной эволюции нашей Вселенной. Подгонка параметров не представляет теоретико-физических затруднений и может быть выполнена методами, восходящими еще к Гауссу, а среди современных примеров этого процесса можно сослаться на [15].

Глава 1

Взаимодействующие спинорное и скалярное поля во Вселенной типа Бианки-I

1.1 Введение

В этой главе рассматривается самосогласованная система взаимодействующих нелинейных спинорного и скалярного полей в рамках Бианки типа-I космологической модели в присутствии идеальной жидкости и космологической постоянной (Λ -члена.) Сначала рассмотрим лагранжиан и основные уравнения соответствующих полей, выражения для физически наблюдаемых величин, условия возникновения пространственно-временных сингулярностей, историю появления и роль Λ -члена в космологии. Полученные общие результаты далее будут проанализированы при конкретных выборах нелинейностей. Вслед за этим численно проанализируем эволюцию Вселенной.

Вселенная Бианки типа-I (BI), будучи непосредственным обобщением плоской Вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW), является одной из самых простых моделей анизотропной Вселенной, которая описывает однородную и пространственно плоскую Вселенную. В отличие от FRW Вселенной, у которой масштабные факторы во всех трех направлениях одинаковы, у BI все эти факторы разные, тем самым она вводит анизотропию в систему. Более того, вблизи сингулярности она ведет себя похоже на Вселенную Казнера даже в присутствии материи, и тем самым попадает в рамки общего анализа сингулярностей, проведенного Белинским с соавторами [74]. Далее, во Вселенной, заполненной жидкостью, удовлетворяющей уравнению состояния $p = \zeta \varepsilon$, $\zeta < 1$, было показано, что изначальная анизотропия в BI Вселенной быстро исчезает и превращается в FRW Вселенную [172]. Поскольку современная Вселенная удивительно изотропна, это свойство делает BI Вселенную самым подходящим кандидатом для изучения возможных эффектов начальной анизотропии на основе сегодняшнего наблюдения. В свете важности выше сказанного разные авторы изучали BI Вселенной с разных точек зрения.

В своей работе [102] Кименто (Chimento) и Моллерах (Mollerach) исследовали уравнения Дирака в VI Вселенной и нашли их классические решения. Они также утверждают, что для каждого момента существуют только два независимых решения, которые невозможно получить из решения, найденного для FRW Вселенной с помощью пертурбации. Одно из полученных решений описывает частицу с определенной спиральностью (*helicity*), тогда как другое решение представляет анти-частицу с противоположным вращением. Этот факт предлагает очень интересную проблему, а именно, частицы со спином $1/2$ не могут выжить в VI пространстве-времени по крайней мере, если они сохраняют известные свойства в плоском пространстве-времени. Этой проблемой также занимался Кастаньино (Castagnino) и другие ученые [96]. Они показали, что если уравнения Дирака можно разделить, то существуют четыре независимых решения. Спинорные поля в VI Вселенной также были исследованы Белинским и Халатниковым. В своей работе они решили систему уравнений Эйнштейна-Дирака, когда космологическая постоянная и масса спинорного поля исчезают (нейтрино). Они также заметили, что если VI Вселенная заполнена нейтрино, то главные направления расширения изменяются во времени. Используя гамильтоновы методы, Хенне (Henneaux) изучил Бианки класс A Вселенных, создаваемый спинорным источником [160, 161]. В [160] им было получено общее решение уравнения Дирака с массой в пространстве-времени типа Бианки-I и с космологической постоянной, которое далее было применено ко Вселенной типа Бианки-II [161].

В работах [164, 203, 106] разные авторы изучали поведение гравитационной волны в VI Вселенной. В [203] эволюционные уравнения для малых возмущений в метрике, плотности энергии и скорости были получены для анизотропной вязкой VI Вселенной. Было показано, что полученные решения не зависят ни от уравнений состояния космической жидкости, ни ее вязкости. Они также показали, что гравитационным волнам не обязательно быть поперечными в анизотропно расширяющейся VI Вселенной, а продольные компоненты гравитационной волны физически не существенны. В своей работе [106] Чо (Cho) и Спелиотополаус (Speliotopoulos) изучили распространение классических гравитационных волн в VI Вселенной. Они нашли, что гравитационные волны в VI Вселенной не эквивалентны двум безмассовым скалярным полям с минимальной связью, как это бывает в FRW Вселенной. По причине ее тензорной природы, гравитационные волны более чувствительны к анизотропии в пространстве-времени, чем скалярное поле и в результате они приобретают эффективный массовый член. Более того, они нашли связь между двумя поляризованными состояниями гравитационных волн, что отсутствует в FRW Вселенной.

Нелинейное спинорное поле (НЛСП) во внешнем FRW космологическом гравитационном поле впервые было рассмотрено Шикиным в 1991 [54]. Тут хотелось бы заметить, что присутствие особой (сингулярной) временной точки в пространстве-времени является еще одним важным свойством изотропной модели. Присутствие такой сингулярной точки означает, что время ограничено. Мотивацией введения нелинейного члена в лагранжиан спинорного поля является желание ответить на естественный вопрос, который возникает в связи с присутствием сингулярной точки, т.е., насколько присутствие сингулярной точки является внутренне присущим свойством реляти-

вистских космологических моделей или это просто следствие упрощения реальности, которое делается в этих моделях. Работа Шикина показывает, что введение нелинейных спинорных полей недостаточно для устранения сингулярности в FRW Вселенной. Естественным продолжением этой работы было введение анизотропии в модели и анализ уравнений нелинейных спинорных полей во внешнем космологическом поле типа Бианки-I [44]. В этой работе рассматривался нелинейный член в лагранжиане спинорного поля как произвольная функция всех возможных инвариантов, построенных из билинейных спинорных форм и изучался возможность устранения начальной сингулярности особенно для метрики Казнера.

В последнее время мы исследовали поведение самосогласованных нелинейных спинорных полей во Вселенной типа Бианки-I [239, 269] как в присутствии идеальной жидкости, так и в ее отсутствии. Далее были работы [60, 1, 270], где мы рассмотрели самосогласованную систему взаимодействующих спинорных и скалярных полей. Недавно нами была исследована [271, 243] роль космологической постоянной (Λ) которая наряду с гравитационной постоянной Ньютона (G) рассматривается как фундаментальная константа в теории гравитации Эйнштейна [122, 123]. Надо заметить, что помимо VI другие модели Бианки также широко исследуются. Тут можно было бы назвать работы Первушина и др. [141] а также [245].

1.2 Основные уравнения и соотношения

Используя вариационный принцип, мы выводим основные уравнения для спинорного, скалярного и гравитационного полей из действия (1.1).

Действие системы нелинейных спинорного, скалярного и Бианки типа-I гравитационного полей представим в виде

$$\mathcal{S}(g; \psi, \bar{\psi}, \varphi) = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d\Omega \quad (1.1)$$

где

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{sp} + \mathcal{L}_{sc} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{pf}. \quad (1.2)$$

Гравитационная часть лагранжиана (1.2) \mathcal{L}_g задается VI метрикой, тогда как \mathcal{L}_{sp} и \mathcal{L}_{sc} описывают спинорное и скалярное поля. Взаимодействие между спинорным и скалярным полями задается в виде \mathcal{L}_{int} . Наконец \mathcal{L}_{pf} описывает идеальную жидкость. В последующем мы детально опишем соответствующие лагранжианы.

1.2.1 Спинорное поле, его инварианты и ковариантная производная

Для спинорного поля ψ , симметрия между ψ и $\bar{\psi}$ требует, чтобы мы выбирали симметричный лагранжиан [179]. С учетом этого мы выберем лагранжиан спинорного поля в виде

$$\mathcal{L}_{sp} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi + F, \quad (1.3)$$

где F описывает самодействие спинорного поля и может быть представлена как некоторая произвольная функция инвариантов, построенных из вещественных билинейных форм спинорного поля.

Построим инварианты спинорного поля. Так как у ψ и ψ^* (комплексное сопряжение ψ) есть по 4 компонента, можно построить $4 \cdot 4 = 16$ независимых билинейных комбинаций. Это будет

$$S = \bar{\psi}\psi \quad (\text{скаляр}), \quad (1.4a)$$

$$P = i\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (\text{псевдо-скаляр}), \quad (1.4b)$$

$$v^\mu = (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \quad (\text{вектор}), \quad (1.4c)$$

$$A^\mu = (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi) \quad (\text{псевдо-вектор}), \quad (1.4d)$$

$$T^{\mu\nu} = (\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi) \quad (\text{анти-симметричный тензор}), \quad (1.4e)$$

где $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu]$. Инварианты соответствующих билинейных форм выглядят как

$$I = S^2, \quad (1.5a)$$

$$J = P^2, \quad (1.5b)$$

$$I_v = v_\mu v^\mu = (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) g_{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi), \quad (1.5c)$$

$$I_A = A_\mu A^\mu = (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi) g_{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi), \quad (1.5d)$$

$$I_T = T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = (\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi) g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}(\bar{\psi}\sigma^{\alpha\beta}\psi). \quad (1.5e)$$

Используя тождество Фирца (Fierz) [132, 175, 292, 8] можно показать, что из этих пяти инвариантов только I и J являются независимыми, поскольку все остальные могут быть выражены через них: $I_v = -I_A = I + J$ и $I_T = I - J$ (см. приложение 2). В свете выше упомянутой теоремы мы выберем нелинейный член F в виде функции от I и J , т.е., $F = F(I, J)$. Мы считаем, что наш выбор описывает нелинейность спинорного поля в самом общем виде.

В (1.3) ∇_μ означает ковариантное дифференцирование; его определенный вид зависит от того, на что он действует. Ковариантное дифференцирование имеет следующие стандартные свойства:

$$\nabla_\mu(AB) = (\nabla_\mu A)B + A(\nabla_\mu B), \quad (1.6a)$$

$$\nabla_\mu(A^*) = (\nabla_\mu A)^*, \quad (1.6b)$$

$$\nabla_\mu\gamma_\nu = 0, \quad (1.6c)$$

где символ $*$ означает эрмитово сопряжение (транспонирование комплексного сопряжения). Ковариантную производную можно задать в следующем явном виде [13, 89]

$$\nabla_\mu\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - \Gamma_\mu\psi, \quad (1.7a)$$

$$\nabla_\mu\bar{\psi} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu} + \bar{\psi}\Gamma_\mu, \quad (1.7b)$$

где $\Gamma_\mu(x)$ суть матрица спинорной аффинной связности Фока-Иваненко. В предыдущих уравнениях γ матрицы подчиняются следующей алгебре:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (1.8)$$

и связаны с матрицами Дирака для плоского пространства-времени соотношением

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x)e_\nu^b(x)\eta_{ab}, \quad \gamma_\mu(x) = e_\mu^a(x)\bar{\gamma}_a, \quad (1.9)$$

где $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и e_μ^a совокупность тетрадных 4-векторов. Матрицы спинорной аффинной связности $\Gamma_\mu(x)$ однозначно определяется с точностью до некоторых множителей единичной матрицы с помощью уравнения

$$\nabla_\mu \gamma_\nu = \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho \gamma_\rho - \Gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \Gamma_\mu = 0, \quad (1.10)$$

имеющего решение

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{4} g_{\rho\sigma}(x) \left(\partial_\mu e_\delta^b e_b^\rho - \Gamma_{\mu\delta}^\rho \right) \gamma^\sigma \gamma^\delta. \quad (1.11)$$

1.2.2 Лагранжиан скалярного поля

Лагранжиан безмассового скалярного поля мы выберем в виде произвольной функции инварианта $\Upsilon = \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha}$:

$$\mathcal{L}_{sc} = \Psi(\Upsilon), \quad \Upsilon = \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha}. \quad (1.12)$$

Лагранжиан скалярного поля становится линейным в пределах $\Upsilon \rightarrow 0$, т.е.,

$$\lim_{\Upsilon \rightarrow 0} \Psi(\Upsilon) = \frac{1}{2} \Upsilon + \dots \quad (1.13)$$

В качестве нелинейного скалярного лагранжиана можно рассматривать, например, лагранжиан Борна-Инфельда

$$\Psi(\Upsilon) = -\frac{1}{\sigma} (1 - \sqrt{1 + \sigma \Upsilon}). \quad (1.14)$$

Как видно, в слабых пределах нелинейный лагранжиан (1.14) становится линейным.

1.2.3 Лагранжиан взаимодействия

Лагранжиан взаимодействия спинорного и скалярного полей выберем в виде [239, 1, 270]

$$\mathcal{L}_{int} = \lambda_1 \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} F_1 = \lambda_1 \Upsilon F_1, \quad (1.15)$$

где λ_1 константа связи и F_1 некоторые произвольные функции от I и J , т.е., $F_1 = F_1(I, J)$. В настоящей работе в качестве $F_1(I, J)$ мы выберем степенную или тригонометрическую функцию аргументов.

Вклад идеальной жидкости в систему осуществляется через ее тензор энергии-импульса, который, будучи одним из источников, воздействует на гравитационное поле. Следовательно, нет надобности писать лагранжиан для жидкости \mathcal{L}_{pf} явно. Мы написали \mathcal{L}_{pf} в уравнениях (1.1) и (1.2) для того, чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело с самосогласованной системой. Довольно интересную дискуссию о действии и лагранжиане идеальной жидкости можно прочитать в работах [121, 33, 34].

1.2.4 Гравитационное поле: краткий обзор Бианки типа-I космологии

Диагональная Бианки типа-I метрика - это пространственно однородное пространство-время, в котором действует абелева группа G_3 на пространственноподобной гиперповерхности, порожденной пространственноподобными векторами Киллинга $x_1 = \partial_1$, $x_2 = \partial_2$, $x_3 = \partial_3$. В синхронных координатах это метрика выглядит [301]:

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^3 a_i^2(t) dx_i^2. \quad (1.16)$$

Если все три масштабных фактора одинаковы (т.е., $a_1 = a_2 = a_3$), то (1.16) описывает изотропную и пространственно плоскую Фридманн-Робертсон-Уокер (FRW) Вселенную. Бианки типа-I Вселенная имеет разные масштабные факторы во всех направлениях, что тем самым вводит в систему анизотропию. VI Вселенная, будучи непосредственным обобщением плоской FRW Вселенной, является одной из самых простых моделей анизотропной Вселенной, которая описывает однородную и пространственно плоскую Вселенную. Если две из трех метрических функций равны между собой (например, $a_2 = a_3$), то VI Вселенная преобразуется в один важный класс плоскосимметричного пространства-времени (специальный класс локально вращательносимметричного пространства-времени [124, 290], который допускает группу изометрии G_4 , действующую мультипольно-транзитивно на пространственноподобной гиперповерхности однородности, порожденной векторами x_1 , x_2 , x_3 и $x_4 = x^2\partial_3 - x^3\partial_2$. Вблизи сингулярности она ведет себя как метрика Казнера

$$a_1(t) = a_1^0 t^{p_1}, \quad a_2(t) = a_2^0 t^{p_2}, \quad a_3(t) = a_3^0 t^{p_3}, \quad (1.17)$$

где p_j параметры метрики VI, которые измеряют относительную анизотропию между любыми из двух асимметричных осей и удовлетворяют связности

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (1.18a)$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (1.18b)$$

Таким образом, из трех параметров только один является произвольным. Вот

один специфический вид параметров

$$p_1 = \frac{-p}{p^2 + p + 1} \quad (1.19a)$$

$$p_2 = \frac{p(p+1)}{p^2 + p + 1} \quad (1.19b)$$

$$p_3 = \frac{p+1}{p^2 + p + 1}. \quad (1.19c)$$

Условие $0 \leq p \leq 1$ на p тогда приводит к $-1/3 \leq p_1 \leq 0$, $0 \leq p_2 \leq 2/3$, $2/3 \leq p_3 \leq 1$. Еще одну параметризацию можно задать, используя угол на единичной окружности, так как (1.18a) и (1.18b) описывает пересечение сферы с плоскостью в параметрическом пространстве (p_1, p_2, p_3) :

$$p_1 = \frac{1}{3}(1 + \cos \vartheta + \sqrt{3} \sin \vartheta), \quad (1.20a)$$

$$p_2 = \frac{1}{3}(1 + \cos \vartheta - \sqrt{3} \sin \vartheta), \quad (1.20b)$$

$$p_3 = \frac{1}{3}(1 - 2 \cos \vartheta). \quad (1.20c)$$

Хотя ϑ колеблется в пределах единичной окружности, отметка любой p_j является произвольной. Таким образом, единичная окружность может быть разделена на шесть равных частей, каждая из которых покрывает 60° . Выбор p_j в рамках каждого сектора по отдельности становится уникальным (единственным). Для $\vartheta = 0$ $p_1 = p_2 = 2/3$ и $p_3 = -1/3$, тогда как для $\vartheta = \pi/3$ $p_1 = 1$ и $p_2 = p_3 = 0$.

Иногда удобно ввести новый временной параметр η

$$\eta = \int^t a^{-1}(\bar{t}) d\bar{t}, \quad (1.21)$$

где мы определили

$$[a(t)]^2 = C(t) \equiv (a_1 a_2 a_3)^{2/3} = (C_1 C_2 C_3)^{1/3}, \quad (1.22)$$

с $C_i \equiv a_i^2$. Заметим, что в изотропном пределе, т.е., $a_1 = a_2 = a_3$ η суть конформное время. Далее, определив

$$d_i = \frac{C'_i}{C_i}, \quad D \equiv \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 d_i = \frac{C'}{C}, \quad Q \equiv \frac{1}{72} \sum_{i < j} (d_i - d_j)^2 \quad (1.23)$$

где штрих означает дифференцирование по η , мы находим следующие нетривиальные компоненты символа Кристоффеля для метрики (1.16)

$$\Gamma_{\eta\eta}^\eta = \frac{1}{2}D, \quad \Gamma_{ii}^\eta = \frac{1}{2} \frac{d_i C_i}{C}, \quad \Gamma_{i\eta}^i = \Gamma_{\eta i}^i = \frac{1}{2}d_i. \quad (1.24)$$

Ненулевые компоненты тензора Риччи в этом случае выглядят как

$$R_{\eta\eta} = \frac{3}{2}D' + 6Q, \quad R_{ii} = -\frac{C_i}{2C}(d'_i + d_i D), \quad (1.25)$$

а скалярная кривизна имеет вид

$$R = C^{-1}[3D' + \frac{3}{2}D^2 + 6Q]. \quad (1.26)$$

Обратим внимание на то, что в последующих разделах мы будем иметь дело с обычным временем t . После этого краткого обзора в качестве гравитационного поля мы рассмотрим однородное и анизотропное Бианки типа-I пространство-время. Гравитационную часть в лагранжиане (1.2) мы выберем в виде

$$\mathcal{L}_g = \frac{R - 2\Lambda}{2\kappa}, \quad (1.27)$$

где R - скалярная кривизна, $\kappa = 8\pi G$, G - гравитационная постоянная Ньютона и Λ является космологической постоянной. Бианки типа-I метрику мы выберем в виде [18]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2. \quad (1.28)$$

Здесь метрические функции a , b и c зависят только от времени t . Неравенство $a \neq b \neq c$ представляет анизотропию пространства-времени, тогда как их независимость от пространственных координат делает пространство-время однородным. Заметим, что мы работаем в синхронной системе отсчета, когда t представляет собой собственное время в каждой точке пространства и удовлетворяет условиям [29]

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0. \quad (1.29)$$

Нетривиальные компоненты символа Кристоффеля для метрики (1.28) выглядят как

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{b}}{b}, \quad \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{c}}{c} \quad (1.30)$$

$$\Gamma_{11}^0 = a\dot{a}, \quad \Gamma_{22}^0 = b\dot{b}, \quad \Gamma_{33}^0 = c\dot{c}.$$

Соответствующие ненулевые компоненты тензора Риччи имеют вид

$$R_0^0 = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c}\right), \quad (1.31a)$$

$$R_1^1 = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)\right], \quad (1.31b)$$

$$R_2^2 = -\left[\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b}\left(\frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a}\right)\right], \quad (1.31c)$$

$$R_3^3 = -\left[\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b}\right)\right]. \quad (1.31d)$$

Из (1.31) получим скалярную кривизну для VI Вселенной

$$R = -2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca}\right). \quad (1.32)$$

Нетривиальные компоненты тензора Римана в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} R^{01}_{01} &= -\frac{\ddot{a}}{a}, & R^{02}_{02} &= -\frac{\ddot{b}}{b}, & R^{03}_{03} &= -\frac{\ddot{c}}{c}, \\ R^{12}_{12} &= -\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}, & R^{23}_{23} &= -\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}, & R^{31}_{31} &= -\frac{\dot{c}\dot{a}}{ca}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Так, после того как мы знаем все нетривиальные компоненты тензоров Риччи и Римана, мы можем написать выражения для инвариантов гравитационного поля. Эти инварианты нам нужны для того, чтобы исследовать проблему сингулярности в пространстве-времени.

1.3 Уравнения полей и их общие решения

Используя вариационный принцип, напишем уравнения полей, соответствующие действию (1.1).

Вариация действия (1.1) по отношению к спинорному полю ψ ($\bar{\psi}$) дает нелинейные уравнения спинорного поля

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m\psi + \mathcal{D}\psi + \mathcal{G}i\gamma^5\psi = 0, \quad (1.34a)$$

$$i\nabla_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} - \mathcal{D}\bar{\psi} - \mathcal{G}i\bar{\psi}\gamma^5 = 0, \quad (1.34b)$$

где мы обозначаем

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \lambda_1 \mathcal{D}_2 = 2S\left(\frac{\partial F}{\partial I} + \lambda_1 \Upsilon \frac{\partial F_1}{\partial I}\right), \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \lambda_1 \mathcal{G}_2 = 2P\left(\frac{\partial F}{\partial J} + \lambda_1 \Upsilon \frac{\partial F_1}{\partial J}\right),$$

тогда как вариация (1.1) по отношению к скалярному полю производит следующее уравнение скалярного поля

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\sqrt{-g} g^{\nu\mu} \left(\frac{d\Psi}{d\Upsilon} + \lambda_1 F_1 \right) \varphi_{,\mu} \right] = 0. \quad (1.35)$$

Варьируя (1.1) по отношению к метрическому тензору $g_{\mu\nu}$ получим уравнения Эйнштейна

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R = -\kappa T^\mu_\nu - \Lambda \delta^\mu_\nu \quad (1.36)$$

где R^μ_ν суть тензор Риччи; $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ - скалярная кривизна; T^μ_ν - тензор энергий-импульса материальных полей. В нашем случае тензор энергий-импульса выглядит

$$T^\nu_\mu = T_{\text{sp}\mu}^\nu + T_{\text{sc}\mu}^\nu + T_{\text{int}\mu}^\nu + T_{\text{pf}\mu}^\nu. \quad (1.37)$$

Здесь $T_{\text{sp}\mu}^{\nu}$ суть тензор энергий-импульса спинорного поля

$$T_{\text{sp}\mu}^{\rho} = \frac{i}{4} g^{\rho\nu} \left(\bar{\psi} \gamma_{\mu} \nabla_{\nu} \psi + \bar{\psi} \gamma_{\nu} \nabla_{\mu} \psi - \nabla_{\mu} \bar{\psi} \gamma_{\nu} \psi - \nabla_{\nu} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi \right) - \delta_{\mu}^{\rho} \mathcal{L}_{\text{sp}} \quad (1.38)$$

где \mathcal{L}_{sp} с учетом уравнений спинорного поля (1.34a) и (1.34b) имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{sp}} = -(\mathcal{D}S + \mathcal{G}P) + F(I, J). \quad (1.39)$$

Тензор энергий-импульса скалярного поля $T_{\text{sc}\mu}^{\nu}$ задается

$$T_{\text{sc}\mu}^{\nu} = 2 \frac{d\Psi}{d\Upsilon} \varphi_{,\mu} \varphi^{,\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} \Psi. \quad (1.40)$$

Тензор энергий-импульса, соответствующий взаимодействию

$$T_{\text{int}\mu}^{\nu} = 2\lambda_1 F_1 \varphi_{,\mu} \varphi^{,\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L}_{\text{int}}. \quad (1.41)$$

$T_{\text{pf}\mu}^{\nu}$ является тензором энергий-импульса идеальной жидкости. Для Вселенной, заполненной идеальной жидкостью, в сопутствующей системе координат ($u^0 = 1$, $u^i = 0$, $i = 1, 2, 3$) имеем

$$T_{\text{pf}\mu}^{\nu} = (p + \varepsilon) u_{\mu} u^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} p = (\varepsilon, -p, -p, -p). \quad (1.42)$$

Плотность энергии ε идеальной жидкости связана с ее давлением p уравнением состояния

$$p_{\text{pf}} = \zeta \varepsilon_{\text{pf}}, \quad (1.43)$$

где ζ суть константа и ее значение лежит в пределах $\zeta \in [0, 1]$. В зависимости от численного значения ζ описывает следующие типы Вселенной [172]

$$\zeta = 0, \quad (\text{пыль}), \quad (1.44a)$$

$$\zeta = 1/3, \quad (\text{излучение}), \quad (1.44b)$$

$$\zeta \in (1/3, 1), \quad (\text{твердая Вселенная}), \quad (1.44c)$$

$$\zeta = 1, \quad (\text{Жесткая материя}). \quad (1.44d)$$

Якобс (Jacobs) [172] также показал, что если Вселенная заполнена жидкостью, подчиняющейся уравнениям (1.43) и (1.44), то любая первоначальная анизотропия во Вселенной типа Бианки-I быстро исчезает и BI Вселенная превращается в FRW Вселенную.

1.3.1 Решения уравнений полей

В этом параграфе мы будем решать уравнения материальных и гравитационного полей. Мы исследуем пространственннезависимые решения уравнений спинорного и

скалярного полей, а именно (1.34a), (1.34b), и (1.35) такие что $\psi = \psi(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$. Мы также определим функцию $\tau(t)$ зависящую от времени

$$\tau = abc = \sqrt{-g}, \quad (1.45)$$

которая на самом деле есть масштаб объема Вселенной типа Бианки-I. Для того, чтобы представить уравнения спинорного поля в пространстве-времени типа Бианки-I, напомним γ и Γ_μ для метрики (1.28) в явном виде. Для метрики (1.28) из уравнения (1.9) находим связь между матрицами Дирака для плоского и VI пространства-времени:

$$\gamma_0 = \bar{\gamma}_0, \quad \gamma_1 = a(t)\bar{\gamma}_1, \quad \gamma_2 = b(t)\bar{\gamma}_2, \quad \gamma_3 = c(t)\bar{\gamma}_3, \quad (1.46)$$

$$\gamma^0 = \bar{\gamma}^0, \quad \gamma^1 = \bar{\gamma}^1/a(t), \quad \gamma^2 = \bar{\gamma}^2/b(t), \quad \gamma^3 = \bar{\gamma}^3/c(t).$$

Для спинорной аффинной связности из (1.11) в этом случае получим

$$\Gamma_0 = 0, \quad \Gamma_1 = \frac{1}{2}\dot{a}(t)\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^0, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2}\dot{b}(t)\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^0, \quad \Gamma_3 = \frac{1}{2}\dot{c}(t)\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0. \quad (1.47)$$

Матрицы $\bar{\gamma}$ в плоском пространстве мы выберем в форме [9]:

$$\bar{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^5 = \bar{\gamma}^5 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

где матрицы Паули σ_i имеют вид

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\bar{\gamma}$ и σ матрицы подчиняются следующей алгебре

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^i\bar{\gamma}^j + \bar{\gamma}^j\bar{\gamma}^i &= 2\eta^{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \\ \bar{\gamma}^i\bar{\gamma}^5 + \bar{\gamma}^5\bar{\gamma}^i &= 0, \quad (\bar{\gamma}^5)^2 = I, \quad i = 0, 1, 2, 3 \\ \sigma^j\sigma^k &= \delta_{jk} + i\varepsilon_{jkl}\sigma^l, \quad j, k, l = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

где $\eta_{ij} = \{1, -1, -1, -1\}$ - диагональная матрица, δ_{jk} - символ Кронекера и ε_{jkl} полностью антисимметричная матрица Леви-Чивиты с $\varepsilon_{123} = +1$.

С учетом этих соотношений уравнения спинорного поля (1.34a) перепишем в виде

$$i\bar{\gamma}^0\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\dot{\tau}}{2\tau}\right)\psi - m\psi + \mathcal{D}\psi + \mathcal{G}i\gamma^5\psi = 0. \quad (1.48)$$

Вводя $V_j(t) = \sqrt{\tau}\psi_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$, из (1.48) выводим следующую систему уравнений:

$$\dot{V}_1 + i(m - \mathcal{D})V_1 - \mathcal{G}V_3 = 0, \quad (1.49a)$$

$$\dot{V}_2 + i(m - \mathcal{D})V_2 - \mathcal{G}V_4 = 0, \quad (1.49b)$$

$$\dot{V}_3 - i(m - \mathcal{D})V_3 + \mathcal{G}V_1 = 0, \quad (1.49c)$$

$$\dot{V}_4 - i(m - \mathcal{D})V_4 + \mathcal{G}V_2 = 0. \quad (1.49d)$$

Из (1.34a) и (1.34b) мы также выведем уравнения для инвариантов $S = \bar{\psi}\psi$, $P = i\bar{\psi}\gamma^5\psi$ и $A = \bar{\psi}\bar{\gamma}^5\bar{\gamma}^0\psi$

$$\dot{S}_0 - 2\mathcal{G}A_0 = 0, \quad (1.50a)$$

$$\dot{P}_0 - 2(m - \mathcal{D})A_0 = 0, \quad (1.50b)$$

$$\dot{A}_0 + 2(m - \mathcal{D})P_0 + 2\mathcal{G}S_0 = 0, \quad (1.50c)$$

где $S_0 = \tau S$, $P_0 = \tau P$, и $A_0 = \tau A$. Уравнение (1.50) приводит к соотношению

$$S^2 + P^2 + A^2 = C^2/\tau^2, \quad C^2 = \text{const}. \quad (1.51)$$

Из уравнения скалярного поля (1.35) в этом случае имеем

$$\left(\frac{d\Psi}{d\Upsilon} + \lambda_1 F_1\right)\dot{\varphi} = \frac{C_s}{\tau}, \quad C_s = \text{const}. \quad (1.52)$$

Вернемся теперь к уравнениям гравитационного поля. Для этого мы перепишем уравнения Эйнштейна (1.36) соответствующими метрике (1.28) в развернутом виде

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} = \kappa T_1^1 + \Lambda, \quad (1.53a)$$

$$\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} = \kappa T_2^2 + \Lambda, \quad (1.53b)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \kappa T_3^3 + \Lambda, \quad (1.53c)$$

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} = \kappa T_0^0 + \Lambda, \quad (1.53d)$$

где точка означает дифференцирование по t .

Используя свойства матрицы Дирака плоского пространства-времени и явный вид ковариантного производного ∇_μ , мы выпишем выражения для компонентов тензора энергий-импульса:

$$T_0^0 = mS - F(I, J) + 2\frac{d\Psi}{d\Upsilon}\dot{\varphi}^2 - \Psi(\Upsilon) + 2\lambda_1 F_1(I, J)\dot{\varphi}^2 - \lambda_1 F_1(I, J)\Upsilon + \varepsilon \quad (1.54a)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - F(I, J) - \Psi(\Upsilon) - \lambda_1 F_1 \Upsilon - p. \quad (1.54b)$$

Вернемся к решениям уравнений Эйнштейна. Разность уравнений (1.53b) и (1.53a) приводит к уравнению

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} - \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} \right) + \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) = 0. \quad (1.55)$$

Из (1.55) находим

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} \right) \tau = X_1, \quad (1.56)$$

где X_1 константа интегрирования. Это означает, что при $\tau \rightarrow \infty$ скорость расширения на (x, y) плоскости становится изотропным, т.е.,

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{b}}{b} \quad \Longrightarrow \quad a = qb, \quad (1.57)$$

где q - некоторая константа интегрирования.

В общем, уравнение (1.56) дает следующее соотношение между метрическими функциями a и b :

$$\frac{a}{b} = D_1 \exp\left(X_1 \int \frac{dt}{\tau}\right), \quad (1.58)$$

где D_1 суть константа интегрирования. Аналогично, мы также находим

$$\frac{b}{c} = D_2 \exp\left(X_2 \int \frac{dt}{\tau}\right), \quad (1.59)$$

$$\frac{c}{a} = D_3 \exp\left(X_3 \int \frac{dt}{\tau}\right), \quad (1.60)$$

где D_2, D_3, X_2, X_3 константы интегрирования. Заметим, что как в случае (1.56), не сложно доказать, что скорость расширения становится изотропной во всех направлениях при $\tau \rightarrow \infty$.

Не трудно установить следующую связь между константами интегрирования X_i и D_i :

$$D_1 D_2 D_3 = 1, \quad X_1 + X_2 + X_3 = 0. \quad (1.61)$$

Наконец, с учетом (1.45) из уравнений (1.58), (1.59) и (1.60) мы получим метрические функции $a(t)$, $b(t)$, и $c(t)$ в явном виде [244]

$$a(t) = A_1 \tau^{1/3} \exp\left[(B_1/3) \int \tau^{-1} dt\right], \quad (1.62a)$$

$$b(t) = A_2 \tau^{1/3} \exp\left[(B_2/3) \int \tau^{-1} dt\right], \quad (1.62b)$$

$$c(t) = A_3 \tau^{1/3} \exp\left[(B_3/3) \int \tau^{-1} dt\right], \quad (1.62c)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt[3]{(D_1/D_3)}, & A_2 &= \sqrt[3]{1/(D_1^2 D_3)}, & A_3 &= \sqrt[3]{(D_1 D_3^2)}, \\ B_1 &= X_1 - X_3, & B_2 &= -(2X_1 + X_3), & B_3 &= X_1 + 2X_3. \end{aligned}$$

Таким образом, исходная система уравнений Эйнштейна и нелинейных спинорного и скалярного полей полностью проинтегрирована. В процессе интегрирования использовались только первые три уравнения (1.53a) - (1.53c) полной системы уравнения Эйнштейна. Получено общее решение трех уравнений второго порядка, содержащее

четыре произвольные постоянные D_1, D_3, X_1, X_3 . Отметим, что уравнение (1.53d) является следствием первых трех уравнений Эйнштейна. Для того чтобы убедиться в правильности полученного решения, необходимо подставить функции a, b, c в (1.53d) или решать все четыре уравнения системы (1.53) вместе.

При подстановке a, b, c в (1.53d) должно получиться либо тождество, либо некоторая дополнительная связь между постоянными, входящими в решение. В самом деле, подставляя a, b, c из (1.62) в (1.53d) получим следующее равенство

$$\dot{\tau}^2 - \mathcal{X} = 3\tau^2(\kappa T_0^0 + \Lambda), \quad \mathcal{X} := X_1^2 + X_1 X_3 + X_3^2, \quad (1.63)$$

выполнение которого гарантирует правильность полученного решения. Решение уравнения (1.63) можно выписать в квадратурах

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{\mathcal{X} + 3\tau^2(\kappa T_0^0 + \Lambda)}} = t + t_0, \quad t_0 = \text{const.} \quad (1.64)$$

В нашем дальнейшем исследовании мы рассмотрим вторую возможность, учитывая все четыре уравнения системы (1.53). Для этого мы суммируем уравнения (1.53a), (1.53b), (1.53c) и (1.53d) умноженное на 3, т.е., $((1.53a) + (1.53b) + (1.53c) + 3 \times (1.53d))$. Это приводит к дифференциальному уравнению второго порядка для определения $\tau(t)$:

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = \frac{3}{2}\kappa(T_1^1 + T_0^0) + 3\Lambda \quad (1.65)$$

Если правая часть уравнения (1.65) есть некоторая функция зависящая только от τ , то его решение известно [177]. Как мы увидим в следующих разделах, правая часть уравнения (1.65) на самом деле зависит только от τ . Задав F и \mathcal{L}_{int} в явном виде из уравнения (1.65) мы находим конкретное решение для τ в квадратурах.

Для некоторого удобства мы также перепишем метрические функции и их производные в компактной форме вводя a_1, a_2 , и a_3 для a, b , и c , соответственно. Из (1.62) мы тогда имеем

$$a_i = A_i \tau^{1/3} \exp[(B_i/3) \int \tau^{-1} dt], \quad (1.66a)$$

$$\frac{\dot{a}_i}{a_i} = \frac{\dot{\tau}}{3\tau} + \frac{B_i}{3\tau}, \quad (i = 1, 2, 3,) \quad (1.66b)$$

$$\frac{\ddot{a}_i}{a_i} = \frac{\ddot{\tau}}{3\tau} - \frac{2}{9} \left(\frac{\dot{\tau}}{\tau} \right)^2 - \frac{B_i}{9} \frac{\dot{\tau}}{\tau^2} + \frac{B_i^2}{9\tau^2}. \quad (1.66c)$$

До того, чтобы определить параметр замедления, скажем несколько слов об ускорении. Заметим, что уравнения Эйнштейна в FRW модели имеют вид

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \kappa T_1^1, \quad (1.67a)$$

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \kappa T_0^0. \quad (1.67b)$$

Из (1.67) находим

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(T_0^0 - 3T_1^1), \quad (1.68)$$

Уравнение (1.68) известно как уравнение ускорения. По аналогии для VI Вселенной из (1.36) запишем

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = -\frac{\kappa}{2}(T_0^0 - 3T_1^1), \quad (1.69)$$

что можно рассматривать как уравнение ускорения. Полагая $a = b = c$, мы получим первоначальное определение. С другой стороны, с учетом (1.66) уравнение (1.69) может быть записано в виде

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} - \frac{2\dot{\tau}^2}{3\tau^2} + \frac{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}{9\tau^2} = -\frac{\kappa}{2}(T_0^0 - 3T_1^1). \quad (1.70)$$

Как видно, уравнение (1.70) ничего дополнительного нам не сообщает. Поэтому в метрике VI под ускорением мы будем подразумевать $\ddot{\tau}$ и уравнение (1.65) как уравнение ускорения.

Определим теперь параметр замедления. В FRW модели этот параметр определяется в виде

$$q_{\text{frw}} = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\left[1 + \frac{\dot{H}_{\text{frw}}}{H_{\text{frw}}}\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{H_{\text{frw}}}\right) - 1, \quad (1.71)$$

где $H_{\text{frw}} = \dot{a}/a$ суть постоянная Хаббла в FRW модели. По аналогии можно определить параметр замедления. Если определить его в виде

$$q = -\left[1 + \frac{\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}\right], \quad (1.72)$$

где

$H_i = \dot{a}_i/a_i$, тогда стандартное определение восстанавливается при $a = b = c$. Определение (1.72) также можно записать в виде

$$q = -\frac{\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c}}{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2}. \quad (1.73)$$

Подставляя (1.66) в (1.73) получим

$$q = -\frac{9\tau\ddot{\tau} - 6\dot{\tau}^2 + (B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)}{3\dot{\tau}^2 + (B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)}. \quad (1.74)$$

Но это определение в нашем случае не может быть справедливым, поскольку в качестве ускорения нами было выбрано $\ddot{\tau}$. Поэтому мы переходим ко второму определению и вслед за Белинсом (Belinchnon) и Харко (Harko) [6, 150] определим обобщенный параметр замедления в форме

$$q = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3H}\right) - 1 = -\frac{\tau\ddot{\tau}}{\dot{\tau}^2}. \quad (1.75)$$

Здесь по аналогии с FRW Вселенной мы определили постоянную Хаббла (Hubble) H . Тогда из (1.66) имеем

$$H_j = \frac{\dot{a}_j}{a_j} = \frac{\dot{\tau} + B_j}{3\tau}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.76)$$

или в обобщенном виде

$$H = (H_1 + H_2 + H_3)/3 = \dot{\tau}/3\tau \quad (1.77)$$

Как видно, в предельном случае, т.е., при $a = b = c$ восстанавливается первоначальное определение.

Вернемся теперь к уравнениям Эйнштейна (1.36). Из тождества Бианки $G^\nu_{\mu;\nu} = 0$ получаем

$$T^\nu_{\mu;\nu} = T^\nu_{\mu,\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\nu} T^\rho_\mu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} T^\nu_\rho = 0, \quad (1.78)$$

что в нашем случае выглядит как

$$\dot{T}_0^0 + \frac{\dot{\tau}}{\tau}(T_0^0 - T_1^1) = 0. \quad (1.79)$$

Это на самом деле уравнение движения источника гравитационного поля. Имея в виду, что

$$\begin{aligned} T_0^0 &= mS - F(I, J) + 2\left(\frac{d\Psi}{d\Upsilon} + \lambda_1 F_1\right)\dot{\varphi}^2 - \psi(\Upsilon) - \lambda_1 F_1(I, J)\Upsilon + \varepsilon \\ &= mS - F(I, J) + 2\frac{C_s}{\tau}\dot{\varphi} - \psi(\Upsilon)\lambda_1 F_1(I, J)\Upsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

находим

$$\dot{T}_0^0 = m\dot{S} - (\mathcal{D}\dot{S} + \mathcal{G}\dot{P}) - 2\frac{C_s\dot{\varphi}\dot{\tau}}{\tau^2} + \dot{\varepsilon}. \quad (1.80)$$

С другой стороны

$$T_0^0 - T_1^1 = mS - (\mathcal{D}S + \mathcal{G}P) + 2\frac{C_s}{\tau}\dot{\varphi} + \varepsilon + p. \quad (1.81)$$

Подставляя (1.80) и (1.81) в (1.79) находим

$$(m - \mathcal{D}\dot{S}_0 - \mathcal{G}\dot{P}_0 + (\varepsilon + p)\dot{\tau} + \tau\dot{\varepsilon}) = 0, \quad (1.82)$$

где $S_0 = \tau S$ и $P_0 = \tau P$. Из (1.50a) и (1.50b) имеем $(m - \mathcal{D})\dot{S}_0 - \mathcal{G}\dot{P}_0 = 0$. Далее с учетом уравнения состояния т.е., $p = \zeta\varepsilon$ получим

$$\frac{d\varepsilon}{(1 + \zeta)\varepsilon} + \frac{d\tau}{\tau} = 0, \quad (1.83)$$

допускающее решение

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\tau^{1+\zeta}}, \quad p = \frac{\zeta\varepsilon_0}{\tau^{1+\zeta}} \quad (1.84)$$

где ε_0 есть константа интегрирования. Заметим, что соотношение (1.84) справедливо для любой комбинации лагранжиана материальных полей, например, спинорного, скалярного или взаимодействующих спинорного и скалярного полей. Таким образом, правая часть уравнения (1.65) является функцией только от τ . Тогда (1.65), умноженное на $2\dot{\tau}$ можно записать

$$2\dot{\tau} \ddot{\tau} = [3(\kappa(T_1^1 + T_0^0) + 2\Lambda)\tau] \dot{\tau} = \Psi(\tau)\dot{\tau} \quad (1.85)$$

Решение уравнения (1.85) запишем в квадратурах

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{\int \Psi(\tau) d\tau}} = t + t_0. \quad (1.86)$$

В дальнейшем мы положим $t_0 = 0$, так как это дает лишь сдвиг начального времени. Задав $F(I, J)$ в явном виде из (1.86) можно найти функцию $\tau(t)$. А как только мы получим τ в явном виде, мы получим компоненты спинорного поля $\psi_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Таким образом первоначальная система уравнений Эйнштейна и Дирака полностью проинтегрирована.

1.4 Инварианты пространства-времени

При исследовании полей тяготения общего вида интересным является вопрос об инвариантной характеристике поля при помощи некоторой системы инвариантов, которые представляли бы собой рациональные функции компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и его производных $\partial_{\gamma_1} g_{\mu\nu}, \dots, \partial_{\gamma_1 \dots \gamma_k} g_{\mu\nu}$, которые называются инвариантом k -ого порядка [37].

Для того, чтобы исследовать существование сингулярности (сингулярная точка) в случае гравитационного поля, нам следует изучить инвариантные характеристики пространства-времени. В общей теории относительности эти инварианты состоят из тензора кривизны и метрического тензора. В отличие от электродинамики, где имеется всего два инварианта ($J_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ и $J_2 = \star F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$), в четырехмерном римановом пространстве-времени существуют 14 независимых инвариантов. Следуя

монографии [35] мы выпишем их

$$I_1 = R \quad (1.87a)$$

$$I_2 = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \quad (1.87b)$$

$$I_3 = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (1.87c)$$

$$I_4 = \star R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (1.87d)$$

$$I_5 = R_{\beta}^{\alpha}R_{\mu}^{\beta}R_{\alpha}^{\mu}, \quad (1.87e)$$

$$I_6 = R^{\alpha\beta}R^{\mu\nu}R_{\alpha\mu\beta\nu}, \quad (1.87f)$$

$$I_7 = R^{\alpha\beta}R^{\mu\nu}\star R_{\alpha\mu\beta\nu}, \quad (1.87g)$$

$$I_8 = R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\sigma\rho}R^{\sigma\rho}_{\mu\nu}, \quad (1.87h)$$

$$I_9 = \star R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\sigma\rho}R^{\sigma\rho}_{\mu\nu}, \quad (1.87i)$$

$$I_{10} = R_{\alpha}^{\beta}R^{\alpha\mu}R_{\mu\nu}R_{\beta}^{\nu}, \quad (1.87j)$$

$$I_{11} = R_{\nu}^{\mu}R_{\rho\mu}{}^{\sigma\alpha}R_{\sigma\alpha}{}^{\beta[\nu}R_{\beta}^{\rho]}, \quad (1.87k)$$

$$I_{12} = R_{\nu}^{\mu}\star R_{\rho\mu}{}^{\sigma\alpha}R_{\sigma\alpha}{}^{\beta[\nu}R_{\beta}^{\rho]}, \quad (1.87l)$$

$$I_{13} = R^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(A^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + R_{\rho}^{\alpha}R_{\sigma}^{\rho}R_{\eta}^{\sigma}R_{\mu}^{\eta}\delta_{\nu}^{\beta}), \quad (1.87m)$$

$$I_{14} = \star R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}A^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \quad (1.87n)$$

где $A^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = 4R_{\rho}^{\alpha}R_{\sigma}^{\rho}R_{\mu}^{\sigma}R_{\nu}^{\beta} + 3R_{\rho}^{\alpha}R_{\mu}^{\rho}R_{\sigma}^{\beta}R_{\nu}^{\sigma}$ and $\star R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}E_{\alpha\beta\sigma\rho}R^{\sigma\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}E_{\sigma\rho\mu\nu}R_{\alpha\beta}{}^{\sigma\rho}$, $\star R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}E_{\alpha\beta\sigma\rho}R^{\sigma\rho\mu\nu}$ с $E_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ и $E^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{-1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$. Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ есть полностью антисимметричный тензор Леви-Чевиты с $\varepsilon_{0123} = 1$. Вместо того, чтобы анализировать все 14 выше упомянутых инвариантов, можно ограничиться только тремя, а именно скалярной кривизной $I_1 = R$, $I_2 = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ и скаляром Кретцмана (Kretschmann) $I_3 = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ [90, 128]. В любой регулярной точке пространства-времени эти три инварианта I_1, I_2, I_3 должны быть конечными. Выпишем эти инварианты подробнее.

Для метрики Бианки-I мы имеем скалярную кривизну

$$I_1 = R = -2\frac{\ddot{\tau} - \dot{a}bc - \dot{b}ca - \dot{c}ab}{\tau}. \quad (1.88)$$

Поскольку тензор Риччи для метрики Бианки-I является диагональным, то инвариант $I_2 = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \equiv R_{\mu}^{\nu}R_{\nu}^{\mu}$ есть сумма квадратов диагональных компонентов тензора Риччи, т.е.,

$$I_2 = \left[(R_0^0)^2 + (R_1^1)^2 + (R_2^2)^2 + (R_3^3)^2 \right], \quad (1.89)$$

с

$$R_0^0 = -\frac{\ddot{a}bc + a\ddot{b}c + ab\ddot{c}}{\tau}, \quad (1.90a)$$

$$R_1^1 = -\frac{\ddot{a}bc + \dot{a}\dot{b}c + \dot{a}b\dot{c}}{\tau}, \quad (1.90b)$$

$$R_2^2 = -\frac{a\ddot{b}c + \dot{a}\dot{b}c + \dot{a}b\dot{c}}{\tau}, \quad (1.90c)$$

$$R_3^3 = -\frac{ab\ddot{c} + \dot{a}\dot{b}c + \dot{a}b\dot{c}}{\tau}. \quad (1.90d)$$

Аналогично для скаляра Кретчмана в этом случае мы имеем $I_3 = R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$, сумма квадратов всех ненулевых компонентов $R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} I_3 &= 4 \left[\left(R^{01}{}_{01} \right)^2 + \left(R^{02}{}_{02} \right)^2 + \left(R^{03}{}_{03} \right)^2 + \left(R^{12}{}_{12} \right)^2 + \left(R^{23}{}_{23} \right)^2 + \left(R^{31}{}_{31} \right)^2 \right] \\ &= \frac{4}{\tau^2} \left[(\ddot{a}bc)^2 + (a\ddot{b}c)^2 + (ab\ddot{c})^2 + (\dot{a}\dot{b}c)^2 + (\dot{a}b\dot{c})^2 + (\dot{a}\dot{b}\dot{c})^2 \right], \quad \tau = abc. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Как было установлено, метрические функции a, b, c и их производные находятся в функциональной зависимости от τ . Таким образом, ввиду (1.66), мы находим, что в любой точке пространства-времени, где $\tau = 0$, инварианты I_1, I_2, I_3 становятся бесконечными, следовательно, в этой точке пространство-время является сингулярным (см. приложение 3).

1.5 Физически наблюдаемые величины

Для того, чтобы создать наглядную картину любой физической теории, нам нужно выразить результаты через реальные физические величины, которые можно экспериментально измерить. В общей теории относительности, где мы имеем дело с объектами в четырехмерном пространстве-времени, проблема определения физических величин не так уж проста. Математический аппарат для вычисления физически наблюдаемых величин в четырехмерном псевдо-римановом пространстве впервые было введено Зельмановым под названием *хронометрические инварианты* [19, 36, 229]. Под хронометрически инвариантной величиной подразумевается, что физически наблюдаемые величины в сопутствующей системе координат должны быть инвариантными относительно преобразования времени.

Изучим эту точку зрения более подробно. Рассмотрим две системы координат x^i и x'^i . Говорят, что эти две системы связаны с одной и той же системой отсчета, если они удовлетворяют следующим соотношениям

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x'^0} = 0. \quad (1.92)$$

Выше описанное условие означает, что системы координат, принадлежащие одной и той же системе отсчета, являются стационарными по отношению друг к другу. С другой стороны, если две системы координат движутся друг относительно друга, то они принадлежат разным системам отсчета. Тогда преобразование координат, оставляющее две системы координат в одной и той же системе отсчета может быть записано как система двух преобразований, совместно реализуемыми: *хронометрическое преобразование* и **3D преобразование**

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (1.93a)$$

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3). \quad (1.93b)$$

Величины, инвариантные при преобразовании (1.93), называются хронометрически инвариантными. По теореме Зельманова хронометрически инвариантные (физически наблюдаемые) проекции **4D** вектора Q^α есть [229]

$$u^\alpha Q_\alpha = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad P_\alpha^i Q^\alpha = Q^i, \quad (1.94)$$

где u^α - **4D** скорость с $u_\alpha u^\alpha = 1$ и $P_{\alpha\beta}$ проекционный оператор:

$$P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta \quad (1.95a)$$

$$P^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta \quad (1.95b)$$

$$P_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - u^\alpha u_\beta \quad (1.95c)$$

$$P_\lambda^\alpha P_\beta^\lambda = P_\beta^\alpha. \quad (1.95d)$$

Для того, чтобы изучать роль нелинейного спинорного и скалярного полей в формировании конфигурации с локализованной плотностью энергии и конечными полной энергией, спином и зарядом спинорного поля, определим спинорный ток и тензор спина.

Используя решения, найденные выше, можно написать компоненты спинорного тока:

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (1.96)$$

Учитывая, что $\bar{\psi} = \psi^\dagger \bar{\gamma}^0$, где $\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$ и $\psi_j = V_j / \sqrt{\tau}$, $j = 1, 2, 3, 4$ для компоненты спинорного тока запишем

$$j^0 = \frac{1}{\tau} [V_1^* V_1 + V_2^* V_2 + V_3^* V_3 + V_4^* V_4], \quad (1.97a)$$

$$j^1 = \frac{1}{a\tau} [V_1^* V_4 + V_2^* V_3 + V_3^* V_2 + V_4^* V_1], \quad (1.97b)$$

$$j^2 = \frac{-i}{b\tau} [V_1^* V_4 - V_2^* V_3 + V_3^* V_2 - V_4^* V_1], \quad (1.97c)$$

$$j^3 = \frac{1}{c\tau} [V_1^* V_3 - V_2^* V_4 + V_3^* V_1 - V_4^* V_2]. \quad (1.97d)$$

Компонента j^0 определяет плотность заряда спинорного поля. Она имеет следующую хронометрически инвариантную форму

$$\varrho = (j_0 \cdot j^0)^{1/2}. \quad (1.98)$$

Заметим, что определение хронометрически инвариантной величины, которое мы принимаем здесь, отличается от того, что предложил Зельманов. В нашем случае мы только подчеркиваем, что экспериментатор измеряет в основном ϱ , а не j^0 . Поэтому, будучи физически наблюдаемой величиной, ϱ может быть названа хронометрически инвариантной. Полный заряд спинорного поля определяется как

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho \sqrt{-^3g} dx dy dz. \quad (1.99)$$

Так как $\varrho = \varrho(t)$ и $\sqrt{-^3g} = \tau(t)$, для того, чтобы заряд Q имел смысл, мы должны проинтегрировать его в некотором конечном интервале по x , y и z и после этого нормировать по единице.

Посмотрим тензор спина [9]

$$S^{\mu\nu,\epsilon} = \frac{1}{4} \bar{\psi} \{ \gamma^\epsilon \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \gamma^\epsilon \} \psi. \quad (1.100)$$

Запишем компоненты $S^{ik,0}$ ($i, k = 1, 2, 3$), явно определив пространственную плотность вектора спина. Из уравнений (1.100) имеем

$$S^{ij,0} = \frac{1}{4} \bar{\psi} \{ \gamma^0 \sigma^{ij} + \sigma^{ij} \gamma^0 \} \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^0 \sigma^{ij} \psi, \quad (1.101)$$

что определяет проекцию вектора спина по направлению к оси k . Здесь i, j, k принимают значения 1, 2, 3 и $i \neq j \neq k$. Таким образом, для проекции вектора спина по осям X, Y и Z находим

$$S^{23,0} = \frac{1}{2bc\tau} [V_1^* V_2 + V_2^* V_1 + V_3^* V_4 + V_4^* V_3], \quad (1.102a)$$

$$S^{31,0} = \frac{-i}{2ca\tau} [V_1^* V_2 - V_2^* V_1 + V_3^* V_4 - V_4^* V_3], \quad (1.102b)$$

$$S^{12,0} = \frac{1}{2ab\tau} [V_1^* V_1 - V_2^* V_2 + V_3^* V_3 - V_4^* V_4]. \quad (1.102c)$$

Хронометрически инвариантный тензор спина принимает вид

$$S_{\text{ch}}^{ij,0} = (S_{ij,0} S^{ij,0})^{1/2}, \quad (1.103)$$

и проекция вектора спина на ось k определяется как

$$S_k = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ch}}^{ij,0} \sqrt{-^3g} dx dy dz. \quad (1.104)$$

Как только мы находим решения уравнений спинорного поля, подставив их в (1.97), (1.98), (1.99), (1.102) и (1.104), мы получим соответствующие физически наблюдаемые величины. Позже мы вернемся к этим определениям.

1.6 Λ -член и его роль в эволюции Вселенной

Чтобы обеспечить устойчивое космологическое решение уравнений гравитационного поля Эйнштейн [122, 123] ввел одну фундаментальную постоянную, известную как космологическая постоянная или Λ -член, в систему. После того как Хабл (Hubble) экспериментально подтвердил, что Вселенная расширяется, Эйнштейн вернулся к оригинальной форме уравнений и при этом высказал мнение, что временная модификация, которую он сделал, была самой большой ошибкой его жизни. Во второй половине 60-х годов прошлого века Λ -член заново проявил себя на короткое время. Наконец, после изыскательской работы Гутха (Guth) [148] по инфляционной космологии, ученые начали рассматривать модели с Λ -членом с растущим интересом [превосходный обзор по космологической постоянной можно найти в [215]]. В этой работе положительный Λ соответствует универсальной отталкивающей силе, тогда как отрицательный Λ -член дает дополнительную гравитационную силу. Отметим, что положительный Λ -член часто рассматривается как одна из форм темной энергии. Для того, чтобы изучить роль Λ -члена в общем виде, вернемся к уравнениям Эйнштейна. Для этого мы перепишем уравнения для τ в виде

$$\ddot{\tau} = \frac{3}{2}\kappa(T_1^1 + T_0^0)\tau - 3\Lambda\tau. \quad (1.105)$$

С другой стороны из тождества Бианки мы $G_{\mu;\nu}^\nu = 0$ имеем

$$\dot{T}_0^0 + \frac{\dot{\tau}}{\tau}(T_0^0 - T_1^1) = 0. \quad (1.106)$$

После некоторых несложных процедур из (1.105) и (1.106) для T_0^0 находим:

$$\kappa T_0^0 = 3H^2 - \Lambda - C_{00}/\tau^2, \quad (1.107)$$

где мы использовали определения обобщенной постоянной Хаббла $\dot{\tau}/\tau = 3H$. Давайте остановимся на соотношении (1.107) подробно. Пусть $\Lambda = 0$. В то время, когда скорость расширения равна нулю (это может быть еще до большего взрыва или когда-то в далеком будущем), когда Вселенная перестает расширяться, мы имеем $H = 0$. Тогда неотрицательность T_0^0 приводит к тому, что $C_{00} \leq 0$ (Заметим, что $T_0^0 \geq 0$ не обязательно, просто при $T_0^0 < 0$ происходит нарушение энерго-доминантности). Посмотрим случай, когда τ достаточно большой для того чтобы пренебречь членами типа $1/\tau^2$. Как мы знаем, T_0^0 (заметим, что T_0^0 - это плотность энергии обычной материи, включая темную энергию, входящие в уравнения Эйнштейна через тензор энергии-импульса), уменьшается с ростом τ . Если τ достаточно велика для того, чтобы можно было пренебречь T_0^0 , то из (1.107) находим

$$3H^2 - \Lambda \rightarrow 0.$$

Это означает, что для того, чтобы τ могло быть бесконечно большим мы должны иметь $\Lambda \geq 0$. В случае $\Lambda = 0$ мы видим, что начиная с некоторой величины τ скорость расширения Вселенной становится тривиальной, то есть Вселенная не расширяется со

временем. Тогда как для $\Lambda > 0$ процесс расширения продолжается бесконечно. Что касается отрицательной величины Λ , ее присутствие налагает некоторые ограничения на T_0^0 , точнее, T_0^0 не может быть слишком мала чтобы можно было ею пренебречь. Для материальных полей рассматриваемых в нашей задаче существуют некоторые ограничения сверху на τ (заметим, что τ не может быть отрицательным, т.е. ограничено снизу). Таким образом, отрицательное значение Λ , в зависимости от значений параметров может порождать осциллирующее решение. Так, мы можем заключить следующее:

Пусть T_μ^ν - источник уравнения Эйнштейна; T_0^0 это плотность энергии и T_1^1, T_2^2 , и T_3^3 - главные давления, причем $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$. Бесконечно расширяющаяся VI Вселенная может быть получена тогда и только тогда, когда Λ -член имеет положительное значение (описывает отталкивающую силу и может быть рассмотрен как одна из форм темной энергии) и вводится в систему как в (1.36).

1.7 Космологическая сингулярность и условие энергодоминантности

Вспомнив, что времениподобная геодезическая линия есть мировая линия для частицы движущейся без ускорения в собственной системе отсчета, мы определим следующее:

Пространство-время является несингулярным, если любая времениподобная и нуль-геодезическая может быть продолжена в прошлое или будущее без ограничения, т.е. до бесконечной собственной длины для времениподобной геодезической или до бесконечного значения аффинного параметра для нуль-геодезии. Такое пространство-время называется "причинно, геодезическими полными". Условие полноты является минимальным необходимым для того, чтобы пространство-время не содержало сингулярность. Надо отметить, что пространство-время, не удовлетворяющее этому, но с сингулярностью, необязательно содержит точки с бесконечной кривизной или с маленькой дырой.

С физической точки зрения, конечно, надо полагать, что любое пространство-время, в котором геодезическая мировая линия частиц не может быть продолжена без ограничения по отношению к собственному времени этой частицы, есть сингулярное, и такое сингулярное пространство-время приводит к нарушению закона сохранения.

Применительно к космологической проблеме теорема Хокинга-Пенроуза (Hawking-Penrose) выглядит как [155]:

Теорема. Пространство-время \mathcal{M} не может удовлетворять геодезической полноте, если уравнения общей теории относительности справедливы и если выполняются следующие условия:

- (i) Пространство-время \mathcal{M} не содержит времениподобных кривых.
- (ii) Энергетическое условие (условие энергодоминантности) выполняется в любой

точке. Условие энергодоминантности может быть написано как

$$t^\alpha t_\alpha = 1 \quad \text{предполагает} \quad R_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta \leq 0. \quad (1.108)$$

С учетом уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa T_{\alpha\beta}, \quad (1.109)$$

уравнение (1.108) запишется в виде

$$t^\alpha t_\alpha = 1 \quad \text{предполагает} \quad T_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta \geq \frac{1}{2} T^\mu_\mu. \quad (1.110)$$

Если, в единичной тетраде $T_{\mu\nu}$, ε означает плотность энергии и p_1, p_2, p_3 - три основные давления, то (1.110) может быть написано в виде

$$\varepsilon + \sum_{\alpha} p_{\alpha} \geq 0; \quad (1.111a)$$

$$\varepsilon + p_{\alpha} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (1.111b)$$

Слабое энергетическое условие читается как

$$t^\alpha t_\alpha = 0 \quad \text{предполагает} \quad R_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta \leq 0, \quad (1.112)$$

которое является следствием уравнений (1.108).

(iii) На любой времениподобной и нуль-геодезии γ существует по крайней мере одна точка, для которой выполняется

$$K_{[a} R_{b]cd[e} K_{f]} K^c K^d \neq 0, \quad (1.113)$$

где K_a - это касательная к кривой γ в заданной точке, а скобки подразумевает антисимметризацию. Если γ времениподобна, то мы можем переписать (1.113) в виде

$$R_{abcd} K^c K^d \neq 0. \quad (1.114)$$

(iv) Пространство-время \mathcal{M} содержит или (a) захваченную поверхность, (b) точку P , для которой конвергенция всех нуль-геодезий через P изменяет знак в некоторой точке, находящейся перед (в прошлом) P , или (c) компактную пространственноподобную гиперповерхность.

В дальнейшем, когда мы проанализируем полученные результаты, мы в основном рассмотрим условия энергодоминантности. Как будет показано позже, на регулярных решениях с нелинейностью не всегда выполняется условие энергодоминантности.

1.8 Качественный анализ полученных решений

В этом разделе мы проанализируем общие результаты, полученные в предыдущем разделе. В подразделах мы изучим систему с нелинейным спинорным и нелинейным скалярным полями, а также с взаимодействующими спинорным и скалярным полями в отсутствие идеальной жидкости и Λ -члена. Далее мы введем Λ -член и идеальную жидкость в систему и изучим их роль в эволюции Вселенной.

Нелинейное спинорное поле в VI Вселенной

В этом подразделе мы изучим нелинейное спинорное поле в VI Вселенной. Рассмотрим сначала линейный случай. Иметь точное решение уравнений самосогласованной системы линейного спинорного и гравитационного полей необходимо для того, чтобы путем сравнения этого решения с решениями уравнений самосогласованной системы нелинейного спинорного и гравитационного полей выяснить роль нелинейных членов уравнения спинорного поля в эволюции рассматриваемой космологической модели.

Компоненты спинорного поля в этом случае имеют следующий явный вид:

$$\psi_1(t) = (C_1/\sqrt{\tau} \exp[-imt]), \quad (1.115a)$$

$$\psi_2(t) = (C_2/\sqrt{\tau} \exp[-imt]), \quad (1.115b)$$

$$\psi_3(t) = (C_3/\sqrt{\tau} \exp[imt]), \quad (1.115c)$$

$$\psi_4(t) = (C_4/\sqrt{\tau} \exp[imt]), \quad (1.115d)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 - константы интегрирования. С другой стороны из (1.50a) находим

$$S = \frac{C_0}{\tau}, \quad (1.116)$$

где C_0 суть константа интегрирования и связана с предыдущими как $C_0 = C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 - C_4^2$. Для Компонентов спинорного тока в этом случае имеет вид из (1.97a) - (1.97d) находим

$$j^0 = \frac{1}{\tau} [C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2], \quad (1.117a)$$

$$j^1 = \frac{2}{a\tau} [C_1C_4 + C_2C_3] \cos(2mt), \quad (1.117b)$$

$$j^2 = \frac{2}{b\tau} [C_1C_4 - C_2C_3] \sin(2mt), \quad (1.117c)$$

$$j^3 = \frac{2}{c\tau} [C_1C_3 - C_2C_4] \cos(2mt), \quad (1.117d)$$

тогда как для проекции вектора спина вдоль осей X, Y и Z имеем

$$S^{23,0} = \frac{1}{bc\tau} [C_1C_2 + C_3C_4], \quad (1.118a)$$

$$S^{31,0} = 0, \quad (1.118b)$$

$$S^{12,0} = \frac{1}{2ab\tau} [C_1^2 - C_2^2 + C_3^2 - C_4^2]. \quad (1.118c)$$

Из (1.99) мы находим заряд системы в объеме \mathcal{V}

$$Q = [C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2] \mathcal{V}. \quad (1.119)$$

Таким образом мы видим, что полный заряд системы в конечном объеме всегда конечный.

Давайте теперь найдем явное выражение для τ . В отсутствии идеальной жидкости для линейного спинорного поля имеем

$$T_0^0 = mS, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = 0. \quad (1.120)$$

Приняв во внимание (1.120), для τ находим

$$\ddot{\tau} = M + 3\Lambda\tau, \quad (1.121)$$

с решением

$$\tau = \begin{cases} (1/3\Lambda) [M - q_1 \sinh(\sqrt{-3\Lambda}t)], & \Lambda < 0, \\ (1/2)Mt^2 + y_1t + y_0, & \Lambda = 0, \\ (1/3\Lambda) [M - q_2 \sin(\sqrt{3\Lambda}t)], & \Lambda > 0. \end{cases} \quad (1.122)$$

где $M = \frac{3}{2}\kappa mC_0$ и y_1, y_0, q_1, q_2 - константы интегрирования. Проанализируем полученные решения.

Рассмотрим случай когда $\Lambda = 0$. Можно показать, что [269]

$$y_1^2 - 2My_0 = (X_1^2 + X_1X_3 + X_3^2/3) > 0. \quad (1.123)$$

Это означает, что квадратный трехчлен $(1/2)Mt^2 + y_1t + y_0 = 0$ имеет действительные корни, т.е., $\tau(t)$ в случае $\Lambda = 0$ обращается в нуль при $t = t_{1,2} = -y_1/M \pm \sqrt{(y_1/M)^2 - 2y_0/M}$ и полученное решение является сингулярным. При $t \rightarrow \infty$ в этом случае мы имеем

$$\tau(t) \approx \frac{3}{4}\kappa mC_0t^2, \quad a(t) \approx b(t) \approx c(t) \approx t^{2/3},$$

откуда следует вывод об асимптотической изотропизации процесса расширения первоначально анизотропного пространства-времени типа Бианки-I. Таким образом, решение самосогласованной системы уравнений линейного спинорного и гравитационного полей является сингулярным в начальный момент времени. В начальной стадии эволюции системы полей процесс расширения пространства является анизотропным, но при $t \rightarrow \infty$ происходит изотропизация процесса расширения. Как видно, компоненты спинорного тока и проекции вектора спина являются сингулярными в пространственно-временной точке $t_{1,2}$, где τ исчезает.

Для $\Lambda > 0$ мы видим, что решение является сингулярным при

$$t = t_0 = (1/\sqrt{3\Lambda}) \operatorname{arcsinh}(M/q_1)$$

и изотропизация процесса расширения происходит при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что процесс изотропизации в этом случае становится более быстрым.

В случае $\Lambda < 0$ мы имеем осциллирующие решения. С учетом того, что τ является неотрицательным, можно показать, что данная модель имеет сингулярные решения

при $t = (4k + 1)\pi/2\sqrt{-3\Lambda}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ с $M = q_2$. Для $M > q_2$ мы имеем τ , которое всегда положительно определено, т.е., полученные решения являются регулярными во всех точках пространства-времени.

Посмотрим теперь нелинейный случай. Для этого мы рассмотрим следующие виды нелинейности: (i) $F = F(I)$; (ii) $F = F(J)$; (iii) $F = F(K_{\pm})$ with $K_{\pm} = I \pm J$.

(i) Рассмотрим случай когда $F = F(I)$. Из (1.50a) в этом случае подобно линейному случаю мы имеем

$$S = \frac{C_0}{\tau}, \quad C_0 = \text{const.} \quad (1.124)$$

Заметим, что в этом случае мы обозначили константы также, как и в линейном случае, хотя они не обязательно должны быть тождественными. Уравнения спинорного поля в этом случае имеет вид

$$\dot{V}_1 + i(m - \mathcal{D}_1)V_1 = 0, \quad (1.125a)$$

$$\dot{V}_2 + i(m - \mathcal{D}_1)V_2 = 0, \quad (1.125b)$$

$$\dot{V}_3 - i(m - \mathcal{D}_1)V_3 = 0, \quad (1.125c)$$

$$\dot{V}_4 - i(m - \mathcal{D}_1)V_4 = 0. \quad (1.125d)$$

В рассматриваемом случае $F = F(S)$ из (1.124) вытекает, что $F(I)$ и \mathcal{D}_1 являются функциями только от τ . С учетом этого мы находим явные выражения для компонент спинорного поля

$$\psi_1(t) = (C_1/\sqrt{\tau}) \exp[-i \int (m - \mathcal{D}_1) dt], \quad (1.126a)$$

$$\psi_2(t) = (C_2/\sqrt{\tau}) \exp[-i \int (m - \mathcal{D}_1) dt], \quad (1.126b)$$

$$\psi_3(t) = (C_3/\sqrt{\tau}) \exp[i \int (m - \mathcal{D}_1) dt], \quad (1.126c)$$

$$\psi_4(t) = (C_4/\sqrt{\tau}) \exp[i \int (m - \mathcal{D}_1) dt]. \quad (1.126d)$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 - константы интегрирования и связаны с C_0 как $C_0 = C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 - C_4^2$. Из (1.97a) - (1.97d) находим компоненты спинорного тока

$$j^0 = \frac{1}{\tau} [C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2], \quad (1.127a)$$

$$j^1 = \frac{2}{a\tau} [C_1C_4 + C_2C_3] \cos[2 \int (m - \mathcal{D}_1) dt], \quad (1.127b)$$

$$j^2 = \frac{2}{b\tau} [C_1C_4 - C_2C_3] \sin[2 \int (m - \mathcal{D}_1) dt], \quad (1.127c)$$

$$j^3 = \frac{2}{c\tau} [C_1C_3 - C_2C_4] \cos[2 \int (m - \mathcal{D}_1) dt], \quad (1.127d)$$

тогда как для проекции вектора спина вдоль X , Y и Z оси получим

$$S^{23,0} = \frac{1}{bc\tau} [C_1 C_2 + C_3 C_4], \quad (1.128a)$$

$$S^{31,0} = 0, \quad (1.128b)$$

$$S^{12,0} = \frac{1}{2ab\tau} [C_1^2 - C_2^2 + C_3^2 - C_4^2]. \quad (1.128c)$$

Изучим уравнения для τ , подробнее выбирая нелинейный член спинорного поля в виде $F = \lambda I^{(n/2)} = \lambda S^n$, где λ константа самодействия и $n > 1$. В этом случае для τ находим

$$\ddot{\tau} = (3/2)\kappa [mC_0 + \lambda(n-2)C_0^n/\tau^{n-1}] - 3\Lambda\tau. \quad (1.129)$$

Первый интеграл предыдущего уравнения имеет вид

$$\dot{\tau}^2 = 3\kappa [mC_0\tau - \lambda C_0^n/\tau^{n-2} + y_1^2] - 3\Lambda\tau^2. \quad (1.130)$$

Здесь y_1^2 суть константа интегрирования. Она положительно определена и связана с константами X_i как $y_1^2 = (X_1^2 + X_1 X_3 + X_3^2)/9\kappa C_0$ [269]. Знак C_0 определяется требованием, чтобы плотность T_0^0 линейного спинорного поля была положительно определенной величиной, т.е.,

$$T_0^0 = mC_0/\tau > 0. \quad (1.131)$$

Из (1.131) видно, что $C_0 > 0$. Теперь мы можем написать решение уравнения (1.130) в квадратурах:

$$\int \frac{\tau^{(n-2)/2} d\tau}{\sqrt{\kappa [mC_0\tau^{n-1} + y_1^2\tau^{n-2} - \lambda C_0^n] + \Lambda\tau^n}} = \sqrt{3}t \quad (1.132)$$

Постоянная интегрирования в (1.132) выбрана равной нулю, так как она дает только сдвиг начала отсчета времени. Рассмотрим свойства полученных решений для различных значений n , λ и Λ . Сначала изучим случай с $\Lambda = 0$.

В случае $n > 2$ из (1.132) получим

$$\tau(t) |_{t \rightarrow \infty} \approx (3/4)\kappa m C_0 t^2. \quad (1.133)$$

Решение (1.133) совпадает с решением уравнения линейного спинорного поля при $t \rightarrow \infty$, откуда следует вывод об изотропизации процесса расширения пространства типа Бианки-I в этом случае. Необходимо отметить, что изотропизация происходит только в том случае, если исходное уравнение нелинейного спинорного поля содержит массовый член с параметром m . (1.132)]. В случае безмассового спинорного поля изотропизация не происходит. В этом случае из (1.132) имеем

$$\tau(t) |_{t \rightarrow \infty} \approx \sqrt{3\kappa C_0 y_1^2} t. \quad (1.134)$$

Подставляя (1.134) в (1.62a) - (1.62c), приходим к выводу, что метрические функции $a(t)$, $b(t)$, и $c(t)$ в данном случае являются различными.

Посмотрим свойства решений уравнения (1.129) когда $t \rightarrow 0$. В случае $\lambda < 0$ из (1.132) имеем

$$\tau(t) = [(3/4)n^2\kappa|\lambda|C_0^m]^{1/n}t^{2/n} \rightarrow 0, \quad (1.135)$$

что означает, что полученные решения являются сингулярными. Для $\lambda > 0$, из (1.132) следует, что $\tau = 0$ не может быть достигнуто ни при каких значениях t , так как в этом случае знаменатель в подынтегральном выражении в (1.132) становится мнимой величиной. Таким образом мы видим, что при $\lambda > 0$ существует несингулярное решение исходной системы уравнений [239]. Отсутствие начальной сингулярности в рассматриваемом космологическом решении объясняется тем, что при $\lambda > 0$ нарушается условие энергодоминантности в теореме Хокинга-Пенроуза. Так мы можем заключить:

Специфический выбор нелинейности спинорного поля, вызванной самодействием, порождает Бианки типа-I космологическую модель без сингулярностей даже в отсутствие Λ -члена, что становится возможным только за счет нарушения условия энергодоминантности в теореме Хокинга-Пенроуза.

Доказательство. Для того, чтобы доказать, что в рассматриваемом случае нарушается условие энергодоминантности, мы перепишем эти условия в форме:

$$T_{00} + T_{11} + T_{22} + T_{33} \geq 0, \quad (1.136a)$$

$$T_{00} + T_{11} \geq 0, \quad (1.136b)$$

$$T_{00} + T_{22} \geq 0, \quad (1.136c)$$

$$T_{00} + T_{33} \geq 0, \quad (1.136d)$$

которое для VI метрики читается

$$T_0^0 \geq T_1^1 a^2 + T_2^2 b^2 + T_3^3 c^2, \quad (1.137a)$$

$$T_0^0 \geq T_1^1 a^2, \quad (1.137b)$$

$$T_0^0 \geq T_2^2 b^2, \quad (1.137c)$$

$$T_0^0 \geq T_3^3 c^2. \quad (1.137d)$$

Вернемся к выражению для плотности энергии спинорного поля, что в нашем случае совпадает с полной плотностью энергии. Из

$$T_0^0 = \frac{mC_0}{\tau} - \frac{\lambda C_0^n}{\tau^n} \quad (1.138)$$

вытекает, что при

$$\tau^{n-1} < \frac{\lambda C_0^{n-1}}{m} \quad (1.139)$$

плотность энергии спинорного поля становится отрицательной. С другой стороны, мы имеем для любого неотрицательного значения τ

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \frac{\lambda(n-1)C_0^n}{\tau^n} > 0. \quad (1.140)$$

Таким образом, все четыре условия в (1.137) нарушены, т.е., отсутствие начальной сингулярности в рассматриваемом космологическом решении оказывается согласованными с нарушением условий энергодоминантности в теории Хокинга-Пенроуза.

Рассмотрим уравнение Гейзенберга-Иваненко [22], положив $n = 2$ в (1.129). В этом случае уравнение для $\tau(t)$ не содержит нелинейного члена и решение этого уравнения совпадает с решением для случая линейного спинорного поля. Компоненты спинорного поля в этом случае пишутся в виде

$$V_1 = \frac{C_1}{\sqrt{\tau}} \exp[-imt] Z^{4i\lambda C_0/B}, \quad (1.141a)$$

$$V_2 = \frac{C_2}{\sqrt{\tau}} \exp[-imt] Z^{4i\lambda C_0/B}, \quad (1.141b)$$

$$V_3 = \frac{C_3}{\sqrt{\tau}} \exp[imt] Z^{-4i\lambda C_0/B}, \quad (1.141c)$$

$$V_4 = \frac{C_4}{\sqrt{\tau}} \exp[imt] Z^{-4i\lambda C_0/B}, \quad (1.141d)$$

где $Z = \frac{(t-t_1)}{(t-t_2)}$, $B = M(t_1 - t_2)$, и $t_{1,2} = -y_1/M \pm \sqrt{(y_1/M)^2 - 2y_0/M}$ - корни полинома $Mt^2 + 2y_1t + 2y_0 = 0$. Как и в случае линейного спинорного поля, полученное решение является сингулярным в начальный момент времени и оно становится изотропным при $t \rightarrow \infty$.

Теперь изучим свойства решений уравнения (1.129) для $1 < n < 2$. В этом случае удобно представить решение (1.132) в виде

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{m\tau - \lambda\tau^{2-n}C_0^{n-1} + y_1^2}} = \sqrt{3\kappa C_0} t \quad (1.142)$$

При $t \rightarrow \infty$ из (1.142) мы имеем равенство (1.133), приводящее к изотропизации процесса расширения. Если $m = 0$ и $\lambda > 0$, то $\tau(t)$ лежит на интервале

$$0 \leq \tau(t) \leq (y_1^2/\lambda C_0^{n-1})^{1/(2-n)}.$$

А если $m = 0$ и $\lambda < 0$, соотношение (1.142) при $t \rightarrow \infty$ приводит к равенству

$$\tau(t) \approx [(3/4)n^2\kappa|\lambda|C_0^n]^{1/n} t^{2/n}. \quad (1.143)$$

Подставляя (1.143) в (1.62) и учитывая что при $t \rightarrow \infty$

$$\int \frac{dt}{\tau} \approx \frac{n(3\kappa|\lambda|n^2C_0^n)^{1/n}}{(n-2)2^{2/n}} t^{-2/n+1} \rightarrow 0$$

благодаря $-2/n + 1 < 0$, мы имеем

$$a(t) \sim b(t) \sim c(t) \sim [\tau(t)]^{1/3} \sim t^{2/3n} \rightarrow \infty. \quad (1.144)$$

Это означает, что полученное решение приближается к изотропному. В этом случае изотропизация происходит не за счет массового параметра, а за счет степени нелинейности n в $F = \lambda S^n$. Уравнение (1.142) предполагает, что

$$\tau(t) |_{t \rightarrow 0} \approx \sqrt{3\kappa C_0 y_1^2} t \rightarrow 0, \quad (1.145)$$

это означает, что полученное решение является изначально сингулярным. Таким образом, при $1 < n < 2$ существует только сингулярное решение в начальный момент времени. При $t \rightarrow \infty$ происходит изотропизация процесса расширения пространства VI как при $m \neq 0$, так и при $m = 0$.

Наконец, давайте изучим свойства решения уравнения (1.129) при $0 < n < 1$. В этом случае мы используем решения в виде (1.142). Так как $2 - n > 1$, с ростом $\tau(t)$ в знаменателе подынтегрального выражения в (1.142) второй член $\lambda \tau^{2-n} C_0^{n-1}$ растет быстрее первого. Поэтому решение, описывающее расширение пространства, может быть возможным только при $\lambda < 0$. В этом случае при $t \rightarrow \infty$, для $m = 0$ как и для $m \neq 0$, мы получим асимптотическое представление решения в виде (1.143). Это решение, так же как в выборе $1 < n < 2$, обеспечивает асимптотически изотропное расширение пространства VI. Для $t \rightarrow 0$ в этом случае мы получим только сингулярное решение в виде (1.145).

Для нетривиального Λ -члена мы рассмотрим следующие ситуации в зависимости от знака Λ и λ .

Случай (i). $\Lambda = \epsilon^2 > 0$, $\lambda > 0$. В этом случае при $n > 2$ и $t \rightarrow \infty$ мы находим

$$\tau(t) \approx e^{\sqrt{3\epsilon} t} \quad (1.146)$$

Таким образом, мы видим, что асимптотическое поведение τ не зависит от n и определяется Λ -членом. Из (1.62) явно видно, что происходит асимптотическая изотропизация.

Из (1.132) также следует, что τ не может быть нулем ни при каких значениях t , так как подынтегральное выражение становится мнимым как только τ стремится к нулю. Таким образом полученное решение, благодаря нелинейности спинорного поля, является несингулярным и асимптотически изотропным. Это было замечено и раньше, отсутствие начальной сингулярности в рассматриваемой космологической модели приводит к нарушению условия энергодоминантности.

Случай (ii). $\Lambda < 0$ и $\lambda > 0$. Для $n > 2$ (1.132) допускает только несингулярные осциллирующие решения, так как $\tau > 0$ и ограничено сверху. Рассмотрим случай с $n = 4$ и для простоты положим $m = 0$. Тогда из (1.132) получим

$$\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Lambda}} \left[\kappa C_0 \tau_0 + \sqrt{\kappa^2 C_0^2 \tau_0^2 + 4\Lambda \lambda C_0^4 \sin 2\sqrt{3\Lambda} t} \right]^{1/2}. \quad (1.147)$$

Случай (iii). $\Lambda < 0$ и $\lambda < 0$. В этом случае имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tau \approx [-3\lambda n^2 C_0^m t^2 / 4]^{1/n}, \quad (1.148)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau \approx e^{\sqrt{3\Lambda}t}. \quad (1.149)$$

что означает, что полученные решения изначально сингулярные и происходит асимптотическая изотропизация при $t \rightarrow \infty$.

Случай (iv). $\Lambda > 0$ и $\lambda < 0$. В этом случае для начального значения t имеются решения, которые совпадают с (1.148), т.е.,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tau \approx [-3\lambda n^2 C_0^m t^2 / 4]^{1/n}. \quad (1.150)$$

С другой стороны, при $\Lambda > 0$ τ должно быть ограничено сверху, в противном случае подынтегральное выражение становится мнимым. Таким образом, начиная с некоторых $t = t_0$, где t_0 достаточно большое, решение можно представить в виде

$$\lim_{t \geq t_0} \tau \approx \sin \sqrt{3\Lambda}t. \quad (1.151)$$

Таким образом, решение в этом случае сингулярное и осциллирующее. После этих анализов можем заключить, что нелинейный член доминирует в начальной эпохе эволюции, тогда как Λ -член становится доминирующим в асимптотической стадии.

(ii) Изучим систему, когда $F = F(J)$, т.е., в этом случае $\mathcal{D} = 0$. Заметим, что в единой нелинейной спинорной теории Гейзенберга член с массой отсутствует, поскольку согласно Гейзенбергу, массы частиц должны получаться в результате квантования праматерии [158, 159, 20, 21]. При нелинейных обобщениях уравнений классической теории поля массовый член не имеет того смысла, который он имеет в линейных полевых уравнениях, поскольку никак не определяет полную энергию (или массу) нелинейной полевой системы. Так, без потери общности мы можем рассматривать безмассовое спинорное поле полагая $m = 0$. Тогда из (1.50) имеем

$$P(t) = \frac{D_0}{\tau}, \quad D_0 = \text{const}. \quad (1.152)$$

Система уравнений спинорного поля в этом случае выглядит

$$\dot{V}_1 - \mathcal{G}_1 V_3 = 0, \quad (1.153a)$$

$$\dot{V}_2 - \mathcal{G}_1 V_4 = 0, \quad (1.153b)$$

$$\dot{V}_3 + \mathcal{G}_1 V_1 = 0, \quad (1.153c)$$

$$\dot{V}_4 + \mathcal{G}_1 V_2 = 0. \quad (1.153d)$$

Определив $U(\sigma) = V(t)$, где $\sigma = \int \mathcal{G}_1 dt$, перепишем (1.153) в виде

$$U'_1 - U_3 = 0, \quad (1.154a)$$

$$U'_2 - U_4 = 0, \quad (1.154b)$$

$$U'_3 + U_1 = 0, \quad (1.154c)$$

$$U'_4 + U_2 = 0, \quad (1.154d)$$

где штрих (') означает дифференцирование по отношению к σ . Дифференцируя первое уравнение системы (1.154) с учетом третьего имеем

$$U_1'' + U_1 = 0, \quad (1.155)$$

что приводит к решению

$$\begin{aligned} U_1 &= D_1 e^{i\sigma} + iD_3 e^{-i\sigma}, \\ U_3 &= iD_1 e^{i\sigma} + D_3 e^{-i\sigma}. \end{aligned}$$

Аналогично для U_2 и U_4 получаем

$$\begin{aligned} U_2 &= D_2 e^{i\sigma} + iD_4 e^{-i\sigma}, \\ U_4 &= iD_2 e^{i\sigma} + D_4 e^{-i\sigma}, \end{aligned}$$

где D_i - эти константы интегрирования. Наконец мы пишем

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\tau}} (D_1 e^{i\sigma} + iD_3 e^{-i\sigma}), \quad (1.156a)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{\tau}} (D_2 e^{i\sigma} + iD_4 e^{-i\sigma}), \quad (1.156b)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{\tau}} (iD_1 e^{i\sigma} + D_3 e^{-i\sigma}), \quad (1.156c)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{\tau}} (iD_2 e^{i\sigma} + D_4 e^{-i\sigma}). \quad (1.156d)$$

Подставляя (1.156) в выражении (1.152) находим

$$D_0 = 2(D_1^2 + D_2^2 - D_3^2 - D_4^2).$$

Для компонентов спинорного тока из (1.97) имеем

$$j^0 = \frac{2}{\tau} [D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2], \quad (1.157a)$$

$$j^1 = \frac{4}{a\tau} [D_2 D_3 + D_1 D_4] \cos[2 \int \mathcal{G}_1 dt], \quad (1.157b)$$

$$j^2 = \frac{4}{b\tau} [D_2 D_3 - D_1 D_4] \sin[2 \int \mathcal{G}_1 dt], \quad (1.157c)$$

$$j^3 = \frac{4}{c\tau} [D_1 D_3 - D_2 D_4] \cos[2 \int \mathcal{G}_1 dt], \quad (1.157d)$$

тогда как, для проекции вектора спина вдоль осей X , Y и Z получим

$$S^{23,0} = \frac{2}{bc\tau} [D_1 D_2 + D_3 D_4], \quad (1.158a)$$

$$S^{31,0} = 0, \quad (1.158b)$$

$$S^{12,0} = \frac{1}{2ab\tau} [D_1^2 - D_2^2 + D_3^2 - D_4^2]. \quad (1.158c)$$

Выберем нелинейный член в виде $F = \lambda J^n = \lambda P^{2n}$, где λ суть константа связи. В этом случае мы имеем компоненты тензора энергии-импульса

$$T_0^0 = -\lambda P^n, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \lambda(2n - 1)P^n. \quad (1.159)$$

С учетом (1.159) и (1.152) из (1.65) для τ получим

$$\ddot{\tau} = (3/2)\kappa\lambda(2n - 2)D_0^{2n}\tau^{1-2n} - 3\Lambda\tau, \quad (1.160)$$

с решением в квадратурах

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{y_1^2 - \kappa\lambda D_0^{2n}\tau^{2-2n} - \Lambda\tau^2}} = \sqrt{3}t, \quad (1.161)$$

где постоянная интегрирования y_1^2 имеет вид $y_1^2 = X_1^2 + X_1X_3 + X_3^2 > 0$.

Проанализируем полученные решения. Как видно, случай $n = 1$ является линейным. Рассмотрим сначала случай с $\lambda < 0$. В зависимости от величин n и Λ получим следующие решения:

$$\tau(t)\Big|_{t \rightarrow 0} \approx \begin{cases} [\sqrt{-3\kappa\lambda n D_0^n t}]^{1/n}, & n > 1, \\ \sqrt{3}y_1 t, & n < 1 \end{cases} \quad (1.162)$$

$$\tau(t)\Big|_{t \rightarrow \infty} \approx \begin{cases} [\sqrt{-3\kappa\lambda n D_0^n t}]^{1/n}, & n < 1 \quad \Lambda = 0, \\ \sqrt{3}y_1 t, & n > 1 \quad \Lambda = 0 \end{cases} \quad (1.163)$$

и

$$\tau|_{t \rightarrow \infty} \approx e^{\sqrt{-3\Lambda}t}, \quad \Lambda < 0, \quad (1.164)$$

тогда как при $\Lambda > 0$ значение τ ограничено сверху. Таким образом мы видим, что если нелинейный член F выбирается с $\lambda < 0$ то решение имеет начальную сингулярность и в отсутствие Λ -члена пространство-время является асимптотически анизотропным при $n > 1$, а изотропизация происходит при $n < 1$. Введение отрицательного Λ -члена порождает асимптотическую изотропизацию, тогда как положительный Λ обеспечивает осциллирующие решения.

Рассмотрим случай когда константа связи является положительной. Как видно из (1.161), для $\lambda > 0$ и $n > 1$ значение $\tau = 0$ не может быть достигнуто ни при каких значениях t , так как в этом случае подынтегральное выражение становится мнимым. Таким образом полученные решения всегда регулярные. Но как следует из (1.159), плотность энергии в этом случае имеет отрицательное значение, а компоненты давления положительные. Это приводит к нарушению условия энерго-доминантности. Для $n < 1$ имеются решения аналогичные при $\lambda < 0$.

(iii) Рассмотрим случай с $F = F(I, J)$. Выбирая

$$F = F(K_{\pm}, \quad K_+ = I + J = I_v = -I_A, \quad K_- = I - J = I_T, \quad (1.165)$$

для безмассового нелинейного спинорного поля имеем

$$\mathcal{D} = 2SF_{K_{\pm}}, \quad \mathcal{G} = \pm 2PF_{K_{\pm}}, \quad F_{K_{\pm}} = dF/dK_{\pm}.$$

Подставляя их в (1.50) находим

$$S_0^2 \pm P_0^2 = D_{\pm}. \quad (1.166)$$

При выборе $F = \lambda K_{\pm}^n$ компоненты тензора энергии-импульса имеют вид

$$T_0^0 = -\lambda K_{\pm}^n, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \lambda(2n-1)K_{\pm}^n. \quad (1.167)$$

С учетом (1.167) и (1.166) из (1.65) получим уравнение

$$\ddot{\tau} = (3/2)\kappa\lambda(2n-2)D_{\pm}^n \tau^{1-2n} - 3\Lambda\tau, \quad (1.168)$$

с решением

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{y_1^2 - \kappa\lambda D_{\pm}^n \tau^{2-2n} - \Lambda\tau^2}} = \sqrt{3}t, \quad (1.169)$$

где $y_1^2 = X_1^2 + X_1X_3 + X_3^2$. Из сходства уравнений (1.161) и (1.169) мы приходим к заключению, аналогичному сделанному в случае $F = \lambda J^n$, т.е., для отрицательной константы связи ($\lambda < 0$) решение есть изначально сингулярное и в отсутствие Λ -члена пространство-время является асимптотически анизотропным при $n > 1$, а при $n < 1$ происходит изотропизация; при $\lambda > 0$ находим регулярные решения с нарушенным условием энерго-доминантности; введение отрицательного Λ -члена приводит к асимптотической изотропизации, тогда как положительный Λ -член обеспечивает осциллирующие решения. Аналогичные результаты получаются также при выборе $F = \lambda S^{2n} P^{2n}$.

1.8.1 Нелинейное скалярное поле в отсутствии спинорного поля

Рассмотрим нелинейное скалярное поле в отсутствии спинорного поля. В качестве лагранжиана нелинейного скалярного поля выберем лагранжиан Борна-Инфельда [59]

$$\Psi(\Upsilon) = -\frac{1}{\sigma}(1 - \sqrt{1 + \sigma\Upsilon}), \quad (1.170)$$

где $\Upsilon = \varphi_{\alpha}\varphi^{\alpha}$ и σ - это параметр нелинейности. Из уравнения (1.170) мы также находим

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Psi(\Upsilon) = \frac{1}{2}\Upsilon \dots \quad (1.171)$$

Вставляя (1.170) в (1.35) для скалярного поля мы получим

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{2C_s}{\sqrt{\tau^2 - 4\sigma C_s^2}}, \quad (1.172)$$

что дает

$$\Upsilon = (\dot{\varphi})^2 = \frac{4C_s^2}{\tau^2 - 4\sigma C_s^2}. \quad (1.173)$$

Из (1.173) следует, что

$$\Upsilon \Big|_{\tau \rightarrow 0} = -\frac{1}{\sigma}, \quad \Upsilon \Big|_{\tau \rightarrow +\infty} = 0, \quad (1.174)$$

что показывает кинкообразность (kink-like) функции Υ .

Для рассматриваемого случая мы имеем

$$T_{sc0}^0 = 2\Upsilon \frac{d\Psi}{d\Upsilon} - \Psi = \frac{1}{\sigma} (1 - \sqrt{1 - 4\sigma C_s^2/\tau^2}). \quad (1.175)$$

и

$$T_{sc1}^1 = T_{sc2}^2 = T_{sc3}^3 = -\Psi(\Upsilon) = \frac{1}{\sigma} (1 - 1/\sqrt{1 - 4\sigma C_s^2/\tau^2}). \quad (1.176)$$

Для τ в этом случае находим

$$\ddot{\tau} = \frac{3\kappa}{2\sigma} \left(2\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\sigma C_s^2} - \tau^2/\sqrt{\tau^2 - 4\sigma C_s^2} \right) - 3\Lambda\tau \quad (1.177)$$

с решением в квадратурах

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{(\kappa/\sigma)[\tau^2(1 - \sqrt{1 - 4\sigma C_s^2/\tau^2})] - \Lambda\tau^2 + C}} = \sqrt{3}t. \quad (1.178)$$

Дальнейший анализ решения (1.178) показывает, что

$$\tau \Big|_{t \rightarrow 0} \approx \sqrt{3C}t, \quad (1.179)$$

т.е., решение первоначально сингулярное, и

$$\tau \Big|_{t \rightarrow \infty} \approx \sqrt{3(2\kappa C_s^2 + C)}t, \quad \Lambda = 0, \quad (1.180)$$

т.е., асимптотически изотропизация не происходит в отсутствие Λ -члена. При наличии Λ -члена получим

$$\tau \Big|_{t \rightarrow \infty} \approx e^{\sqrt{-3\Lambda}t}, \quad \Lambda < 0. \quad (1.181)$$

Как видно, решение является асимптотически изотропным при $\Lambda < 0$, а $\Lambda > 0$ получим осциллирующее решение, так как в этом случае значение τ ограничено сверху (оно неотрицательно по определению), в противном случае подынтегральное выражение в (1.178) становится мнимым.

Рассмотрим распределение плотности энергии нелинейного спинорного поля. Из (1.53d) находим

$$T_{sc0}^0(t) \Big|_{t \rightarrow 0} \rightarrow \infty, \quad T_{sc0}^0(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (1.182)$$

что показывает, что плотность энергии скалярного поля не локализована.

1.8.2 Нелинейное спинорное и нелинейное скалярное поля с минимальной связью

Рассмотрим систему с нелинейным спинорным и скалярным полями, где нелинейность спинорного поля задается в виде $F = \lambda S^n$, а скалярное поле выберется в виде (1.170). Уравнения полей в этом случае выглядят также как и в предыдущих разделах, а функция τ определяется уравнением

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{\kappa[mC_0\tau - \lambda C_0^n/\tau^{(n-2)} + (\tau^2/\sigma)[1 - \sqrt{1 - 4\sigma C_s^2/\tau^2}]] - \Lambda\tau^2 + C}} = \sqrt{3}t, \quad (1.183)$$

где C суть постоянная интегрирования. Подробный анализ уравнения (1.183) дает следующие результаты:

$$\tau \Big|_{t \rightarrow 0} \approx \left(-(3/4)\kappa\lambda n^2 C_0^n t^2 \right)^{1/2}, \quad \lambda < 0, \quad (1.184)$$

то есть, для $\lambda < 0$ решение первоначально сингулярное. Для $\lambda > 0$ мы приходим к выводу, что значение τ не может быть тривиальным, так как в таком случае подынтегральное выражение становится мнимым. Это значит, что полученные решения являются регулярными во всех точках, но как и в предыдущем случае это приводит к нарушению условия энергодоминантности. Так, в начальной стадий эволюции преобладает нелинейность спинорного поля. При $t \rightarrow \infty$ находим

$$\tau \Big|_{t \rightarrow \infty} \approx 3\kappa m C_0 t^2, \quad m \neq 0, \quad \Lambda = 0, \quad (1.185)$$

т.е., асимптотически изотропное решение для массового спинорного поля в отсутствии Λ -члена, и

$$\tau \Big|_{t \rightarrow \infty} \approx \sqrt{3(2\kappa C_s^2 + C)}t, \quad m = 0, \quad \Lambda = 0, \quad (1.186)$$

т.е., в случае безмассового спинорного поля скалярное поле преобладает в асимптотической стадии в отсутствии Λ -члена. Отметим, что в том случае, когда система заполнена только скалярным полем, процесс изотропизации не происходит. Посмотрим, что происходит, когда в системе имеется нетривиальный Λ -член. В этом случае имеем

$$\tau \Big|_{t \rightarrow \infty} \approx e^{\sqrt{-3\Lambda}t}, \quad \Lambda < 0, \quad (1.187)$$

т.е., решение асимптотически изотропным при $\Lambda < 0$ и при $\Lambda > 0$ мы имеем осциллирующее решение. Значение τ ограничено сверху, так как в противном случае подынтегральное выражение становится мнимым. Положив $F = \lambda P^n$ для безмассового спинорного поля мы приходим к аналогичному выводу.

1.8.3 Взаимодействующие спинорное и скалярное поля

В этом разделе мы дадим подробный анализ системы взаимодействующих спинорного и скалярного полей. Мы выберем линейное спинорное поле положив $F = 0$, и также

линейное скалярное поле, т.е., $L_{sc} = (1/2)\Upsilon = \varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}$. Лагранжиан взаимодействия мы выберем в виде $L_{int} = (1/2)\lambda_1\Upsilon F_1(I, J)$, где λ_1 суть константа взаимодействия. В результате мы получим уравнения спинорного поля с индуцированной нелинейностью. Для скалярного поля в этом случае имеем

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{C}{\tau(1 + \lambda_1 F_1(I, J))}, \quad C = \text{const.} \quad (1.188)$$

Ввиду (1.188) находим

$$\Upsilon = \dot{\varphi}^2 = \frac{C^2}{\tau^2(1 + \lambda_1 F_1(I, J))^2}. \quad (1.189)$$

Для спинорного поля мы получим

$$i\bar{\gamma}^0\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\dot{\tau}}{2\tau}\right)\psi - m\psi + \lambda_1\mathcal{D}_2\psi + \lambda_1\mathcal{G}_2i\gamma^5\psi = 0, \quad (1.190)$$

где ввиду (1.189) \mathcal{D}_2 и \mathcal{G}_2 выглядят

$$\lambda_1\mathcal{D}_2 = \lambda_1S\Upsilon\frac{\partial F_1}{\partial I} = -\frac{C^2}{2\tau^2}\frac{\partial F_2}{\partial S}, \quad \lambda_1\mathcal{G}_2 = \lambda_1S\Upsilon\frac{\partial F_1}{\partial J} = -\frac{C^2}{2\tau^2}\frac{\partial F_2}{\partial P},$$

с $F_2(I, J) = 1/[1 + \lambda_1 F_1(I, J)]$. Таким образом мы получим уравнение спинорного поля с индуцированной нелинейностью. Так как решения уравнения (1.190) совпадают с решением нелинейного спинорного поля с соответствующим $F(I, J)$ и $F_1(I, J)$, мы запишем решения без вывода. Далее с учетом того, что компоненты тензора энергии-импульса имеют вид

$$T_0^0 = mS + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \lambda_1 F_1 \dot{\varphi}^2, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \lambda_1\mathcal{D}_2S + \lambda_1\mathcal{G}_2P - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \lambda_1 F_1 \dot{\varphi}^2 \quad (1.191)$$

из (1.65) для τ находим

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = \frac{3\kappa}{2}[mS + \lambda_1\mathcal{D}_2S + \lambda_1\mathcal{G}_2P] - 3\Lambda \quad (1.192)$$

Для $F_1 = F_1(I)$ имеем $S = C_0/\tau$ и

$$\psi_1(t) = (C_1/\sqrt{\tau}) \exp[-i \int (m - \lambda_1\mathcal{D}_2)dt], \quad (1.193a)$$

$$\psi_2(t) = (C_2/\sqrt{\tau}) \exp[-i \int (m - \lambda_1\mathcal{D}_2)dt], \quad (1.193b)$$

$$\psi_3(t) = (C_3/\sqrt{\tau}) \exp[i \int (m - \lambda_1\mathcal{D}_2)dt], \quad (1.193c)$$

$$\psi_4(t) = (C_4/\sqrt{\tau}) \exp[i \int (m - \lambda_1\mathcal{D}_2)dt], \quad (1.193d)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 являются постоянными интегрирования. Они связаны с C_0 соотношением $C_0 = C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 - C_4^2$. В этом случае $\mathcal{G}_2 = 0$ и $\lambda_1 \mathcal{D}_2 = (C^2/2C_0) \partial F_2 / \partial \tau$. С учетом этого уравнение (1.192) может быть проинтегрировано

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{\kappa[mC_0\tau + (C^2/2)F_2] - \Lambda\tau^2 + y_1^2}} = \sqrt{3}t. \quad (1.194)$$

Положив $F_1 = S^n$, i.e., $F_2 = \tau^n / (\tau^n + \lambda_1 C_0^n)$, мы оценим

$$\tau(t) \Big|_{t \rightarrow 0} \approx \sqrt{3}y_1 t, \quad (1.195)$$

$$\tau(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \approx \begin{cases} \sqrt{3(\kappa C^2 + y_1^2)} t, & m = 0, \quad \Lambda = 0, \\ (3/4)\kappa m C_0 t^2, & m \neq 0 \quad \Lambda = 0 \end{cases} \quad (1.196)$$

и

$$\tau \Big|_{t \rightarrow \infty} \approx e^{\sqrt{-3\Lambda}t}, \quad \Lambda < 0, \quad (1.197)$$

тогда как для $\Lambda > 0$ значение τ ограничено сверху. Так, решения первоначально сингулярные; в отсутствие Λ -члена только массовое спинорное поле обеспечивает асимптотическую изотропизацию; введение Λ -члена приводит к асимптотической изотропизации или осцилляции в зависимости от его знака.

Мы рассмотрим систему при некоторых других выборах лагранжиана взаимодействия. Заметим, что вклад Λ -члена в этих выборах является тем же самым, что и предыдущих случаях, поэтому мы рассмотрим систему при отсутствии Λ -члена.

Для того, чтобы исследовать уравнения спинорного и скалярного полей с прямым взаимодействием, выберем лагранжиан взаимодействия в виде

$$F_2(S) = 1 + \lambda S^n = 1 + \lambda \frac{C_0^n}{\tau^n}, \quad (1.198)$$

где λ суть параметр взаимодействия и n - некоторая произвольная константа. Подставляя (1.198) в (1.86) получим

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{mC_0\tau + \lambda C^2 C_0^n / 2\tau^n + C_2^2}} = \sqrt{3\kappa}t, \quad (1.199)$$

где $C_2^2 = C^2/2 + C_1$.

Рассмотрим различные случаи выбрав λ и n .

I. $\lambda > 0, \quad n > 0$. В этом случае (1.199) приводит к следующему поведению функции $\tau(t)$:

$$\tau \Big|_{t \rightarrow 0} \approx \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \sqrt{\frac{3\kappa\lambda C_0^n C^2}{2}} t \right]^{\frac{1}{n/2+1}}, \quad (1.200a)$$

$$\tau \Big|_{t \rightarrow 0} \approx \frac{3}{4}\kappa m C_0 t^2, \quad (1.200b)$$

т.е., решение является первоначально сингулярным и процесс изотропизации расширения изначально анизотропного ВІ случается без влияния со стороны скалярного поля. Таким образом, эволюция системы взаимодействующих полей при $\lambda > 0$ и $n > 0$ качественно не отличается от системы с минимальной связью.

II. $\lambda = -\sigma^2 < 0$, $n > 0$. В этом случае из (1.199) мы находим, что асимптотическое выражение для τ совпадает с (1.200b), однако $\tau = 0$ не может быть достигнуто, так как знаменатель подынтегрального выражения в (1.199) в этом случае становится мнимым при $\tau \rightarrow 0$. Существует некоторое минимальное значение $\tau_{min} = \tau_0 > 0$, которое определяется из уравнения

$$mC_0\tau_0^{n+1} + C_2^2\tau_0^n - \frac{\sigma^2 C^2 C_0^n}{2} = 0.$$

Это значит, что для $\lambda < 0$ и $n > 0$ существует регулярное решение предыдущей системы уравнений. Отсутствие начальной сингулярности рассматриваемого космологического решения согласуется с нарушением условия энергодоминантности теоремы Хокинга-Пенроуза при $\lambda < 0$.

III. $\lambda > 0$, $n = -k^2 < 0$. В этом случае уравнение (1.199) имеет вид

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{mC_0\tau + \lambda C^2 \tau^{k^2} / 2C_0^{k^2} + C_2^2}} = \sqrt{3\kappa}t. \quad (1.201)$$

Рассмотрим это решение для некоторых конкретных значений k^2 .

а) $k^2 = 1$. Тогда из (1.201) имеем

$$\tau(t) = \frac{3}{4}MC_0\kappa t^2 - \frac{C_2^2}{MC_0}, \quad M = m + \frac{\lambda C^2}{2C_0^2}. \quad (1.202)$$

Это решение является сингулярным при $t_0 = 2C_2/\sqrt{3\kappa}MC_0$ и асимптотически оно изотропизуется.

б) $k^2 = 2$. В этом случае имеем

$$\tau(t) = \frac{C_0^2}{\lambda C^2} \left[\Delta \sinh \left(\frac{\sqrt{3\kappa\lambda}C}{\sqrt{2}C_0} t \right) - mC_0 \right], \quad (1.203)$$

где $\Delta = \sqrt{2\lambda C^2 C_2^2 / C_0^2 - m^2 C_0^2}$. Как видно, решение в рассматриваемом случае есть сингулярное при $t = t_0$. Здесь t_0 есть корень многочлена

$$\Delta \sinh \left(\frac{\sqrt{3\kappa\lambda}C}{\sqrt{2}C_0} t_0 \right) - mC_0 = 0. \quad (1.204)$$

Как видно из (1.203), происходит асимптотическая изотропизация пространства ВІ.

IV. $\lambda = -\sigma^2 < 0$, $n = -k^2 < 0$. Рассмотрим конкретные решения при некоторых значениях k^2 , как это сделано в III.

а) $k^2 = \frac{1}{2}$. В этом случае имеем

$$\frac{2}{\sqrt{mC_0}} \left(\sqrt{\tau} + \sqrt{\tau_1} \ln \left| \sqrt{\tau} - \sqrt{\tau_1} \right| \right) = \sqrt{3\kappa t}, \quad (1.205)$$

с $\sqrt{\tau_1} = \sigma^2 C^2 / 4mC_0^{3/2}$. Можно заключить, что решение является изначально регулярным и оно также асимптотически изотропное.

б) $k^2 = 1$. Запишем

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{\left(m - \sigma^2 C^2 / 2C_0^2\right) C_0 \tau + C_2^2}} = \sqrt{3\kappa t}. \quad (1.206)$$

Если в (1.206) $m - \sigma^2 C^2 / 2C_0^2 > 0$, тогда решение совпадает с решением полученным в III, где $M = m - \sigma^2 C^2 / 2C_0^2$. Для $m - \sigma^2 C^2 / 2C_0^2 = -T^2 < 0$ из (1.206) находим

$$\tau(t) = \frac{C_2^2}{T^2 C_0} - \frac{3\kappa T^2 C_0}{4} t^2. \quad (1.207)$$

В этом случае получим

$$\tau|_{t=0} = \tau_{\max} = \frac{C_2^2}{T^2 C_0}, \quad (1.208a)$$

$$\tau|_{t=t_{1,2}} = \tau_{\min} = 0, \quad (1.208b)$$

где $t_{1,2} = \mp 2C_2 / \sqrt{3\kappa T^2 C_0}$. Таким образом, полученное решение описывает космологическую модель, которая начинает расширяться в момент времени t_1 , достигает максимума при $t = 0$ и коллапсирует в точку в момент времени t_2 .

с) $k^2 = 2$. В этом случае для τ имеется

$$\tau(t) = \frac{C_0^2}{\sigma^2 C^2} \left[mC_0 + \Delta \sin \left(\frac{\sigma C \sqrt{3\kappa t}}{\sqrt{2} C_0} \right) \right], \quad (1.209)$$

где $\Delta = C_0^{-1} \sqrt{m^2 C_0^4 + 2\sigma^2 C^2 C_2^2}$.

Из (1.209) следует, что модель начинает расширяться при

$$t_0 = -(\sqrt{2} C_0 / \sqrt{3\kappa \sigma C}) \arcsin [mC_0 / \Delta],$$

достигает максимума

$$\tau = \tau_{\max} = (C_0 / \sigma C)^2 [mC_0 + \Delta],$$

при

$$t = t_1 = \pi C_0 / \sqrt{6\kappa \sigma C},$$

и наконец при

$$t = t_2 = \pi + (\sqrt{2} C_0 / \sqrt{3\kappa \sigma C}) \arcsin [mC_0 / \Delta]$$

коллапсирует в точку.

Для $F_1 = F_1(J)$ для безмассового спинорного поля имеем решение

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\tau}}(D_1 e^{i\sigma} + iD_3 e^{-i\sigma}), \quad (1.210a)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{\tau}}(D_2 e^{i\sigma} + iD_4 e^{-i\sigma}), \quad (1.210b)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{\tau}}(iD_1 e^{i\sigma} + D_3 e^{-i\sigma}), \quad (1.210c)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{\tau}}(iD_2 e^{i\sigma} + D_4 e^{-i\sigma}), \quad (1.210d)$$

с $\sigma = \int \mathcal{G}_2 dt$. Далее, выбрав $F_1 = \lambda P^n$ для τ находим

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{\kappa C^2 \tau^n / (\tau^n + \lambda_1 D_0^n) - \Lambda \tau^2 + y_1^2}} = \sqrt{3}t, \quad (1.211)$$

где мы использовали $P = D_0/\tau$. Из (1.211) оценим

$$\tau(t) \Big|_{t \rightarrow 0} \approx \sqrt{3}y_1 t, \quad (1.212)$$

$$\tau(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \approx \begin{cases} \sqrt{3(\kappa C^2 + y_1^2)} t, & \Lambda = 0, \\ e^{\sqrt{-3\Lambda} t}, & \Lambda < 0, \end{cases} \quad (1.213)$$

тогда как при $\Lambda > 0$ значение τ имеет верхнюю границу. Видно, что решение является изначально сингулярным; в отсутствие Λ -члена никакой асимптотический процесс изотропизации не наблюдается; введение Λ -члена приводит к изотропизации или к осцилляции решения в зависимости от его знака, в отличие от нелинейного спинорного поля, когда нелинейность обеспечивает изначально регулярные решения в зависимости от знака λ , а индуцированная нелинейность не порождает несингулярные решения.

1.8.4 VI Вселенная заполненная только идеальной жидкостью

Проанализируем систему заполненную идеальной жидкостью. Как было сказано раньше, введение идеальной жидкости не изменяет уравнения полей и, следовательно, решения нелинейного спинорного поля остаются внешне неизменными. Изменение в решениях, которое даст идеальная жидкость, заключены в уравнениях Эйнштейна, а именно, в τ .

В отсутствии других полей из (1.65) имеем

$$\ddot{\tau} = \frac{3\kappa(1-\zeta)\varepsilon_0}{2\tau\zeta}, \quad (1.214)$$

допускающее решение

$$\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^{(1-\zeta)} + C}} = \sqrt{3\kappa\varepsilon_0} t, \quad (1.215)$$

где C есть постоянная интегрирования. Из (1.215) оценим

$$\tau \propto t^2, \quad \zeta = 0, \quad (\text{пыль}), \quad (1.216a)$$

$$\tau \propto t^{3/2}, \quad \text{для } \zeta = 1/3, \quad (\text{излучение}), \quad (1.216b)$$

$$\tau \propto t^{6/5}, \quad \text{для } \zeta = 2/3, \quad (\text{твердая Вселенная}), \quad (1.216c)$$

$$\tau \propto t, \quad \text{для } \zeta = 1, \quad (\text{жесткой материи}). \quad (1.216d)$$

Рассмотрим полную систему с нелинейным членом $F = \lambda S^n$. В этом случае имеем

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{mC_0\tau - \lambda C_0^n/\tau^{(n-2)} + \varepsilon_0\tau^{(1-\xi)} + g^2}} = \pm\sqrt{3\kappa}t. \quad (1.217)$$

Как видно, в случае пыли ($\xi = 0$) член, соответствующий жидкости, может быть объединен с массовым членом, тогда как в случае жесткой материи ($\xi = 1$) он группируется с константой. В отсутствие массового члена (например, когда выберем $F = F(J)$) асимптотическое поведение τ определяется как

$$\tau|_{t \rightarrow \infty} \approx ([\sqrt{\varepsilon_0}(\zeta + 1)/2]t)^{2/(\zeta+1)}. \quad (1.218)$$

Как видно, Вселенная изотропна если $\zeta < 1$ и анизотропна если $\zeta = 1$. Таким образом, в отсутствие Λ -члена для безмассового спинорного поля процесс асимптотической изотропизации первоначально анизотропного пространства-времени зависит от значения параметра ζ , т.е., от материи, которой оно заполнено.

1.9 Численный анализ результатов

В этом разделе мы рассмотрим случай когда и F и F_1 есть функции только от $I = S^2$, положив $F = \lambda S^p$ и $F_1 = S^q$. В качестве лагранжиана скалярного поля возьмем $\Psi = (1/2)\Upsilon$. Заметим, что (i) $\lambda = 0$ и $\lambda_1 = 0$ соответствует случаю с линейным спинорным полем, (ii) $\lambda = 0$ соответствует системе взаимодействующих линейного спинорного и скалярного полей, (iii) $\lambda_1 = 0$ соответствует системе нелинейного спинорного и скалярного полей с минимальной связью. Более того, предположив массу спинорного поля $m = 0$, мы получим систему для безмассового спинорного поля с нелинейностью как функция от J или $I \pm J$, т.е., $F = \lambda P^p$.

Вернемся теперь к уравнению для τ . В общем случае надо решить следующую систему уравнений:

$$\ddot{\tau} = \frac{3}{2}\kappa(T_1^1 + T_0^0)\tau - 3\Lambda\tau, \quad (1.219)$$

$$\dot{T}_0^0 = -\frac{\dot{\tau}}{\tau}(T_0^0 - T_1^1). \quad (1.220)$$

Определив постоянную Хаббла, перепишем систему в виде

$$\dot{\tau} = 3H\tau, \quad (1.221)$$

$$\dot{H} = -3H^2 + \frac{1}{2}\kappa(T_1^1 + T_0^0)\tau - \Lambda\tau, \quad (1.222)$$

$$\dot{T}_0^0 = -3H(T_0^0 - T_1^1). \quad (1.223)$$

Эту систему можно решить с использованием соотношения (1.107), что связывает между собой искомые величины, т.е., рассмотрим систему

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\kappa(T_0^0 - T_1^1) - C_{00}/\tau^2, \quad (1.224)$$

$$\dot{T}_0^0 = -3H(T_0^0 - T_1^1), \quad (1.225)$$

$$\tau^2 = \frac{C_{00}}{3H^2 + \Lambda - \kappa T_0^0}. \quad (1.226)$$

Так как в нашем случае T_0^0 и T_1^1 есть функции только от τ и явно найдены аналитически, то мы движемся следующим образом:

$$\ddot{\tau} = \mathcal{F}(p), \quad (1.227)$$

где мы определили

$$\mathcal{F}(p) = \frac{3\kappa}{2} \left(m + \lambda(p-2)\tau^{1-p} + 4\lambda_1 q \tau^{q-1} / (2\lambda_1 + \tau^q)^2 + \varepsilon_0(1-\zeta)/\tau^\zeta \right) - 3\Lambda\tau. \quad (1.228)$$

Здесь p - совокупность параметров, а именно $p = \{\kappa, m, \lambda, \lambda_1, p, q, \varepsilon_0, \Lambda\}$. С механической точки зрения уравнение (1.227) может быть интерпретировано как уравнение движения одной частицы с единичной массой под действием силы $\mathcal{F}(\tau, p)$. Тогда существует следующий первый интеграл [28]:

$$\dot{\tau}^2 + 2\mathcal{U}(\tau) = 2E, \quad (1.229)$$

с потенциалом

$$U(\tau) = -\frac{3}{2} \left[\kappa(m\tau - \lambda\tau^{2-p} - 4\lambda_1/(2\lambda_1 + \tau^q) + \varepsilon_0\tau^{1-\zeta}) - \Lambda\tau^2 \right]. \quad (1.230)$$

Здесь мы полагали $C_s = 1$ и $C_0 = 1$. В (1.229) постоянная E может быть рассмотрена как энергия, которая определяется из начальных условий.

После определения граничных условий уравнение (1.227) может быть решено непрерывным аналогом метода Ньютона [14], тогда как при начальных (асимптотических) данных уравнение (1.229) может быть численно решено методом Рунге-Кутты.

Сформулируем граничное условие. Заметим, что ВІ пространство-время моделирует расширяющуюся Вселенную, т.е., размер Вселенной в начале должен быть малым, а со временем он становится все больше и больше. Поскольку при $\Lambda > 0$

значение τ ограничено сверху, то выбрать большое значение для τ в настоящее время справедливо только для $\Lambda \leq 0$. Для положительного Λ можно выбрать периодическое граничное условие. Таким образом можно считать, что идеальная жидкость играет главную роль в начальной стадии и τ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\tau} = \frac{3\kappa}{2}\varepsilon_0(1 - \zeta)/\tau^\zeta, \quad (1.231)$$

с решением

$$\tau|_{t \rightarrow 0} = \left[\frac{1 + \zeta}{2} (\sqrt{3\kappa\varepsilon_0} t + c_1) \right]^{2/(1+\zeta)}, \quad c_1 = \text{const.} \quad (1.232)$$

тогда как, при больших t имеем τ

$$\ddot{\tau} = \frac{3\kappa}{2}m - 3\Lambda\tau, \quad (1.233)$$

с решением

$$\tau|_{t \rightarrow \infty} = \begin{cases} (3/4)\kappa m t^2, & \Lambda = 0, \\ \sinh(\sqrt{-3\Lambda} t) + (\kappa m / 2\Lambda), & \Lambda < 0. \end{cases} \quad (1.234)$$

Уравнение (1.227) вместе с граничными условиями, сформулированными выше, дает картину эволюции Вселенной VI в рамках этой модели. Для более реалистичной картины граничные условия для τ нужно сформулировать из физических соображений. Если мы полагаем, что в начальный момент времени размер Вселенной равен нулю, то температура и плотность энергии становятся бесконечными. Для того, чтобы избежать сингулярности в начале расширения, длина Вселенной во всех пространственных направлениях может быть взята равной размеру планковской длины ($\hbar = 1.616 \times 10^{-33} \text{ cm}$). Подробная дискуссия об этом предположении может быть найдена в [145]. Для того, чтобы сформулировать граничное условие на другом конце, мы вспомним, что постоянная Хаббла H связана с τ соотношением

$$3 H = \frac{\dot{\tau}}{\tau}. \quad (1.235)$$

Задав значение H для сегодняшней Вселенной из (1.235), находим значение τ при $t = t_N$

$$\tau|_{t=t_N} = \exp [3 H t_N]. \quad (1.236)$$

Как уже было сказано выше, задачу (1.227) можно численно решать также методом Рунге-Кутты (Runge-Kutta), если известно начальное (или асимптотическое) значение τ и его первая производная по времени $\dot{\tau}$. По аналогии с предыдущим обсуждением, в начальный момент времени для τ можно взять любое малое, но положительное значение τ_0 , а в качестве $\dot{\tau}$ мы возьмем положительный корень равенства (1.229) при заданном τ_0 . Для метода Рунге-Кутты в обратном направлении асимптотическое значение τ может быть оценено из (1.236), а $\dot{\tau}$ есть отрицательный корень равенства (1.229), соответствующий τ_N . В случае $\Lambda > 0$ положительность подкоренной величины в (1.229) налагает дополнительное ограничение на выбор начального

(асимптотического) значения τ . Например, при фиксированных других параметрах, каждой определенной константе интегрирования \mathcal{E} соответствует конечный интервал для τ_0 .

В дальнейшем мы проанализируем уравнения (1.227) и (1.228) для различных вариантов нелинейных членов F и F_1 а также при различных параметров p .

1.9.1 $F_1 = S^n$

Рассмотрим случай, когда нелинейность спинорного поля создается взаимодействием со скалярным полем. Для этого положим, что $\lambda = 0$, т.е., $F = 0$.

Выберем F_1 в виде степенной функции от S (или I), положив $F_1 = S^n$. Полагая $C_0 = 1$ и $C = 1$ перепишем \mathcal{F} в виде

$$\mathcal{F} = \frac{3\kappa}{2} \left(m + \frac{\lambda_1 n \tau^{n-1}}{2(\lambda_1 + \tau^n)} + \varepsilon_0 \frac{(1-\zeta)}{\tau^\zeta} \right) - 3\Lambda \tau, \quad (1.237)$$

с потенциалом

$$\mathcal{U} = -\frac{3}{2} \left\{ \kappa \left[m \tau - \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \tau^n)} + \varepsilon_0 \tau^{1-\zeta} \right] - \Lambda \tau^2 \right\}. \quad (1.238)$$

Заметим, что неотрицательность подкоренного выражения в (1.229) ввиду (1.238) налагает ограничение на τ сверху в случае $\Lambda > 0$. Это значит, что в случае $\Lambda > 0$ значение τ варьируется от 0 до некоторого τ_{\max} , где τ_{\max} есть максимальное значение τ при заданном p . Это уравнение было изучено при различных значениях параметров p . Здесь мы продемонстрируем эволюцию τ при разных τ_0 но при фиксированной “энергии” E и наоборот.

В качестве первого примера рассмотрим спинорное поле с массой $m = 1$. Другие параметры выбраны следующим образом: константа связи $\lambda_1 = 0.1$, степень нелинейности $n = 4$ и космологическая постоянная $\Lambda = 1/3$. Мы также выберем $\zeta = 0.5$, что описывает твердую Вселенную.

На Рис. 1.1 графически представлен потенциал $\mathcal{U}(\tau)$, умноженный на фактор $2/3$. Как видно из Рис. 1.1 и 1.2, выбрав постоянную интегрирования E , можно найти два разных решения. Для $E > 0.5$ решения неперриодические, тогда как для $E_{\min} < E \leq 0.5$ модель допускает осциллирующие решения.

В качестве второго примера рассмотрим безмассовое спинорное поле. Остальные параметры оставим неизменными за исключением ζ . Выберем $\zeta = 1$, описывающую жесткую материю. Заметим, что этот специальный выбор порождает локальный максимум. Это приводит к появлению двух видов решения (неперриодическое и осциллирующее) для одного и того же выбора E .

Как видно из Рис. 1.3, если E выбран так, чтобы она находилась выше уровня M , существует только неперриодическое решение, тогда как при $E_{\min} < E < \mathcal{U}(\tau =$

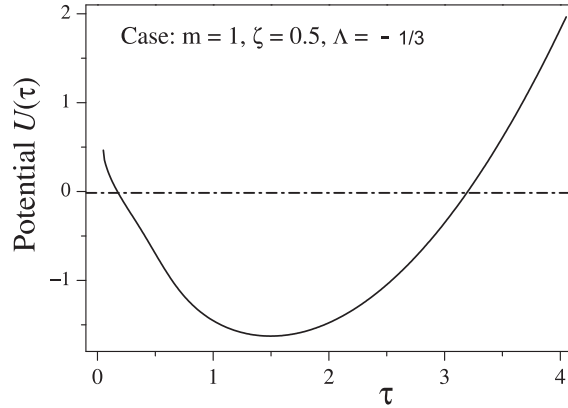


Рис. 1.1: Вид потенциала $\mathcal{U}(\tau)$ [уравнение (1.238)], когда ВІ Вселенная заполнена идеальной жидкостью с $\zeta = 0.5$.

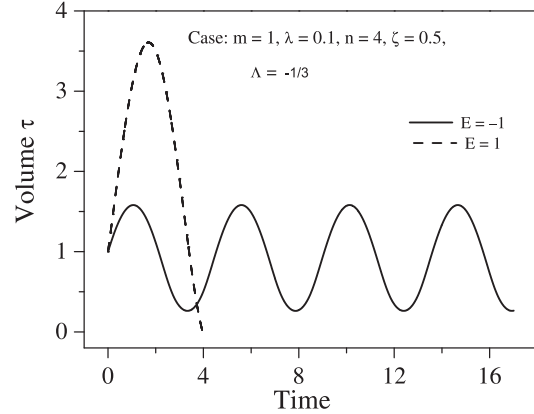


Рис. 1.2: Эволюция е ВІ пространства-времени, соответствующему потенциалу Рис. 1.1 при разных выборах E .

0) = -0.5 соответствующие решения всегда осциллирующие. При $E \in (-0.5, M)$ существует два типа решения в зависимости от выбора τ_0 . На Рис. 1.4 мы иллюстрируем эволюцию τ при $E \in (-0.5, M)$. Как видно, при $\tau_0 \in (0, A)$ (здесь $\tau_0 = 0.1$) имеются математические решения, которые являются осциллирующими и τ в этом случае имеет отрицательное значение на некоторых промежутках времени. Так как по определению τ есть неотрицательная величина, то мы рисуем только ту часть решения, где $\tau \geq 0$ (см. Рис. 1.4, штрихованная линия). Заметим, что только часть τ , определенная на интервале времени $t \in (0, T_f)$, является физически значимой. При $\tau_0 \in (B, C)$ мы снова имеем осциллирующую моду эволюции τ . Эти две области отделены зоной (A, B) , где не существует никаких решений.

Рассмотрим случай с $\Lambda < 0$. Для отрицательного Λ , как и при его отсутствии, эволюция τ имеет всегда экспоненциальный характер, что видно из Рис. 1.5. В этом случае начальная анизотропия ВІ пространства-времени быстро исчезает и Вселенная становится изотропной.

Проанализируем условия энерго-доминантности в теореме Хокинга-Пенроуза [18, 155]. Для ВІ Вселенной условие энерго-доминантности может быть записано в виде [244]

$$T_0^0 \geq T_1^1 a^2 + T_2^2 b^2 + T_3^3 c^2, \quad (1.239a)$$

$$T_0^0 \geq T_1^1 a^2, \quad (1.239b)$$

$$T_0^0 \geq T_2^2 b^2, \quad (1.239c)$$

$$T_0^0 \geq T_3^3 c^2. \quad (1.239d)$$

Заметим, что в работе [244] рассматривалась самосогласованная система нелиней-

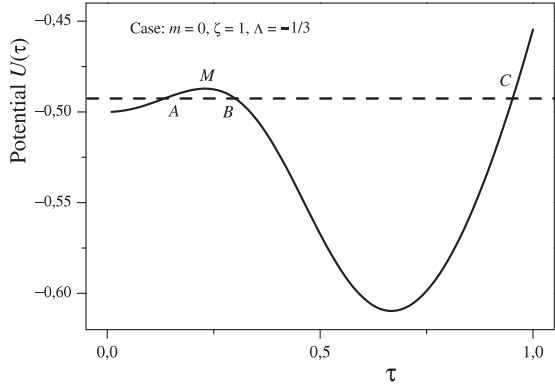


Рис. 1.3: Вид потенциала $\mathcal{U}(\tau)$ [уравнение (1.238)] с ВІ пространством временем заполненным жесткой материей.

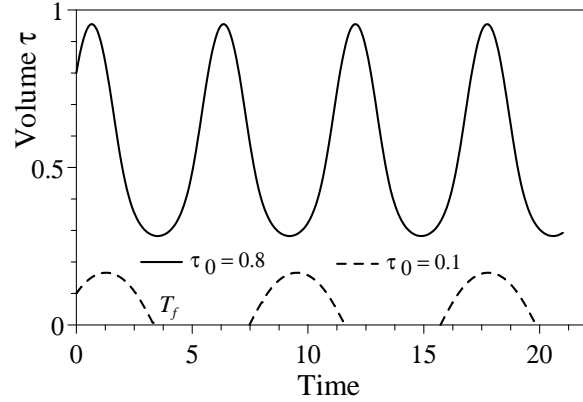


Рис. 1.4: Эволюция ВІ пространства-времени, соответствующая потенциалу на Рис. 1.3 для безмассового спинорного поля при разных выборах τ_0 с $E \in (-0.5, M)$.

ного спинорного и ВІ гравитационного полей в присутствии идеальной жидкости и Λ -члена. Было показано, что в этом случае регулярное решение может быть достигнуто в силу нелинейности спинорного поля и/или положительного Λ -члена. Было также показано, что отсутствие начальной сингулярности в рассматриваемой космологической модели является результатом нарушения условия энергодоминантности в теореме Хокинга-Пенроуза. Заметим также, что регулярное решение, полученное для линейного спинорного поля посредством Λ -члена не приводит к нарушению условия энергодоминантности.

Анализируем условие энергодоминантности для данной системы. Для этого сначала напишем компонент тензора энергии-импульса системы взаимодействующих спинорного и скалярного полей. Плотность энергии в этом случае имеет вид

$$T_0^0 = \frac{mC_0}{\tau} + \frac{C^2\tau^{n-2}}{2(\tau^n + \lambda_1 C_0^n)} + \frac{\varepsilon_0}{\tau^{1+\zeta}}. \quad (1.240)$$

Как видно из (1.240), для любого положительного значения τ , плотность энергии всегда положительна. При $\tau \rightarrow 0$ получаем $T_0^0 \rightarrow \infty$, тогда как T_0^0 уменьшается с ростом τ . Для компонент давления в этом случае имеем

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \frac{C^2\tau^{n-2}}{2(\tau^n + \lambda_1 C_0^n)^2} [\lambda_1 C_0^n (n-1) - \tau^n] - \frac{\zeta\varepsilon_0}{\tau^{1+\zeta}}. \quad (1.241)$$

Второй член в (1.241) всегда положительный. Это значит, что T_1^1 имеет большое значение, когда ВІ Вселенная заполнена пылью, т.е., когда $\zeta = 0$. Для изучения условия энергодоминантности детально исследуем давление (поскольку $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$, с этого

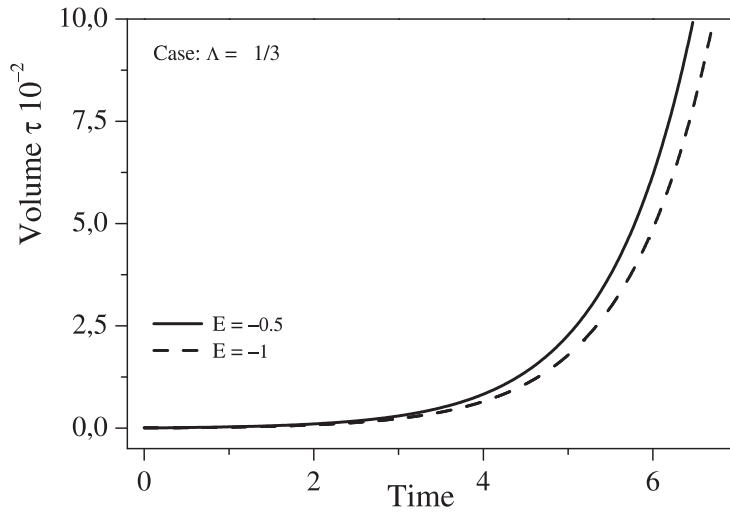


Рис. 1.5: Эволюция ВІ Вселенной при отрицательном Λ . Как видно, эволюция Вселенной в этом случае имеет экспоненциальный характер и начальная анизотропия ВІ пространства-времени быстро исчезает.

момента мы упоминаем его как T_1^1). Для простоты положим $C = 1$ и $C_0 = 1$. Очевидно, что если (см. уравнение (1.241))

$$\tau^n > \lambda_1(n - 1), \quad (1.242)$$

имеем $T_1^1 < 0$. То есть в данном случае условие энергодоминантности остается не нарушенным. Из (1.242) видим, что при $\lambda_1 = 0$ предшествующее неравенство выполняется для любого $\tau > 0$. Это означает, что подобно линейному спинорному полю [244] система спинорного и скалярного полей с минимальной связью обладает регулярными решениями с ненарушенным условием энергодоминантности. Для системы взаимодействующих спинорного и скалярного полей получено регулярное решение без нарушения условий энергодоминантности когда степень нелинейности (n) отрицательна и константа связи (λ_1) положительна либо степень нелинейности положительна и константа связи отрицательна. Заметим, что константа связи λ_1 может быть любой. Величина λ_1 определяет силу взаимодействия. Рассмотрим, что происходит, когда оба они, т.е., и n и λ_1 положительны (отрицательны).

Вернемся к уравнению (1.242). Как видно, для любого разумного значения λ_1 неравенство (1.242) выполняется при больших τ . С другой стороны, при $\tau \rightarrow 0$ соответствующая плотность энергии T_0^0 стремится к бесконечности. Таким образом, условия (1.137) также выполняются для малых τ . Наконец, анализируем ситуацию в окрестности $\tau = 1$. Плотность энергии T_0^0 в этой точке существенно мала, тогда как, как это показано на Рис. 1.7, нарушение условия энергодоминантности, т.е., ситуа-

ция когда T_1^1 преобладает T_0^0 , может возникать для относительно большего значения n . Так мы приходим к заключению, что в случае взаимодействующих спинорного и скалярного полей возможно построить регулярные решения [264, 265] без нарушения условия энергодоминантности теоремы Хокинга-Пенроуза (см. Рис. 1.6).

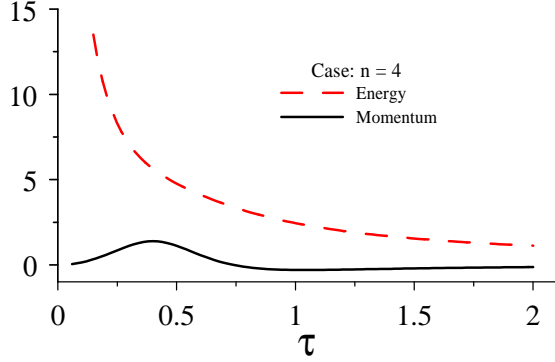


Рис. 1.6: Сравнивая T_0^0 и T_1^1 при положительном n , видим, что для малого значения n возможно сконструировать регулярное решение без нарушения условия энергодоминантности.

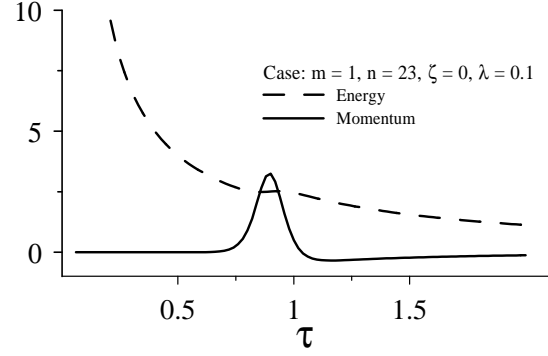


Рис. 1.7: При больших n существует некоторое значения τ , где компоненты давления преобладают в энергии. В этом случае условие энергодоминантности нарушается.

1.9.2 $F_1 = \sin S$

Рассмотрим случай, когда F задается в виде тригонометрической функции от S , а именно, $F_1 = \sin S$. В этом случае для \mathcal{F} имеем

$$\mathcal{F} = \frac{3\kappa}{2} \left(m + \frac{\lambda_1 \cos S}{2\tau^2(\lambda_1 + \sin S)^2} + \varepsilon_0 \frac{(1-\zeta)}{\tau^\zeta} \right) - 3\Lambda\tau, \quad S = \frac{1}{\tau}, \quad (1.243)$$

с потенциалом

$$\mathcal{U} = -\frac{3}{2} \left\{ \kappa \left[m\tau + \frac{1}{2(1 + \lambda_1 \sin S)} + \varepsilon_0 \tau^{1-\zeta} \right] - \Lambda\tau^2 \right\}. \quad (1.244)$$

Надо заметить, что в отличие от случая, когда F_1 является степенной функцией от $S = 1/\tau$ и нелинейность в основном проявляет себя в регионе с большими значениями τ , в рассматриваемом случае возникает множество интересных свойств в регионе $0 < \tau < 1$, особенно в окрестности сингулярной точки $\tau = 0$. Графическое представление потенциала $\mathcal{U}(\tau)$ [соотношение (1.244)] дано на Рис. 1.8 и 1.9. Здесь параметры

выбирается следующим образом: $\kappa = 2/3$, масса спинорного поля $m = 1$, константа связи $\lambda_1 = 0.01$, космологическая постоянная $\Lambda = 2/3$, $\varepsilon_0 = 1$ и $\zeta = 2/3$. Так как $S = 1/\tau$ и $\mathcal{U}(\tau) \propto 1/\sin(S)$, большое количество малых колебаний возникает как $\tau \rightarrow 0$ [см. Рис. 1.9].

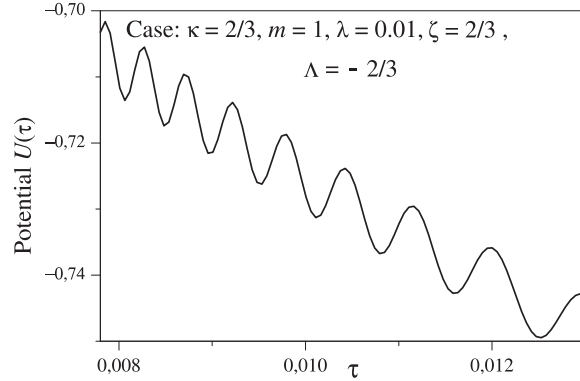
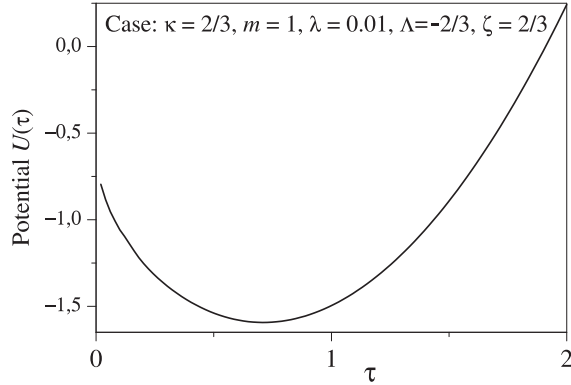


Рис. 1.8: Вид потенциала $\mathcal{U}(\tau)$ [равенство (1.244)], когда VI пространство-время заполнено идеальной жидкостью, описывающей твердую Вселенную.

Рис. 1.9: Фрагмент потенциала (1.244) в окрестности точки $\tau = 0$. Эти колебания возникает в силу нелинейного члена F .

Из Рис. 1.8 и 1.9 очевидно, что в зависимости от выбора постоянной интегрирования E имеется два типа решения, представленных на Рис. 1.2. Более того, для некоторых значений E существует более одного периодического решения.

Рассмотрим эту же систему с отрицательным Λ . В отличие от случая с $F_1 = S^n$, где все решения для отрицательного Λ экспоненциально растут, в данном случае возникает интересная ситуация при некотором специальном выборе параметров.

Как видно из Рис. 1.10, в зависимости от постоянной интегрирования и начального значения τ , характер эволюции может быть как конечным так и экспоненциальным. Если постоянная интегрирования находится на одном уровне с AB на Рис. 1.10 (здесь он равен -3), и $\tau_0 \in (0, \tau_A)$, то τ имеет конечное значение и его поведение похоже на то, что иллюстрировано на Рис. 1.2, соответствующем $E = 1$, тогда как при $\tau_0 > \tau_B$ имеем экспоненциально расширяющийся τ . Так мы заключаем, что если лагранжиан взаимодействия задается в виде тригонометрической функции его аргументов, то система даже при отрицательном Λ порождать неэкспоненциальную моду эволюции.

Для исследования условия энергодоминантности напишем компоненты тензора энергии-импульса. Для простоты положим $C_0 = 1$ и в терминах S для плотности

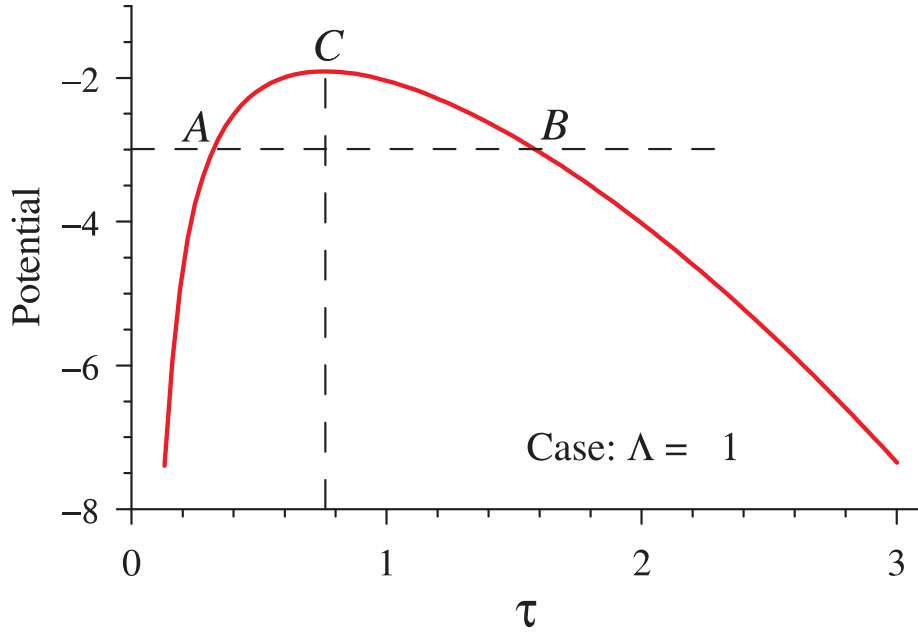


Рис. 1.10: Вид потенциала $\mathcal{U}(\tau)$ [равенство (1.244)] с отрицательным Λ .

энергии получим выражение

$$T_0^0 = mS + \frac{S^2}{2(1 + \lambda_1 \sin S)} + \varepsilon_0 S^{1+\zeta}. \quad (1.245)$$

Так как τ положительная величина то S тоже положительная. Как видно из уравнения (1.245), для любого положительного значения S и $\lambda_1 < 1$ плотность энергии всегда положительна и пропорциональна S^2 . Поскольку $S = 1/\tau$, это означает, что T_0^0 имеет максимальное значение при $\tau \rightarrow 0$ и стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$.

Для компонент давления имеем

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \frac{\lambda_1 S^3 \cos S}{2(1 + \lambda_1 \sin S)^2} - \frac{S^2}{2(1 + \lambda_1 \sin S)} - \varepsilon_0 \zeta S^{1+\zeta}. \quad (1.246)$$

Как видно, при $\lambda_1 < 1$, давление T_1^1 может быть как положительно так и отрицательно в зависимости от знака $\cos S$. Более того, его максимальное значение пропорционально S^3 . Таким образом, в случае $F = \sin S$, для любого значения ζ , определенного в (1.44), и для любого нетривиального λ_1 существуют интервалы (S_i, S_{i+1}) такие, что для $S \in (S_i, S_{i+1})$ справедливо неравенство $T_0^0 < T_1^1$, как это показано на Рис. 1.11. Следовательно, можно заключить, что регулярные решения, полученные в данном случае, достигаются в результате нарушения условия энерго-доминантности.

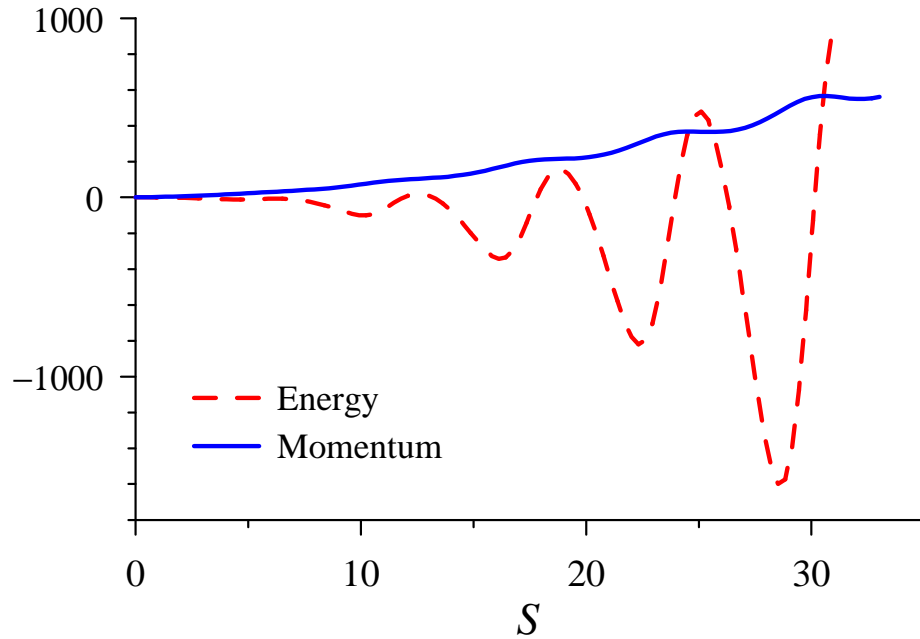


Рис. 1.11: Относительное поведение T_0^0 и T_1^1 при $F = \sin(S)$. Эта картина наглядно показывает, что в данном случае нарушается условие энергодоминантности.

Таким образом, мы видим, что хотя введение нелинейного спинорного поля может обеспечить эволюцию без сингулярностей, тем не менее эта модель приводит к нарушению условия энегодоминантности.

1.10 Система с G и Λ зависящими от времени

Как уже было отмечено, теория гравитации Эйнштейна содержит два параметра, считающиеся фундаментальными постоянными: гравитационная постоянная Ньютона G ($\kappa = 8\pi G$) и космологическая постоянная Λ [122, 123]. Возможность вариации G по времени была предложена Дираком и широко обсуждается в литературе [119, 306, 311, 202, 116]. “Космологическая постоянная” Λ как функция от времени изучалась множеством авторов. Чен (Chen) и Ву (Wu) [97] пропагандировал возможность того, что космологическая постоянная изменяется во времени как $1/R^2$, где R это масштабный фактор в модели Фридмана-Робертсона-Уокера. Далее, Абдел-Рахман (Abdel-Rahman) [58] изучал аналогичную модель, тогда как Берман (Berman) и другие [80, 81, 82] настаивал на том, что соотношение $R \propto t^{-2}$ играет важную роль в космологии. Берман и Гомид (Gomide) [83] также показали, что все фазы Вселенной, т.е., излучение, инфляция и пыль (с нулевым давлением), могут быть рассмотрены

как специальные случаи параметра замедления q :

$$q = -R\ddot{R}/\dot{R}^2, \quad (1.247)$$

где точка означает дифференцирование по времени. Это определение было дано в работе [286] для космологических моделей Бианки. Космологические модели с идеальной жидкостью и зависящими от времени постоянными также были изучены в работах [71, 72]. Модели с вязкой жидкостью и зависящими от времени постоянными были рассмотрены в работах разных авторов [73, 225, 226, 227]. Недавно самосогласованная система нелинейного спинорного и VI гравитационного полей с зависящие от времени G и Λ была изучена в работе [243]. Заметим, что в рассматриваемом случае уравнения скалярного и спинорного полей остаются неизменными. Формально скалярное и спинорное поля, и также метрические функции будут те же самые как и в случае когда G и Λ не зависят от времени. Изменение происходит только в уравнении для τ , помимо этого возникает дополнительное уравнение для нахождения G . Уравнения Эйнштейна с переменными космологической и гравитационной “постоянными” Λ и G пишется в виде

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R = -8\pi G(t) T_{\nu}^{\mu} + \Lambda(t) \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (1.248)$$

Из (1.248) находим

$$8\pi G_{,\mu} T_{\nu}^{\mu} + 8\pi G (T_{\nu;\mu}^{\mu}) - \Lambda_{,\mu} \delta_{\nu}^{\mu} = 0, \quad (1.249)$$

что для VI метрики выглядит

$$8\pi \dot{G} T_0^0 + 8\pi G \left[\dot{T}_0^0 + T_0^0 \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) - T_1^1 \frac{\dot{a}}{a} - T_2^2 \frac{\dot{b}}{b} - T_3^3 \frac{\dot{c}}{c} \right] - \dot{\Lambda} = 0. \quad (1.250)$$

Если предполагать, что закон сохранения энергии $T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$ выполняется, то уравнение (1.250) превращается в

$$\dot{T}_0^0 + T_0^0 \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) - T_1^1 \frac{\dot{a}}{a} - T_2^2 \frac{\dot{b}}{b} - T_3^3 \frac{\dot{c}}{c} = 0, \quad (1.251a)$$

$$8\pi \dot{G} T_0^0 - \dot{\Lambda} = 0, \quad (1.251b)$$

Решая (1.251a) мы получим (1.84). Определим G . С учетом того, что $\dot{G} = \dot{\tau} \partial G / \partial \tau$ и $\dot{\Lambda} = \dot{\tau} \partial \Lambda / \partial \tau$ перепишем (1.251b) в виде

$$8\pi T_0^0 \frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau}. \quad (1.252)$$

С другой стороны подставляя a, b, c из (1.62) в (1.53d) мы получим

$$8\pi T_0^0 G = \frac{\dot{\tau}^2}{3\tau^2} - \frac{\mathcal{X}}{3\tau^2} + \Lambda. \quad (1.253)$$

где $\mathcal{X} = X_1^2 + X_1 X_3 + X_3^2$. Разделив (1.252) на (1.253) мы получим следующие уравнение для G

$$\frac{\partial G / \partial \tau}{G} = \frac{3\tau^2 \partial \Lambda / \partial \tau}{\dot{\tau}^2 - \mathcal{X} + 3\tau^2 \Lambda}. \quad (1.254)$$

Вслед за другими авторами предположим, что Λ есть заданная функция от τ , а именно, $\Lambda = \Lambda_0 / \tau^2$. С другой стороны, T_1^1 и T_0^0 тоже есть функции от τ . Это позволяет нам написать решение уравнения (1.65) в квадратурах, т.е., в форме (1.86). Но в этом случае (1.65) или (1.86) оказывается намного сложными, так как вместе с T_1^1 и T_0^0 , G тоже зависят от t . Поэтому надо одновременно решать уравнения (1.65) и (1.254), что намного труднее. Здесь мы вспомним результаты, полученные в предыдущих разделах. Как мы помним, решения, которые не нарушают условие энергодоминантности теоремы Хокинга-Пенроуза являются изначально сингулярными. Это может быть получено, положив $\tau = \alpha t$ при $t \rightarrow 0$. Здесь α некоторая постоянная. С другой стороны, положив $\tau = \beta t^2$, где β некоторая постоянная, при $t \rightarrow \infty$ получим Вселенную соответствующую изотропной стадии эволюции сегодняшнего дня. Теперь, положив $\Lambda = \Lambda_0 / \tau^2$ из (1.254) мы находим [243]

$$G = C / \tau^{6\Lambda_0 / (\alpha^2 - \mathcal{X} + 3\Lambda_0)}, \quad \tau = \alpha t, \quad C = \text{const.}, \quad (1.255)$$

и

$$G = D \left(\frac{4\beta\tau}{4\beta\tau - \mathcal{X} + 3\Lambda_0} \right)^{6\Lambda_0 / (\mathcal{X} - 3\Lambda_0)}, \quad \tau = \beta t^2, \quad D = \text{const.} \quad (1.256)$$

Хотелось бы подчеркнуть свойства Вселенной типа Бианки-I. Как было отмечено в [74] в окрестности сингулярности VI ведет себя как Вселенной Казнера, даже в присутствии материи, и, следовательно, попадает в рамки общего анализа для сингулярности. Так как во Вселенной Казнера $a = a_0 t^{p_1}$, $b = b_0 t^{p_2}$, и $c = c_0 t^{p_3}$, с $p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$, наше предположение положить $\tau \propto t$ в начальный момент времени является корректным. С другой стороны, во Вселенной, заполненной материей с уравнением состоянием $p = \gamma \varepsilon$, $\gamma < 1$, было показано, что первоначальная анизотропия в VI Вселенной быстро исчезает и VI Вселенная в конечном счете эволюционирует в FRW Вселенную [172]. Предположение $\tau \propto t^2$ также является правильным.

Если мы предположим, что $\Lambda = \Lambda_0 / \tau^2$ и $G = \text{const.}$, то закон сохранения энергии $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$ не выполняется в отдельности, так как в этом случае (1.251b) приводит к $\Lambda = \text{const.}$, что противоречит нашим предположениям. В этом случае из (1.250) имеем

$$\dot{\varepsilon} + (1 + \zeta) \frac{\dot{\tau}}{\tau} = - \frac{2\Lambda_0 \dot{\tau}}{\tau^3} \quad (1.257)$$

с решением

$$\varepsilon = \frac{2\Lambda_0}{1 - \zeta} \frac{1}{\tau^2} \quad (1.258)$$

Положив $F = K^n$ с $K = \{I, J, (I \pm J), IJ\}$, из (1.86) мы заключаем, что даже в присутствии зависящего от времени Λ -члена в уравнении Эйнштейна идеальная жидкость не играет особой роли как в начальной стадии эволюции так и в изотропизации VI Вселенной, оставляя ее за нелинейным спинорным полем, что подтверждает наше раннее утверждение, сделанное в работах [269, 270].

1.11 Система с магнитной жидкостью

В этой главе мы рассмотрим VI Вселенную, заполненную магнитной жидкостью. Локально вращательно симметричную VI модель, содержащую магнитное поле, направленное вдоль одной оси, с баротропной жидкостью было изучено Тхорном (Thorne) [299]. Якобс (Jacobs) [172, 173] исследовал VI модели с магнитным полем, удовлетворяющим баротропным уравнениям состояния. Бали (Bali) [66] изучал поведение магнитного поля в VI Вселенной, заполненной идеальной жидкостью. В работе [65] Балакин рассматривал совместную систему Эйнштейна-Максвелла и его применение в проблеме расширения вселенной типа Бианки-I с магнитной релаксацией. Им было показано, что анизотропное расширение вселенной типа Бианки-I становится немонотонной в обоих основных направлениях (вдоль магнитного поля и ортогонально к нему). Отметим также, что в работе [186] найдены решения для космологической модели типа Бианки-I со взаимодействующими спинорным, скалярным и электромагнитным полями.

Для простоты мы рассмотрим линейное спинорное поле, положив $F = 0$. Лагранжиан скалярного поля также возьмем линейным, т.е., $L_{sc} = (1/2)\Upsilon = \varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}$. Лагранжиан взаимодействия выберем в виде $L_{int} = (1/2)\lambda_1\Upsilon F_1(I, J)$, где λ_1 суть константа связи. В результате мы имеем уравнение спинорного поля с индуцированной нелинейностью. На самом деле введение магнитной жидкости приносит существенное изменение в компоненты тензора энергии-импульса. Так как уравнения спинорного и скалярного полей в этом случае остаются неизменными, мы ограничимся только изучением уравнений Эйнштейна и также уравнения для τ .

Тензор энергии-импульса магнитной жидкости мы выберем в виде

$$T_{\mu(m)}^{\nu} = (\varepsilon + p)u_{\mu}u^{\nu} - p\delta_{\mu}^{\nu} + E_{\mu}^{\nu}, \quad (1.259)$$

где $E_{\mu\nu}$ есть электромагнитное поле Лихнеровича (Lichnerowich) [198]

$$E_{\mu}^{\nu} = \bar{\mu} \left[|h|^2 \left(u_{\mu}u^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu} \right) - h_{\mu}h^{\nu} \right]. \quad (1.260)$$

Здесь u^{μ} суть вектор тока удовлетворяющий

$$g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = 1, \quad (1.261)$$

и $\bar{\mu}$ суть магнитная проницаемость и h_{μ} вектор потока магнитного поля

$$h_{\mu} = \frac{1}{\bar{\mu}} * F_{\nu\mu}u^{\nu}, \quad (1.262)$$

где $*F_{\mu\nu}$ дуально-сопряженное электромагнитное поле:

$$*F_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (1.263)$$

Здесь $F^{\alpha\beta}$ тензор электромагнитного поля и $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ это полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты (Levi-Civita) с $\epsilon_{0123} = +1$. Здесь в сопутствующей системе отсчета полагаем $u^0 = 1$, $u^1 = u^2 = u^3 = 0$. Выберем магнитное поле вдоль оси x так, что у вектора потока магнитного поля имеется только одна ненулевая компонента, а именно $h_1 \neq 0$. Ввиду выше сказанного из (1.262) находим $F_{12} = F_{13} = 0$. Мы также предположим, что проводимость рассматриваемой жидкости бесконечна. Это приводит к $F_{01} = F_{02} = F_{03} = 0$. Таким образом, имеется только одна нетривиальная компонента $F_{\mu\nu}$, а именно, F_{23} . Тогда из первых двух уравнений Максвелла получим

$$F_{\mu\nu;\beta} + F_{\nu\beta;\mu} + F_{\beta\mu;\nu} = 0, \quad (1.264)$$

где точка с запятой означает ковариантную производную. Находим

$$F_{23} = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I} = \text{const}. \quad (1.265)$$

Из (1.262) с учетом (1.263) имеем

$$h_1 = \frac{a\mathcal{I}}{\bar{\mu}bc}. \quad (1.266)$$

Наконец, для E_μ^ν получим следующие нетривиальные компоненты

$$E_0^0 = E_1^1 = -E_2^2 = -E_3^3 = \frac{\mathcal{I}^2}{2\bar{\mu}b^2c^2}. \quad (1.267)$$

Величины ε и p в (1.259) являются плотностью энергии и давлением идеальной жидкости, удовлетворяющей $p = \zeta\varepsilon$.

Решим уравнения Эйнштейна. Для этого сначала напомним выражения для компонент тензора энергии-импульса в явном виде:

$$T_0^0 = mS + C^2/2\tau^2(1 + \lambda_1 F_1) + \varepsilon + \frac{\mathcal{I}^2}{2\bar{\mu}b^2c^2}, \quad (1.268a)$$

$$T_1^1 = \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - C^2/2\tau^2(1 + \lambda_1 F_1) - p + \frac{\mathcal{I}^2}{2\bar{\mu}b^2c^2}, \quad (1.268b)$$

$$T_2^2 = \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - C^2/2\tau^2(1 + \lambda_1 F_1) - p - \frac{\mathcal{I}^2}{2\bar{\mu}b^2c^2}, \quad (1.268c)$$

$$T_3^3 = \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - C^2/2\tau^2(1 + \lambda_1 F_1) - p - \frac{\mathcal{I}^2}{2\bar{\mu}b^2c^2}. \quad (1.268d)$$

Так, введение магнитной жидкости порождает неоднородность в тензоре энергии-импульса материальных полей.

Ввиду того, что $T_2^2 = T_3^3$, из (1.53b) и (1.53c) находим

$$b = cD \exp\left(X \int \frac{dt}{\tau}\right), \quad (1.269)$$

где D и X постоянные интегрирования.

Вслед за Бали (Bali) [66] предположим, что расширение (θ) в модели пропорционально собственному значению σ_1^1 тензора σ_μ^ν . Так как для VI пространства

$$\theta = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}, \quad (1.270)$$

$$\sigma_1^1 = -\frac{1}{3} \left(4 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right), \quad (1.271)$$

выше упомянутое условие приводит к

$$a = (bc)^N, \quad (1.272)$$

где N это постоянная пропорциональности.

С учетом (1.45) из (1.269) и (1.272) после несложных манипуляций для метрических функций имеем [248]

$$a = \tau^{N/(N+1)}, \quad (1.273a)$$

$$b = \sqrt{D} \tau^{1/2(N+1)} \exp \left[\frac{X}{2} \int \frac{dt}{\tau} \right], \quad (1.273b)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{D}} \tau^{1/2(N+1)} \exp \left[-\frac{X}{2} \int \frac{dt}{\tau} \right]. \quad (1.273c)$$

Уравнения для τ в этом случае выглядит как

$$\ddot{\tau} = \frac{3}{2} \kappa \left(mC_0 + \mathcal{D}C_0 + \varepsilon_0(1 - \zeta)/\tau^\zeta + \frac{2\mathcal{I}^2}{3\bar{\mu}} \tau^{(N-1)/(N+1)} \right) - 3\Lambda. \quad (1.274)$$

Вспомнив определение \mathcal{D} , решение уравнения (1.274) можем записать в квадратурах:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{\kappa \left(mC_0\tau + \frac{C^2}{2(1+\lambda_1 F_1)} + \varepsilon_0\tau^{1-\zeta} + \frac{(N+1)\mathcal{I}^2}{3\bar{\mu}N} \tau^{2N/(N+1)} \right) - \Lambda\tau^2 + E}} = \sqrt{3}t, \quad (1.275)$$

где E - постоянная интегрирования. Уравнения (1.274) и (1.275) могут быть проанализированы так же, как это делалось раньше. Заметим, что так же как и в случае спинорного и скалярного полей, закон сохранения энергии-импульса для магнитного поля выполняется тождественно. Таким образом мы изучили самосогласованную систему спинорного, скалярного и гравитационного полей в присутствии магнитной жидкости и космологической постоянной. С учетом того, что в системе присутствует компонента тензора напряжений электромагнитного поля F_{23} , эту систему можно рассматривать как систему четырех полей. В отличие от предыдущих случаев наличие магнитного поля приводит к появлению анизотропии и система может быть точно решена при некоторых дополнительных условиях.

1.12 Выводы

Мы рассмотрели самосогласованную систему спинорного, скалярного и гравитационного полей в рамках Бианки типа-I космологической модели. Нелинейность спинорного поля задается в виде произвольной функции инвариантов, построенных из билинейных спинорных форм $S = \bar{\psi}\psi$ и $P = i\bar{\psi}\gamma^5\psi$. Лагранжиан скалярного поля выбран в виде произвольной функции скалярного инварианта $\Upsilon = \varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}$, который становится линейным в слабом пределе. Получены точные самосогласованные решения нелинейных уравнений спинорного, скалярного и гравитационного полей. Подробно изучена проблема начальной сингулярности и процесса асимптотической изотропизации. Разработан метод решений уравнения Эйнштейна, который в последнее время пользуется популярностью среди специалистов, занимающихся анизотропными космологическими моделями.

Показано, что для некоторых специальных выборов нелинейности модель допускает регулярные решения. Если нелинейность спинорного поля возникает за счет самодействия, то регулярное решение приводит к нарушению условия энергодоминантности в теореме Хоукинга-Пенроуза. С другой стороны, если нелинейность спинорного поля возникает в результате взаимодействия со скалярным полем, то такие нарушения не имеют места когда степень нелинейности отрицательна и константа связи положительна либо степень нелинейности положительна и константа связи отрицательна.

Установлено, что нелинейность спинорного поля играет решающую роль в начале эволюции, тогда как масса спинорного поля или нелинейность скалярного поля в случае безмассового спинорного поля имеют критическое значение в асимптотической стадии при отсутствии Λ -члена.

Показано также, что введение Λ -члена в систему в зависимости от знака играет различную роль в эволюции Вселенной. При положительном значении Λ -член играет роль темной энергии. В этом случае Вселенная расширяется с ускорением и это расширение никогда не останавливается, т.е., возникает проблема вечно ускорения. С другой стороны, Λ -член с отрицательным значением соответствует дополнительной гравитационной энергии, что порождает осцилляцию в модели даже в случае линейного спинорного поля. Отрицательное значение Λ -члена также налагает некоторые ограничения на плотность энергии. Если же Λ -член отсутствует, после достижения некоторого значения масштаба объема скорость расширения Вселенной становится тривиальной, т.е., Вселенная не расширяется с временем.

Рассмотрен случай, когда гравитационная постоянная и космологическая постоянная также зависят от времени. В этом случае решения можно получить при дополнительных условиях. При этом решающая роль в устранении начальной сингулярности и асимптотической изотропизации остается за нелинейностью спинорного поля.

Была изучена система с взаимодействующим спинорным и скалярным полями в рамках Бианки типа-I гравитационного поля в присутствии магнитной жидкости. Введение магнитного поля приводит к появлению анизотропии в источниках. Точное решение удается получить только при наложении дополнительных условий. В част-

ности было предположено, что расширения в модели пропорционально собственному значению σ_1^1 тензора σ_μ^ν . Но и в этом случае основная роль в поведении Вселенной принадлежит спинорному полю. В рассматриваемом случае не происходит изотропизация изначально анизотропного пространства-времени.

Глава 2

Нелинейные спинорные поля в анизотропной Вселенной, заполненной вязкой жидкостью

Рассматривается система нелинейного спинорного поля и гравитационного поля типа Бианки-I (BI) с учетом вязкости. Нелинейный член в лагранжиане спинорного поля имеет вид λF , где λ является константой самодействия, а F является функцией инвариантов I и J , сконструированных из билинейных спинорных форм S и P . Мы рассматриваем случай, когда F зависит степенным образом от своих аргументов. Самосогласованные решения для спинорного и гравитационного типа BI полей получены в терминах τ , где τ является масштабной единицей объема во вселенной типа BI. Выведена система уравнений для τ и ε , где ε - энергия вязкого потока. Полученная система решена для некоторых частных случаев.

2.1 Введение

При исследовании характера космологических решений в релятивистской теории тяготения тензор энергии-импульса материи обычно берется в форме, соответствующей идеальной жидкости. В этом случае, как было показано в работах [7, 74], вблизи неизбежной космологической особенности влияние материи пренебрежительно мало, а поведение гравитационного поля определяется уравнениями Эйнштейна в пустом пространстве и описывается сложным, возможно осциллирующим решением. При этом характер особой точки формально не зависит от того, рассматриваем ли мы ее как особенность в будущем, или как особенность в прошлом.

Представляет интерес исследование степени универсальности этих заключений по отношению к обобщениям формы тензора энергии-импульса, учитывающим более реалистичное описание поведения материи. Одно из таких обобщений связано с учетом диссипативных процессов, идущих за счет вязкости. Мизнер (Misner) [204, 205] предположил, что сильная диссипативность из-за нейтронной вязкости может суще-

ственно уменьшать анизотропию излучения черного тела.

Из общих соображений ясно, что вязкость противодействует космологическому коллапсу и конечный результат заранее не очевиден. Однородная и изотропная космологическая модель Вселенной, заполненной жидкостью с давлением и второй вязкостью было развито Мэрфи (Murphy) [208]. Полученные им решения обнаруживают одно очень интересное явление, которое заключается в том, что особенности типа большого взрыва возникают в бесконечно удаленном прошлом, т.е., в определенном смысле действие вязкости устраняет особенность. Точные решения изотропной и однородной космологии для открытой, закрытой и плоской Вселенной были получены Сантос (Santos) с соавторами [279], где рассматриваемая вторая вязкость задавалась как степенная функция от плотности энергии.

Природа космологических решений для однородной модели типа Бианки I (BI) была исследована в работе [6] с учетом диссипативных процессов, идущих за счет вязкости. В этой работе они показали, что эффект, полученный Мэрфи, неустойчив и исчезает при переходе к более общим, а именно анизотропным моделям. Им было показано, что действие вязкости не способно ликвидировать космологическую сингулярность, но вблизи нее приводит к качественно новому поведению решений. При наличии диссипации энергии процесс космологической эволюции становится необратимым во времени, что приводит к существенно различным картинам сжатия и расширения Вселенной. Вблизи начальной космологической особенности плотность энергии материи обращается в нуль, возрастая затем в процессе расширения. Таким образом, модель, предложенная Белинским и Халатниковым [6], обладает интересным свойством: в момент большого взрыва гравитационное поле рождает материю. Показано также, что действие вязкости может приводить к достаточному накоплению энтропии, что, возможно, имеет отношение к аномально высокой энтропии на одну частицу в современной Вселенной. Подобный вывод также был сделан в работах [307, 308]. Вязкость второго рода, связанная с фазовым переходом в великой единой теорий [196], может приводить к инфляционному сценарию [303, 214, 148]. Решения BI в случае жесткой материи с вязкостью первого рода были получены в работе [67], где в качестве вязкости была выбрана степенная функция от плотности энергии. Аналогичные модели, но с вязкостью второго рода были изучены в [166]. Влияние вязкости второго рода с зависящим от времени коэффициентом на эволюцию FRW модели было исследовано в контексте открытой термодинамической системы в работе [117]. Это исследование было далее развито в работе [195] для анизотропных моделей Бианки. Космологические решения с нелинейной вязкостью второго рода были получены в [103]. Модели с вязкостью первого и второго рода были рассмотрены в [125, 138, 149].

Хотя Мэрфи (Murphy) [208] и претендовал на то, что введение вязкости второго рода поможет избежать начальной сингулярности в конечно-удаленном прошлом, результаты, полученные в работе [68], показывают, что в общем это не так, так как только в некоторых случаях сингулярность может возникать в конечном прошлом. Используя теорию необратимой термодинамики Израеля-Стьюарта (Israel-Stewart) [168, 169, 170], Колей (Coley) и соавторы [111, 112, 113] описал давление вязкой жидкости второго рода и анизотропное напряжение в рамках одного класса пространственно

однородных космологических моделей с вязкой жидкостью. В частности, для случая моделей VI они показали, что анизотропное напряжение приводит к моделям, нарушающим слабые энергетические условия, и в некоторых случаях к возникновению периодических орбит. Инфляционные космологические модели VI с вязкой жидкостью первого и второго рода, а также с нелинейной вязкостью были исследованы Гроном (Gron) [146]. Мы также хотели упомянуть работы Прадхана (Pradhan) и соавторов [223, 224], где авторы рассматривали космологические модели VI с вязкой жидкостью и переменным Λ -членом и соответственно поведение магнитного поля в космологии VI с распределением вязкости второго рода.

В наших работах мы изучали самосогласованную систему нелинейных спинорных и/или скалярных и космологических типа VI гравитационных полей, чтобы выяснить, является ли присутствие сингулярности внутренне присущим свойством релятивистских космологических моделей или это следствие тех предположений, которые сделаны для упрощения [41, 43, 239, 44, 60, 1, 2]. Эти работы были далее обобщены в цикле [269, 270, 248]. Как оказалось, хотя введение нелинейных спинорных полей в систему порождает регулярные решения, регулярность получается за счет нарушения условия энерго-доминантности в теореме Хоукинга-Пенроуза. В следующем цикле работ мы ввели в систему космологическую постоянную, которая, как оказалось, в зависимости от своего знака способна порождать осциллирующий режим расширения Вселенной [271, 244, 243, 264, 249]. Нами была рассмотрена также BVI космологическая модель [264, 246]. В связи тем, что в последние годы широко обсуждаются модели с ускоренным расширением, мы рассмотрели модели VI с темной энергией [254, 255, 256]. В работах [258, 259] мы показали, что спинорное поле может быть принято как один из источников, порождающих ускоренное расширение Вселенной. Подобное мнение также было высказано в работе [233].

В работе [250] нами была рассмотрена модель VI с вязкой жидкостью в присутствии космологической постоянной, были получены точные решения в некоторых специальных случаях. Эта работа была далее подробно изучена качественными методами в [266]. Модели со спинорным и/или скалярным полем в присутствии вязкой жидкости были рассмотрены в работах [251, 252, 253]. Цель этих работ - подробно проанализировать самосогласованную систему нелинейных спинорных и/или скалярных полей в пространстве типа Бианки I, заполненном вязкой жидкостью с учетом космологической постоянной и проанализировать ее качественными методами.

2.2 Уравнения Эйнштейна и их общие решения

Поскольку общий вид равно как и общие решения уравнения Эйнштейна не терпят качественного изменения вне зависимости от того, задает ли правая часть только вязкую жидкость или еще и спинорное поле (в том смысле что общее решение формально имеет один и тот же вид, хотя при детальном анализе они как правило совершенно разные), мы начнем именно с уравнения гравитационного поля.

Действие системы нелинейных спинорного, скалярного и Бианки типа I гравита-

ционного поля выберем в виде

$$\mathcal{S}(g; \psi, \bar{\psi}, \varphi) = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d\Omega \quad (2.1)$$

где

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_f. \quad (2.2)$$

Здесь \mathcal{L}_f описывает спинорное поле с самодействием или с индуцированной нелинейностью. Подробно про них речь пойдет в последующих разделах. \mathcal{L}_g - гравитационное поле.

Рассматривается случай, когда спинорное и скалярное поля также как и метрические функции зависят только от времени. В этом предположении пространственные компоненты тензора энергии-импульса равны между собой, т.е., $T_{f1}^1 = T_{f2}^2 = T_{f3}^3$.

В нашем случае гравитационное поле задается метрикой типа Бианки I [18]

$$ds^2 = dt^2 - a^2 dx^2 - b^2 dy^2 - c^2 dz^2. \quad (2.3)$$

Метрические функции a , b и c зависят только от времени t . Неравенство $a \neq b \neq c$ представляет анизотропию пространства-времени, тогда как их независимость от пространственных координат делает пространство-время однородным. При $a = b = c$ метрика VI превращается в однородную и изотропную вселенную Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW).

Начнем с уравнений Эйнштейна. Для метрики (2.3) имеем

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} = \kappa T_1^1 + \Lambda, \quad (2.4a)$$

$$\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} = \kappa T_2^2 + \Lambda, \quad (2.4b)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \kappa T_3^3 + \Lambda, \quad (2.4c)$$

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} = \kappa T_0^0 + \Lambda. \quad (2.4d)$$

Здесь точка означает дифференцирование по t , а T_ν^μ - тензор энергии-импульса материальных полей. Заметим, что $T_\mu^\nu = T_\mu^{\nu'} + T_{\mu(m)}^\nu$, где $T_\mu^{\nu'}$ и $T_{\mu(m)}^\nu$ - это тензоры энергии-импульса спинорного и (или) скалярного поля и вязкой жидкости, соответственно. В (2.4) Λ - суть космологическая постоянная, которая впервые было введена Эйнштейном, чтобы обеспечить устойчивое космологическое решение уравнений гравитационного поля [122, 123]. В последние годы модели Вселенной с космологической постоянной широко встречаются в литературе в связи с ускоренным расширением.

Для начала мы напишем тензор энергии-импульса вязкой жидкости.

Вязкая жидкость

Влияние вязкой жидкости в эволюции Вселенной осуществляется посредством тензора энергии-импульса. Тензор энергии-импульса вязкой жидкости имеет вид [250]

$$T_{\mu(m)}^{\nu} = (\varepsilon + p')u_{\mu}u^{\nu} - p'\delta_{\mu}^{\nu} + \eta g^{\nu\beta}[u_{\mu;\beta} + u_{\beta;\mu} - u_{\mu}u^{\alpha}u_{\beta;\alpha} - u_{\beta}u^{\alpha}u_{\mu;\alpha}], \quad (2.5)$$

где

$$p' = p - \left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right)u_{;\mu}^{\mu}. \quad (2.6)$$

Здесь ε - плотность энергии, p - давление, η и ξ - коэффициенты первой и второй вязкости соответственно. Заметим, что вязкость первого (сдвиговая вязкость - shear) и второго рода (объемная вязкость - bulk), η и ξ соответственно, положительно определены, т.е.,

$$\eta > 0, \quad \xi > 0. \quad (2.7)$$

В однородных моделях все эти величины зависят только от времени, поэтому можно считать их функциями только от плотности энергии:

$$\eta = |A|\varepsilon^{\alpha}, \quad \xi = |B|\varepsilon^{\beta}. \quad (2.8)$$

Давление p связано с плотностью энергии посредством уравнения состояния. Мы рассматриваем случай

$$p = \zeta\varepsilon, \quad \zeta \in (0, 1]. \quad (2.9)$$

Заметим, что $\zeta \neq 0$, так как для пыли давление, а следовательно и температура имеют нулевое значение, что приводит к исчезновению вязкости.

В сопутствующей системе координат, т.е. такой, что $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ в пространстве с заданной метрикой типа VI (2.3) имеются следующие нетривиальные компоненты тензора энергии-импульса вязкой жидкости:

$$T_{0(m)}^0 = \varepsilon, \quad (2.10a)$$

$$T_{1(m)}^1 = -p' + 2\eta\frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.10b)$$

$$T_{2(m)}^2 = -p' + 2\eta\frac{\dot{b}}{b}, \quad (2.10c)$$

$$T_{3(m)}^3 = -p' + 2\eta\frac{\dot{c}}{c}. \quad (2.10d)$$

Введем динамические скаляры для расширения (expansion) и сдвига (shear scalar):

$$\theta = u_{;\mu}^{\mu}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

где

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(u_{\mu;\alpha}P_{\nu}^{\alpha} + u_{\nu;\alpha}P_{\mu}^{\alpha}\right) - \frac{1}{3}\theta P_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Здесь P оператор проекции, удовлетворяющий

$$P^2 = P. \quad (2.13)$$

Для пространства-времени с сигнатурой $(+, -, -, -)$ оператор проекции записывается в виде

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu, \quad P_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - u^\mu u_\nu. \quad (2.14)$$

В случае метрики VI динамические скаляры имеют форму

$$\theta = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\tau}}{\tau}, \quad (2.15)$$

и

$$2\sigma^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\dot{c}^2}{c^2} - \frac{1}{3}\theta^2. \quad (2.16)$$

Вернемся теперь к уравнениям Эйнштейна. С учетом (2.10) получим следующие выражения для компонентов энергии-импульса полной системы:

$$T_0^0 = T_0^{0'} + \varepsilon, \quad (2.17a)$$

$$T_1^1 = T_1^{1'} - p' + 2\eta\frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.17b)$$

$$T_2^2 = T_2^{2'} - p' + 2\eta\frac{\dot{b}}{b}, \quad (2.17c)$$

$$T_3^3 = T_3^{3'} - p' + 2\eta\frac{\dot{c}}{c}, \quad (2.17d)$$

где $T_0^{0'}$, $T_1^{1'}$, $T_2^{2'}$, $T_3^{3'}$ - компоненты тензора энергии-импульса спинорного и/или скалярного полей, при чем

$$T_1^{1'} = T_2^{2'} = T_3^{3'}.$$

Как видно, при введении вязкой жидкости компоненты давления в разных направлениях становятся различными. Именно это обстоятельство приводит к существенному изменению метрических функций.

Приступим теперь к решению системы уравнений (2.4). Решим мы ее методом, предложенным в [46] и развитым в последующих работах [например, [244, 249]]. Метод этот заключается в том, что ввиду симметрии уравнений (2.4a), (2.4b) и (2.4c) выражения метрических функции a , b , c находятся через новую функцию

$$\tau = abc, \quad (2.18)$$

которая не что иное как масштаб объема пространства-времени. Далее, используя все четыре уравнения системы (2.4), а именно сложив (2.4a), (2.4b) и (2.4c) с (2.4d), умноженным на 3, находим уравнение для определения τ . Заметим, что компоненты тензора энергии-импульса, связанные со спинорным и скалярным полями, также являются функциями от τ , которые выводятся из уравнений спинорного и скалярного полей.

При наличии жидкости или темной энергии из тождества Бианки выводится уравнение для плотности энергии. Далее, принимая во внимание уравнения состояния, эти два уравнения решаются совместно.

Итак, вначале из уравнения Эйнштейна находим выражения для метрических функций. С учетом (2.17) из разности уравнений (2.4a) и (2.4b) находим соотношение между a и b

$$\frac{a}{b} = D_1 \exp\left(X_1 \int \frac{e^{-2\kappa f \eta dt}}{\tau} dt\right). \quad (2.19)$$

Аналогично получим

$$\frac{b}{c} = D_2 \exp\left(X_2 \int \frac{e^{-2\kappa f \eta dt}}{\tau} dt\right), \quad \frac{c}{a} = D_3 \exp\left(X_3 \int \frac{e^{-2\kappa f \eta dt}}{\tau} dt\right). \quad (2.20)$$

Здесь $D_1, D_2, D_3, X_1, X_2, X_3$ - постоянные интегрирования, удовлетворяющие

$$D_1 D_2 D_3 = 1, \quad X_1 + X_2 + X_3 = 0. \quad (2.21)$$

В виду (2.21) из (2.19) и (2.20) выведем выражения для метрических функций в явном виде [244]:

$$a(t) = (D_1/D_3)^{1/3} \tau^{1/3} \exp\left[\frac{X_1 - X_3}{3} \int \frac{e^{-2\kappa f \eta dt}}{\tau(t)} dt\right], \quad (2.22a)$$

$$b(t) = (D_1^2 D_3)^{-1/3} \tau^{1/3} \exp\left[-\frac{2X_1 + X_3}{3} \int \frac{e^{-2\kappa f \eta dt}}{\tau(t)} dt\right], \quad (2.22b)$$

$$c(t) = (D_1 D_3^2)^{1/3} \tau^{1/3} \exp\left[\frac{X_1 + 2X_3}{3} \int \frac{e^{-2\kappa f \eta dt}}{\tau(t)} dt\right]. \quad (2.22c)$$

Как видно из (2.22a), (2.22b) и (2.22c) для $\tau = t^n$ при $n > 1$ экспонента стремится к единице при больших t , а следовательно происходит процесс изотропизации изначально анизотропной модели.

Для того, чтобы исследовать сингулярность пространства-времени, перепишем метрические функции и их производные в терминах τ . Из (2.22) находим

$$a_i = A_i \tau^{1/3} \exp\left(\frac{Y_i}{3} \int \frac{e^{-2\kappa f \eta dt}}{\tau(t)} dt\right), \quad (2.23a)$$

$$\frac{\dot{a}_i}{a_i} = \frac{\dot{\tau}}{3\tau} + \frac{Y_i}{3\tau} e^{-2\kappa f \eta dt}, \quad (i = 1, 2, 3,), \quad (2.23b)$$

$$\frac{\ddot{a}_i}{a_i} = \frac{\ddot{\tau}}{3\tau} - \frac{2}{9} \left(\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)^2 - \frac{Y_i \dot{\tau}}{9\tau^2} e^{-2\kappa f \eta dt} - \frac{2Y_i \kappa \eta}{3\tau} e^{-2\kappa f \eta dt} + \frac{Y_i^2}{9\tau^2} e^{-4\kappa f \eta dt}, \quad (2.23c)$$

т.е., метрические функции $a = a_1, b = a_2, c = a_3$ и их производные находятся в функциональной зависимости от τ . Ввиду (2.23) легко можно показать, что

$$I_1 \propto \frac{1}{\tau^2}, \quad I_2 \propto \frac{1}{\tau^4}, \quad I_3 \propto \frac{1}{\tau^4}.$$

Таким образом, мы видим, что в любой точке пространства-времени, где $\tau = 0$, инварианты I_1, I_2, I_3 , а также спинорное и скалярное поля становятся бесконечными, т.е., в данной точке пространство-время становится сингулярным.

Далее мы напишем уравнение для τ и подробно изучим его.

Итак, сумма уравнений Эйнштейна (2.4a), (2.4b), (2.4c) и трижды (2.4d) дает

$$\ddot{\tau} = \frac{3}{2}\kappa(T_0^{0'} + T_1^{1'} + \varepsilon - p')\tau + 3\kappa\eta\dot{\tau} + 3\Lambda\tau, \quad (2.24)$$

которое может быть переписано в виде

$$\ddot{\tau} - \frac{3}{2}\kappa\xi\dot{\tau} = \frac{3}{2}\kappa(T_0^{0'} + T_1^{1'} + \varepsilon - p)\tau + 3\Lambda\tau. \quad (2.25)$$

Заметим, что если правая часть уравнения (2.25) зависит только от τ , то оно имеет решение [177].

С другой стороны, из тождества Бианки

$$T_{\mu;\nu}^\nu = T_{\mu,\nu}^\nu + \Gamma_{\rho\nu}^\nu T_\mu^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho T_\rho^\nu = 0, \quad (2.26)$$

которое в нашем случае имеет вид

$$\frac{1}{\tau}(\tau T_0^0)' - \frac{\dot{a}}{a}T_1^1 - \frac{\dot{b}}{b}T_2^2 - \frac{\dot{c}}{c}T_3^3 = 0, \quad (2.27)$$

имеем

$$\dot{T}_0^0 = \frac{\dot{\tau}}{\tau}(T_1^{1'} - T_0^{0'} - \varepsilon - p') + 2\eta\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\dot{c}^2}{c^2}\right). \quad (2.28)$$

С учетом уравнения спинорного поля

$$(m - \mathcal{D})\dot{S}_0 - \mathcal{G}\dot{P}_0 = 0,$$

из (2.27) находим

$$\dot{\varepsilon} + \frac{\dot{\tau}}{\tau}\omega - \left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right)\frac{\dot{\tau}^2}{\tau^2} + 4\eta(\kappa T_0^0 + \Lambda) = 0, \quad (2.29)$$

где

$$\omega = \varepsilon + p. \quad (2.30)$$

Как нетрудно убедиться, при $\eta = 0$ из (2.24) и (2.28) получим

$$\kappa T_0^0 = 3H^2 - \Lambda, \quad (2.31)$$

где H - обобщенная постоянная Хаббла,

$$\frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 3H. \quad (2.32)$$

Наконец, уравнения (2.25) и (2.29) с учетом (2.17) можно переписать в виде

$$\dot{\tau} = 3H\tau, \quad (2.33a)$$

$$\dot{H} = \frac{\kappa}{2}(3\xi H - \omega) - (3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda) + \frac{\kappa}{2}(T_0^{0'} + T_1^{1'}), \quad (2.33b)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3\xi H - \omega) + 4\eta(3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda) - 4\eta\kappa T_0^{0'}. \quad (2.33c)$$

Как было упомянуто, мы будем рассматривать F как функции от I, J или $I \pm J$.

2.3 Точные решения

В этом разделе подробно изучим систему (2.33) при различных условиях. Для начала мы изучим систему без спинорного и скалярного полей, вслед за тем рассмотрим систему с нелинейным спинорным полем и с взаимодействующими спинорным и скалярным полями.

2.3.1 Система с вязкой жидкостью

В этом случае ввиду $T_0^{0'} = 0$ и $T_1^{1'} = 0$ система (2.33) имеет вид [250]

$$\dot{\tau} = 3H\tau, \quad (2.34a)$$

$$\dot{H} = \frac{\kappa}{2}(3\xi H - \omega) - (3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda), \quad (2.34b)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3\xi H - \omega) + 4\eta(3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda). \quad (2.34c)$$

С учетом (2.30), (2.8) и (2.9) система уравнений (2.34) может быть записана в виде

$$\dot{\tau} = 3H\tau, \quad (2.35a)$$

$$\dot{H} = \frac{\kappa}{2}(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) - (3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda), \quad (2.35b)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) + 4A\varepsilon^\alpha(3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda). \quad (2.35c)$$

Система (2.34) широко изучалась в литературе как в частном [208, 166, 67], так и в общем [6] случае. Впоследствии мы рассмотрим систему (2.34) при некоторых специально выбранных параметрах.

Система с вязкой жидкостью второго рода

Рассмотрим систему, когда реальная жидкость имеет вязкость второго рода. Соответствующую систему можно получить, полагая $\eta = 0$ в (2.34) или $A = 0$ в (2.35). В этом случае уравнения (2.34a) и (2.34b) остаются неизменными, тогда как уравнение (2.34c) имеет вид

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3\xi H - \omega). \quad (2.36)$$

Ввиду (2.36) система (2.34) допускает следующий первый интеграл

$$\tau^2(\kappa\varepsilon - 3H^2 + \Lambda) = C_1, \quad C_1 = \text{const.} \quad (2.37)$$

Из соотношения (2.37) мы можем заключить следующее. В начальной стадии эволюции, Вселенной τ и ее плотность энергии ε считаются близкими к нулю и к бесконечности соответственно. В этом смысле (2.37) не противоречит реальной картине. Было бы интересно посмотреть, как соотношение (2.37) повлияет на дальнейшую эволюцию Вселенной. Известно также, что с расширением Вселенной, т.е. с ростом τ плотность

энергии ε уменьшается. Допустим, что на некоторых стадиях расширения величина τ становится настолько большой, что $\tau^{-2} \rightarrow 0$ и ε становится пренебрежительно малой. Тогда из (2.37) следует, что

$$3H^2 - \Lambda \rightarrow 0. \quad (2.38)$$

В случае $\Lambda = 0$, получим $H = 0$, т.е. в отсутствии Λ -члена, как только $\tau \rightarrow \infty$, процесс расширения останавливается, величина τ уже не зависит от временем t . Как видно из (2.38), для того чтобы H имела смысл, Λ должен быть положительным. В присутствии положительного Λ -члена процесс эволюции (расширения) никогда не останавливается. Таким образом мы видим, что Вселенная может быть бесконечно большой только тогда, когда $\Lambda \geq 0$. Более того, при $\Lambda > 0$ имеется вечно расширяющаяся Вселенная. Заметим, что в нашем случае положительная Λ соответствует универсальной силе отталкивания, что в настоящее время рассматривается как темная энергия. В этом отношении (2.37) находится в хорошем согласии с моделями ускоренного расширения. Надо заметить, что отношение (2.37) налагает некоторое ограничение на τ и на ε в случае отрицательного Λ , соответствующего дополнительной гравитационной силе. Выражение (2.38) вместе с (2.37) показывает, что в случае $\Lambda > 0$ размер Вселенной τ не может быть бесконечно большим (или ε не может быть пренебрежительно мала), т.е. τ также ограничена сверху. Это соответствует осциллирующей эволюции Вселенной [244, 264].

Рассмотрим случай, когда вязкость второго рода обратно пропорциональна расширению, т.е.

$$\xi\theta = C_2, \quad C_2 = \text{const}. \quad (2.39)$$

Учитывая, что $\theta = \dot{\tau}/\tau = 3H$, а также соотношения (2.34a), (2.30) и (2.9) уравнение (2.36) может быть записано в виде

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{C_2 - (1 + \zeta)\varepsilon} = \frac{\dot{\tau}}{\tau}. \quad (2.40)$$

Из (2.40) находим

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \zeta} [C_2 + C_3\tau^{-(1+\zeta)}], \quad (2.41)$$

где C_3 некоторая произвольная постоянная. Далее, подставляя ε из (2.41) в (2.25), находим явное выражение для τ .

С учетом уравнения состояния (2.9) и ввиду (2.39) и (2.41) уравнения (2.25) допускают следующее решение в квадратурах:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{C_2^2 + C_0^0\tau^2 + C_1^1\tau^{1-\zeta}}} = t + t_0, \quad (2.42)$$

где C_2^2 и t_0 некоторые постоянные. Далее будем полагать, что $t_0 = 0$. Здесь $C_0^0 = 3\kappa C_2/(1 + \zeta) - 3\Lambda$ и $C_1^1 = 3\kappa C_3/(1 + \zeta)$. Как видно, C_0^0 отрицательно при

$$\Lambda > \kappa C_2/(1 + \zeta). \quad (2.43)$$

Это значит, что для положительного Λ удовлетворяющая (2.43) (предположим, что C_2 положительна) величина τ должна быть ограничена сверху. Перепишем уравнение (2.42) в форме

$$\dot{\tau} = \sqrt{2[E - \mathcal{U}(\tau)]}, \quad (2.44)$$

где $E = C_2^2/2$ может быть рассмотрена как энергия и $\mathcal{U}(\tau) = -0.5(C_0^0\tau^2 + C_1^1\tau^{1-\zeta})$ как потенциал [см. Рис. 2.1], соответствующий уравнению (2.25). В зависимости от значения E существуют два типа решений: при $E > 0$ имеются неперiodические решения, т.е. после достижения некоторого максимального значения (например τ_{\max}) Вселенная начинает сжиматься и в конце концов превращается в точку, таким образом порождая пространственно-временную сингулярность; при $E < 0$ модель VI допускает осциллирующие решения без сингулярностей [см. Рис. 2.2]. Подробное описание потенциала можно найти в [264]. Таким образом, в случае вязкости второго рода положительный Λ -член описывает модель, ограниченную сверху.

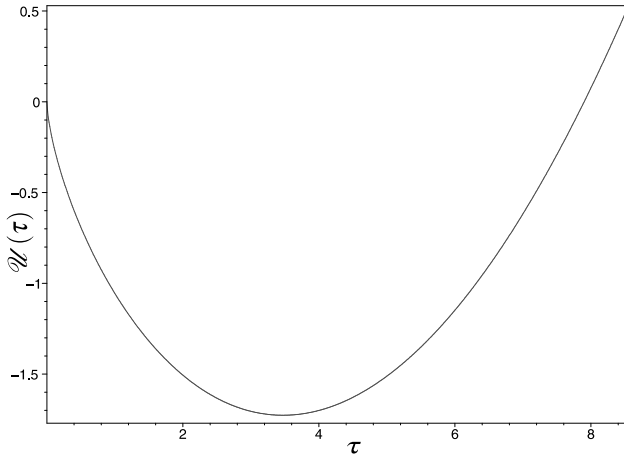


Рис. 2.1: Вид потенциала $\mathcal{U}(\tau)$. Здесь $\kappa = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$, $\zeta = 0.33$, и $\Lambda = 0.8$

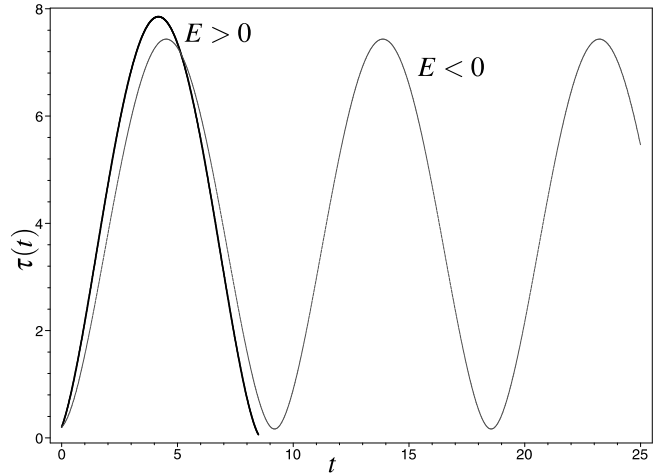


Рис. 2.2: Эволюция VI Вселенной, соответствующей потенциалу Рис. 2.1. В качестве начального значения выбран $\tau_0 = 0.2$.

В качестве второго примера рассмотрим случай с $\zeta = 1$. Из (2.42) находим

$$\tau(t) = (\exp(\sqrt{C_0^0} t) - C_2^2 \exp(-\sqrt{C_0^0} t)) / (2\sqrt{C_0^0}), \quad C_0^0 > 0, \quad (2.45a)$$

$$\tau(t) = (C_2^2 / \sqrt{|C_0^0|}) \sin(\sqrt{|C_0^0|} t). \quad C_0^0 < 0. \quad (2.45b)$$

Учитывая, что $C_0^0 > 0$ для любого неположительного Λ , из (2.45a) следует, что в случае $\Lambda \leq 0$ Вселенная может быть бесконечно большой (не существует ограничения сверху), что совпадает с нашим прежним рассуждением. С другой стороны, C_0^0

может быть отрицательно только при некоторых положительных значениях Λ . В работах [244, 264] было показано, что в случае идеальной жидкости положительный Λ - член всегда порождает осцилляции, тогда как в присутствии вязкой жидкости это случается только когда Λ удовлетворяет (2.43). В отличие от случая с излучением, когда VI допускает два типа решения, в случае жесткой материи имеется решение только одного вида, а именно неперриодическое, что соответствует $E > 0$ в случае с излучением, так как в этом случае потенциал $\mathcal{U}(\tau) = -0.5C_0^0\tau^2$ имеет максимум при $\tau = 0$.

Система с вязкой жидкостью первого и второго рода

Рассмотрим общий случай с вязкостью первого рода η , пропорциональной расширению, т.е.

$$\eta \propto \theta = 3H. \quad (2.46)$$

Пусть

$$\eta = -\frac{3}{2\kappa}H. \quad (2.47)$$

В этом случае из (2.34b) и (2.34c) находим

$$3H^2 = \kappa\varepsilon + C_4, \quad C_4 = \text{const}. \quad (2.48)$$

Из (2.48) следует, что в начальной стадии расширения, когда ε большая, постоянная Хаббла тоже большая и с расширением Вселенной H уменьшается, как и ε . Поскольку H^2 и ε обе неотрицательны, мы также заключаем, что постоянная C_4 тоже неотрицательна. Подставляя (2.48) в (2.34b) находим

$$\int \frac{dH}{AH^2 + BH + C} = t, \quad (2.49)$$

где $A = -1.5(1 + \zeta)$, $B = 1.5\kappa\xi$, и $C = 0.5C_4(\zeta - 1) - \Lambda$. Если вязкость второго рода постоянна, т.е. $\xi = \text{const.}$, то в зависимости от значения дискриминанта $B^2 - 4AC$ существуют три типа решения, а именно [38]:

$$t = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \ln \left| \frac{2AH + B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2AH + B - \sqrt{B^2 - 4AC}} \right|, & B^2 > 4AC, \\ \frac{2}{\sqrt{4AC - B^2}} \arctan \frac{2AH + B}{\sqrt{4AC - B^2}}, & B^2 < 4AC, \\ -\frac{2}{2AH + B}, & B^2 = 4AC. \end{cases} \quad (2.50)$$

Ввиду того, что $A < 0$ и $C_4(\zeta - 1) \leq 0$, знак C зависит от знака и значения Λ . В этом случае система допускает неперриодическое или экспоненциальное расширение τ как для положительного так и для отрицательного Λ . Как видно на Рис. 2.3, вне зависимости от знака Λ модель допускает решения, которые сначала расширяются,

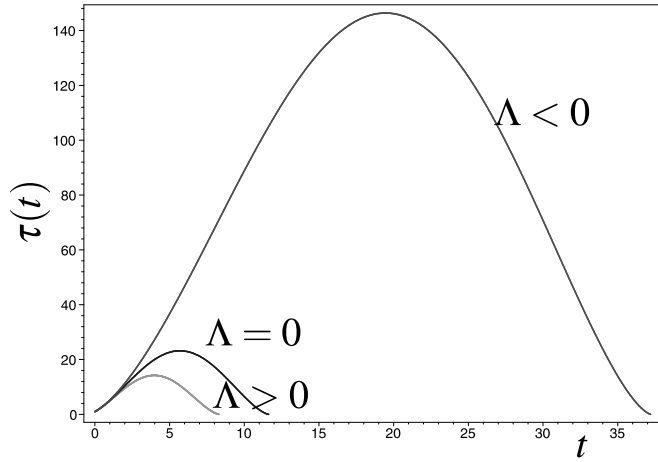


Рис. 2.3: Вид $\tau(t)$ при $C_4 = 0.1$, $\zeta = 0.33$, $\kappa = 0.1$, и $\xi = 0.1$ с $\Lambda = -0.03$, $\Lambda = 0$, и $\Lambda = 0.03$, соответственно.

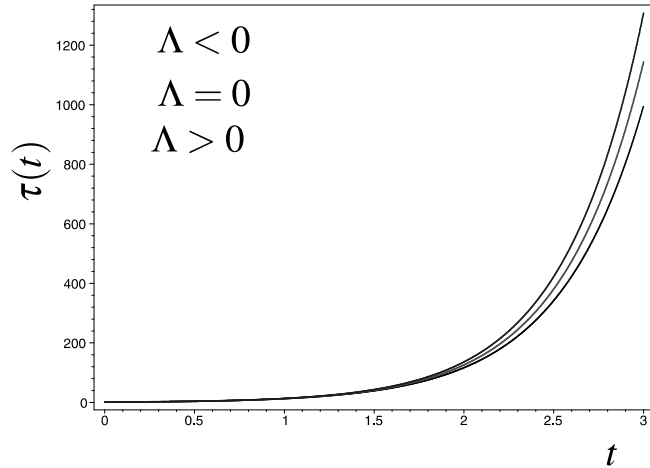


Рис. 2.4: Эволюция Вселенной VI с параметрами $C_4 = 0.1$, $\zeta = 0.33$, $\kappa = 1$, и $\xi = 1$ с $\Lambda = -0.03$, $\Lambda = 0$, и $\Lambda = 0.03$.

достигают максимума и после этого начинают сжиматься, порождая пространственно-временную сингулярность. С другой стороны с теми же Λ , но с другими κ и ξ расширение Вселенной VI принимает экспоненциальный вид [см. Рис. 2.4].

Заметим, что случай идеальной жидкости с положительным Λ допускает либо осциллирующие, либо неперидические решения, тогда как при отрицательном Λ расширение всегда экспоненциальное. Введение вязкости порождает и неперидическое и экспоненциальное решение независимо от знака Λ -члена. В самом деле, значения κ и ξ играют решающую роль в формировании того или иного типа решения.

Проиллюстрируем фазовыми диаграммами соответствующие решения, ограниченные сверху [см. Рис. 2.5 и 2.6]. Надо заметить, что в зависимости от параметров решения могут быть также и синусоидальными. Слегка деформированная форма фазовых диаграмм показывает несинусоидальный характер решений при данном наборе параметров.

2.3.2 Система с нелинейным спинорным полем и вязкой жидкостью

В этом случае лагранжиан нелинейного спинорного поля задается в виде [251, 252]

$$\mathcal{L}_f = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi + F, \quad (2.51)$$

где F - некоторая произвольная функция от I, J .

Как уже упоминалось, введение вязкой жидкости непосредственно не влияет на уравнение спинорного поля. Но все же она оказывает свое влияние на поведение спинорного поля через τ . Поэтому мы тут зададим выражение для спинорного поля, не углубляясь в детали.

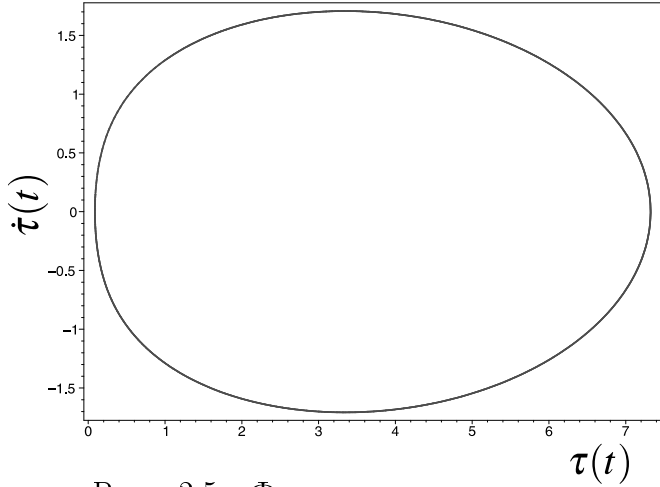


Рис. 2.5: Фазовая диаграмма решения проиллюстрированного на Рис. 2.2.

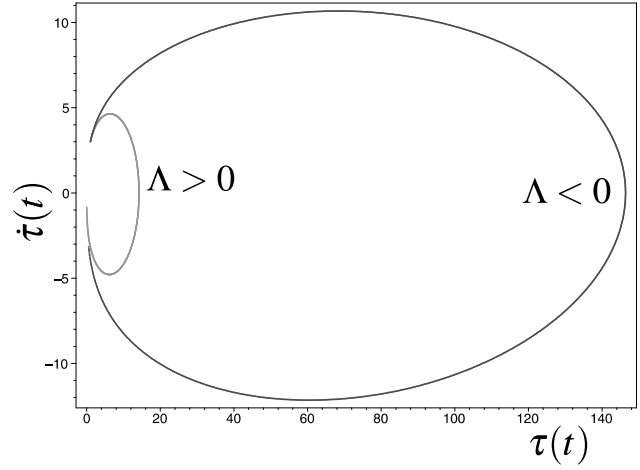


Рис. 2.6: Фазовая диаграмма решения представленного на Рис. 2.3.

Случай $F = F(I)$

Рассмотрим случай, когда нелинейность спинорного поля выбирается как $F = F(I)$. В этом случае находим

$$S = \frac{C_0}{\tau}, \quad C_0 = \text{const.} \quad (2.52)$$

Компоненты спинорного поля выглядят как [244]

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \frac{C_1}{\sqrt{\tau}} e^{-i\beta}, & \psi_2(t) &= \frac{C_2}{\sqrt{\tau}} e^{-i\beta}, \\ \psi_3(t) &= \frac{C_3}{\sqrt{\tau}} e^{i\beta}, & \psi_4(t) &= \frac{C_4}{\sqrt{\tau}} e^{i\beta}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где C_i - постоянные интегрирования, связанные с C_0 соотношением $C_0 = C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 - C_4^2$. Здесь $\beta = \int (m - \mathcal{D}) dt$.

Компоненты спинорного тока имеют вид

$$\begin{aligned} j^0 &= \frac{1}{\tau} [C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2], & j^1 &= \frac{2}{a\tau} [C_1 C_4 + C_2 C_3] \cos(2\beta), \\ j^2 &= \frac{2}{b\tau} [C_1 C_4 - C_2 C_3] \sin(2\beta), & j^3 &= \frac{2}{c\tau} [C_1 C_3 - C_2 C_4] \cos(2\beta), \end{aligned}$$

а проекции вектора спина вдоль X , Y и Z выглядят как

$$S^{23,0} = \frac{C_1 C_2 + C_3 C_4}{bc\tau}, \quad S^{31,0} = 0, \quad S^{12,0} = \frac{C_1^2 - C_2^2 + C_3^2 - C_4^2}{2ab\tau}.$$

Полный заряд системы, заключенный в объеме \mathcal{V}

$$Q = [C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2] \mathcal{V}. \quad (2.54)$$

Таким образом, для $\tau \neq 0$ компоненты спинорного тока и проекции вектора спина не имеют сингулярностей, а полный заряд системы в ограниченном объеме всегда ограничен. Заметим, что в предыдущем выражении, подставляя $\lambda = 0$, т.е. $\beta = mt$, получим результат для линейного спинорного поля.

Случай $F = F(J)$

Рассмотрим случай с $F = F(J)$. Как и раньше, рассмотрим безмассовое спинорное поле. Для инварианта P находим

$$P = D_0/\tau, \quad D_0 = \text{const.} \quad (2.55)$$

Компоненты спинорного поля имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{\tau}}(D_1 e^{i\sigma} + iD_3 e^{-i\sigma}), & \psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{\tau}}(D_2 e^{i\sigma} + iD_4 e^{-i\sigma}), \\ \psi_3 &= \frac{1}{\sqrt{\tau}}(iD_1 e^{i\sigma} + D_3 e^{-i\sigma}), & \psi_4 &= \frac{1}{\sqrt{\tau}}(iD_2 e^{i\sigma} + D_4 e^{-i\sigma}). \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования D_i связаны с D_0 соотношением $D_0 = 2(D_1^2 + D_2^2 - D_3^2 - D_4^2)$. Здесь $\sigma = \int \mathcal{G} dt$.

Компоненты спинорного тока выглядят как

$$\begin{aligned} j^0 &= \frac{2}{\tau}[D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2], & j^1 &= \frac{4}{a\tau}[D_2 D_3 + D_1 D_4] \cos(2\sigma), \\ j^2 &= \frac{4}{b\tau}[D_2 D_3 - D_1 D_4] \sin(2\sigma), & j^3 &= \frac{4}{c\tau}[D_1 D_3 - D_2 D_4] \cos(2\sigma), \end{aligned}$$

а проекции вектора спина вдоль осей X , Y и Z имеют вид

$$S^{23,0} = \frac{2(D_1 D_2 + D_3 D_4)}{bc\tau}, \quad S^{31,0} = 0, \quad S^{12,0} = \frac{D_1^2 - D_2^2 + D_3^2 - D_4^2}{2ab\tau}$$

Как видно, при нетривиальной τ компоненты спинорного тока и проекции вектора спина не имеют сингулярностей.

Вернемся к системе уравнений для τ , H и ε . Для этого нам нужно будет написать $T_0^{0'}$ и $T_0^{0'}$ в явном виде. Для простоты мы рассмотрим случай, когда $F = \lambda S^n$. В этом случае имеем

$$T_0^{0'} = mS - \lambda S^n, \quad T_1^{1'} = \lambda(n-1)S^n.$$

С учетом того, что $S = C_0/\tau$ перепишем систему (2.33) в виде

$$\dot{\tau} = 3H\tau, \quad (2.56a)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2}(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) - (3H^2 - \varepsilon - \Lambda) + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\tau} + \frac{\lambda(n-2)}{\tau^n}\right), \quad (2.56b)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) + 4A\varepsilon^\alpha(3H^2 - \varepsilon - \Lambda) - 4\eta\left[\frac{m}{\tau} - \frac{\lambda}{\tau^n}\right], \quad (2.56c)$$

где для простоты предполагалось, что $C_0 = 1$. Данная система в общем случае точно не решается. Рассмотрим некоторые специальные случаи, допускающие точные решения.

Случай с вязкой жидкостью второго рода

Сначала изучим случай, когда отсутствует вязкость первого рода, полагая $\eta = 0$. Потребуем, чтобы вязкость второго рода была обратно пропорциональна расширению, т.е.

$$\xi\theta = 3\xi H = C_2, \quad C_2 = \text{const.} \quad (2.57)$$

Подставляя $\eta = 0$, (2.57) и (2.9) в (2.34с), находим

$$\varepsilon = \frac{1}{1+\zeta} [C_2 + C_3/\tau^{1+\zeta}]. \quad (2.58)$$

Тогда из (2.25) получим следующее уравнение для τ :

$$\ddot{\tau} = \frac{3}{2}\kappa m + 3 \left[\frac{C_2}{2}\kappa + \Lambda \right] \tau + \frac{(1-\zeta^2)\tau^{2+\zeta}}{C_3 + C_2\tau^{1+\zeta}} + \frac{\lambda(n-2)}{\tau^{n-1}} \equiv \mathcal{F}(q, \tau), \quad (2.59)$$

где q - множество параметров. Как видно, правая часть уравнения (2.59) является функцией от τ , а следовательно уравнение может быть решено в квадратурах [177]. Решим уравнение (2.59) численно. Заметим, что уравнение (2.59) может быть рассмотрено как уравнение движение одной частицы. Иногда удобно и полезно показать потенциал соответствующего уравнения, которым в нашем случае является

$$\mathcal{U}(q, \tau) = -2 \int \mathcal{F}(q, \tau) d\tau. \quad (2.60)$$

Параметры мы выберем в виде: $\kappa = 1$, $m = 1$, $\lambda = 0.5$, $\zeta = 1/3$, $n = 4$, $C_2 = 2$ и $C_3 = 1$. Мы рассмотрим случаи с различными Λ , а именно $\Lambda = -2, 0, 1$. Начальное значение τ берется достаточно малым, первая производная от него, т.е. $\dot{\tau}$ в точке пространства-времени вычисляется из (2.31). На Рис. 2.7 показан потенциал, соответствующий уравнению (2.59). Как видно, не зависимо от знака Λ мы имеем решение, ограниченное сверху, т.е. во всех трех случаях расширяющаяся вселенная. Ввод положительной Λ , что на самом деле является темной энергией, приводит к ускоренному расширению вселенной. Соответствующие решения даны на Рис. 2.8.

Случай с вязкостью первого и второго рода

Рассмотрим более общий случай. Следуя [250] выберем вязкость первого рода пропорциональной расширению, а именно

$$\eta = -\frac{3}{2\kappa} H = -\frac{1}{2\kappa} \theta. \quad (2.61)$$

В отсутствии спинорного поля это предположение приводит к соотношению

$$3H^2 = \kappa\varepsilon + C_4, \quad C_4 = \text{const.} \quad (2.62)$$

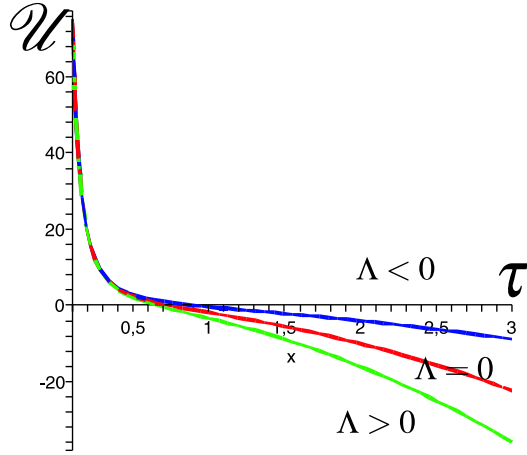


Рис. 2.7: Виды потенциала, соответствующие разным знакам Λ - члена.

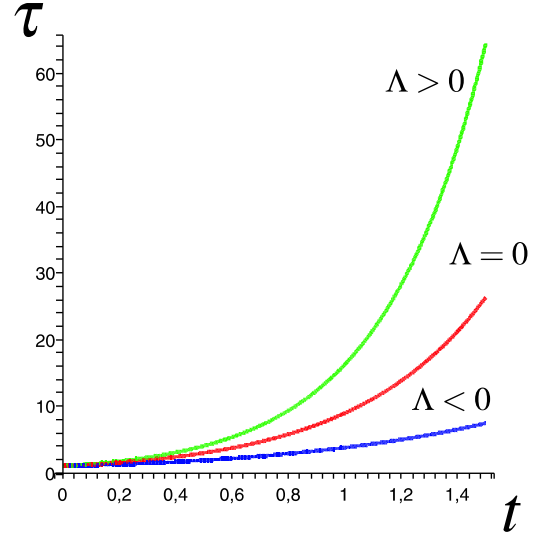


Рис. 2.8: Эволюция τ в зависимости от знаков Λ - члена.

Можно показать, что соотношение (2.62) в нашем случае может быть достигнуто при безмассовом спинорном поле с нелинейностью

$$F = F_0 S^{2(\kappa-1)/\kappa}.$$

Уравнение для τ в этом случае имеет вид

$$\tau\ddot{\tau} - 0.5(1 + \zeta)\dot{\tau}^2 - 1.5\kappa\xi\tau\dot{\tau} - 3[\Lambda - 0.5(1 + \zeta)C_4 - \lambda F_0\tau^{2(1-\kappa)/\kappa}]\tau^2 = 0. \quad (2.63)$$

При $\xi = \text{const}$ и $\lambda = 0$ существуют различные специальные решения, которые можно найти в справочниках. Но для нетривиальной λ уравнение можно решать только численно. Рассмотрим случай, когда вязкость второго рода является постоянной. С учетом этого выберем параметры $\zeta = 1/3$, $\xi = 1$, $F_0 = 1$, $\lambda = 0.5$ и $C_4 = 1$. Рассмотрим случай с различными Λ и κ . На Рис. 2.9 и 2.10 иллюстрируется эволюция τ при $\kappa < 1$ и $\kappa > 1$ соответственно. В случае $\kappa < 1$ имеем неперIODическую эволюция при всех Λ , тогда как при $\kappa > 1$ только отрицательная Λ порождает такое решение. Неотрицательное Λ в этом случае дает вечно расширяющую картину эволюции.

2.3.3 Система с взаимодействующими спинорным и скалярным полями и вязкой жидкостью

Рассмотрим систему с взаимодействующими спинорным и скалярным полями в модели Бианки I, заполненной вязкой жидкостью. В этом случае имеем [253]

$$\mathcal{L}_f = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \right] - m\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}(1 + \lambda F), \quad (2.64)$$

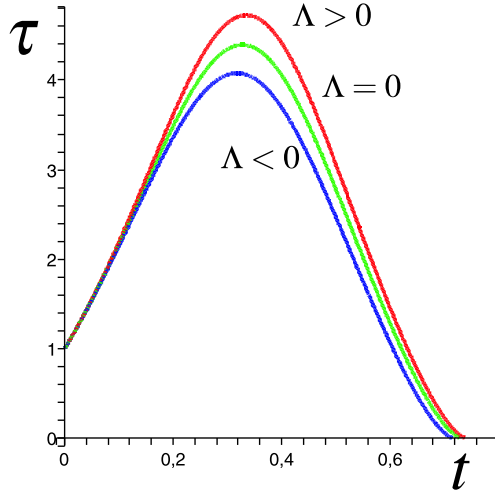


Рис. 2.9: Эволюция вселенной с нетривиальной Λ при $\kappa < 1$.

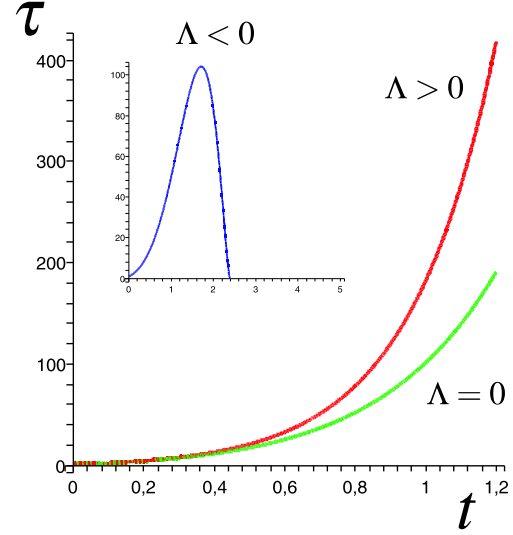


Рис. 2.10: Эволюция вселенной при различных значениях Λ с $\kappa > 1$.

где как и раньше $F = F(I, J)$.

Как уже упоминалось, решения уравнений спинорного и скалярного поля полностью совпадают с полученными решениями во второй главе. Поэтому мы сразу начнем исследовать систему уравнений для τ , H и ε . Рассмотрим случай когда $F = S^n$. Компоненты тензора энергии-импульса в этом случае имеют вид

$$T_0^{0'} = mS + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(\lambda S^n + 1), \quad T_1^{1'} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(\lambda S^n - 1),$$

где, как следует из уравнения скалярного поля,

$$\dot{\varphi} = \frac{C_{sc}}{\tau(1 + \lambda F)}.$$

В дальнейшем для удобства мы предположим, что $C_{sc} = 1$.

Тогда с учетом того, что $S = C_0/\tau$ (здесь для удобства мы полагаем $C_0 = 1$) перепишем систему уравнений в виде

$$\dot{\tau} = 3H\tau, \quad (2.65a)$$

$$\dot{H} = \frac{\kappa}{2}(3\xi H - \omega) - (3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda) + \frac{\kappa}{2}\left(\frac{m}{\tau} + \frac{n\tau^{n-2}}{2(\lambda + \tau^n)^2}\right), \quad (2.65b)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3\xi H - \omega) + 4\eta(3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda) - 4\eta\left[\kappa\left(\frac{m}{\tau} + \frac{\tau^{n-2}}{2(\lambda + \tau^n)^2}\right)\right]. \quad (2.65c)$$

Далее мы исследуем систему (2.65). Как и раньше, рассмотрим два случая, допускающие точные решения.

Случай с вязкой жидкостью второго рода

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим случай при $\eta = 0$. При этом получим аналогичные соотношения, связывающие ε , H и τ . Для определения τ в этом случае имеем:

$$\ddot{\tau} = \frac{3}{2}\kappa m + 3\left[\frac{C_2}{2}\kappa + \Lambda\right]\tau + \frac{3\kappa(1-\zeta)}{2(1+\zeta)}\frac{C_2\tau^{1+\zeta} - C_3}{\tau^\zeta} + \frac{3\kappa\lambda n}{4}\frac{\tau^{n-1}}{(\lambda + \tau^n)^2} \equiv \mathcal{F}(q, \tau), \quad (2.66)$$

где q - параметры. Как и раньше, в этом случае также можно найти выражение для потенциала. Для численного решения мы выберем $\kappa = 1$, $m = 1$, $\lambda = 0.5$, $\zeta = 1/3$, $n = 4$, $C_2 = 2$ и $C_3 = 1$. Рассмотрим случай с различными значениями Λ , а именно $\Lambda = -2, 0, 1$. Начальное значение τ задается достаточно маленьким, а первая его производная, т.е. $\dot{\tau}$ заданной точке пространства-времени вычисляется из соотношения (2.31). На Рис. 2.11 показан вид потенциала, соответствующего уравнению (2.66). Сразу видно, что независимо от знака Λ всегда имеется расширяющаяся вселенная. Но как видно на Рис. 2.12, положительная Λ приводит к ускоренному расширению, тогда как отрицательная к замедлению.

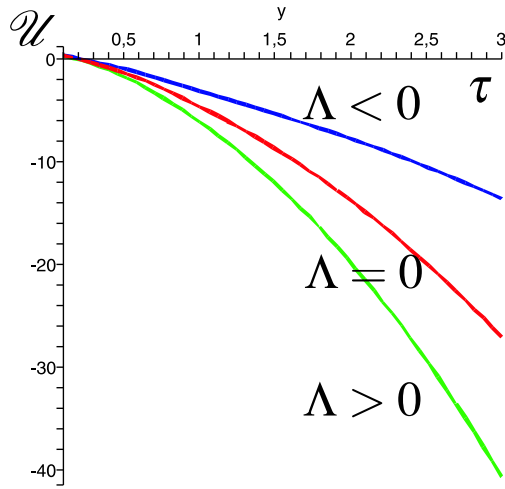


Рис. 2.11: Вид потенциала при различных значениях Λ term.

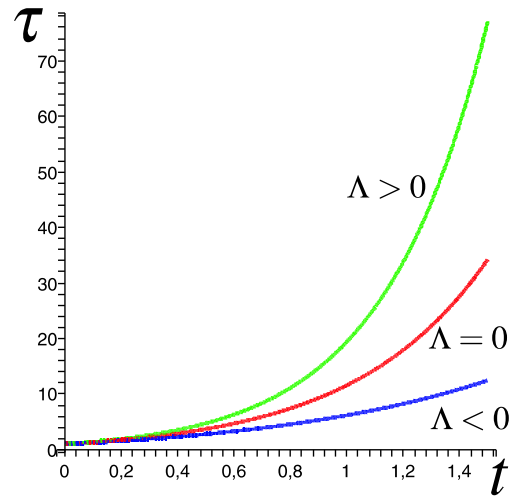


Рис. 2.12: Эволюция τ в зависимости от знака Λ .

Случай с вязкостью первого и второго рода

Рассмотрим более общий случай, выбирая вязкость первого рода в виде (2.61). Можно показать, что в этом случае также возникают соотношения типа (2.62), но только при нулевой массе спинора с нелинейностью

$$F = (F_0 S^2 - 1)/\lambda.$$

Уравнение для τ теперь примет вид

$$\tau\ddot{\tau} - 0.5(1 - \zeta)\dot{\tau}^2 - 1.5\kappa\xi\tau\dot{\tau} - 3[\Lambda - 0.5(1 - \zeta)C_4 + \kappa/2F_0]\tau^2 = 0. \quad (2.67)$$

При $\xi = \text{const}$ существуют различные специальные решения. Мы перепишем это уравнение в терминах H :

$$\dot{H} = -1.5(1 + \zeta)H^2 + 1.5\kappa\xi H + [\Lambda - 0.5(1 - \zeta)C_4 + \kappa/2F_0]. \quad (2.68)$$

Решения его можно записать в квадратурах:

$$\int \frac{dH}{AH^2 + BH + C} = t, \quad (2.69)$$

где $A = -1.5(1 + \zeta)$, $B = 1.5\kappa\xi$ и $C = \Lambda - 0.5(1 - \zeta)C_4 + \kappa/2F_0$. Если вязкость второго рода выбрать постоянной, т.е. если $\xi = \text{const}$, то в зависимости от знака дискриминанта $B^2 - 4AC$ существуют три типа решения, а именно [38]:

$$t = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \ln \left| \frac{2AH + B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2AH + B - \sqrt{B^2 - 4AC}} \right|, & B^2 > 4AC, \\ \frac{2}{\sqrt{4AC - B^2}} \arctan \frac{2AH + B}{\sqrt{4AC - B^2}}, & B^2 < 4AC, \\ -\frac{2}{2AH + B}, & B^2 = 4AC. \end{cases} \quad (2.70)$$

Для численного решения мы выберем параметры следующим образом: $C_4 = 9$, $\zeta = 1/3$ и $\kappa = 2$. В этом случае имеем $\delta = B^2 - 4AC = 9\xi^2 + 8(\Lambda - 2)$. После этого выберем для Λ положительное, тривиальное или отрицательное значение (в частности мы выберем $\Lambda = (7/8, 0, -5/2)$). Значение ξ выбирается таким образом, чтобы мы имели $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ при всех выбранных значениях Λ , с $\delta_1 > 0$, $\delta_2 = 0$ и $\delta_3 < 0$. На Рис. 2.13, 2.14 и 2.15 приведены картины эволюции τ , соответствующие тривиальному, положительному и отрицательному значениям δ соответственно. Как видно, поведение τ зависит от δ и не зависит от знака Λ . Отрицательная δ порождает неперIODическую эволюцию вселенной, на Рис. 2.16 представлена соответствующая фазовая диаграмма.

2.4 Качественный анализ

Целью предлагаемого подхода является систематический и по возможности всеохватывающий разбор вариантов поведения рассмотренной динамической системы в зависимости от значений параметров. Понятно, что следует отделить существенное, качественное наличие характерных эффектов от несущественных, количественных различий. Здесь речь пойдет о сценариях эволюции. Обычно нужно хотя бы понять, чем заканчивается (или никогда не заканчивается) эволюция при временах возможно

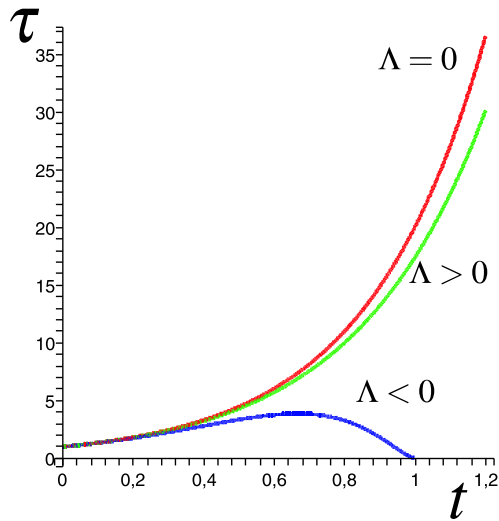


Рис. 2.13: Эволюция вселенной при $\delta = 0$ для разных Λ .

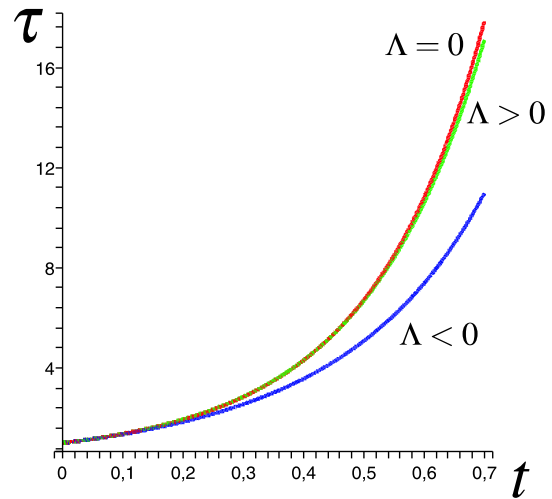


Рис. 2.14: Эволюция вселенной при $\delta > 0$ для разных Λ .

бесконечно больших, когда начальные условия заданы. При этом начальные условия могут быть заданы где угодно.

Под конкретным поведением динамической системы будем понимать семейство интегральных кривых, покрывающее все фазовое пространство, т.е. фазовый портрет.

Изменение начальных условий, приводящее всего лишь к непрерывному переходу между интегральными кривыми будем полагать первым количественным отличием, поскольку речь идет о семействе в целом. Такие интегральные кривые будут топологически эквивалентными [В.И. Арнольд. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 1999]. Фазовое пространство разбивается на области - классы эквивалентности - внутри класса они "ведут себя одинаково". Кривые внутри класса будут гомотопны друг другу [Д.Б. Фукс и др. Гомотопическая топология. 1969] с гомотопией, не выводящей за пределы класса.

Непрерывное изменение параметров также будем считать несущественным и будем говорить, что одно семейство интегральных кривых (покрывающее все пространство) эквивалентно другому, если оно порождает семейство диффеоморфизмов, непрерывно переводящее первое семейство во второе. Это отношение разбивает на классы эквивалентности пространство параметров.

При некоторых критических соотношениях параметров наступает существенное изменение, перестройка. Это пограничное соотношение параметров, разбивает, как правило, пространство параметров на области, внутри которых система обладает сходным, качественно одинаковым поведением. Таким образом, здесь завершается качественная классификация режимов эволюции динамической системы. Теперь, задаваясь конкретными параметрами, мы можем определить, к какой области параметров

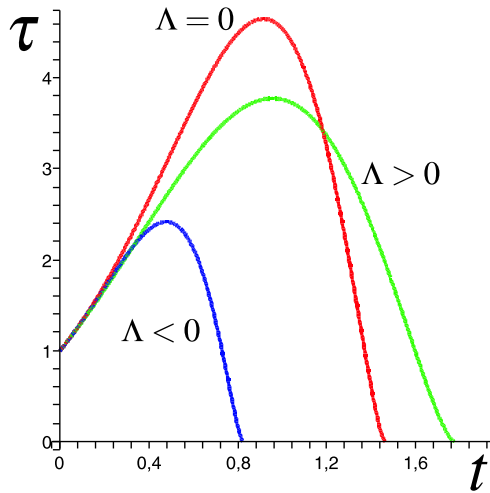


Рис. 2.15: Эволюция вселенной при $\delta < 0$ для разных Λ .

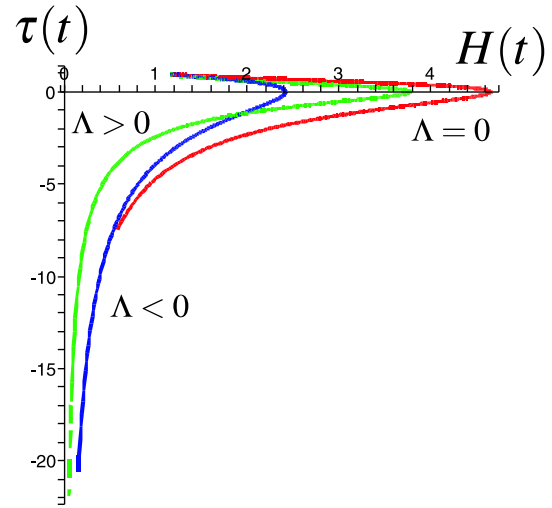


Рис. 2.16: Фазовая диаграмма соответствующая случаю с $\delta < 0$ при различных Λ .

они относятся и тем самым определить тип поведения, Λ задавшись еще и конкретными начальными условиями, сможем ответить на вопрос, в какую область фазового пространства приведет эволюция системы со временем.

В нашей космологической модели числовые параметры A , α , B , β появились, поскольку мы приняли, что коэффициенты вязкости первого и второго рода, присутствующие в ней, имеют вид $\eta = A\epsilon^\alpha$ и $\xi = B\epsilon^\beta$. Коэффициенты λ и τ связаны с введением спинорного и скалярного полей. И, наконец, в уравнения Эйнштейна входит известная космологическая константа Λ .

Исходные уравнения Эйнштейна вместе с гидродинамическими уравнениями, включающими вязкости, спинорное и векторное поля, нами сведены к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно плотности энергии ϵ , "постоянной" Хаббла (в действительности переменной) H и масштабного параметра τ ($\tau = abc$, где a , b , c - компоненты метрического тензора). Удобно оказалось заменить переменную τ на переменную ν по формуле $\nu = \frac{1}{\tau}$.

То, что система имеет размерность более двух, сильно усложняет качественный анализ. Напомним, что известная система Лоренца трех обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями не выше второй степени обладает в некоторой области параметров хаотическим поведением, странным аттрактором и, соответственно, в ней отсутствуют первые интегралы (т.е. глобально определенные инварианты), хотя множество особенностей устроено просто - имеется всего три особые (неподвижные) точки - два фокуса и седло. Наличие такого примера не позволяет делать оптимистические заключения на основании простоты устройства

нашей системы (только полиномы в правых частях и отсутствие особых точек в интересующей нас области пространства, даже в динамически замкнутой).

Тем не менее, на границах пространства как при $\epsilon = 0$, так и при $\nu = 0$ ($\tau = +\infty$), которые сами динамически замкнуты, полная классификация проведена. Динамическая замкнутость этих плоскостей служит одновременно препятствием для проникновения из интересующего нас положительного октанта $\epsilon > 0 \wedge \nu > 0$ в область с отрицательными значениями. Но, хотя в положительном октанте нет особенностей, неподвижных точек (они есть на границах), доказать простоту поведения, например, наличие первых интегралов, так и не удалось, как и их отсутствие.

Как уже было сказано, уравнения (2.25) и (2.29) вызывают большой интерес, в этом разделе мы подробно и качественно проанализируем эту систему.

2.4.1 Система с вязкой жидкостью

Вслед за Белинским и Халатниковым [6] изучим характеры решений динамической системы (2.34) или (2.35). Для этого перепишем систему (2.34), в матричной форме [266]:

$$\begin{pmatrix} \dot{H} \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa/2 & -1 \\ 3H & 4\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\xi H - \omega \\ 3H^2 - \kappa\epsilon - \Lambda \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Заметим, что в отличие от системы, изучаемой Белинским и Халатниковым, рассматриваемая система содержит космологическую постоянную Λ .

Общие свойства системы

Легко заметить, что решение не может пересекать ось $\epsilon = 0$, так как $\dot{\epsilon}|_{\epsilon=0} = 0$, также как и параболу

$$3H^2 - \kappa\epsilon - \Lambda = 0, \quad (2.72)$$

так как (2.72) сама является интегральной кривой. Таким образом, начиная с точки $(H, \epsilon) = (+\infty, 0)$, решения не могут входить в "запрещенную зону" внутри параболы (2.72). Могут ли они достигать $H < 0$, зависит от значения Λ . Еще раз напомним, что в отличие от системы, рассмотренной в [6] эта система содержит ненулевой Λ -член.

Критические точки динамической системы

а) В силу линейной независимости столбцов матрицы в уравнении (2.71) критические точки являются решениями уравнений

$$3\xi H - \omega = 0, \quad (2.73a)$$

$$3H^2 - \kappa\epsilon - \Lambda = 0. \quad (2.73b)$$

т.е. они с необходимостью лежат на параболе (2.72). Решениями системы (2.73) будут корни уравнений

$$3\kappa B^2 \epsilon^{1+2\beta} - (1 + \zeta)^2 \epsilon^2 + 3\Lambda B^2 \epsilon^{2\beta} = 0, \quad (2.74a)$$

$$H = \frac{1 + \zeta}{3B} \epsilon^{1-\beta}. \quad (2.74b)$$

Количество положительных корней уравнения (2.74) по признаку Декарта равно числу изменения знаков коэффициентов уравнений или меньше этого на четное число. Так

$$\begin{array}{ll} \text{при } \Lambda > 0 & \text{и } 1/2 < \beta < 1 \quad (\text{Рис.2.18, Рис.2.19}) \\ \text{или } \Lambda < 0 & \text{и } \beta < 1/2 \quad (\text{Рис.2.21, Рис.2.22}) \end{array}$$

число корней либо 2, либо ноль. В остальных случаях

$$\begin{array}{ll} \Lambda > 0 & \text{и } \beta > 1 \quad (\text{Рис.2.17}), \\ \Lambda > 0 & \text{и } \beta < 1/2 \quad (\text{Рис.2.20}), \\ \Lambda < 0 & \text{и } \beta > 1/2 \quad (\text{Рис.2.23}) \end{array}$$

существует только один корень. Соответствующие картины фазовых кривых проиллюстрированы на вышеупомянутых рисунках. Критические точки обозначены маленькими кружочками. Здесь мы рассмотрели случай с $\eta = 0$, т.е. $A = 0$. В случае $\eta \neq 0$, с ростом A сепаратриса седла наклоняется слева. Общая картина при $A \neq 0$ остается качественно неизменной, что демонстрируют соответствующие фазовые портреты в двух случаях, а именно Рис. 2.17 переходит в Рис. 2.24, а Рис. 2.20 соответствует Рис. 2.25. Для численного расчета мы полагали $\kappa = 1$, $\zeta = 0.333$ (если не сказано иное). На Рис. 2.17 - 2.23 коэффициент $\eta = 0$. Заметим, что на рисунках E и T отвечают за ε и τ , соответственно.

Поскольку уравнение для ε содержит только η , плотность энергии при нетривиальном η существенно меняется, тогда как H и τ остаются фактически неизменными.

Типы критических точек, лежащих на интегральной кривой - параболе поочередно меняются: ... седло, притягивающий узел, седло ... Поэтому для определения типа особой точки достаточно рассмотреть случай с максимальным числом корней. Принимая во внимание уравнения (2.34с) и (2.72) вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \frac{\dot{\varepsilon}}{3H\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3B\varepsilon^\beta \sqrt{\kappa\varepsilon + \Lambda}} - \varepsilon(1 + \zeta)}{\varepsilon} \\ &= \sqrt{3B\sqrt{\kappa\varepsilon^{(2\beta-1)} + \Lambda\varepsilon^{-2}}} - (1 + \zeta) = \begin{cases} -(1 + \zeta) < 0, & \beta < 1/2, \\ +\infty > 0, & \beta > 1/2. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Таким образом, последняя критическая точка при $\beta < 1/2$ является притягивающим узлом и при $\beta > 1/2$ седлом.

б) Очевидно, что если $\Lambda \geq 0$, то точки пересечения границ являются критическими точками

$$H = \pm \sqrt{\Lambda/3}, \quad (2.76a)$$

$$\varepsilon = 0. \quad (2.76b)$$

с) При $H < 0$ могут существовать критические точки только в том случае, когда столбцы матрицы (2.71) линейно зависимы. В этом случае критические точки есть корни уравнения

$$3\kappa(\zeta - 1)\varepsilon + 6\kappa^2 AB\varepsilon^{\alpha+\beta} + 8\kappa^2 A^2\varepsilon^{2\alpha} - 6\Lambda = 0, \quad (2.77)$$

и

$$H = -\frac{2}{3}\kappa A \varepsilon^\alpha. \quad (2.78)$$

В случае $\eta = 0$ корни характеристического уравнения

$$\left| \frac{D(\dot{H}, \dot{\varepsilon})}{D(H, \varepsilon)} - \mu \right| = 0, \quad (2.79)$$

есть

$$\mu_{1,2} = \frac{3\kappa\xi \pm \sqrt{9\kappa^2\xi^2 + 48\Lambda(1 + \zeta)}}{4}. \quad (2.80)$$

Критические точки $(H, \varepsilon) = (0, -2\Lambda/[\kappa(1 - \zeta)])$ есть расходящийся фокус если $\Lambda < -9\kappa^2\xi^2/[48(1 + \zeta)]$ или расходящийся узел если $\Lambda > -9\kappa^2\xi^2/[48(1 + \zeta)]$.

В случаях, проиллюстрированных Рисунками 2.21 и 2.23, $H \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. В случае, представленном на Рис. 2.22, наблюдается растущая осцилляция, ограниченная притягивающей параболой (2.72).

Интегральные кривые

При $\Lambda \geq 0$ решения, начинающиеся в верхней полуплоскости $H > 0$ не могут перейти на нижнюю. При $\Lambda < 0$ некоторые из решений могут перейти на нижнюю полуплоскость через сегмент $H = 0$ и $0 \leq \varepsilon \leq -\Lambda$ и больше не возвращаются, так как на этом сегменте $\dot{H}|_{H=0} < 0$.

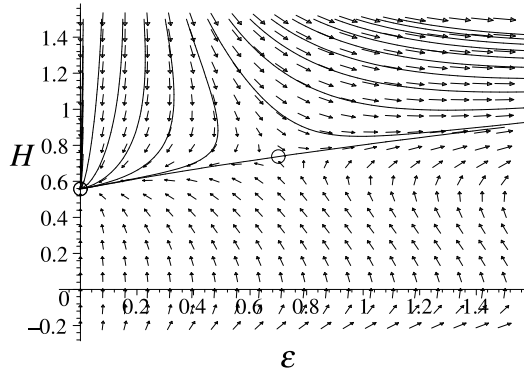


Рис. 2.17: Фазовая диаграмма на $H - \varepsilon$ плоскости при $\beta = 1.5$, $\Lambda = .933$, $B = .720$.

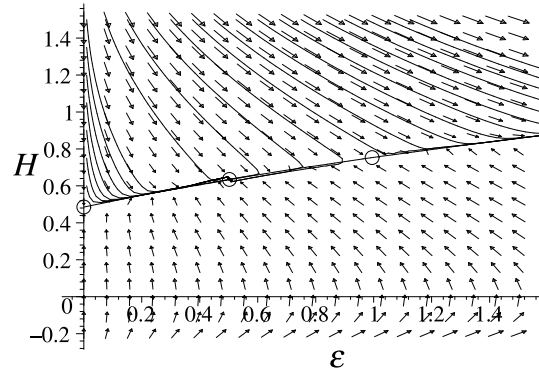


Рис. 2.18: Фазовая диаграмма на $H - \varepsilon$ плоскости при $\beta = .75$, $\Lambda = .707$, $B = .589$.

На Рис. 2.27 иллюстрирована Эволюция VI Вселенной соответствующей фазовой диаграмме, представленной на Рис. 2.26.

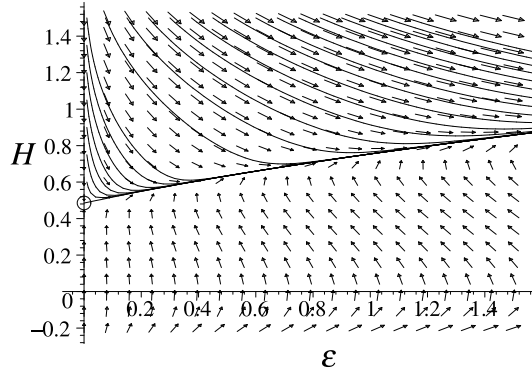


Рис. 2.19: Фазовая диаграмма на $H - \varepsilon$ плоскости при $\beta = .75$, $\Lambda = .707$, $B = .667$

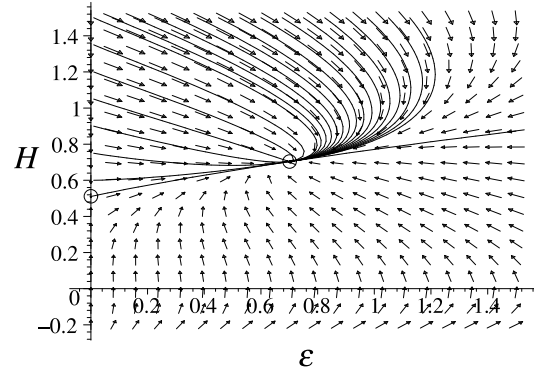


Рис. 2.20: Фазовая диаграмма на $H - \varepsilon$ плоскости при $\beta = .05$, $\Lambda = .785$, $B = .451$.

2.4.2 Система с нелинейным спинорным полем и вязкой жидкостью

Вернемся к системе уравнений для τ , H и ε . Для удобства вводим новую функцию $\nu = 1/\tau$. Исходная система уравнений тогда переписется в виде [267, 49, 50]

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (2.81a)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2}(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) - (3H^2 - \varepsilon - \Lambda) + \frac{1}{2}(m\nu + \lambda(n - 2)\nu^n), \quad (2.81b)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) + 4A\varepsilon^\alpha(3H^2 - \varepsilon - \Lambda) - 4A\varepsilon^\alpha[m\nu - \lambda\nu^n]. \quad (2.81c)$$

Заметим, что во всех системах плоскости $\nu = 0$ и $\varepsilon = 0$ являются динамически инвариантными подмножествами, которые делят пространство на четыре несообщающиеся части, поскольку

$$\dot{\nu}|_{\nu=0} = 0, \quad \text{and} \quad \dot{\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (2.82)$$

Заметим также, что $\nu < 0$ бессмысленно, если α и/или β не являются целыми.

Плоскость $\varepsilon = 0$ является притягивающим множеством для $H > 0$ и отталкивающим для $H < 0$, поскольку

$$\left. \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -3H(1 + \zeta). \quad (2.83)$$

Когда $H > 0$, плоскость $\varepsilon = 0$ оказывается притягивающей. Представляет интерес характер движения на самой плоскости, хотя это и не было физически значимо. В этом случае, т.е. при $\varepsilon = 0$, система, включающая спинорное поле (2.35) принимает

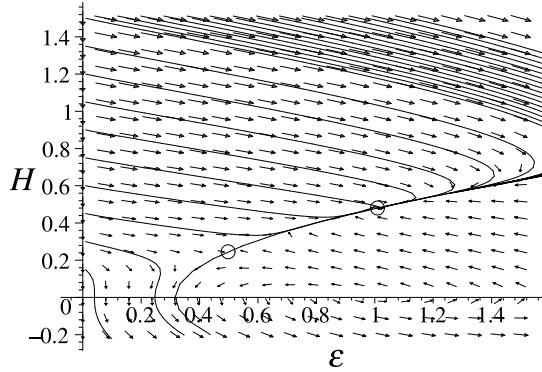


Рис. 2.21: Фазовая диаграмма на $H - \epsilon$ плоскости при $\beta = .05$, $\Lambda = -0.317$, $B = 0.933$

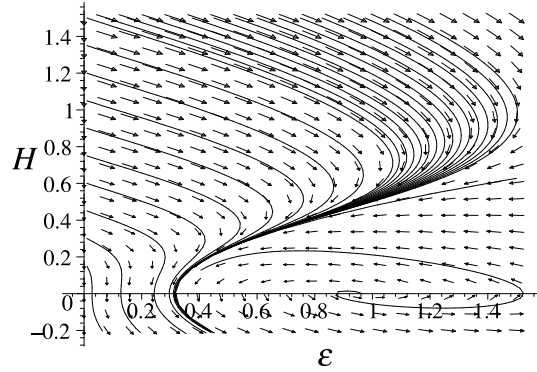


Рис. 2.22: Фазовая диаграмма на $H - \epsilon$ плоскости при $\beta = .05$, $\Lambda = -0.317$, $B = .667$.

вид

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (2.84a)$$

$$\dot{H} = -3H^2 + \Lambda + \frac{1}{2}(m\nu + \lambda(n-2)\nu^n). \quad (2.84b)$$

Решениями системы (2.84) являются кривые

$$3H^2 = C\nu^2 + m\nu - \Lambda - \frac{\lambda(n-2)\nu^n}{n-3}, \quad n > 3, \quad (2.85a)$$

$$3H^2 = C\nu^2 + m\nu - \Lambda - \nu^2 \ln(\nu), \quad n = 3, \quad (2.85b)$$

$$3H^2 = C\nu^2 + m\nu - \Lambda, \quad n = 2, \quad (2.85c)$$

где C - некоторая произвольная константа.

Характеристическое уравнение нетривиальных особых точек на плоскости $\epsilon = 0$ для системы (2.84) принимает вид

$$\lambda(n-2)\nu^n + m\nu + 2\Lambda = 0. \quad (2.86)$$

Оно имеет одно, два или ни одного решения в зависимости от перемен знаков в последовательности λ, m, Λ .

Трехмерная система (2.35) со спинорным полем в отсутствии обеих вязкостей, т.е. при $A = 0$ и $B = 0$ имеет первые интегралы

$$F_1 = \frac{\epsilon}{\nu^{1+\zeta}}, \quad (2.87a)$$

$$F_2 = \frac{(3H^2 - \epsilon - \Lambda - m\nu)}{\nu^2} + \lambda \frac{n-2}{n-3} \nu^{n-3}. \quad (2.87b)$$

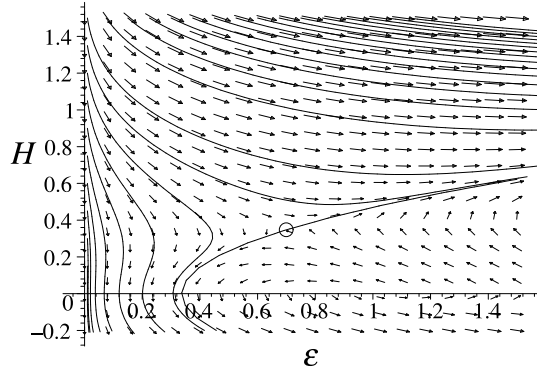


Рис. 2.23: Фазовая диаграмма на $H - \varepsilon$ плоскости при $\beta = .75$, $\Lambda = -.337$, $B = 1.169$.

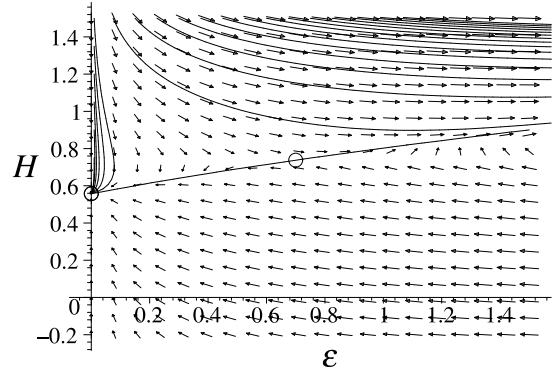


Рис. 2.24: Фазовая диаграмма на $H - \varepsilon$ плоскости при $\beta = 1.5$, $\Lambda = .933$, $B = .720$, $A = 1$, $\alpha = 1$.

Первый из них, (2.87a) остается первым интегралом и при введении вязкости второго рода ($B > 0$). Второй первый интеграл (2.87b) при $B > 0$ перестает быть инвариантом движения, однако "включение" объемной вязкости создает с течением времени знакоопределенное смещение поверхности, описываемой формулой (2.87b), что позволяет на качественном уровне, т.е. опираясь только на непрерывность, составить представление о возможных путях эволюции.

На $\nu = 0$ плоскости система (2.81) полностью совпадает с системой (2.35). Классификация вариантов поведения системы (2.81) на плоскости $\nu = 0$ представлена на Таблице 1.

2.4.3 Система с взаимодействующими спинорным и скалярным полями и вязкой жидкостью

Рассмотрим систему с взаимодействующими спинорным и скалярным полями в модели Бианки I, заполненной вязкой жидкостью. Как и раньше, вводим $\nu = 1/\tau$. Тогда исходная система принимает вид [268]

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (2.88a)$$

$$\dot{H} = \frac{\kappa}{2}(3\xi H - \omega) - (3H^2 - \kappa\varepsilon + \Lambda) + \frac{\kappa}{2}\left(m\nu + \frac{n\nu^{n+2}}{2(1 + \lambda\nu^n)^2}\right), \quad (2.88b)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3\xi H - \omega) + 4\eta(3H^2 - \kappa\varepsilon + \Lambda) - 4\eta\left[\kappa\left(m\nu + \frac{\nu^2}{2(1 + \lambda\nu^n)^2}\right)\right]. \quad (2.88c)$$

В присутствии скалярного поля система (2.88) при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (2.89a)$$

$$\dot{H} = -3H^2 - \Lambda + \frac{1}{2}\left(m\nu + \frac{\lambda n\nu^{2-n}}{2(\lambda + \nu^{-n})^2}\right). \quad (2.89b)$$

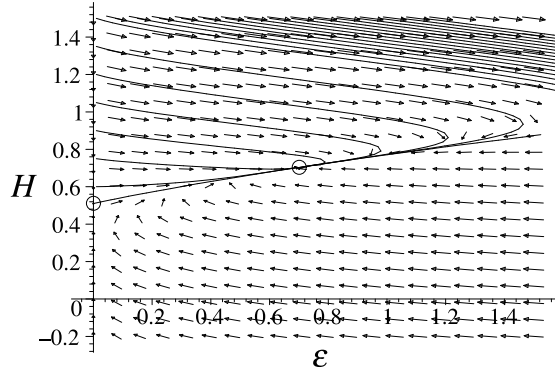


Рис. 2.25: Фазовая диаграмма на $H - \varepsilon$ плоскости при $\beta = .05$, $\Lambda = .785$, $B = .451$, $A = 1$, $\alpha = 1$, $\kappa = 1$.

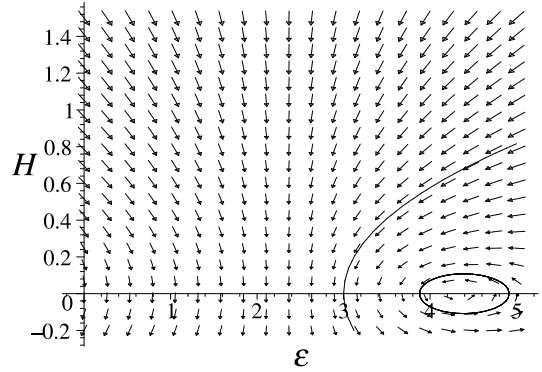


Рис. 2.26: Фазовая диаграмма на $H - \varepsilon$ плоскости при $\Lambda = -3$, $\zeta = 0.333$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$.

Решениями системы (2.89) являются кривые

$$H^2 = \frac{(6C\lambda - 1)\nu^{n+2} + 2\lambda m\nu^{n+1} + 2\lambda\Lambda\nu^n + 6C\nu^2 + 2m\nu + 2\Lambda}{6(\lambda\nu^n + 1)}, \quad (2.90)$$

где C - некоторая произвольная константа.

Характеристическое уравнение нетривиальных особых точек на плоскости $\varepsilon = 0$ для системы (2.88) принимает вид

$$2m\lambda^2\nu^{2n+1} + 4\Lambda\lambda^2\nu^{2n} + \lambda n\nu^{n+2} + 4m\lambda\nu^{n+1} + 8\Lambda\lambda\nu^n + 4\Lambda = 0. \quad (2.91)$$

Оно имеет одно, два или ни одного решения в зависимости от перемен знаков в последовательности. Классификация вариантов поведения системы (2.88) представлена в Таблицах 4 и 5.

Система (2.88) в отсутствии вязкости, т.е. при $\eta = 0$ и $\xi = 0$ имеет следующие интегралы:

$$F_1 = \frac{\varepsilon}{\nu^{1+\zeta}}, \quad (2.92a)$$

$$F_2 = \frac{(6H^2 - 2\varepsilon - 2\Lambda - 2m\nu)}{\nu^2} - \frac{1}{\lambda(\lambda\nu^n + 1)}. \quad (2.92b)$$

Второй из них, (2.92b) остается первым интегралом и после введения объемной вязкости ξ . Первый же из них, т.е. (2.92a) при $\xi \neq 0$ перестает быть интегралом движения. Тем не менее, введение объемной вязкости создает знакоопределенное смещение поверхности, заданной формулой (2.92a), что позволяет качественно, т.е. основываясь только на непрерывности составить представление о возможных путях эволюции.

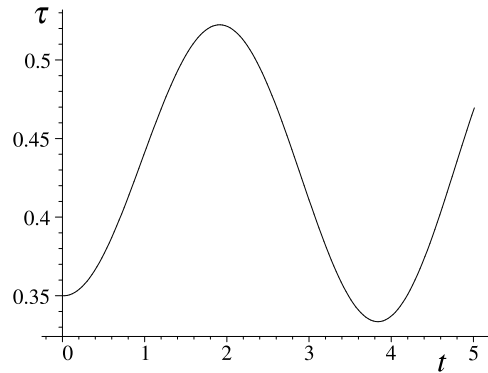


Рис. 2.27: Эволюция VI Вселенной соответствующей фазовой диаграмме, представленной на Рис. 2.26. Как видно, VI Вселенная в этом случае испытывает осцилляцию.

На $\nu = 0$ плоскости система (2.88) полностью совпадает с системой (2.35). Классификация вариантов поведения системы (2.81) на плоскости $\nu = 0$ представлена в Таблице 1.

В Таблице 1 приведена классификация поведения системы на границе $\nu = 0$, которая является также асимптотикой ряда режимов. В случаях a-d изменение параметров H и ϵ всегда ограничено, в случае f - они неограниченно возрастают. В случаях a, b, d, e, g, h, i имеются конечные предельные точки, к которым эволюция притягивается при подходящем выборе начальных значений. При $\Lambda > 0$ в случаях d и h эволюция может безвозвратно уйти в область $H < 0$, в то время как в других случаях эта область недоступна.

В таблицах 2-13 показаны фазовые портреты поведения системы со спинорным полем на плоскости $\epsilon = 0$. Вблизи этой плоскости система ведет себя сходным образом, что позволяет восстановить ее поведение во всем пространстве переменных состояния τ, H, ϵ .

Поведение существенно зависит от показателя нелинейности n и знака параметра нелинейности λ . При $n = 1, \lambda < 0$ в таблице 2 показано два типа поведения: в клетках a, b, d, когда система не стремится к $\nu = 0$ тогда как в остальных случаях это неверно. При этом, в отличие от остальных, в случае с гиперболическая точка разбивает плоскость на четыре области. При $\lambda > 0$, в таблице 3, видно, что последней особенности нет.

При $n = 2$ таблицы 4 и 5 показывают сходство с 3, но 4e и 5e и 5f разбиваются на две области.

Случай $n = 3$ и $n = 4$ сходны между собой. При $\lambda < 0$ на таблицах 6 и 8 система к $\nu = 0$ не стремится, варианты 6i и 8i содержат гиперболическую точку, разбивающую плоскость на четыре части. При $\lambda > 0$ в таблицах 7 и 9 демонстрируется обратное - возвратное поведение. Наличие дополнительных особых точек не меняет ситуации.

Таблицы 10 - 13 демонстрируют пограничный случай $\lambda = 0$.

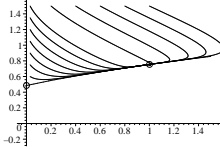
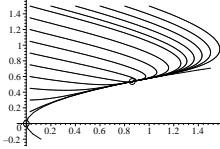
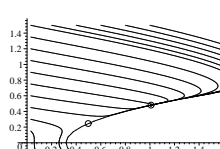
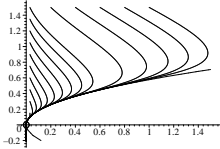
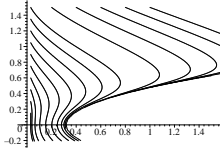
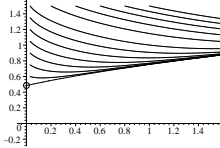
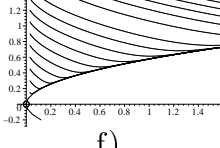
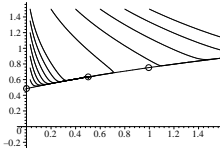
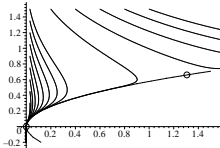
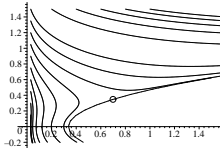
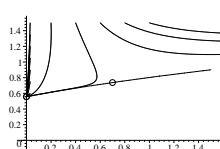
		$\Lambda > 0$	$\Lambda = 0$	$\Lambda < 0$
$\beta < 1/2$		 a)	 b)	
$\beta = 1/2$	$\frac{1+\zeta}{B} > \sqrt{3\kappa}$		 c)	 d)
	$\frac{1+\zeta}{B} < \sqrt{3\kappa}$		 f)	
$1/2 < \beta < 1$		 e)	 g)	 h)
	$\beta = 1$	$\frac{1+\zeta}{B} > 3\Lambda$		
	$\frac{1+\zeta}{B} < 3\Lambda$	 i)		
$\beta > 1$				

Таблица 1. Классификация качественно различных типов эволюции (фазовых портретов) в зависимости от параметров β , Λ and $(1 + \zeta)/B$ в плоскости $\nu = 0$.

При включенном скалярном поле в таблицах 14 - 25 можно увидеть более сложные особенности поведения. При $\lambda < 0$ возникает характерная прямая интегральная линия, в действительности соответствующая точке разрыва производной по времени от τ . Слева от нее в 14, 16, 18, 20, т.е. при $\Lambda < 0$ наблюдается циклическое поведение, справа - нециклическое. при $\Lambda > 0$ следует вспомнить о наличии двух особых точек на границе $\nu = 0$, нарушающих ожидаемую цикличность.

Таблицы 15, 17, 19 и 21 показывают сходство поведения со скалярным и спинорным полем с поведением только со спинорным полем при $\lambda > 0$.

Таблицы 22 - 25 демонстрируют пограничный случай $\lambda = 0$ с включенным и спинорным и скалярным полями.

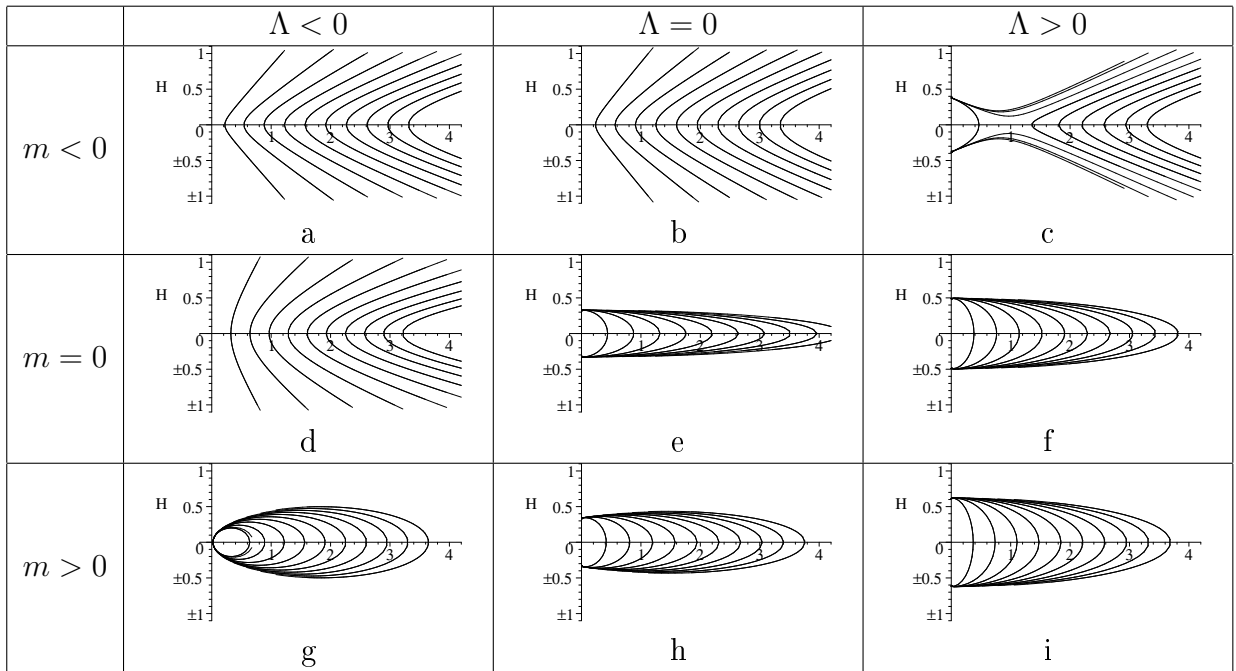


Таблица 2. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 1$ и $\lambda < 0$.

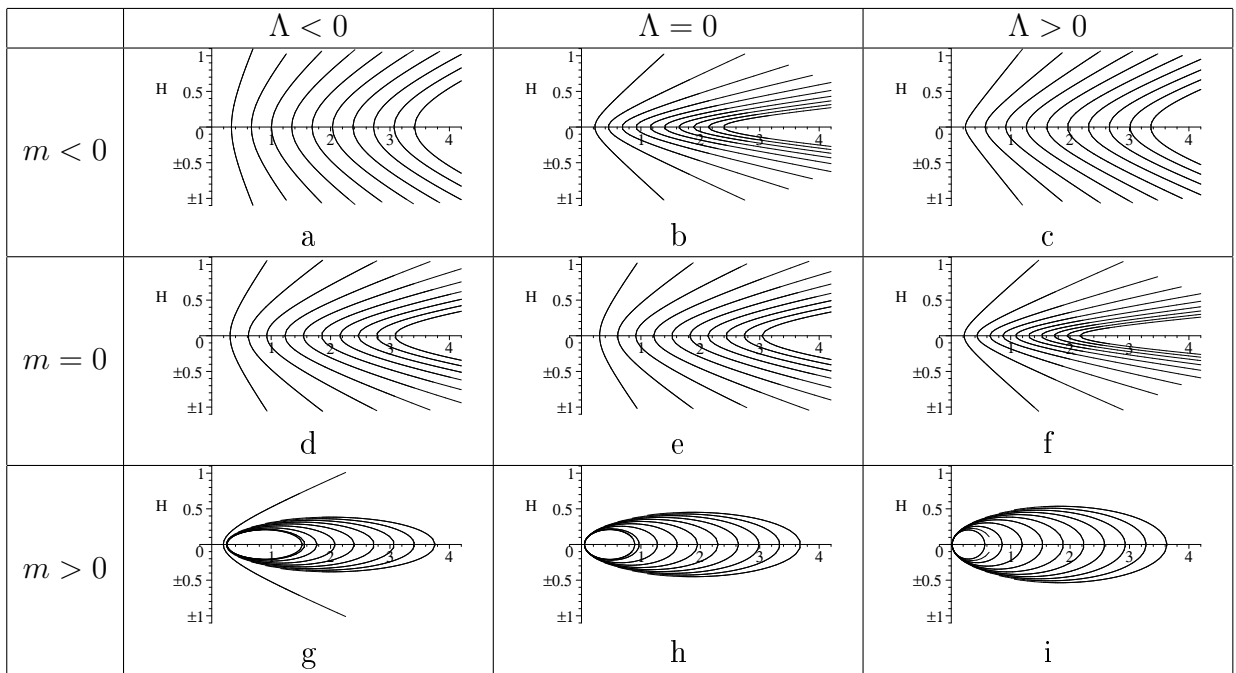
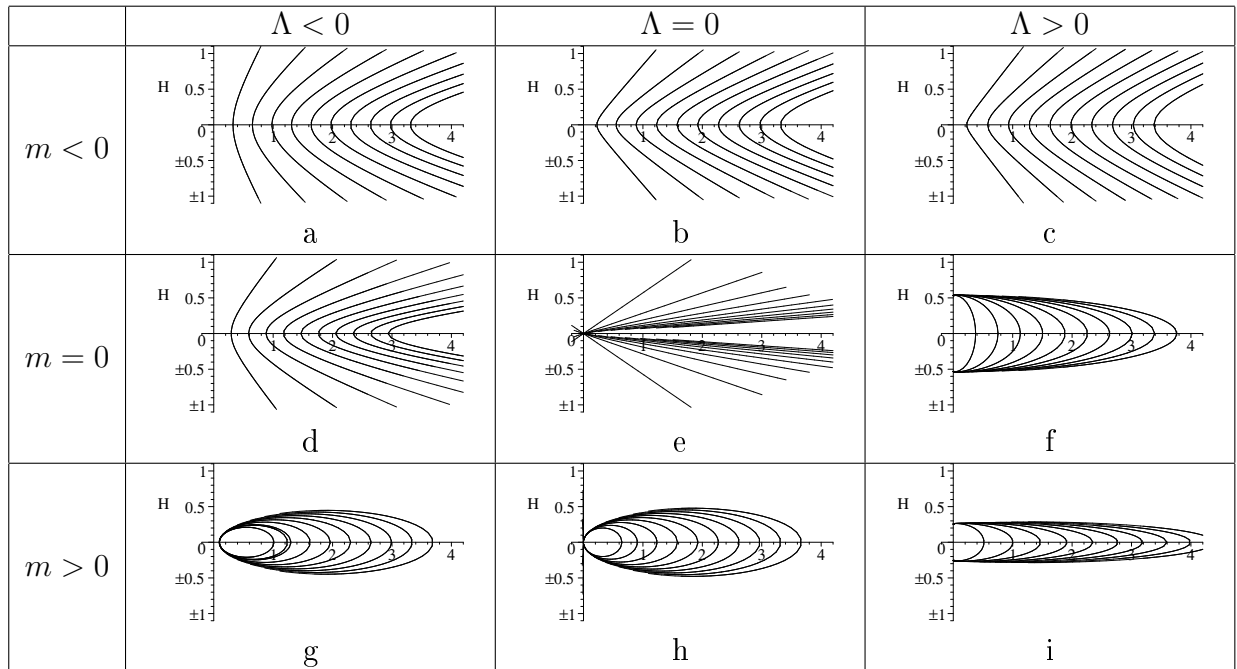
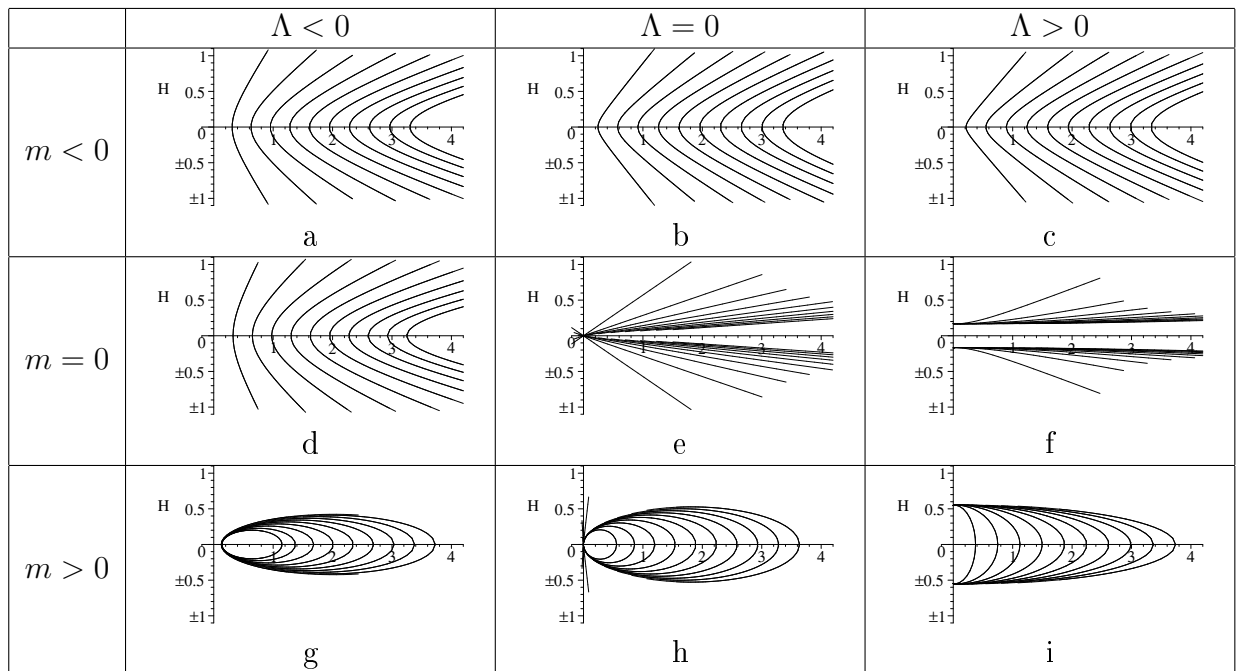


Таблица 3. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 1$ и $\lambda > 0$.

Таблица 4. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 2$ и $\lambda < 0$.Таблица 5. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 2$ и $\lambda > 0$.

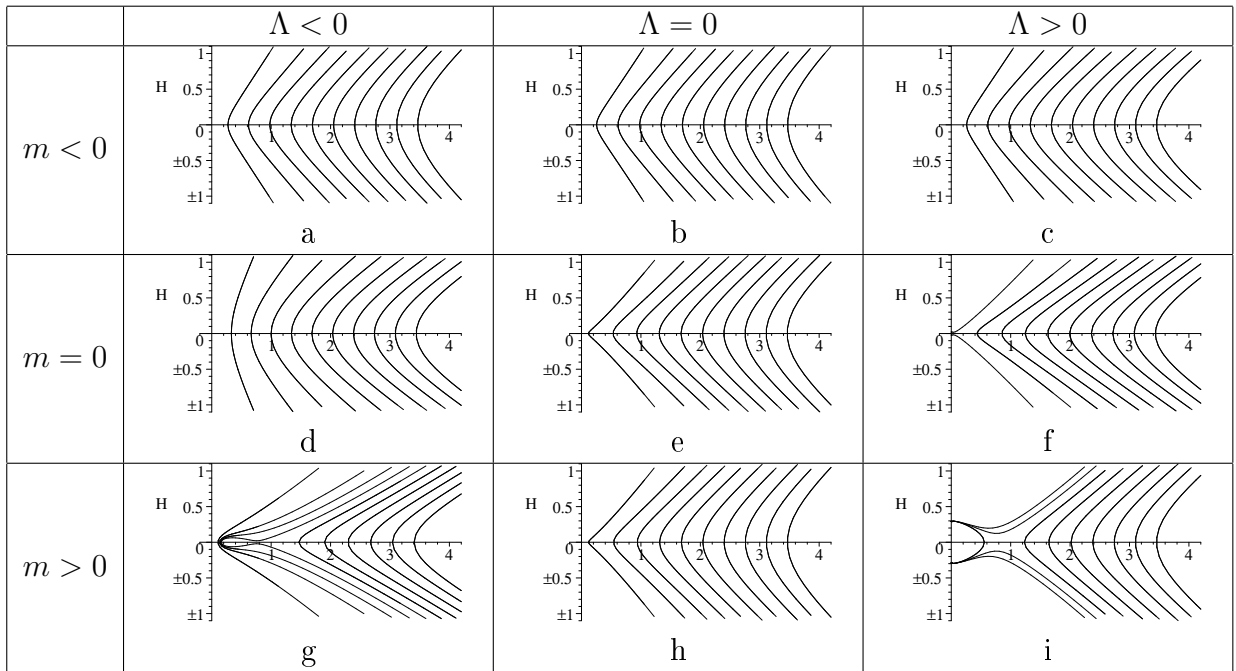


Таблица 6. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 3$ и $\lambda < 0$.

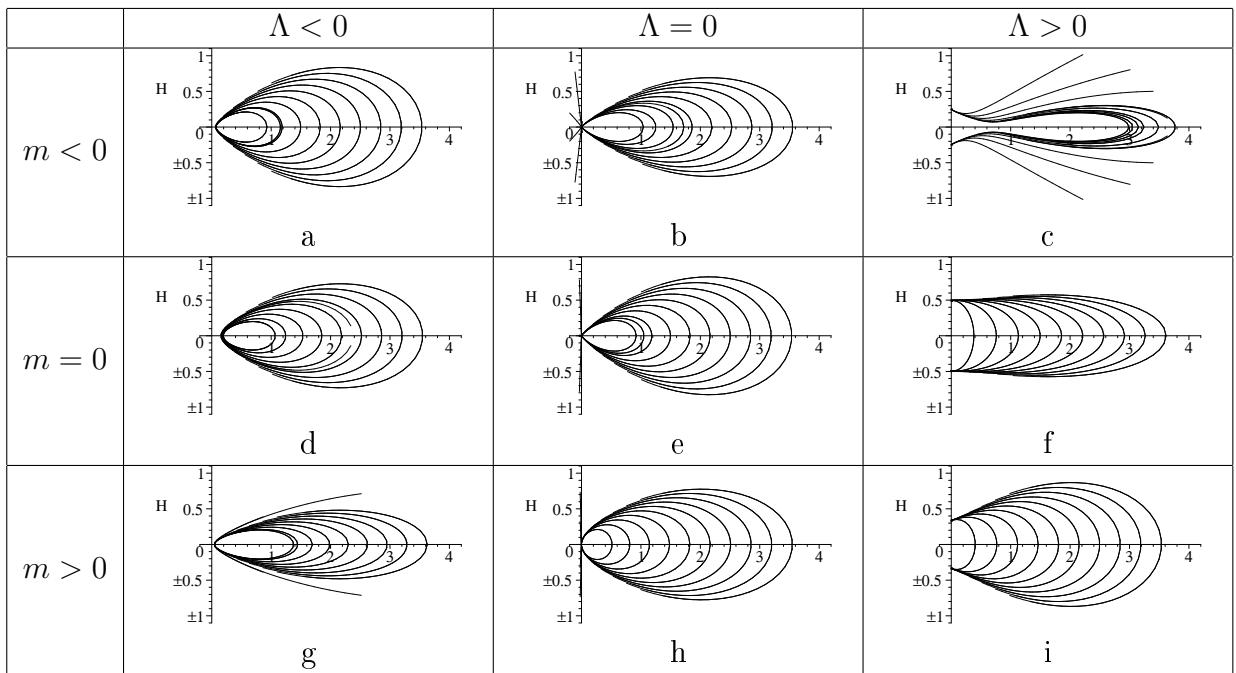
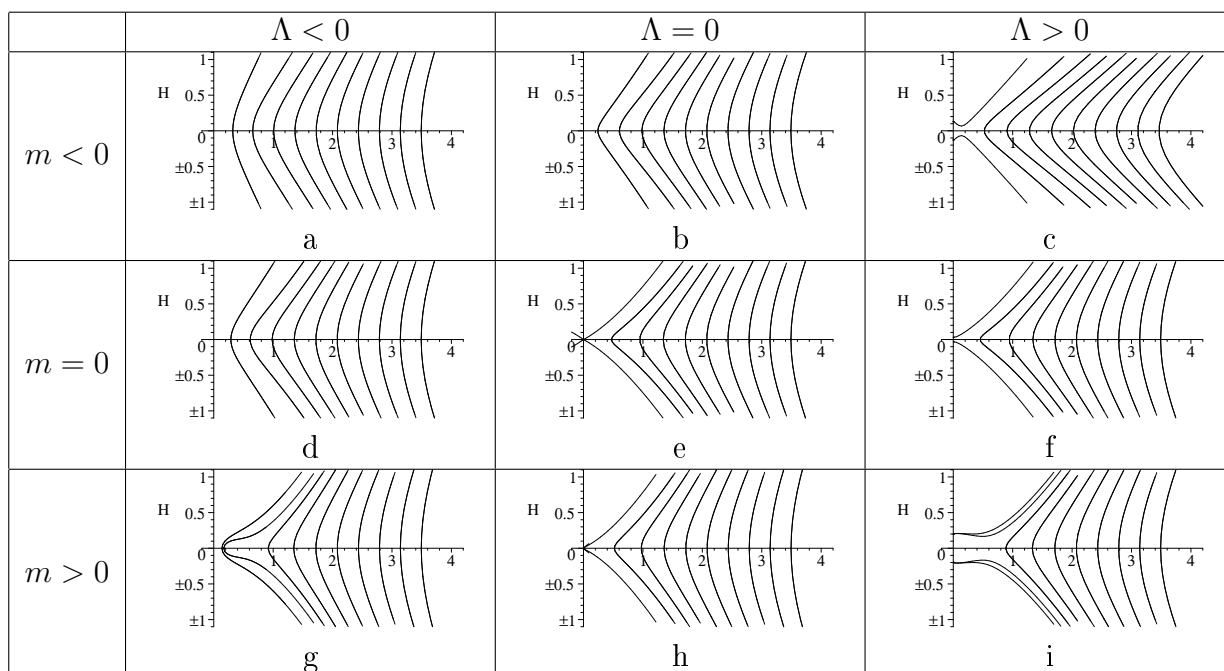
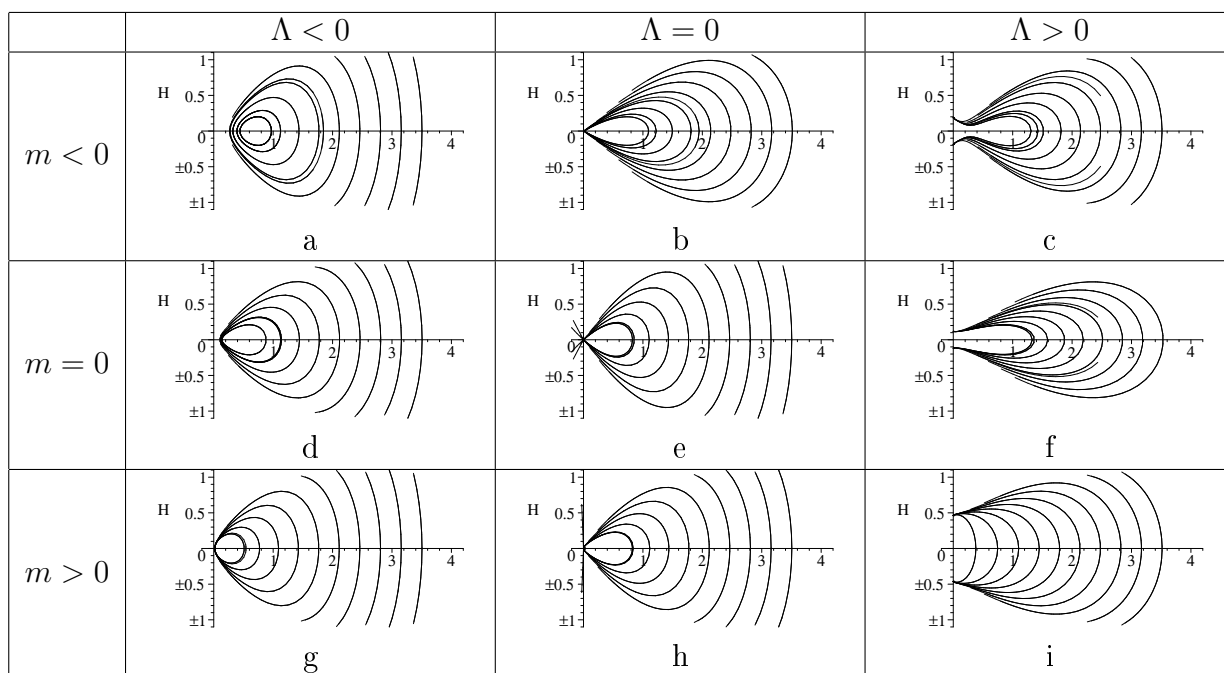


Таблица 7. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 3$ и $\lambda > 0$.

Таблица 8. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 4$ и $\lambda < 0$.Таблица 9. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 4$ и $\lambda > 0$.

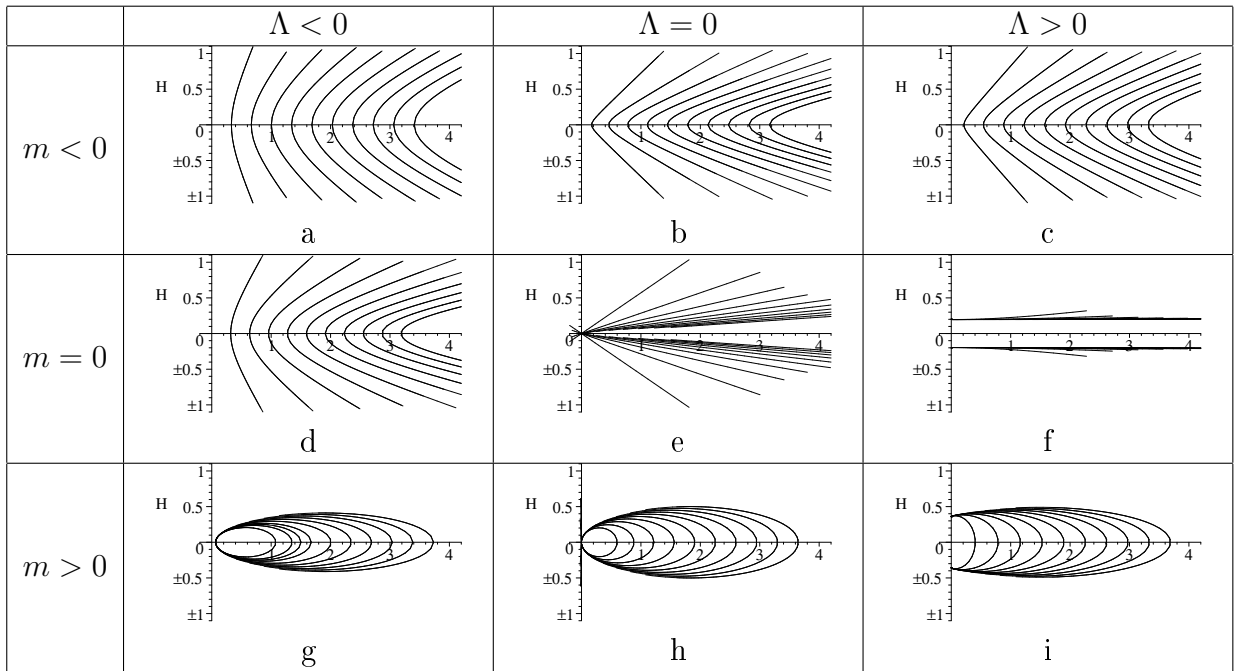


Таблица 10. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 1$ и $\lambda = 0$.

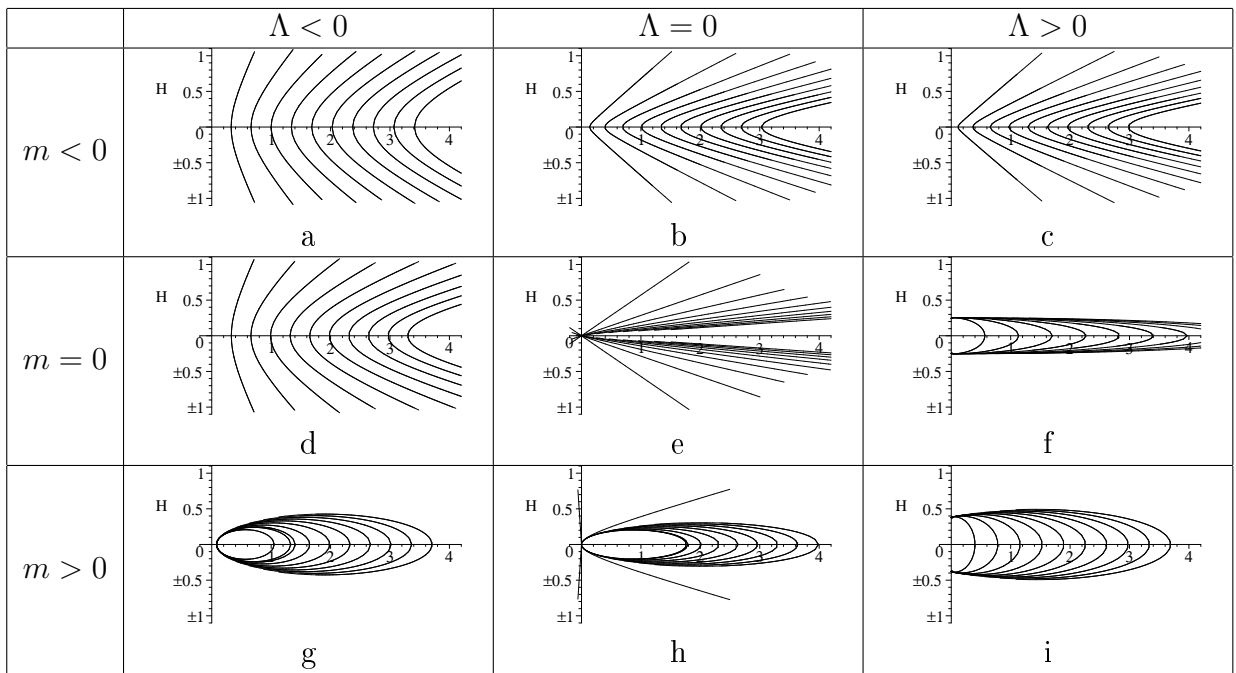
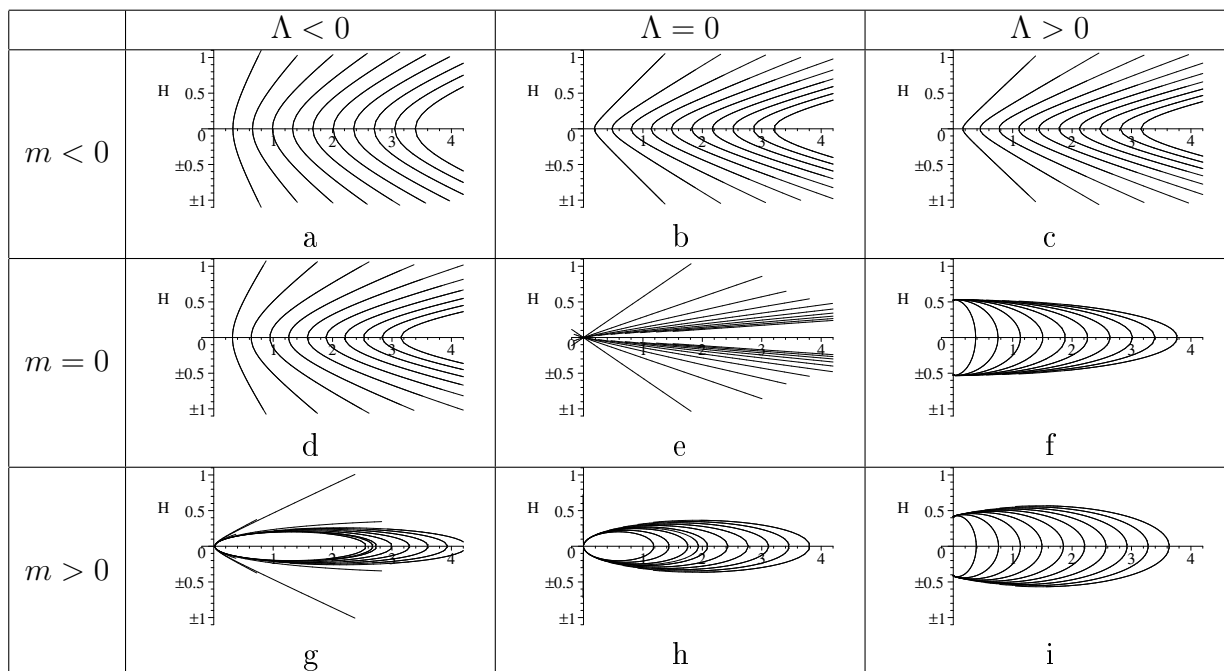
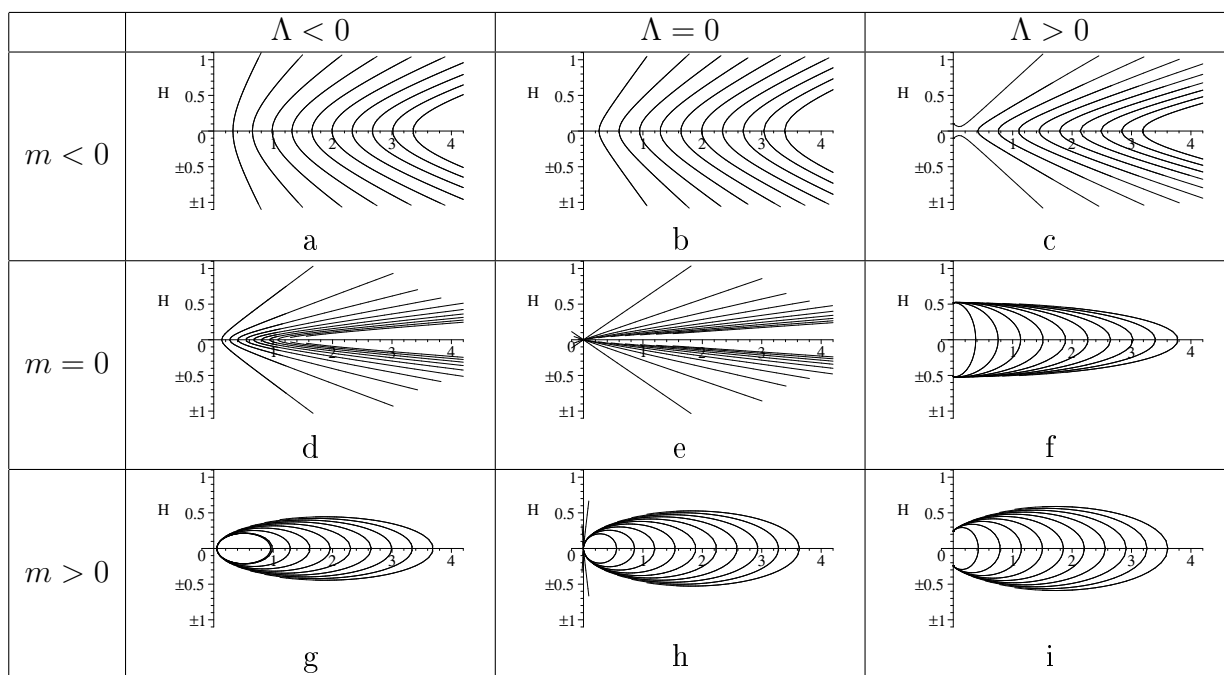


Таблица 11. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 2$ и $\lambda = 0$.

Таблица 12. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 3$ и $\lambda = 0$.Таблица 13. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 4$ и $\lambda = 0$.

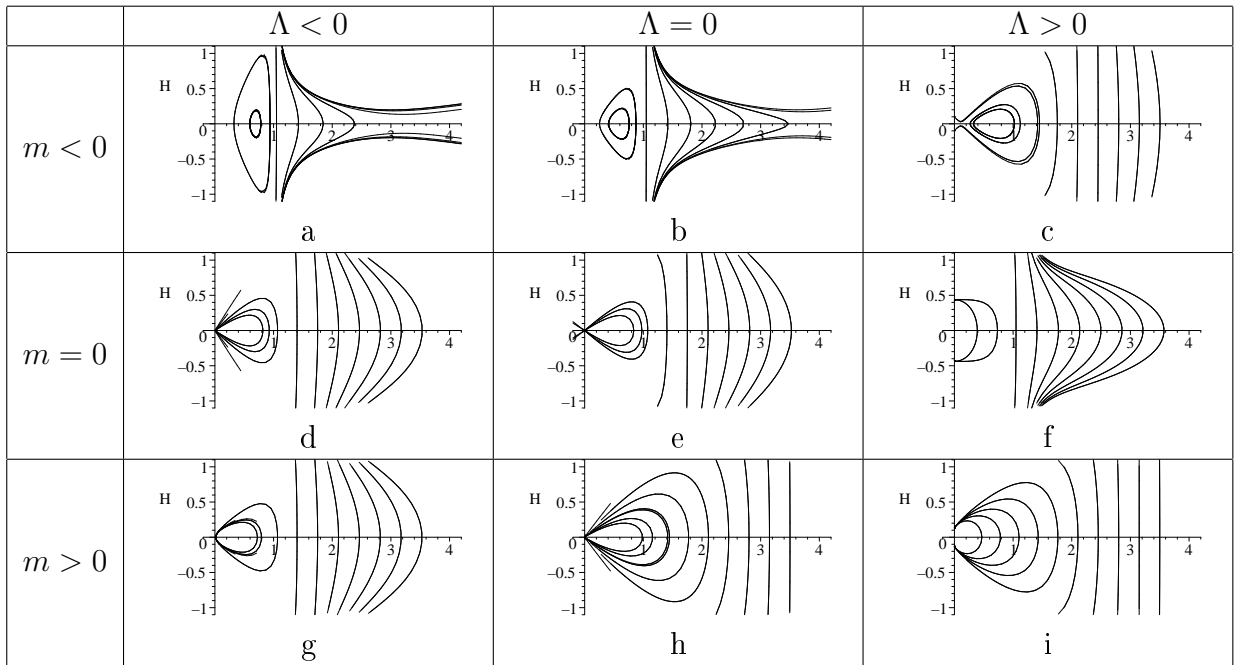


Таблица 14. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 1$ и $\lambda < 0$.

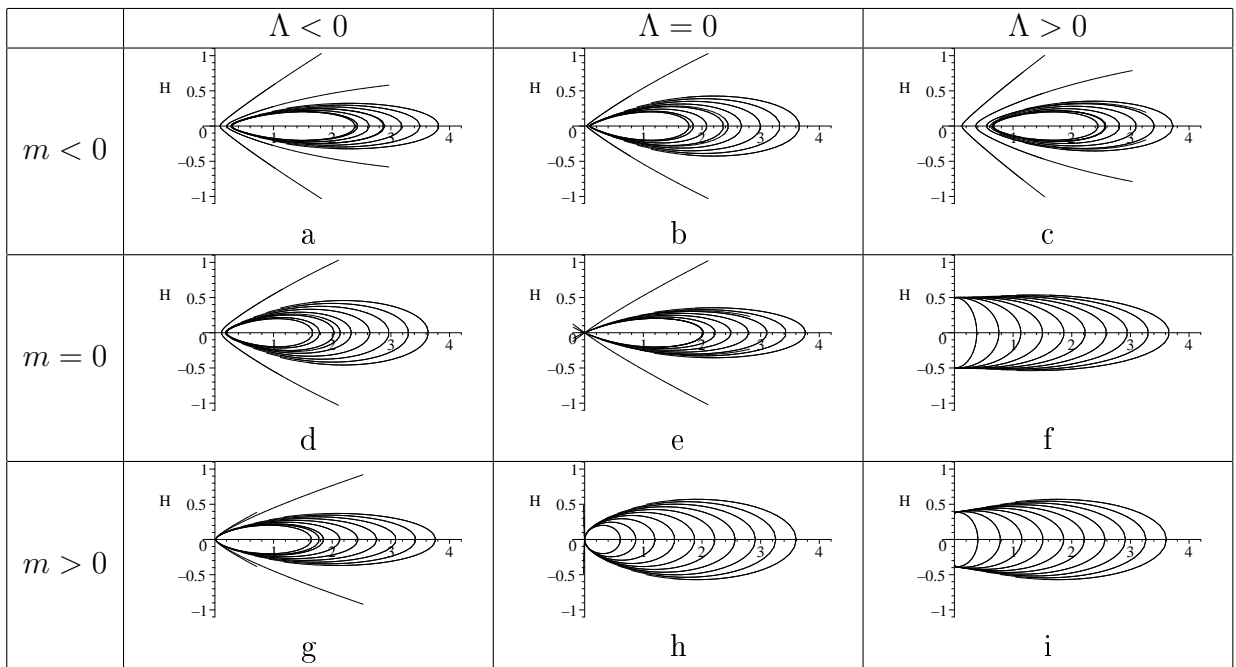
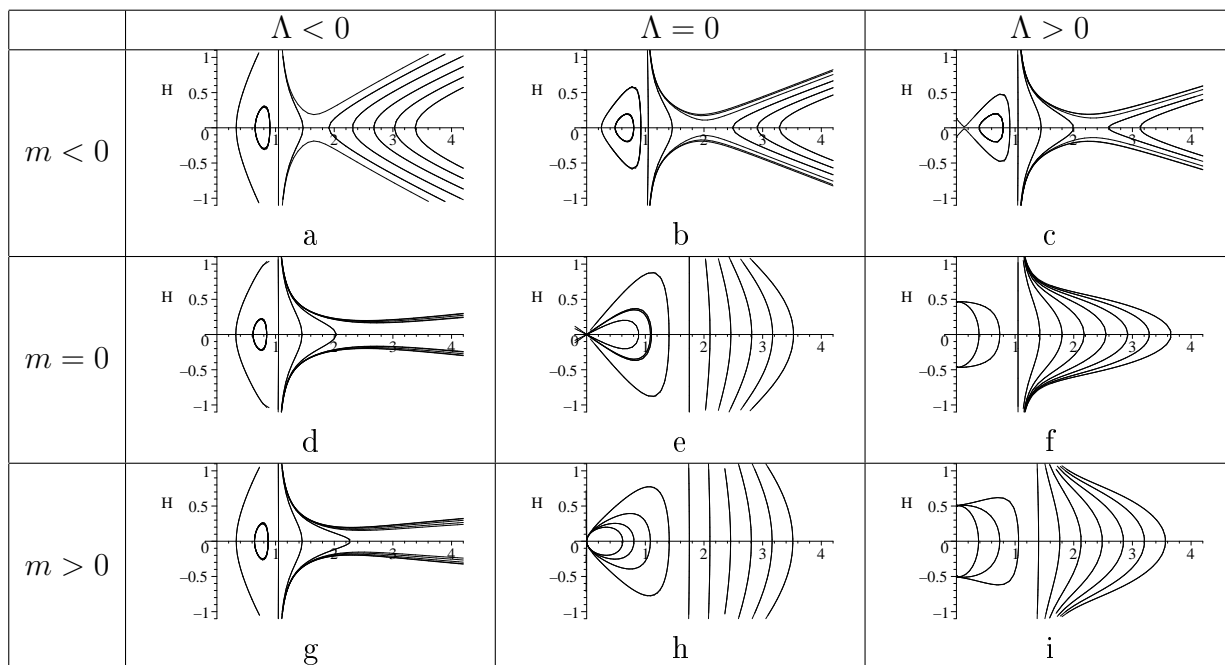
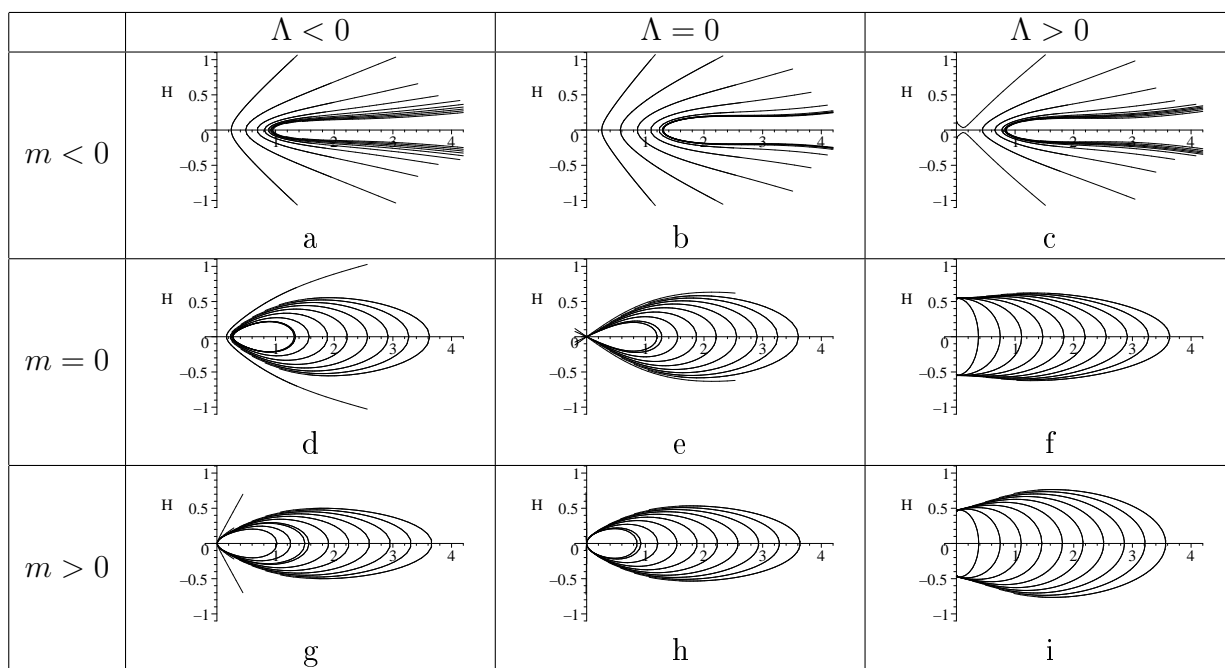


Таблица 15. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 1$ и $\lambda > 0$.

Таблица 16. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 2$ и $\lambda < 0$.Таблица 17. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 2$ и $\lambda > 0$.

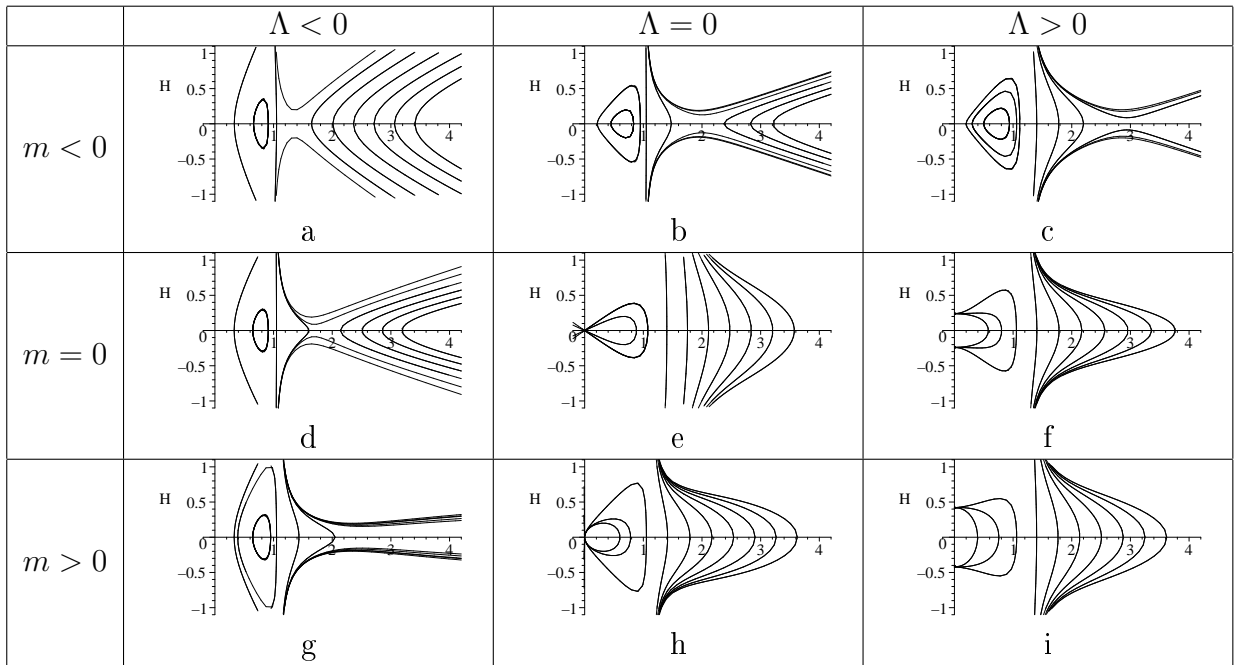


Таблица 18. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 3$ и $\lambda < 0$.

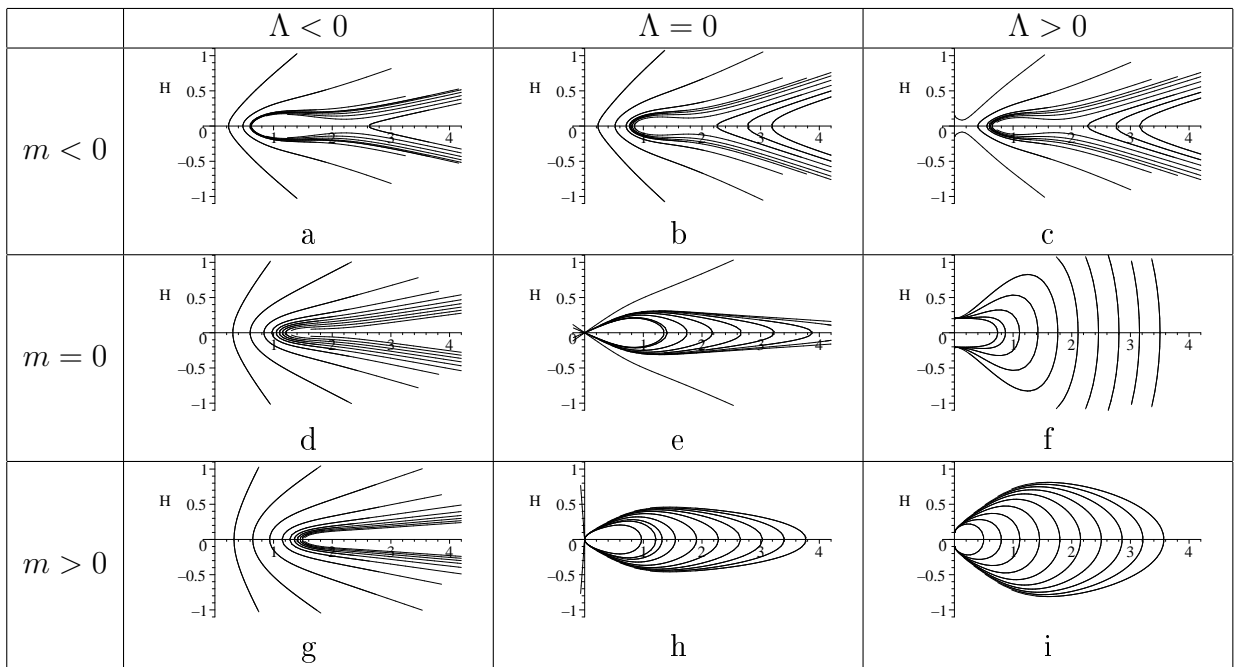
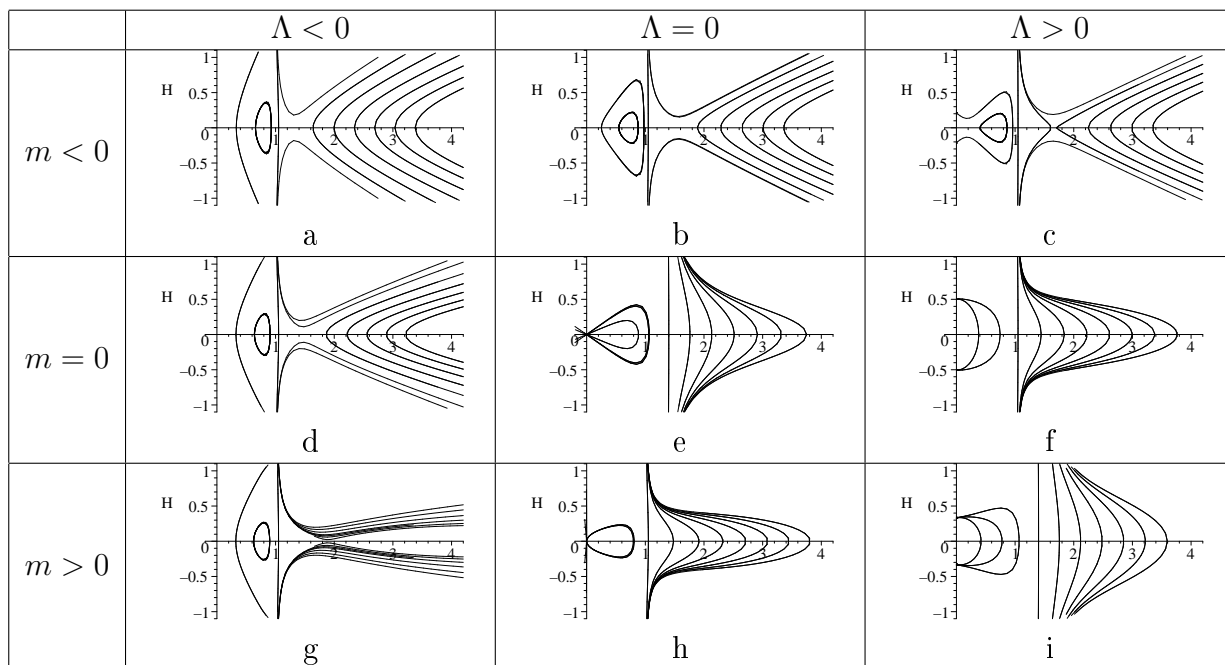
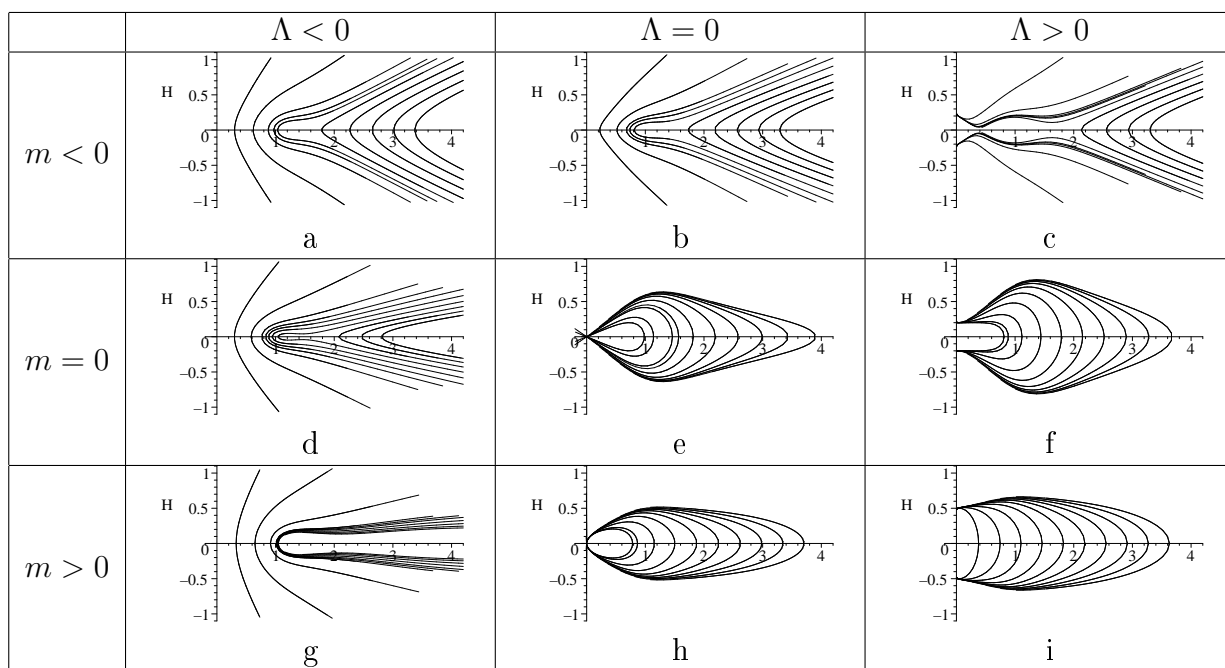


Таблица 19. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 3$ и $\lambda > 0$.

Таблица 20. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 4$ и $\lambda < 0$.Таблица 21. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 4$ и $\lambda > 0$.

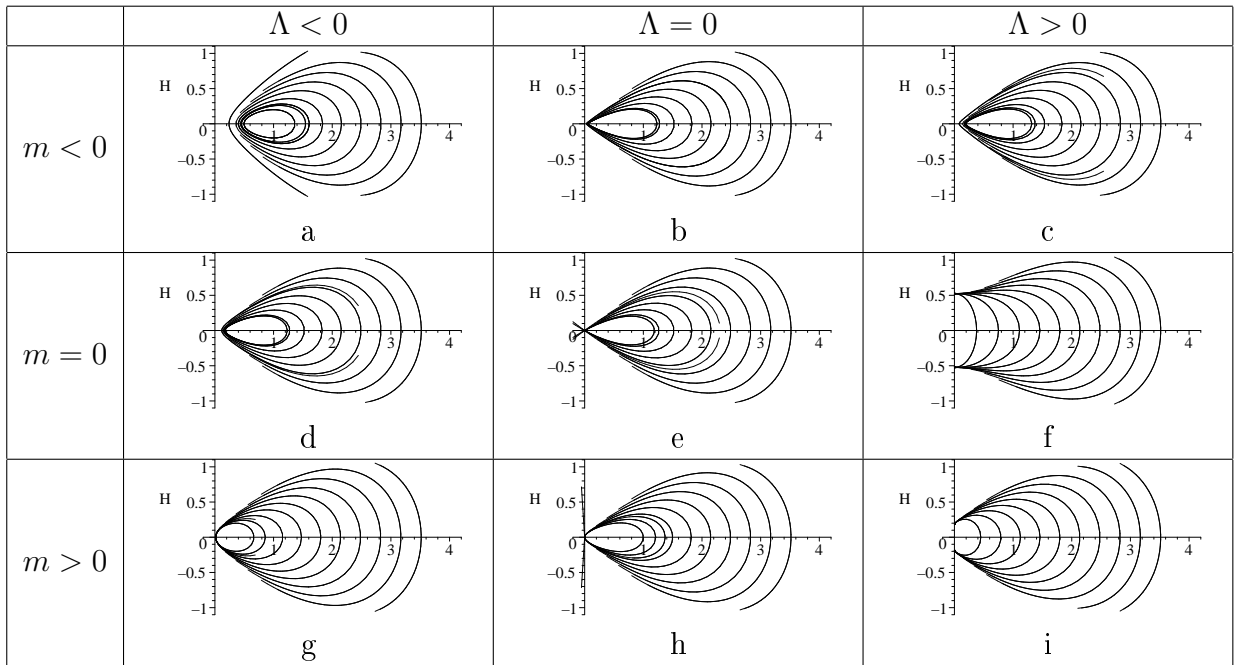


Таблица 22. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 1$ и $\lambda = 0$.

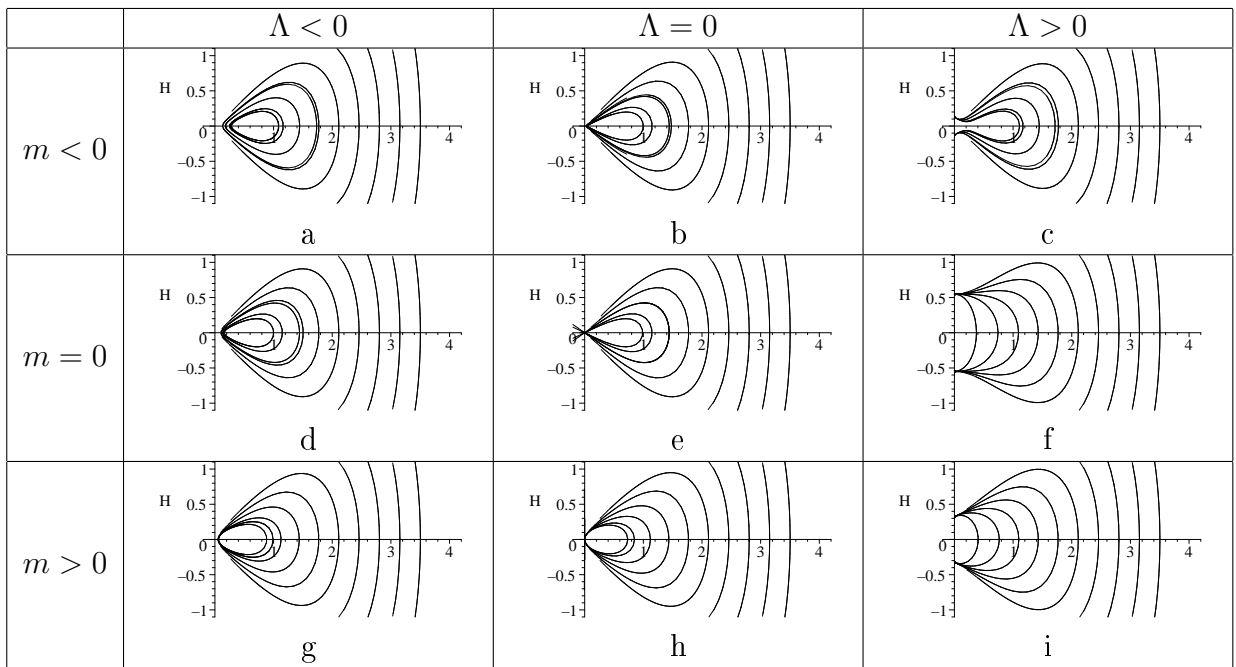
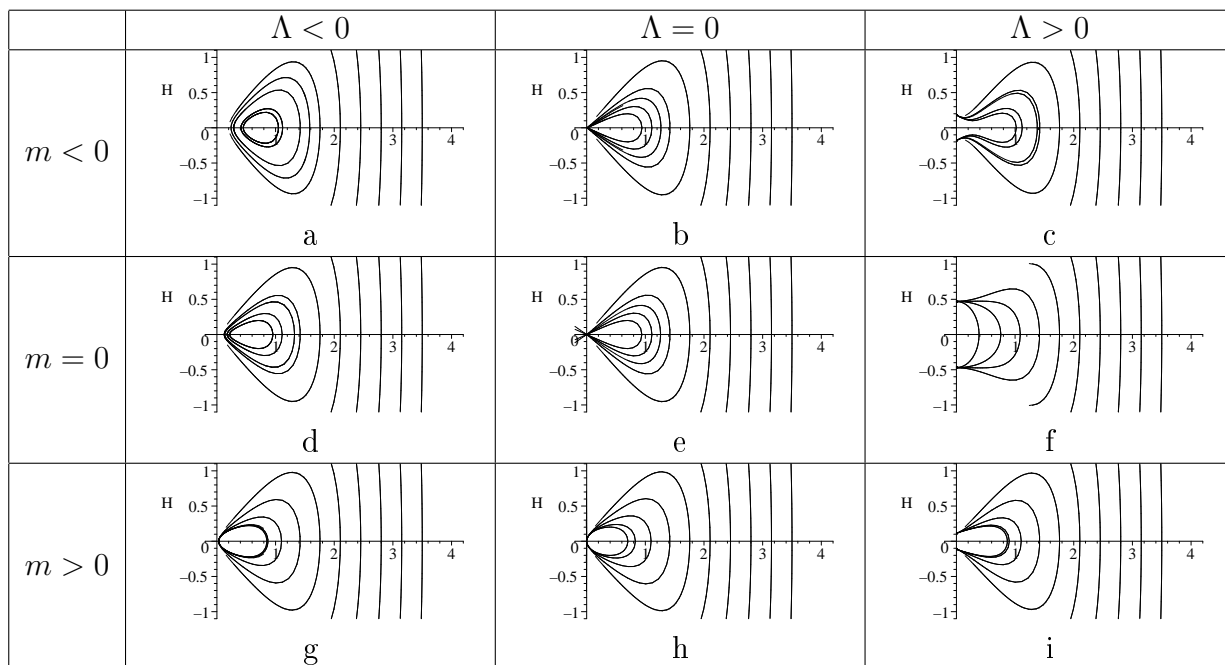
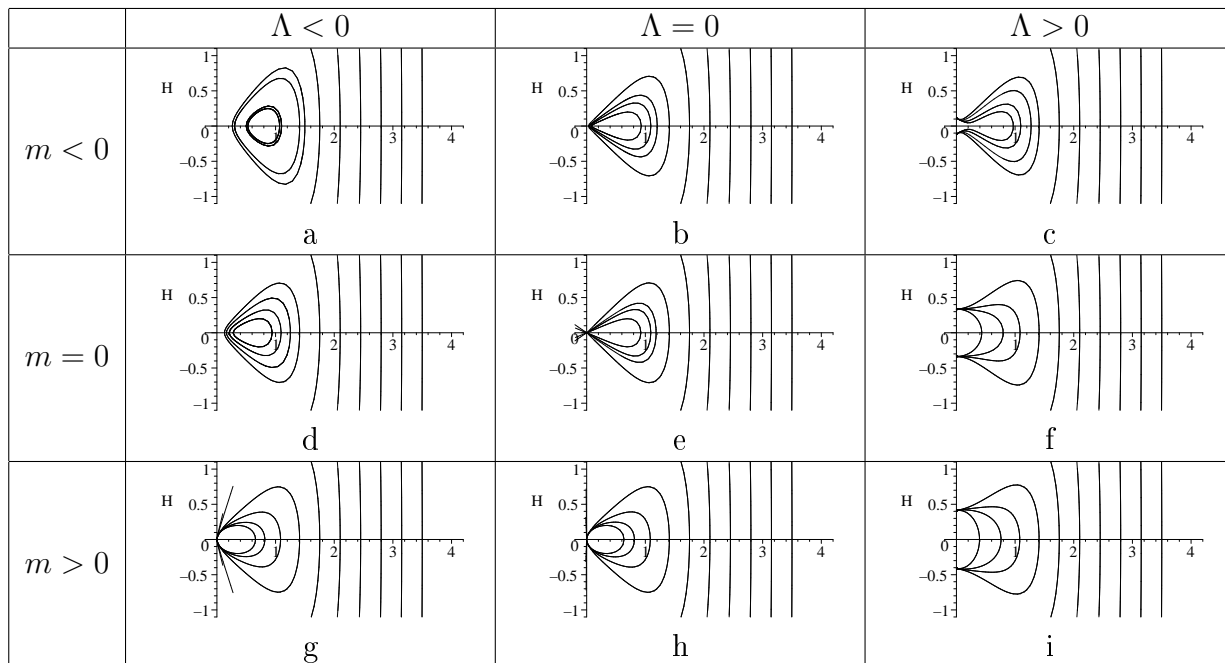


Таблица 23. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 2$ и $\lambda = 0$.

Таблица 24. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 3$ и $\lambda = 0$.Таблица 25. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 4$ и $\lambda = 0$.

На рисунках 2.28 - 2.45 мы иллюстрируем масштабный объем $\tau(t)$ [Рис. 2.28, 2.31, 2.34, 2.37, 2.40 и 2.43], плотность энергии $\varepsilon(t)$ [Рис. 2.29, 2.32, 2.35, 2.38, 2.41 и 2.44] и фазовой портрет в ν, H, ε пространстве [Рис. 2.30, 2.33, 2.36, 2.39, 2.42 и 2.45]. Рисунки 2.28 - 2.39 соответствуют позиции c, g, h, и i в таблице 3. При этом мы использовали следующие значения параметров: $\alpha = 4, \beta = 1, \zeta = 0.5, A = 1, B = 1$ and $n = 4$. Позиции h и i соответствуют геометрически циклическому режиму, но позиция h имеет фиксированную точку на циклической интегральной кривой, следовательно соответствует промежуточному случаю между периодической и непериодической. Позиции c и g соответствуют непериодической эволюции.

Жирная черная линия в 3D рисунке [Рис. 2.30, 2.33, 2.36, 2.39, 2.42 и 2.45] соответствует функциям $\tau(t)$ и $\varepsilon(t)$, представленным в предыдущих рисунках [Рис. 2.28, 2.31, 2.34, 2.37, 2.40, 2.43, 2.29, 2.32, 2.35, 2.38, 2.41, 2.44]. Рисунки 2.28, 2.29, 2.30 и 2.37, 2.38, 2.39 соответствуют случаю k таблицы 1, рисунки 2.31, 2.32, 2.33 случаю i и рисунки 2.34, 2.35, 2.36 случаю h, соответственно.

На рисунках 2.28, 2.29 и 2.30 показаны τ, ε и фазовой портрет в ε, H, ν пространстве для отрицательной m ($m = -0.1$), положительной Λ ($\Lambda = 0.1$) и отрицательной константы связи λ ($\lambda = -1$). И τ и ε изначально растут и после достижения некоторого максимума начинают уменьшаться и в конце концов останавливаются при некоторых конечных значениях так, что H стремится к $-\infty$.

Здесь мы использовали отрицательное значение массы для спинорного поля. На самом деле это отнюдь не означает, что спинорное поле имеет отрицательную массу. Вводя отрицательную массу мы просто поставили отрицательный знак перед массовым членом в уравнениях (2.51) и (2.64). Напомним, что в отличие от лагранжиана скалярного поля, где знак перед массовым членом имеет критическое значение, в случае спинорного поля все это выглядит совершенно по иному. Чтобы вывести уравнение Дирака мы потребуем, чтобы волновая функция ψ подчинялась уравнению Клейна-Гордона

$$(\square - m^2)\psi = 0. \quad (2.93)$$

Все это нужно для того, чтобы эта функция описывала свободную частицу с массой m поскольку это уравнение требует удовлетворения отношения между энергией и импульсом свободной частицы $p^2 = m^2c^2$. Для того, чтобы функция ψ подчинялась уравнению (2.93), мы также можем потребовать, чтобы она удовлетворяла одному и следующим уравнению [9]

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0, \quad \text{or} \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (2.94)$$

Оба они могут быть получены из лагранжиана

$$L = \frac{i}{2}[\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi] \pm m\bar{\psi}\psi. \quad (2.95)$$

Таким образом мы видим, что знак перед массовым членом в лагранжиане (2.95) дает только другой набор уравнения Дирака, в частности, уравнения для ψ и $\bar{\psi}$ поменяются местами.

Рисунки 2.31, 2.32 и 2.33 соответствуют случаю с $m = 0.1$, $\Lambda = -0.1$, и $\lambda = 0.1$. В этом случае в начальной стадии имеется осциллирующий режим расширения (как это можно было ожидать при отрицательной Λ), но в конечном счете все кончается большим Разрывом (big crunch).

Рисунки 2.34, 2.35 и 2.36 соответствуют параметрам $m = 0.1$, $\Lambda = 0$, и $\lambda = 0.1$, т.е., случаю без космологической постоянной. Как видно, в этом случае и τ и ε растут со временем. H в данном случае положительная, быстро растет в начальной стадии, но через некоторое время стремится к некоторому конечному значению. В этом случае имеется сингулярность в будущем похожая на большой разрыв (big rip). Отметим, что в случае идеальной жидкости большой разрыв возникает при наличии фантомной темной энергии (phantom dark energy), тогда как здесь это происходит благодаря вязкой жидкости и спинорному полю.

На рисунках 2.37, 2.38 и 2.39 мы иллюстрируем соответствующие функции и их фазовой портрет при $m = 0.1$, $\Lambda = 0.1$, и $\lambda = 0.1$. Как можно было ожидать, положительная Λ приводит к расширенному режиму эволюции при котором плотность энергии стремится к нулю.

При $m = 4$, $\Lambda = -1$, и $\lambda = -1$ имеем неперриодический режим эволюции [см. Рис. 2.40]. Но в отличие от большего Разрыва когда в точке пространственно-временной сингулярности ($\tau = 0$) плотность энергии стремится к ∞ , в рассматриваемом случае имеем максимальное, но конечное значение для ε [см. Рис. 2.41]. Соответствующий фазовой портрет проиллюстрирован на рисунке 2.42. Как видно, независимо от начальных условия, в ходе эволюции Вселенная сжимается в точку ($\tau \rightarrow 0$).

Наконец, в рисунках 2.43, 2.44 и 2.45 иллюстрируем τ , ε и фазовой портрет в ε, H, ν пространстве при $m = 1$, $\Lambda = -10$, и $\lambda = 1$. В зависимости от начальных условий в этом случае имеем или неперриодический или осциллирующий режим эволюции. Случай неперриодической эволюции как и ожидалось заканчивается с большим Разрывом. В случае осциллирующего режима эволюции с τ будучи конечным и нетривиальным и H конечным, ε стремится к ∞ в конечном интервале времени.

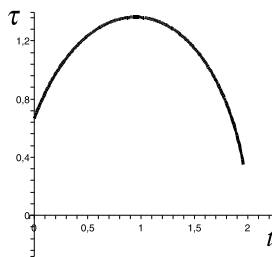


Рис. 2.28: Эволюция масштабного объема $\tau = 1/\nu$.

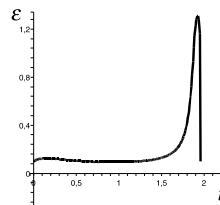


Рис. 2.29: Эволюция плотности энергии.

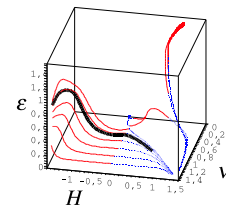


Рис. 2.30: 3D вид в ν, H, ε пространстве.

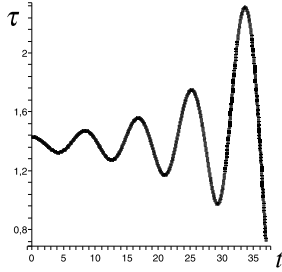


Рис. 2.31: Эволюция масштабного объема $\tau = 1/\nu$.

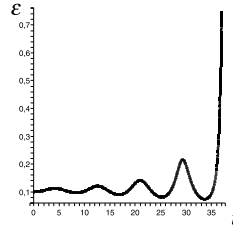


Рис. 2.32: Эволюция плотности энергии.

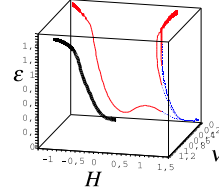


Рис. 2.33: 3D вид в ν, H, ϵ пространстве.

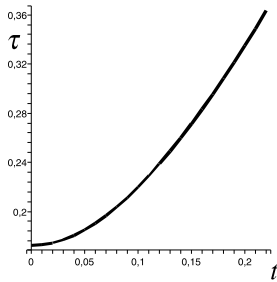


Рис. 2.34: Эволюция масштабного объема $\tau = 1/\nu$.

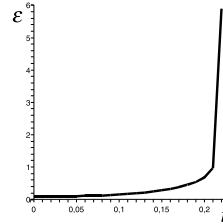


Рис. 2.35: Эволюция плотности энергии.

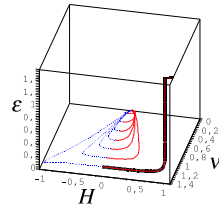


Рис. 2.36: 3D вид в ν, H, ϵ пространстве.

2.4.4 Качественный анализ полной системы

Теперь с помощью таблиц 1, 2 и 3 и основываясь на непрерывной зависимости полей скоростей от координат ν, H, ϵ фазового пространства будем восстанавливать качественное представление о пространственном фазовом портрете.

Для того, чтобы полностью охватить бесконечное пространство, отобразим его в параллелепипед, применив арктангенс к каждой координате. В последующем на иллюстрирующих рисунках нижняя горизонтальная плоскость будет представлять поверхность $\epsilon = 0$.

Следует заметить, что введение спинорного поля заметно усложняет эволюцию системы. В противоположность к случаю без спинорного поля, начальные условия с $H < 0$ уже не препятствуют во многих случаях проникновению в полупространство $H > 0$ благодаря изменению масштабного параметра, и только после этого со стороны больших значений H и при приближении к плоскости $\nu = 0$ вновь приходим к

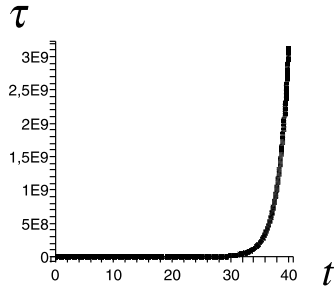


Рис. 2.37: Эволюция масштабного объема $\tau = 1/\nu$.

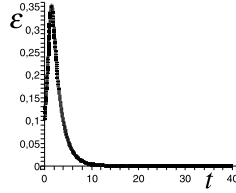


Рис. 2.38: Эволюция плотности энергии.

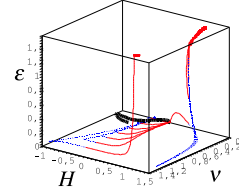


Рис. 2.39: 3D вид в ν, H, ϵ пространстве.

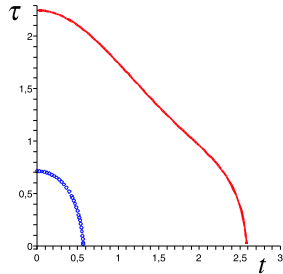


Рис. 2.40: Эволюция масштабного объема $\tau = 1/\nu$.

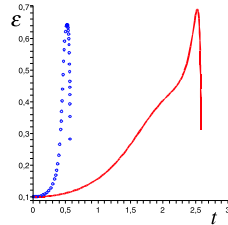


Рис. 2.41: Эволюция плотности энергии.

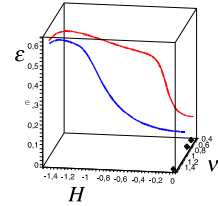


Рис. 2.42: 3D вид в ν, H, ϵ пространстве.

сценариям, классифицированным в Таблице 1. Около границ $\epsilon = 0$ и $\nu = 0$ интегральные кривые близки к интегральным кривым на границах. Вследствие непрерывности полей скоростей это всегда верно на некоторых конечных отрезках времени, в нашем случае это верно даже и для промежутков времени, стремящихся к бесконечности, если только при этом сохраняется близость к границе (предельные точки, например).

Общим свойством всех случаев является то, что в полупространстве $H > 0$ вектора скоростей направлены к плоскости $\epsilon = 0$, в то время как в другой половине - от нее. В конечном счете, интегральные кривые стремятся к $\epsilon = 0$, хотя не обязательно достигают ее.

На Рис. 2.48 - 2.55 мы показали плотность энергии $\epsilon(t)$ [Рис. 2.55, 2.52, 2.49, 2.46], масштабный параметр $\tau(t)$ [Рис. 2.56, 2.53, 2.50, 2.47] и фазовый портрет в пространстве ν, H, ϵ [Рис. 2.57, 2.54, 2.51, 2.48], для $\alpha = 4, \beta = 1, \zeta = 1/2, A = 1, B = 1, n = 4, m = 4$.

Непрерывная и пунктирная линии на Рис. 2.46 - 2.57 соответствуют различным начальным условиям. При $\Lambda < 0$ в зависимости от знака λ существуют следующие

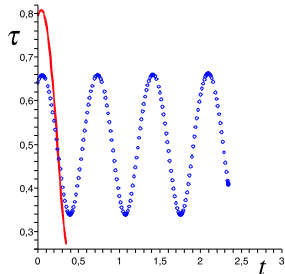


Рис. 2.43: Эволюция масштабного объема $\tau = 1/\nu$.

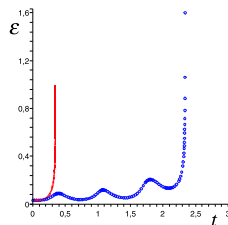


Рис. 2.44: Эволюция плотности энергии.

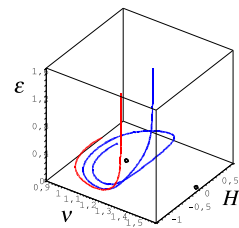


Рис. 2.45: 3D вид в ν, H, ϵ пространстве.

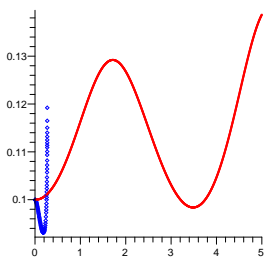


Рис. 2.46: Изменение плотности энергии

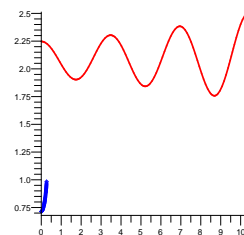


Рис. 2.47: Изменение объемного масштаба

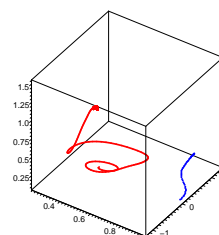


Рис. 2.48: Вид в 3D пространстве ν, H, ϵ

варианты: (i) при $\lambda < 0$ имеется разделяющая плоскость, которая не позволяет решениям, имеющим начальные условия в одной части пространства попасть в другую [см. Рис. 2.46,2.47,2.48, что соответствует Таблице 8g]. (ii) При $\lambda > 0$ нет разделяющей плоскости [см. Рис. 2.49,2.50,2.51, что соответствует Таблице 9g]. Как видно из примеров, отрицательное значение Λ , которое на самом деле является дополнительным гравитационным полем, создает осциллирующий режим эволюции.

В случае $\Lambda > 0$ существует только экспоненциальный режим эволюции. При $\lambda < 0$ имеется разделяющая плоскость [см. Рис. 2.52,2.53,2.54, что соответствует Таблице 20i], в то время как при $\lambda > 0$ разделяющей плоскости нет [см. Рис. 2.55,2.56,2.57, что соответствует Таблице 21i].

Если правая часть (2.85) имеет два положительных корня, между которыми она (H) положительная, то в плоскости $\epsilon = 0$ имеется замкнутый цикл. Очевидно, что корней не может быть более трех, поэтому неконцентрических циклов не может быть. В пространстве около плоскости $\epsilon = 0$, поэтому могут наблюдаться циклические ко-

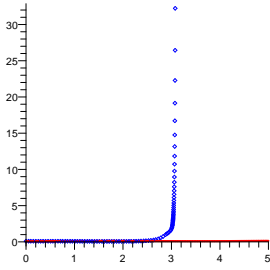


Рис. 2.49: Изменение плотности энергии

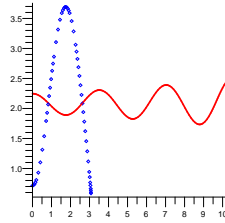


Рис. 2.50: Изменение объемного масштаба

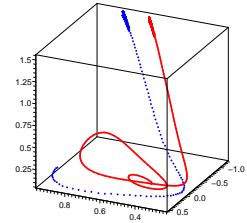
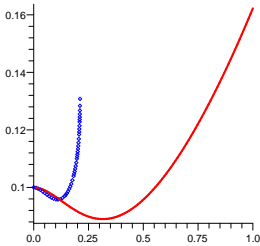
Рис. 2.51: Вид в 3D пространстве ν, H, ϵ 

Рис. 2.52: Изменение плотности энергии

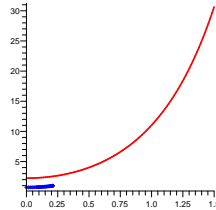
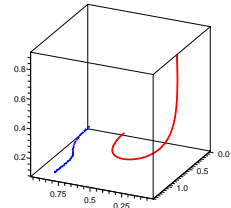


Рис. 2.53: Изменение объемного масштаба

Рис. 2.54: Вид в 3D пространстве ν, H, ϵ

лебания.

Особая точка вокруг которой происходят колебания имеет по необходимости $H = 0$ (вспомнив, что $\epsilon = 0$ и $\dot{\epsilon} = 0$, нетривиальный цикл должен содержать особые точки где $\dot{\tau} = 0$ и $\dot{H} = 0$. Заметим, что $\dot{\tau} = 0$ может быть достигнуто либо при $H = 0$ либо при $\tau = 0$. Так как $\tau = 0$ порождает пространственно-временную сингулярность, то мы рассмотрим случай с $H = 0$), и следовательно, траектория колебания будет частично проходить в области притяжения к плоскости $\epsilon = 0$, частично в области отталкивания. Математическое моделирование показывает, что траектория колебания начинает раскручиваться и наступает момент когда в области отталкивания рост ϵ становится доминирующим, т.е., становится таким большим, что кривая не успевает вернуться в область притяжения. Это приводит к тому, что ϵ становится бесконечной за конечный интервал времени. На Рис. 2.58 проиллюстрировано поведение плотности энергии. Как видно, плотность энергии в конечном счете стремится к бесконечности. Рис. 2.59 показывает, что когда $\epsilon \rightarrow 0$ соответствующая VI Вселенная является ос-

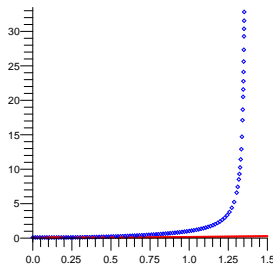


Рис. 2.55: Изменение плотности энергии

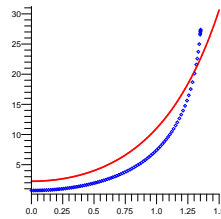
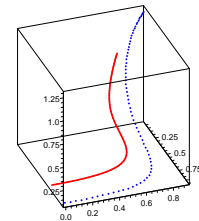


Рис. 2.56: Изменение объемного масштаба

Рис. 2.57: Вид в 3D пространстве ν, H, ε

циллирующей, но как только ε возрастает, τ стремится к некоторому маленькому но постоянному значению, т.е., благодаря большой плотности энергии возникает сильное гравитационное поле, которое не позволяет VI Вселенной расширяться до некоторого критического значения. Аналогичная картина, но по отношению к H , представлена на Рис. 2.60. А трехмерная версия всего выше сказанного дана на Рис. 2.62. На Рис. 2.61 представлена эволюция вселенной около плоскости $\varepsilon \rightarrow 0$, что показывает осциллирующий характер ее поведения.

На Рис. 2.63, 2.64, 2.65 и 2.66 проиллюстрированы векторное поле и его горизонтальная проекция, а также траектории эволюции и эволюция Вселенной при заданных значениях параметров.

2.5 Эволюция с обострением

Изучая решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), попытаемся представить себе интегральные кривые в пространстве. Очень важно знать поле направлений, заданное этой системой, более важно, чем ее векторное поле. Во-первых, интегральные кривые, по определению, касательны к векторному полю и, следовательно, к полю направлений, в тех же точках (особых), в которых векторное поле обнуляется, направление соответственно неопределено. Во-вторых, поле направлений также непрерывно, как и векторное поле (за исключением особых точек), но оно может быть непрерывно продолжено на границы, где векторное поле возможно становится бесконечным.

Нас будут интересовать два вопроса: насколько быстро решение может приближаться к бесконечно удаленной границе (попросту бесконечности) и как оно ведет себя на самой бесконечности. Постановка вопроса становится осмысленной, когда пространство замыкается путем пополнения бесконечно удаленными точками в какой-либо интерпретации.

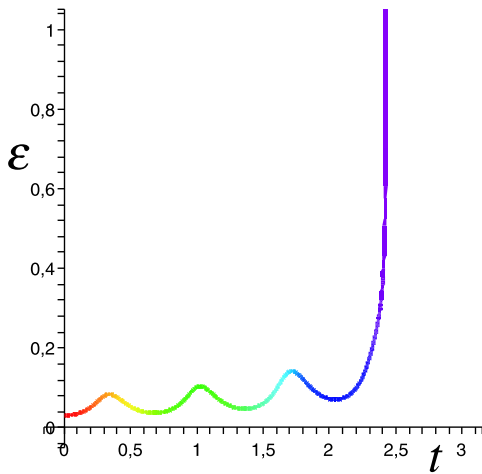


Рис. 2.58: Эволюция плотности энергии.

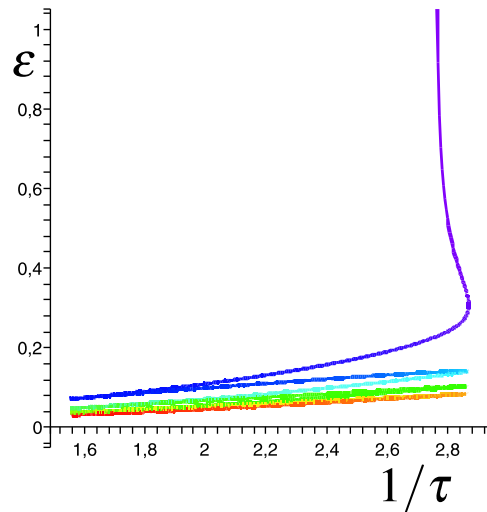


Рис. 2.59: Фазовая диаграмма ε и $\nu = 1/\tau$.

Будем следовать принципу непрерывности Понселе - свойства системы при непрерывном изменении от одного общего положения до другого при сохранении общности не изменяются. Нас интересуют качественные свойства решений системы ОДУ. Непрерывно деформируя векторное поле, но не трогая особых точек, мы не меняем качественно поведение интегральных кривых - с точностью до топологической эквивалентности. Так мы можем упростить анализ, заменяя исходную систему более простой, сконструированной из удобных элементов.

2.5.1 Обострение

История изучения режимов с обострением связывается с именем С.П.Курдюмова [45]. Изучение процессов распространения тепла в активной и нелинейной среде приводило к весьма своеобразным результатам: волнам и локализации. Математические модели демографии обнаруживают критические моменты: решение ОДУ (зависящее от времени) может достигать своего предельного значения за конечное время. Вспышечный (эруптивный) характер имеют процессы в хромосфере Солнца, при этом механизм переноса энергии не обнаруживает наличие предопределенного масштаба времени.

Для иллюстрации обнаружения характерного времени в системе, не содержащей явной зависимости от времени, рассмотрим пример.

$$\dot{x} = -x^\alpha, x \in R^+ \quad (2.96)$$

Это уравнение имеет два решения: а) $x(t) = 0$ и б) $x(t) = [x(0)^{1-\alpha} - t(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

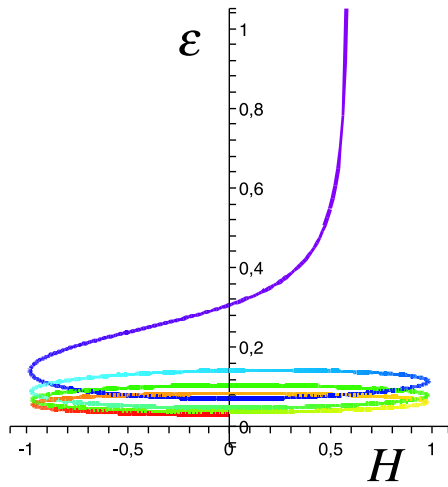


Рис. 2.60: Эволюция постоянной Хаббла.

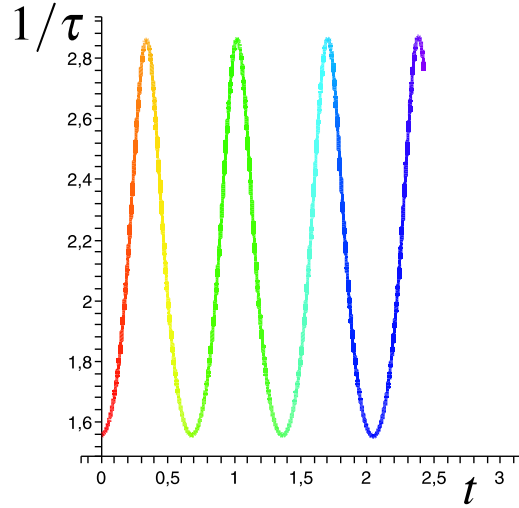


Рис. 2.61: Эволюция Вселенной около плоскости $\varepsilon \rightarrow 0$.

В случае б) предельное значение $x(t_*) = 0$ достигается за конечное время $t_* = \frac{x(0)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, если $\alpha < 1$. Затем оба решения сливаются. В момент t_* нарушается условие единственности (именно, условие Липшица).

Степенные зависимости характерны для самых различных катастроф: от землетрясений и наводнений до биржевых крахов и аварий в атомной энергетике.

2.5.2 Бесконечность

Присоединение бесконечно удаленной точки к пространству ОДУ

$$\dot{x} = F(x), x \in R^+ \tag{2.97}$$

выполним следующим образом: сделаем замену переменной $x = \frac{s}{c}$, $s^2 + c^2 = 1$. Бесконечно удаленной точкой назовем $\pm\infty = \frac{1}{0}$.

Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{s}c - \dot{c}s &= c^2 F\left(\frac{s}{c}\right), \\ \dot{s}s + \dot{c}c &= 0, \end{aligned} \tag{2.98}$$

откуда с учетом $s^2 + c^2 = 1$ следует

$$\begin{aligned} \dot{s} &= c^3 F\left(\frac{s}{c}\right), \\ \dot{c} &= -sc^2 F\left(\frac{s}{c}\right). \end{aligned} \tag{2.99}$$

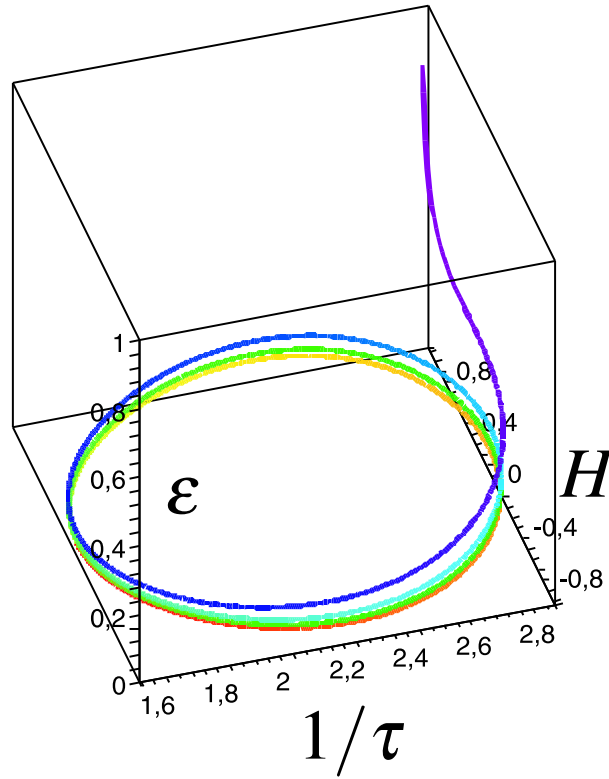


Рис. 2.62: Трехмерная диаграмма, показывающая колебательный режим расширения вблизи плоскости $\varepsilon \rightarrow 0$.

Приведем в окрестности точки $s = 1, c = 0$ (но не в ней самой!) правые части системы к общему знаменателю и устранив его, мы не изменим поле направлений. Сохраняя именно этот смысл, определим направление в самой точке.

Вернемся теперь к системе уравнений и перепишем ее в виде

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (2.100a)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2}(3\xi H - (\varepsilon + p)) - (3H^2 - \varepsilon - \Lambda) + \frac{1}{2}\phi_1(\nu), \quad (2.100b)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3\xi H - (\varepsilon + p)) + 4\eta(3H^2 - \varepsilon - \Lambda) - 4\eta\phi_2(\nu), \quad (2.100c)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 есть функции от ν .

В случае только спинорного поля $\phi_1(\nu) = m\nu + \lambda(n-2)\nu^n$, $\phi_2(\nu) = m\nu - \lambda\nu^n$.

Включение скалярного поля дает $\phi_1(\nu) = m\nu + \frac{n\nu^{n+2}}{2(1+\lambda\nu^n)^2}$, $\phi_2(\nu) = m\nu + \frac{\nu^2}{2(1+\lambda\nu^n)}$.

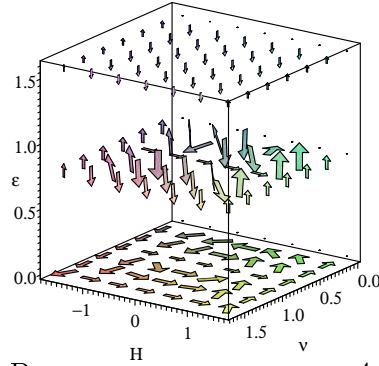


Рис. 2.63: Векторное поле, $\alpha = 4, \beta = 1, \zeta = 1/2, A = 1, B = 1, m = 4, \Lambda = -1, \lambda = -1$

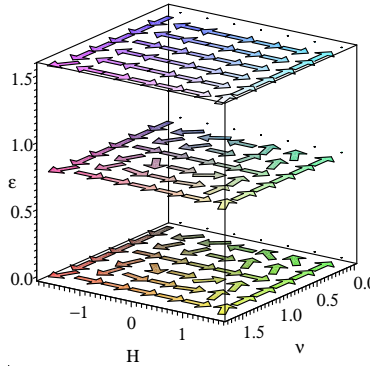


Рис. 2.64: и его горизонтальная проекция

Вблизи точки $\varepsilon = \infty$ сделаем замену $\varepsilon = 1/\mu$. Система примет вид

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (2.101a)$$

$$\dot{H} = \frac{3}{2}BH\mu^{-\beta} + \frac{1}{2}(1 - \zeta)\mu^{-1} - 3H^2 + \Lambda + \frac{1}{2}\phi_1(\nu), \quad (2.101b)$$

$$\dot{\mu} = 4A(-3H^2 + \Lambda + \phi_2(\nu))\mu^{2-\alpha} - 9BH^2\mu^{2-\beta} + 4A\mu^{1-\alpha} + 3H(1 + \zeta)\mu \quad (2.101c)$$

Как видно из (2.101c) в отсутствии вязкости обоих родов ($A = 0, B = 0$) обострение по плотности энергии невозможно.

Будет ли обострение в будущем или в прошлом, зависит от знака коэффициента при степени μ с наименьшим показателем.

Пусть $A = 0$. Для того, чтобы обострение появилось при конечном значении H , необходимо, чтобы было $\beta > 1$. В этом случае особенность будет в будущем (Big Rip).

Пусть теперь $B = 0$. В этом случае обострение наступит в обратном времени (в прошлом - Big Bang), если $\alpha > 1$.

В приведенном далее случае имеются траектории, на которых бесконечная плотность энергии ε достигается за конечное время. Синим цветом окрашено прошлое, красным - будущее.

На рисунках 2.67 и 2.68 показано как меняются объем, параметр Хаббла или плотность энергии. И в обоих случаях существует место для бесконечного роста плотности энергии при бесконечном объеме - т.е., возникает так называемые Большой Разрыв.

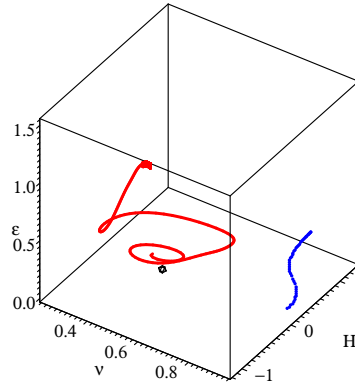


Рис. 2.65: Траектории эволюции, $\alpha = 4, \beta = 1, \zeta = 1/2, A = 1, B = 1, m = 4, \Lambda = -1, \lambda = -1$

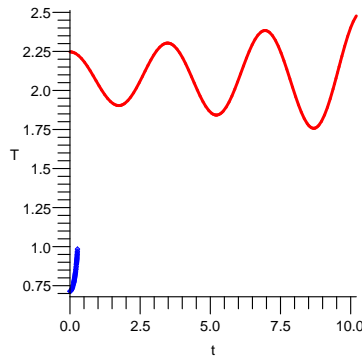


Рис. 2.66: Изменение объемного параметра

2.6 Выводы

В рамках Бианки типа-I космологической модели рассмотрена самосогласованная система нелинейного спинорного, скалярного и гравитационного полей в присутствии вязкой жидкости и космологической постоянной. Нелинейный член в лагранжиане спинорного поля возникает либо за счет самодействия либо в результате взаимодействия со скалярным полем.

Выведена система уравнений для масштаба объема τ , постоянной Хаббла H и плотности энергии ε . Полученные решения выражены посредством функции $\tau(t)$, где τ является масштабной единицей объема вселенной типа VI. Найдены точные решения при некоторых специальных выборах нелинейности и вязкости.

Поскольку эта система сама по себе является очень интересной, был проведен детальный качественный анализ и выяснены роли различных параметров, входящих в систему. Выполнен полный качественный анализ эволюции на границах и получены численные решения для некоторых особо интересных случаев.

Было показано, что при некоторых специальных значениях параметров система, даже при отсутствии космологической постоянной, допускает решения типа Большо-

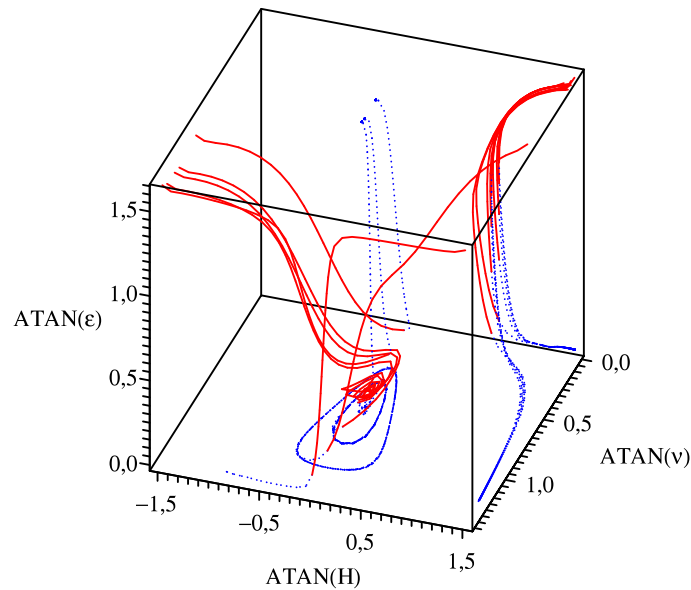


Рис. 2.67: Траектория эволюции в случае спинорного поля с самодействием при, $\alpha = 4, \beta = 1, \zeta = 1/2, A = 1, B = 1, m = 4, \Lambda = -1, \lambda = -1$

го Разрыва (Big Rip), что характерно для системы с фантомной материей. В отличие от системы с идеальной жидкостью, где знак Λ -члена определяет будет ли эволюция с ускоренным расширением или колебательной, в случае вязкой жидкости он уже не играет такую роль. В зависимости от параметров эволюция может быть расширяющейся или осциллирующей при любом знаке Λ .

Эта система также была изучена с точки зрения обострения. Показано, что обострение возможно только при наличии вязкости.

Следует отметить, что подобные явления наблюдаются и в других областях физики и представляют большой интерес с точки зрения теории катастроф, демографии и так далее.

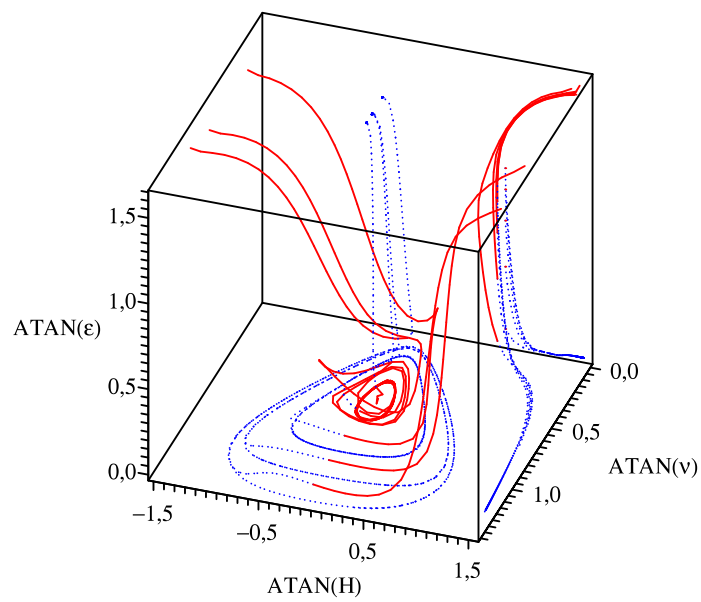


Рис. 2.68: Траектория эволюции в случае взаимодействующих спинорного и скалярного полей при, $\alpha = 4, \beta = 1, \zeta = 1/2, A = 1, B = 1, m = 4, \Lambda = -1, \lambda = -1$

Глава 3

Ранняя инфляция, изотропизация и позднее ускорение Вселенной типа Бианки-I

3.1 Введение

Одна из основных целей космологических моделей является описание разных фаз Вселенной соответствующих эволюции ее поля ускорения. Первая эпоха - эпоха быстрого расширения Вселенной, известна как инфляционный период. Большинство теории описывает этот период с помощью скалярного поля которое связано с гипотетическим инфлатоном (inflaton). Следующая эпоха связано с замедлением когда материя и излучение доминируют над скалярным полем. А настоящая эра характеризуется ускоренным расширением, где доминирует темная материя и темная энергия. Под позднем ускорением мы подразумеваем ускорение наблюдаемое в настоящее время.

Экспериментальные исследования изотропии космического микроволнового фонового излучения и размышления о количестве гелия, сформированного в начальной стадии эволюции Вселенной, стимулировали теоретическое изучение анизотропных космологических моделей. В настоящей стадии эволюции Вселенная сферически симметрична и распределение материи в ней, в общем, изотропно и однородно. Но в начальной стадии эволюции картина не могла бы быть такой гладкой, так как вблизи сингулярности Большого Взрыва предположение о сферической симметрии равно как и об изотропии не могло быть строго допустимым. Анизотропия космического расширения, которая, как предполагается, исчезает со временем, является очень важной величиной. Последние экспериментальные данные, а также теоретические аргументы поддерживают существование анизотропной фазы расширения, которая ведет к изотропной фазе. Как раз это обстоятельство и диктует изучение модели Вселенной с анизотропным фоном.

Самые простые модели расширяющейся вселенной - это те, которые пространственно однородны и изотропны. Такие модели впервые были изучены Фридманом

А.А. [134, 135], Робертсоном (Robertson) [235, 236, 237] и Уокером (Walker) [304]. Хотя пространственно однородные и изотропные модели Фрийдмана-Робертсона-Уокера (FRW) широко используются как хорошие аппроксимации настоящей и начальной стадии Вселенной, крупномасштабное распределение материи в наблюдаемой Вселенной, в основном представленной в форме дискретной структуры, не показывает однородность в высших порядках. Напротив, реликтовое излучение, что существенно в микроволновой области, чрезвычайно однородно. Однако, последние космические исследования зафиксировали анизотропию в космическом микроволновом фоне. Наблюдения дифференциального радиометра космической фоновой аппаратуры (Cosmic Background Explorer) зафиксировали анизотропии в разных угловых шкалах. Предполагается, что эти анизотропии скрывают в своих недрах всю историю космической эволюции, вплоть до рекомбинации, и рассматриваются как показатель (indicative) геометрии и составляющей материи вселенной. Еще больше об анизотропии космического микроволнового фона, как ожидается, будет известно после исследования пробы микроволновой анизотропии. Существует широкое согласие среди космологов, что у анизотропии космического микроволнового фона в малой угловой шкале имеется ключ к формированию дискретной структуры. Теоретические аргументы [204] и современные экспериментальные данные поддерживают существование анизотропной фазы, которая переходит в изотропную. Именно это обстоятельство приводит к рассмотрению модели с анизотропной историей. Первые анизотропные космологические модели для изучения реальных космологических проблем были использованы Лемитром (Lemaitre) [197]. Целью его работы было выяснить является ли сингулярность Большого Взрыва, которая возникает в модели Фрийдмана-Робертсона-Уокера, просто следствием предполагаемой симметрии. В конце 60 годов прошлого века три различные парадигмы астрофизического исследования определяли интерес к однородным но анизотропным космологическим моделям [298]: дискутируя возможности исконного (primordial) магнитного поля Зельдович [16] и Торн (Thorne) [299] рассматривали анизотропные космологические модели; изучая факторы, которые могут повлиять на количество первичного гелия в космологии Большого Взрыва Хоукинг (Hawking) и Тейлор (Tayler) [156] рассматривали анизотропные модели; Кристиан (Kristian) и Сач (Sachs) [194] так же как Кантовский (Kantowski) и Сач [178], изучая степень того, насколько наша Вселенная является на самом деле изотропной, рассматривали анизотропные космологические модели. Зельдович впервые предложил, что ранняя изотропизация процесса космологического расширения может возникать в следствие квантового эффекта рождения частиц вблизи сингулярности [17]. Это предположение далее подтверждалось разными авторами [31, 200, 165]. Интерес к изучению уравнений Клейна-Гордона и Дирака в анизотропных моделях вырос после того как Ху (Hu) и Паркер (Parker) [165] доказали, что рождение скалярных частиц в анизотропном фоне может рассеять анизотропию с расширением вселенной. Исследования, похожие на сделанные Лемитром, были проведены в 60 х годах. Цель была посмотреть, может ли избыток гелия объяснен лучшим образом с помощью анизотропной космологии. Это может случиться поскольку анизотропия ускоряет эволюцию на протяжении первичного формирования дейтерия (deuterium) и когда нейтроны и фотоны

уже больше не находят друг друга для соединения. Пионером в этой попытке была работа [156].

Вселенная Бианки типа-I (BI), будучи непосредственным обобщением плоской Вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW), является одной из самых простых моделей анизотропной Вселенной, которая описывает однородную и пространственно плоскую Вселенную. В отличие от FRW Вселенной, у которой масштабные факторы во всех трех направлениях одинаковы, у BI все эти факторы разные, тем самым она вводит анизотропию в систему. Более того, вблизи сингулярности она ведет себя похоже на Вселенную Казнера даже в присутствии материи, и тем самым попадает в рамки общего анализа сингулярностей, проведенного Белинским с соавторами [74]. Далее, во Вселенной, заполненной жидкостью, удовлетворяющей уравнению состояния $p = \zeta \epsilon$, $\zeta < 1$, было показано, что изначальная анизотропия в BI Вселенной быстро исчезает и она превращается в FRW Вселенную [172]. Поскольку современная Вселенная удивительно изотропна, это свойство делает BI Вселенную самым подходящим кандидатом для изучения возможных эффектов начальной анизотропии для сегодняшнего наблюдения. В свете важности выше сказанного разные авторы изучали BI Вселенную с разных точек зрения.

Наблюдение далеких сверхновых и флуктуаций реликтового излучения с помощью наземных и высотных экспериментов, а именно, последние данные эксперимента WAMP показали, что наша Вселенная пространственно плоская и в данный момент расширяется с ускорением. Этот факт можно согласовать с теорией, если предположить, что Вселенная в основном заполнена так называемой темной энергией. Измерения фотометрических расстояний до сверхновых звезд на космологических расстояниях, подкрепленные многочисленными независимыми аргументами, в том числе недавними наблюдательными данными об угловых флуктуациях температуры реликтового электромагнитного излучения во Вселенной, показывают, что основная доля плотности энергии материи в современной Вселенной принадлежит именно этому виду небарионной материи. Эта форма материи (энергии) не наблюдается в лабораторных экспериментах, не взаимодействует с электромагнитным излучением. Это обстоятельство и сыграло решающую роль в ее названии. Это свойство также отличает ее от нерелятивистского небарионного холодного темного вещества, ранее известного из астрономических и космологических наблюдений. Более того в отличие от темной материи темная энергия распределена однородно по пространству и не скручивается под действием гравитации во всех масштабах и имеет сильно отрицательное давление порядка плотности энергии. В связи с этим, формально темную энергию можно описать как вещество с отрицательным давлением. В настоящее время в литературе встречается множество источников, которые так или иначе могли бы объяснить ускоренную фазу расширения сегодняшней Вселенной. Ниже мы перечислим основные тенденции.

- **Λ -член:** Чтобы обеспечить устойчивое космологическое решение уравнений гравитационного поля Эйнштейн [122, 123] ввел одну фундаментальную постоянную, известную как космологическая постоянная или Λ -член, в систему. После

того как Хабл (Hubble) экспериментально подтвердил, что Вселенная расширяется, Эйнштейн вернулся к оригинальной форме уравнения, сказав при этом, что временная модификация, которую он сделал, была самой большой ошибкой его жизни. Во второй половине 60 годов прошлого века Λ -член заново проявил себя на короткое время. Наконец, после изыскательской работы Гутха (Guth) [148] по инфляционной космологии исследователи начали рассматривать модели с Λ -членом с растущим интересом [превосходный обзор по космологической постоянной можно найти в [215]]. В 1998 году две группы [234, 219] независимо показали, что наша Вселенная расширяется с ускорением подтверждающим существование темной энергии. Самая простая форма темной энергии - это положительная космологическая постоянная. Введение положительного Λ -члена, соответствующего универсальной отталкивающей силе, приводит к современному ускоренному режиму и сопровождается такими теоретическими проблемами как тонкая настройка (fine-tuning) и проблема соответствия (coincidence problem), [308] которая гласит: почему плотность темной энергии (dark energy density) и плотность пыли (dust matter density) в настоящее время сравнимы или, почему Вселенная начала ускоренно расширяться только сейчас. Другая проблема, которая связана с ускоренным расширением - это проблема вечного ускорения. Введение отрицательного Λ -члена, соответствующего дополнительной гравитационной силе, может решать эту проблему [94]. Модели с Λ -членами разного знака были рассмотрены в работах [4, 244, 264, 255].

- **Квинтэссенция:** Это наиболее встречаемый вид темной энергии [107, 276, 315, 256] с уравнением состояния

$$w = \frac{p_q}{\varepsilon_q}, \quad (3.1)$$

причем это отношение считается постоянным. Подобное уравнение состояния хорошо известно, а именно при $w \in [0, 1]$ оно описывает идеальную жидкость. Одним из специфических ее членов является космологическая постоянная (Λ -член) при $w = -1$ [215, 275, 255]. Заметим, что для того, чтобы расширение Вселенной, заполненной преимущественно подобным веществом, происходило в ускоренном темпе, должно выполняться условие $w < -1/3$. Обычно значение постоянной w варьируется между -1 и $-1/3$, т.е., $w \in [-1, -1/3]$. Это ограничение связывают с тем, что из строгого определения w (как для равновесного состояния, так и для малых возмущений) формально вытекает, что скорость распространения малых возмущений (например звука) в квинтэссенции при $w < -1$ превышает скорость света, следовательно нарушает принцип причинности.

- **Газ Чаплигина:** Для того чтобы объединить такие две разные физические концепции как темная материя и темная энергия и тем самым свести два физических параметра в один было предложено довольно экзотическое уравнение состояния [176]. В этой работе авторы описали переход Вселенной, заполненной пылью, в ускоренно расширяющуюся Вселенную. Модель, предложенная в [176],

была обобщена в работах [86, 76]. Обобщенная модель газа Чаплыгина задается уравнением состояния

$$p_{\text{ch}} = -\frac{A}{\varepsilon_{\text{ch}}^\alpha}, \quad (3.2)$$

где A некоторая положительная постоянная и $0 < \alpha \leq 1$. Стандартная модель, предложенная в [176], соответствует значению $\alpha = 1$. Заметим, что газ Чаплыгина оригинально был введен в аэродинамике [52]. Имеется довольно большое количество работ, посвященных этой модели [77, 78, 61, 69, 118, 85, 126, 127, 207, 143, 114, 278, 70, 211, 87, 151, 140, 152, 192, 75, 144, 84, 291, 171, 254].

- **Темная энергия типа фантом (Phantom):** До недавнего времени считалось, что стандартный космологический источник темной энергии должен иметь незначительное по величине отрицательное давление, такое что $-\varepsilon < p < 0$ и ни в коем случае оно не должно превышать загадочный барьер $p = -\varepsilon = -\Lambda$, что соответствует космологической постоянной. В этом случае возможно нарушалось только сильное энергетическое условие (strong energy condition) Хокинга и Пенроуза:

$$\varepsilon + 3p > 0, \quad \varepsilon + p > 0, \quad (3.3)$$

и дальнейшая эволюция могла иметь два сценария: Асимптотическая Пустота или Большой Хруст (Big Crunch). Однако глубокий анализ данных, полученных из сверхновых, реликтового излучения и крупномасштабной структуры, показывает, что темной энергией может также быть материя, чье давление меньше, чем минус плотность энергии и поэтому нарушается и слабые и, следовательно, все энергетические условия. Эта материя была названа фантомом (phantom) и она приводит к качественно новому типу эволюции. Фантом - это темная энергия с сильным отрицательным давлением и может быть имитирована скалярным полем ϕ с отрицательной кинетической энергией с Лагранжианом

$$L = \frac{l}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.4)$$

где $l = -1$ описывает фантом, а $l = 1$ стандартное скалярное поле. Здесь $v(\phi)$ - потенциал. Самый поразительный результат, который приписывается фантому, это то, что плотность энергии растет пропорционально фактору масштаба (scale factor). Таким образом, в отличие от стандартных источников, когда рост плотности энергии соответствует уменьшению масштабного фактора, в данном случае рост плотности энергии сопровождается расширением Вселенной. Это приводит к появлению в будущем сингулярностей, что в силу особых свойств называется большим разрывом (Big Rip). В этом случае за конечное время размер Вселенной обращается в бесконечность [120, 115]. Заметим, что при $w < -1$ уравнение состояния (3.1) также дает фантом.

- **Колебательная темная энергия:** После обнаружения положительного ускорения Вселенной возникло множество проблем. Одна из самых озадачивающих

- это проблема вечного ускорения [238]. Положительный космологический член [255] также как и большинство моделей, предложенных в литературе, приводит к вечно ускоренному режиму. Существует много различных подходов для их устранения. В работе [289] предлагается космологическая модель циклической Вселенной, которая проходит периодическое расширение и сжатие. Каждый цикл начинается Большим Взрывом (big bang) и заканчивается с Большим Хрустом (big crunch), чтобы снова возникать при большем взрыве. Фаза расширения каждого цикла содержит эру излучения, материи и квинтэссенции, последняя из которых соответствует современному ускоренному расширению. В работе [130] исследуются космологические модели, где эффективный потенциал $V(\phi)$ может быть отрицательным при некоторых значениях ϕ . В этом случае реализуется циклическая модель Вселенной. Один из самых простых способов для получения циклических моделей реализуется введением отрицательного Λ -члена вместе с некоторым потенциалом [244, 264, 94]. Заметим, что модели рассматриваемые в [244, 264], дают как циклические [названы автором как неперiodические решения, так как в силу того, что величина масштабного объема (volume scale) строго неотрицательна и при нулевом ее значении возникает сингулярность, хотя математически эти решения можно продолжать и снова выйти на новый цикл, мы этого не делали] так и осциллирующие [всюду положительные] решения. Автором была также предложена модель с модифицированной квинтэссенцией, что позволяет получить циклические или осциллирующие космологические решения [256]. Осциллирующая темная энергия с периодическим уравнением состояния в двух эквивалентных формулировках была рассмотрена в [209]. Было показано, что такая модель темной энергии предполагает естественное объединение начальной инфляции с современным ускоряющимся режимом расширения. Модель с осциллирующей темной энергией также была рассмотрена в [199].

- **Модели с взаимодействием между темной энергией и темной материей:** Хотя экспериментальные проверки в солнечной системе налагают строгие ограничения на возможность неминимального взаимодействия между темной энергией и обычной (фоновой) материей [310], благодаря неизвестной природе темной материи как основной части этого фона, появляется возможность дополнительного (не гравитационного) взаимодействия между темной энергией и темной материей без противоречия с экспериментальными данными. Более того, в работах [212, 218] было показано, что модели с взаимодействующей темной энергией находятся в хорошем соответствии с современными наблюдаемыми данными. В связи с этим появилось множество работ, предлагающих модели с взаимодействующими темной энергией и темной материей [142, 104].
- **Скалярно-тензорные (Scalar-tensor) модели темной энергии:** Скалярно-тензорная теории гравитации - это альтернативная или обобщенная теория гравитации Эйнштейна, где помимо тензорного присутствует и скалярное поле. Она была предложена почти полвека назад в ряде работ [132, 174, 88] и актуальна

на сегодняшний день для объяснения ускоренного режима расширения, особенно в инфляционном и квинтэссенционном сценарии. Основное предположение состоит в том, что скалярное и гравитационное поля φ и $g_{\mu\nu}$ связаны с веществом посредством некоторой *эффективной метрики* $\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}$. В работе [136] рассматривается скалярно-тензорная модель темной энергии с новой физической степенью свободы, именно, скалярное поле φ гравитона отвечает за изменение гравитации. Скалярно-тензорные модели обычной и фантомной темной энергии были исследованы в [137]. А подобные модели для пространства типа Бианки-I были рассмотрены в [129]. В этой работе динамическое поведение метрических функций было описано для трех различных взаимодействий.

- **Модели с Тахионной (Tachyon) материей:** Идея тахиона не нова и после ряда работ [281, 282] эти частицы снова нашли применение в космологии. Они до сих пор не наблюдаются и некоторые их типы (rolling tachyon) обладают очень интересным уравнением состояния, где его параметры гладко меняются в пределах $(-1, 0)$. Это обстоятельство делает тахион одним из кандидатов на темную энергию [288, 283, 108, 95, 284]. Существует несколько моделей тахионной темной энергии. Одна из наиболее эффективных моделей была предложена в [277]. Она задается парами космологической диагностики $\{r, s\}$ называемыми детерминантами состояния (statefinder):

$$r = \frac{\partial^3 a / \partial t^3}{aH^3}, \quad s = \frac{r - 1}{3(q - 1/2)}, \quad (3.5)$$

где q это параметр замедления, a масштабный фактор FRW пространства-времени. Поскольку разные космологические модели, связанные с темной энергией, показывают качественно разные траектории на $r - s$ плоскости, предложенная диагностика может различить эти модели темной энергии.

- **Модели со спинорным полем:** Последнее время космологические модели со спинорным полем широко изучаются разным авторами [270, 269, 243, 244, 264, 64]. Одной из основных целей работы [270, 269, 243, 244, 264] было нахождение регулярных решений соответствующих уравнений. В некоторых случаях, особенно при наличии космологической постоянной (Λ -член), которая играет роль дополнительного гравитационного поля, нам удалось получить регулярные решения. Также было обнаружено, что введение нелинейного спинорного поля приводит к быстрому расширению Вселенной. Именно это обстоятельство позволяет нам рассматривать спинорное поле как один из возможных кандидатов для объяснения ускоренной фазы расширения. В связи с этим за последнее время в литературе появился ряд работ, где в качестве альтернативной модели темной энергии рассматривается спинорное поле [233, 257, 258, 259].
- **Квинтом (Quintom) Модели:** Для того чтобы понять поведение темной энергии с уравнением состояния (3.1) с $w > -1$ в прошлом и $w < -1$ в настоящее

время была предложена квинтом модель [131]. Квинтом - это динамическая модель темной энергии и отличается от других моделей темной энергии тем, что по другому определяет космологическую эволюцию. Одна из характерных черт Квинтом модели является тот факт, что ее уравнения состояния может гладко переходить значение $w = -1$ [92]. В отличие от (3.1), где w суть постоянное, в квинтом модели оно зависит от времени и может быть задан в виде

$$w(t) = -r - \frac{s}{t^2}, \quad (3.6)$$

где r и s - некоторые параметры. Многие авторы использовали квинтом модель для того чтобы воспроизводить Вселенной с резким прижком (bouncing Universe). Спинорное описание квинтома было дано в работе [93].

- **Модели со параметром уравнения состояния:** Помимо выше упомянутых моделей в последнее время предпринята попытка описать темную энергию с помощью зависящего от времени параметра уравнения состояния [220, 221, 222]. В этих моделях предполагается, что параметр замедления суть постоянная величина. При этом получается два типа решения - одно из которых в виде степенной функции, а второе экспоненциальное. Эти решения описывают расширяющиеся сингулярную и не-сингулярную Вселенные, соответственно. Диапазон значения параметра уравнения состояния w в обоих случаях находится в хорошем соответствии с последними наблюдательными данными, а именно (i) SNe Ia data 2003 [180], (ii) SNe Ia data collaborated with CMBR anisotropy and galaxy clustering statistics) 2004 [296], и (iii) a combination of cosmological datasets coming from CMB anisotropies, luminosity distances of high redshift type Ia supernovae and galaxy clustering 2009 [162, 181].

В настоящем обзоре мы изучим эволюцию изначально анизотропной вселенной при наличии в ней (i) идеальной жидкости, заданной как обычной так и жидкостью Ван дер Ваальса; (ii) темной энергии, заданной в виде Λ -члена, квинтэссенции и газа Чаплыгина; (iii) спинорного поля с самодействием и индуцированной нелинейностью.

3.2 Основные уравнения

Как уже упоминалось раньше, мы рассмотрим самосогласованную систему, где в качестве источника гравитационного поля выступают разные материи и поля. Поэтому мы начнем с гравитационного поля. В нашем случае оно задается метрикой Бианки I (BI):

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 dx_1^2 - a_2^2 dx_2^2 - a_3^2 dx_3^2, \quad (3.7)$$

где метрические функции a_i зависят только от времени, а скорость света выбирается равной единице. Мы также определим функцию

$$\tau = a_1 a_2 a_3, \quad (3.8)$$

которая ничто иное как масштаб объема (volume scale) пространства-времени VI.

Уравнения Эйнштейна, соответствующие пространству VI могут быть написаны в виде:

$$\frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} = \kappa T_1^1, \quad (3.9a)$$

$$\frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} = \kappa T_2^2, \quad (3.9b)$$

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} = \kappa T_3^3, \quad (3.9c)$$

$$\frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} = \kappa T_0^0. \quad (3.9d)$$

Здесь T_μ^ν тензор энергии-импульса материальных полей. Заметим, что источники выбираются таким образом, что для трех основных компонент давления имеет место равенство $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$. Тогда из уравнений (1.53a), (1.53b) and (1.53c) получим

$$a_i(t) = A_i [\tau(t)]^{1/3} \exp \left[X_i \int [\tau(t')]^{-1} dt' \right], \quad (3.10)$$

где A_i и X_i константы интегрирования, удовлетворяющие

$$A_1 A_2 A_3 = 1, \quad (3.11a)$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0. \quad (3.11b)$$

Как уже упоминалось, для более реалистичного описания ранней Вселенной нам нужно рассмотреть анизотропные космологические модели, такие как модель Бианки I (VI). С другой стороны, современная Вселенная удивительным образом изотропна. Поэтому нам надо объяснить, как и когда изначально анизотропное пространство-время превращается в изотропное. В литературе существует множество критериев изотропии. В [172] Якобс использовал параметр анизотропии, чтобы найти время, когда анизотропия перестает быть большой. Два распространенных критерия изотропизации выглядят так:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{H_i^2}{H^2} - 1 \rightarrow 0, \quad (3.12a)$$

$$\Sigma^2 = \frac{1}{2} \mathcal{A} H^2 \rightarrow 0. \quad (3.12b)$$

Здесь \mathcal{A} и Σ^2 - это средний параметр анизотропии и сдвиговый (shear) параметр, соответственно. $H_i = \dot{a}_i/a_i$ - это направляющий параметр Хаббла и $H = \dot{a}/a$ - средний параметр Хаббла, где $a(t) = \tau^{1/3}$ - средний масштабный фактор. В этой работе мы пользуемся условием изотропизации, введенной в работе [91]. Изотропизация означает, что на больших физических временах, когда объемный параметр (volume scale)

τ стремится к бесконечности, все три масштабные факторы $a_i(t)$ растут одинаково. Таким образом мы говорим, что модель становится изотропной, если

$$a_i/a \rightarrow \text{const} > 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

Как видно из (3.10) в нашем случае $a_i/a \rightarrow A_i = \text{const}$ при $t \rightarrow \infty$. Напомним, что у изотропной FRW модели имеются одинаковые масштабные факторы по всем трем направлениям, т.е., $a_1(t) = a_2(t) = a_3(t) = a(t)$. Таким образом, для того чтобы VI пространство-время превратилось в FRW, константы A_i должны быть идентичны, т.е., $A_1 = A_2 = A_3 = 1$. Заметим, что масштабное преобразование некоторых координат приводит к $a_i/a \rightarrow 1$ и метрика очевидно становится изотропной при больших t . Более того, изотропная природа современной вселенной приводит к тому, что остальные три константы X_i также должны быть близки к нулю, т.е., $|X_i| \ll 1$, ($i = 1, 2, 3$), так что $X_i \int [\tau(t)]^{-1} dt \rightarrow 0$ при $t < \infty$ (при $\tau(t) = t^n$ с $n > 1$ интеграл стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ для любого X_i).

Итак, метрические функции находятся в функциональной зависимости от τ . Как было показано в ряде работ, спинорное и скалярное поля и другие физические величины такие как заряд, ток, а также плотность энергии и импульс идеальной жидкости и темной энергии могут быть выражены через τ . Ввиду этого мы напишем уравнение для нахождения τ . Сумма уравнений (1.53a), (1.53b), (1.53c) и (1.53d) умноженной на 3 дает:

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = \frac{3}{2}\kappa(T_1^1 + T_0^0). \quad (3.14)$$

Здесь мы приняли во внимание тот факт, что в рассматриваемых моделях имеет место равенство $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$. С другой стороны из тождества Бианки $G_{\mu;\nu}^\nu = 0$ имеем:

$$\dot{T}_0^0 = -\frac{\dot{\tau}}{\tau}(T_0^0 - T_1^1). \quad (3.15)$$

В сопутствующей системе координат уравнение (3.15) приводит к следующим уравнениям

$$\dot{\epsilon}_{\text{DE}} + \dot{\epsilon}_{\text{pf}} = -\frac{\dot{\tau}}{\tau}(\epsilon_{\text{DE}} + \epsilon_{\text{pf}} + p_{\text{DE}} + p_{\text{pf}}), \quad (3.16)$$

где ϵ_{pf} и ϵ_{DE} плотности энергии идеальной жидкости и темной энергии, соответственно, а p_{pf} и p_{DE} - соответствующие давления.

Надо подчеркнуть, что темная энергия предположительно взаимодействует только сама собой и минимальным образом связана с гравитационным полем. Вследствие этого уравнение, описывающее эволюцию плотности темной энергии, отделяется от аналогичного уравнения идеальной жидкости, и из уравнения (3.16) мы имеем два уравнения: одно для идеальной жидкости и другое для темной энергии. Таким образом имеем:

$$\dot{\epsilon}_{\text{DE}} + \frac{\dot{\tau}}{\tau}(\epsilon_{\text{DE}} + p_{\text{DE}}) = 0, \quad (3.17a)$$

$$\dot{\epsilon}_{\text{pf}} + \frac{\dot{\tau}}{\tau}(\epsilon_{\text{pf}} + p_{\text{pf}}) = 0. \quad (3.17b)$$

В случае спинорного и/или скалярного поля соответствующие слагаемые в (3.15) исчезают благодаря уравнениям спинорного и скалярного полей, и таким образом уравнение (3.15) в этом случае превращается в уравнение состояния идеальной жидкости (3.17b). Далее, для того чтобы решить уравнения (3.14) и (3.15) нам нужно еще одно условие, которое задается уравнением состояния. В последующем мы изучим эволюцию вселенной Бианки-I для конкретных источников.

Можно показать, что в рассматриваемых случаях правая часть уравнения (3.14) есть функция от τ , и следовательно оно допускает первый интеграл. Обозначив правую часть как $\mathcal{F}(\tau)$, соответствующее решение можно представить в виде:

$$\dot{\tau} = \sqrt{2[C - \mathcal{U}(\tau)]}, \quad (3.18)$$

где $E = -\int \mathcal{F}(\tau)d\tau$ может быть рассмотрен как некий потенциал и константа C как уровень энергии.

Для того, чтобы выяснить роль того или иного источника в эволюции вселенной, нам надо его конкретно задать, чем мы и займемся в следующей главе.

3.3 Анализ полученных решений при заданной правой части

В этом разделе мы подробно изучим эволюцию пространства Бианки-I при наличии различных источников.

3.3.1 Модель с космологической постоянной

Как уже было отмечено, космологическая постоянная впервые была введена Эйнштейном [122, 123] еще в 1917 году. Но только после обнаружения ускорения в расширении Вселенной в 1998 году она прочно вошла в современную космологию. Поскольку достаточно подробно о ней было написано во введении, мы не будем повторять, а начнем изучать ее роль в эволюции Вселенной типа Бианки-I.

Рассмотрим Бианки типа-I космологическую модель в присутствии космологической постоянной и идеальной жидкости. В качестве идеальной жидкости рассматривается жидкость как с баротропическим уравнением состояния так и с уравнением состояния Ван дер Ваальса. Этот случай был подробно рассмотрен в работе [255].

Уравнение (3.14) в этом случае имеет вид

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = \frac{3\kappa}{2}(\varepsilon - p) + 3\Lambda. \quad (3.19)$$

С другой стороны уравнение (3.15) дает

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{\dot{\tau}}{\tau}(\varepsilon + p). \quad (3.20)$$

После некоторой манипуляции из (3.19) и (3.20) находим

$$\dot{\tau}^2 = 3(\kappa\varepsilon + \Lambda)\tau^2 + C_1, \quad (3.21)$$

где C_1 произвольная постоянная. Определим по аналогии с изотропной моделью постоянную Хаббла:

$$\frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 3H. \quad (3.22)$$

С учетом (3.22) из (3.21) выводим

$$\kappa\varepsilon = 3H^2 - \Lambda - C_1/(3\tau^2). \quad (3.23)$$

Надо отметить, что плотность энергии Вселенной есть положительно определенная величина. Предполагается, что в начальной стадии эволюции, когда τ было очень близко к нулю, плотность энергии вселенной была бесконечно велика. С другой стороны, с расширением Вселенной, т.е., с ростом τ , плотность энергии ε уменьшается, а бесконечно большой τ соответствует ε близко к нулю. Допустим, что на некоторой стадии эволюции ε настолько мала, что ею можно пренебречь. В этом случае из (3.23) следует

$$3H^2 - \Lambda \rightarrow 0. \quad (3.24)$$

Из (3.24) можно заключить следующие: (i) в этом случае Λ обязательно неотрицательна; (ii) в отсутствие Λ -члена H становится тривиальной, следовательно начиная с некоторых значений τ эволюция вселенной останавливается, т.е., τ становится постоянной; (iii) в случае положительной Λ процесс расширения вселенной никогда не остановится.

Подставляя (3.22) и (3.23) в (3.19) находим

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\left(3H^2 - \Lambda + \frac{C_1}{3\tau^2} + \kappa p\right) = -\frac{\kappa}{2}(\varepsilon + p) - \frac{C_1}{3\tau^2}. \quad (3.25)$$

В виду (3.23) из (3.25) следует, что если идеальная жидкость задается вселенной Зельдовича, когда $p = \varepsilon$, [см. (3.27)], соответствующее решение не зависит от постоянной C_1 .

Идеальная жидкость

Для начала мы рассмотрим случай, когда Вселенная заполнена только идеальной жидкостью. Хотя это самый распространенный случай и он подробно изучен множеством авторов, мы все же опишем его. Обозначим через ε_{pf} и p_{pf} плотность энергии и давление идеальной жидкости соответственно. В рассматриваемом случае идеальная жидкость подчиняется следующему уравнению состояния

$$p_{\text{pf}} = \zeta \varepsilon_{\text{pf}}. \quad (3.26)$$

Здесь ζ - некая постоянная, лежащая в интервале $\zeta \in [0, 1]$. В зависимости от численного значения ζ описывает следующие типы вселенной [172]

$$\zeta = 0, \quad (\text{пыль}), \quad (3.27a)$$

$$\zeta = 1/3, \quad (\text{излучение}), \quad (3.27b)$$

$$\zeta \in (1/3, 1), \quad (\text{жесткая Вселенная}), \quad (3.27c)$$

$$\zeta = 1, \quad (\text{Вселенная Зельдовича}). \quad (3.27d)$$

В сопутствующей системе координат закон сохранения тензора энергии-импульса приводит к следующим уравнениям:

$$\dot{\epsilon}_{\text{pf}} = -\frac{\dot{\tau}}{\tau}(\epsilon_{\text{pf}} + p_{\text{pf}}). \quad (3.28)$$

В виду уравнения (3.26) из (3.28) легко находится

$$\epsilon_{\text{pf}} = \epsilon_0/\tau^{(1+\zeta)}, \quad p_{\text{pf}} = \epsilon_0\zeta/\tau^{(1+\zeta)}, \quad (3.29)$$

где ϵ_0 суть постоянная интегрирования. В этом случае для τ находим

$$\tau = Ct^{2/(1+\zeta)}, \quad (3.30)$$

где C некоторая постоянная интегрирования. Как видно из (3.10), при $\zeta < 1$ изначально анизотропная вселенная в конце концов превращается в FRW вселенную, тогда как при $\zeta = 1$, т.е. в случае жесткой материи этого не происходит. Вывод о том, что при наличии идеальной жидкости изначально анизотропная VI вселенная со временем изотропизуется, впервые был сделан в работе [172], а в более общем подходе был подтвержден в недавней работе [105]. На рисунке 3.1 проиллюстрирован вид потенциала при отрицательной Λ . Как видно в модели с пылью, излучением и жесткой материей допускаются как осциллирующие так и неперiodические решения в зависимости от выбора константы интегрирования, тогда как модель со вселенной Зельдовича дает только неперiodическое решение [см. рис. 3.2,3.3]. При положительной Λ имеется только расширяющаяся модель Вселенной [см. рис. 3.4].

Жидкость Ван-дер-Ваальса

Рассмотрим случай, когда жидкость подчиняется уравнению состояния Ван-дер-Ваальса в отсутствии диссипативного процесса. Давление газа Ван-дер-Ваальса p_w связано с его плотностью энергии ϵ_w соотношением [193, 48]

$$p_w = \frac{8W\epsilon_w}{3 - \epsilon_w} - 3\epsilon_w^2. \quad (3.31)$$

В (3.31) давление и плотность энергии написаны в безразмерных переменных и W - это некий параметр связанный с редуцированной температурой.

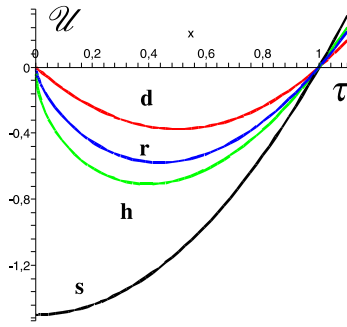


Рис. 3.1: Вид потенциала $\mathcal{U}(\tau)$ при отрицательной Λ . Как видно в случае вселенной Зельдовича этот потенциал допускает только неперiodическое решение.

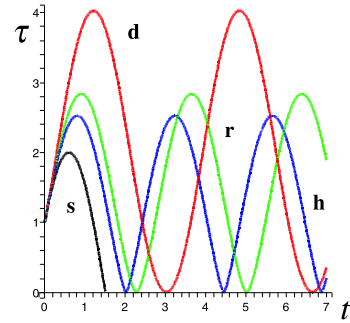


Рис. 3.2: Эволюция τ с отрицательной Λ и $C = -0.1$. Как видно, в этом случае модели с пылью, излучением и жесткой материей допускается осцилляция, тогда как модель с вселенной Зельдовича дает неперiodическое решение.

На рисунках 3.5 и 3.6 плотность энергии и давление системы проиллюстрированы с отрицательной и положительной космологической постоянной, а также при ее отсутствии. Как видно из рисунка 3.6, положительная Λ приводит к уменьшению изначально отрицательного давления (т.е., хотя давление остается отрицательным его абсолютная величина становится меньше). Это выглядит обескураживающе, так как положительная Λ сама является отрицательным давлением. Дело в том, что здесь ε и p есть плотность энергии и давление жидкости Ван дер Ваальса только, те которые, в силу самосогласованности подвергаются влиянию со стороны пространства-времени. Из уравнения (3.23), т.е.,

$$\varepsilon = [H^2 - \Lambda - C_1/(3\tau^2)]/\kappa$$

следует, что при данных H , C_1 и τ значение ε в случае положительной Λ меньше, чем соответствующие величины при $\Lambda = 0$. Следовательно, p менее отрицательно. Более того, как было упомянуто ранее, положительная Λ , будучи отталкивающей силой, приводит к быстрому росту τ . Это приводит к быстрому спаду ε в начальной стадии эволюции, что в свою очередь приводит к тому, что p становится положительным раньше, чем это происходит при тривиальной Λ . Что касается отрицательной Λ , в этом случае плотность энергии ε становится более положительной. Надо также отметить, что поведение всех величин - ε , p , H , τ - критически зависит как от выбора начальных значений H и τ , также и от Λ , C_1 и κ . Как видно из рисунка 3.7, конкретный выбор параметров может привести к более быстрому расширению τ с отрицательной Λ . Это происходит потому, что выбор параметров с отрицательной Λ делает давление более

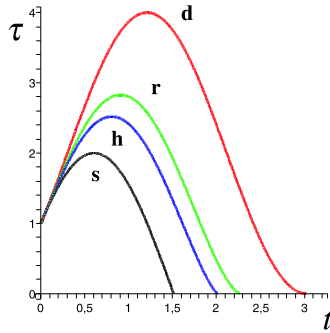


Рис. 3.3: Эволюция вселенной с отрицательной Λ и $C = 0$. В этом случае имеется только неперриодическое решение.

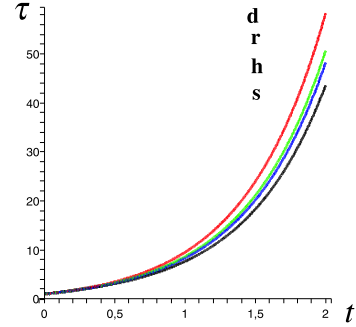


Рис. 3.4: Эволюция вселенной с положительной Λ . В этом случае независимо от выбора ζ имеется только расширяющаяся модель вселенной. В этом случае анизотропия вселенной исчезает быстрее, чем это происходит при $\Lambda = 0$.

отрицательным [cf. Fig. 3.5].

На рисунке 3.8 иллюстрируется ускорение вселенной типа VI, заполненной жидкостью Ван дер Ваальса при разных Λ .

На рисунке 3.9 видна эволюция вселенной типа Бианки-I, заполненной разными видами идеальной жидкости в отсутствии Λ -члена. Как видно, в случае жидкости Ван дер Ваальса τ растет быстрее в ранней стадии и потом замедляется со временем.

Вернемся теперь к уравнению (3.25). Подставляя (3.31) в (3.25) с учетом (3.23) находим

$$\begin{aligned} \dot{H} = & -\frac{\{3H^2 - \Lambda - C_1/(3\tau^2)\}[(3 + 8W)\kappa - \{3H^2 - \Lambda - C_1/(3\tau^2)\}]}{2(3\kappa - \{3H^2 - \Lambda - C_1/(3\tau^2)\})} \\ & + \frac{3}{2\kappa}(\{3H^2 - \Lambda - C_1/(3\tau^2)\})^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Легко можно убедиться в том, что уравнение (3.32) в отсутствии Λ -члена и $C_1 = 0$ и $\kappa = 3$ совпадает с уравнением, рассмотренным в работе [193] :

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}\left[H^2 + \frac{8WH^2}{3 - H^2} - 3H^4\right]. \quad (3.33)$$

Решение дифференциального уравнения второго порядка (3.32), описывающего эволюцию $H(t)$, может быть найдено только с определением начального значения $H(t)$ при $t = 0$, при заданном значении параметров W . Соответствующие результаты графически проиллюстрированы на рисунках 3.5 - 3.9.

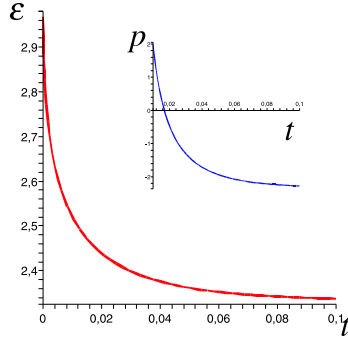


Рис. 3.5: Вид плотности энергии ε и давления p в случае жидкости Ван дер Ваальса с отрицательной Λ .

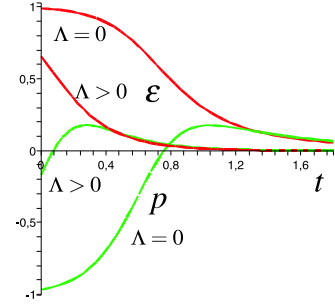


Рис. 3.6: Вид плотности энергии ε и давления p в случае жидкости Ван дер Ваальса с $\Lambda \geq 0$.

На рисунках 3.10 и 3.11 представлены комбинированные плотности энергии и давления излучения и жидкости Ван дер Ваальса, которое показывает, что жидкость Ван дер Ваальса в состоянии породить инфляцию в начальной стадии эволюции.

3.3.2 Модель с квинтэссенцией

Рассмотрим случай, когда темная энергия задается квинтэссенцией. Как уже было отмечено, новый вид материи, часто называемый квинтэссенцией, может вести себя как космологическая постоянная и была определена как комбинация положительной плотности энергии и отрицательного давления, удовлетворяющая уравнению состояния [254]

$$p_q = w_q \varepsilon_q. \quad (3.34)$$

Как видно из (3.34), уравнение сильно напоминает уравнения состояния идеальной жидкости, только с отрицательным коэффициентом w_q , что собственно обеспечивает отрицательное давление. Значение постоянной w_q варьируется между -1 и нулем, т.е., $w_q \in [-1, 0]$. Также стоит отметить, что при $w_q = -1$ квинтэссенция описывает космологическую постоянную, а при $w_q < -1$ она ведет себя как фантомная темная энергия. Вернемся теперь к решению уравнения. С учетом (3.34) из (3.17a) находим

$$\varepsilon_q = \varepsilon_{0q} / \tau^{(1+w_q)}, \quad p_q = w_q \varepsilon_{0q} / \tau^{(1+w_q)}. \quad (3.35)$$

Здесь ε_{0q} некоторая постоянная интегрирования.

Тогда уравнение эволюции для величины τ (3.19) может быть написано в виде

$$\ddot{\tau} = \frac{3\kappa}{2} \left(\frac{(1-\zeta)\varepsilon_0}{\tau^\zeta} + \frac{(1-w_q)\varepsilon_{0q}}{\tau^{w_q}} \right). \quad (3.36)$$

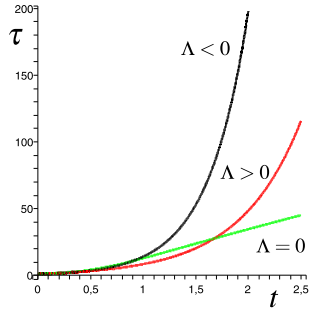


Рис. 3.7: Эволюция вселенной типа Бианки-I заполненной жидкостью Ван дер Ваальса. Независимо от знака Λ настоящая модель порождает быстро растущую вселенную.

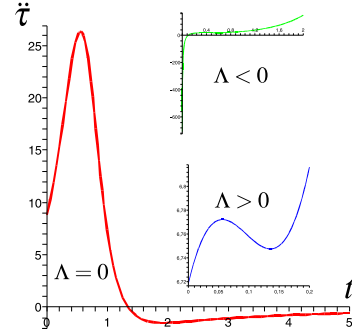


Рис. 3.8: Ускорение вселенной типа VI заполненной жидкостью Ван дер Ваальса при разных Λ . Здесь $W = 0.5$, а Λ имеет следующие значения: $\Lambda = 0$, $\Lambda = 1$ и $\Lambda = -0.01$.

Как было отмечено раньше, уравнение (3.36) допускает точное решение, которое может быть выражено в квадратурах [254]:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{C_1 + 3\kappa(\varepsilon_0\tau^{(1-\zeta)} + \varepsilon_{0q}\tau^{(1-w_q)})}} = t + t_0. \quad (3.37)$$

Постоянная интегрирования t_0 может быть выбрана тривиальной.

На рисунке 3.12 показаны потенциалы в случаях, когда Вселенная заполнена идеальной жидкостью, идеальной жидкостью и квинтэссенцией, идеальной жидкостью и газом Чаплыгина и идеальной жидкостью и фантомной темной энергии, соответственно. Идеальная жидкость в данном случае соответствует излучению. Как видно, все эти потенциалы допускают только бесконечное движение, т.е., Вселенная расширяется бесконечно. Рисунок 3.13 показывает эволюцию вселенной типа VI. Введение темной энергии, как и полагалось, приводит к ускоренному расширению Вселенной. Вид ускорения проиллюстрирован на рисунке 3.13.

На рисунке 3.14 проиллюстрирован вид плотности энергии и давления, когда Вселенная заполнена идеальной жидкостью, квинтэссенцией и газом Чаплыгина. На рисунке 3.15 демонстрируются плотности энергии и давления, когда вселенная как смесь идеальной жидкости с квинтэссенцией, идеальной жидкостью и газом Чаплыгина.

3.3.3 Случай с газом Чаплыгина

Давайте теперь рассмотрим случаи, когда темная энергия задается газом Чаплыгина. Как уже было отмечено, газ Чаплыгина был предложен как одна из альтернативных

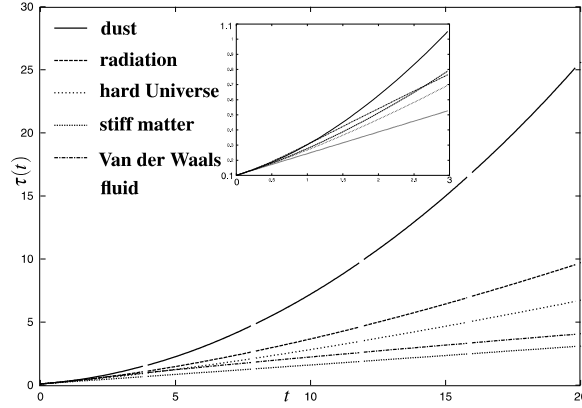


Рис. 3.9: Эволюция вселенной типа Бианки-I, заполненной разными видами идеальной жидкостью в отсутствии Λ -члена.

моделей для описания темной энергии с экзотическим уравнением состояния [254]

$$p_c = -A/\varepsilon_c^\alpha, \quad (3.38)$$

где A и α некоторые положительные постоянные. Уравнение (3.38) описывает обобщенный газ Чаплыгина. При $\alpha = 1$ имеем стандартную модель Чаплыгина. Мы рассмотрим стандартный случай. Тогда ввиду уравнения (3.38) из (3.17a) находим

$$\varepsilon_c = \sqrt{\varepsilon_{0c}/\tau^2 + A}, \quad p_c = -A/\sqrt{\varepsilon_{0c}/\tau^2 + A}, \quad (3.39)$$

где ε_{0c} постоянная интегрирования.

Как и предыдущем случае для τ находим

$$\ddot{\tau} = \frac{3\kappa}{2} \left(\frac{(1-\zeta)\varepsilon_0}{\tau^\zeta} + \sqrt{\varepsilon_{0c} + A\tau^2} + A\tau^2/\sqrt{\varepsilon_{0c} + A\tau^2} \right). \quad (3.40)$$

Соответствующие решения могут быть написаны в квадратурах [254]:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{C_1 + 3\kappa(\varepsilon_0\tau^{(1-\zeta)} + \sqrt{\varepsilon_{0c}\tau^2 + A\tau^4})}} = t, \quad (3.41)$$

где вторая постоянная интегрирования взята равной нулю.

3.3.4 Случай квинтэссенцией с модифицированным уравнением состояния

Как было уже сказано, введение разного типа темной энергии, например, космологической постоянной, квинтэссенции, газа Чаплыгина и т.д., приводит к появлению вечного ускорения. Существует несколько способов устранения этой проблемы, о чем

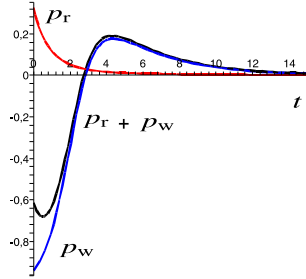


Рис. 3.10: Давление излучения или жидкости Ван дер Ваальса и их суммарное давление.

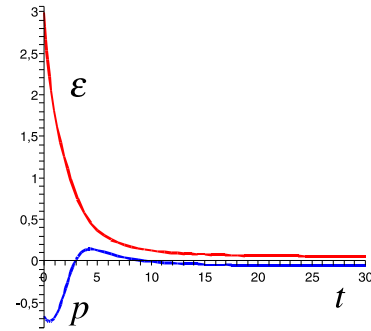


Рис. 3.11: Эффективные энергия и давление комбинированного излучения и жидкости Ван дер Ваальса.

мы подробно писали в введении. Здесь мы детально опишем модель, способную породить как циклическую так и осциллирующую эволюцию. Эта модель была предложена в работе [256]. Рассматриваемая модель задается уравнением состояния

$$p_{\text{DE}} = w(\varepsilon_{\text{DE}} - \varepsilon_{\text{cr}}), \quad (3.42)$$

где $w \in [-1, 0)$. Здесь ε_{cr} некоторая критическая плотность энергии. Полагая $\varepsilon_{\text{cr}} = 0$ получим обычную квинтэссенцию. Как известно, с расширением Вселенной плотность (темной) энергии (кроме космологической постоянной) убывает. В следствие этого, будучи линейной отрицательной функцией от плотности энергии, соответствующее давление начинает расти. В случае обычной квинтэссенции давление остается всегда отрицательным, что и приводит к вечному ускорению. Но в случае квинтэссенции с модифицированным уравнением состояния как только значение ε_q становится меньше критического, давление становится положительным. На рисунке 3.16 проиллюстрирована эволюция давления, соответствующая квинтэссенции с обычным и модифицированным уравнением состояния.

На Рис. 3.17 и 3.18 проиллюстрированы потенциал и поведения плотности энергии и давления при наличии квинтэссенции с модифицированным уравнением состояния. На Рис. 3.19 γ , q и m q обозначают излучение, смесь излучения и обычной квинтэссенцией и смесь излучения и квинтэссенцией с модифицированным уравнением состояния, соответственно.

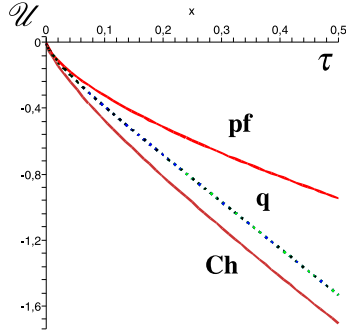


Рис. 3.12: Вид потенциала, когда Вселенная заполнена идеальной жидкостью, идеальной жидкостью и квинтэссенцией, идеальной жидкостью и газом Чаплыгина и идеальной жидкостью и фантомной темной энергии, соответственно.

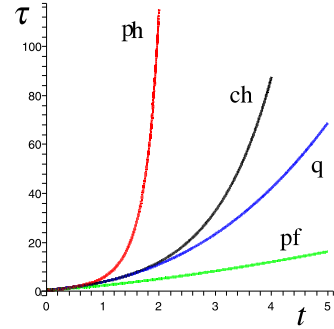


Рис. 3.13: Эволюция Вселенной соответствующей потенциалом иллюстрированных на рисунке 3.12.

3.4 Спинорное поле как альтернативный источник ускоренного расширения

В этом разделе мы покажем, что нелинейное спинорное поле может быть рассмотрено как альтернативный источник ускоренного расширения Вселенной. Лагранжиан нелинейного спинорного поля задается следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi + q_1 \lambda F + \frac{q_2}{2} \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} (1 + \lambda_1 F_1). \quad (3.43)$$

Здесь $F = F(I, J)$ и $F_1 = F_1(I, J)$ некоторые произвольные функции от инвариантов билинейных спинорных форм $I = I_S = S^2 = (\bar{\psi} \psi)^2$ и $J = I_P = P^2 = (i \bar{\psi} \gamma^5 \psi)^2$. Отметим, что $F = F(I, J)$ имеет самый общий вид, так как остальные три инварианта могут быть выражены через I и J . Лагранжиан (3.43) при $q_1 = 1$ и $q_2 = 0$ описывает спинорное поле с нелинейностью, возникающей за счет самодействия, тогда как при $q_1 = 0$ и $q_2 = 1$ он описывает систему взаимодействующих спинорного и скалярного полей. Во втором случае мы имеем спинорное поле с индуцированной нелинейностью. Здесь λ коэффициент самодействия, а λ_1 коэффициент связи со скалярным полем. Эти системы были подробно исследованы в работах [269, 270, 244, 264, 249]. В данной работе мы помимо вышеупомянутых случаев рассмотрим еще случай, когда имеется оба вида нелинейности. Поскольку цель этой работы - выяснить роль спинорного поля в ускоренном расширении Вселенной, (что можно сделать, исследуя уравнения (3.19),) мы не будем останавливаться на изучении уравнений спинорного и скалярного полей.

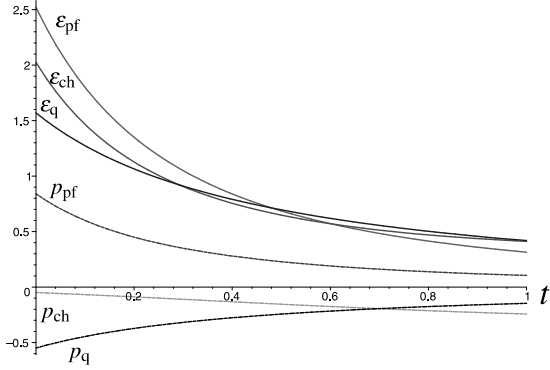


Рис. 3.14: Вид плотности энергии и давления, когда Вселенная заполнена идеальной жидкостью, квинтэссенцией и газом Чаплыгина, соответственно.

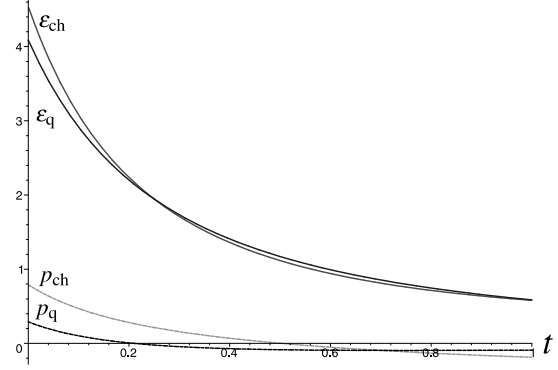


Рис. 3.15: Вид плотности энергии и давления, когда вселенная как смесь идеальной жидкости с квинтэссенцией и идеальной жидкостью и газом Чаплыгина, соответственно.

Как известно [244, 264, 249] уравнения спинорного поля при ненулевой массе точно решаются, если $F = F(I)$ и $F_1 = F_1(I)$. В случае $F = F(J)$ и $F_1 = F_1(J)$ точные решения допускаются только при нулевой массе спинорного поля. Надо также отметить, что рассматриваемые нами спинорное и скалярное поля также как и метрические функции зависят только от t . В таком случае при $F = F(I)$ и $F_1 = F_1(I)$ из уравнения спинорного поля мы имеем $S = C_0/\tau$ (при $F = F(J)$ и $F_1 = F_1(J)$ аналогично имеем $P = D_0/\tau$). Поскольку, после того как F и F_1 выражены через функции τ , уже не имеет значения, являлись ли F и F_1 функциями от I или J , мы рассмотрим случай когда $F = F(I)$ и $F_1 = F_1(I)$. Тогда для компонентов тензора энергии-импульса имеем

$$T_0^0 = mS - q_1\lambda F + \frac{q_2}{2}(1 + \lambda_1 F_1)\dot{\varphi}^2 + \varepsilon_{pf}, \quad (3.44)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \mathcal{D}S - q_1\lambda F - \frac{q_2}{2}(1 + \lambda_1 F_1)\dot{\varphi}^2 - p_{pf},$$

где $\mathcal{D} = q_1\lambda\frac{dF}{dS} + \frac{q_2}{2}\lambda_1\dot{\varphi}^2\frac{dF_1}{dS}$.

В (3.44) ε_{pf} и p_{pf} - плотность энергии и давление идеальной жидкости.

Далее мы рассмотрим конкретный случай, когда $F = S^q$ и $F_1 = S^r$. Для простоты мы также положим $C_0 = 1$.

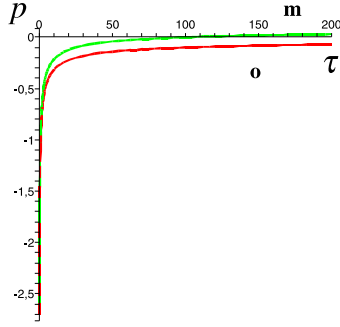


Рис. 3.16: Эволюция давления с расширением Вселенной, когда она заполнена квинтэссенцией с обычным и модифицированным уравнением состояния, соответственно.

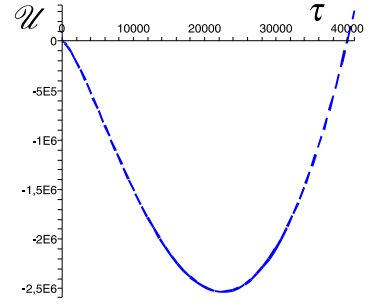


Рис. 3.17: Вид потенциала, когда Вселенная VI заполнена смесью идеальной жидкостью и квинтэссенцией с модифицированным уравнением состояния.

Идеальная жидкость

В случае, если идеальная жидкость подчиняется уравнению (3.26), полагая $\varepsilon_0 = 1$ из (3.44) находим

$$T_0^0 = \frac{m}{\tau} - \frac{q_1 \lambda}{\tau^q} + \frac{q_2 \tau^{r-2}}{2(\lambda_1 + \tau^r)} + \frac{1}{\tau^{1+\zeta}} \equiv \varepsilon \quad (3.45)$$

$$T_1^1 = \frac{q_1(q-1)\lambda}{\tau^q} - \frac{q_2[(1-r)\lambda_1 + \tau^r]\tau^{r-2}}{2(\lambda_1 + \tau^r)^2} - \frac{\zeta}{\tau^{1+\zeta}} \equiv p.$$

Принимая во внимание, что T_0^0 и T_1^1 зависят только от τ , уравнение (3.19) может быть представлено в виде

$$\ddot{\tau} = \mathcal{F}(q_1, \tau). \quad (3.46)$$

Здесь

$$\mathcal{F}(q_c, \tau) = (3/2)\kappa \left(m + q_1 \lambda (q-2) \tau^{1-q} + q_2 \lambda_1 r \tau^{r-1} / 2(\lambda_1 + \tau^r)^2 + (1-\zeta) / \tau^\zeta \right), \quad (3.47)$$

где $q_c = \{\kappa, m, \lambda, \lambda_1, q, r, \zeta\}$ - набор параметров. Уравнение (3.46) допускает следующий первый интеграл:

$$\dot{\tau} = \sqrt{2[E - \mathcal{U}(q_1, \tau)]}, \quad (3.48)$$

где мы обозначали

$$\mathcal{U}(q_1, \tau) = -\frac{3}{2} \left[\kappa \left(m\tau - q_1 \lambda / \tau^{q-2} - q_2 \lambda_1 / 2(\lambda_1 + \tau^r) + \tau^{1-\zeta} \right) \right]. \quad (3.49)$$

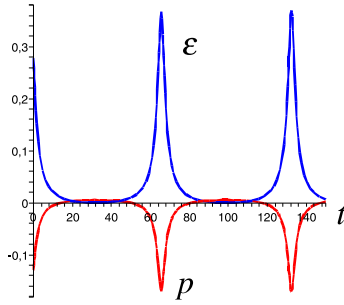


Рис. 3.18: Вид плотности энергии и давления, когда вселенная ВІ переживает осцилляцию.

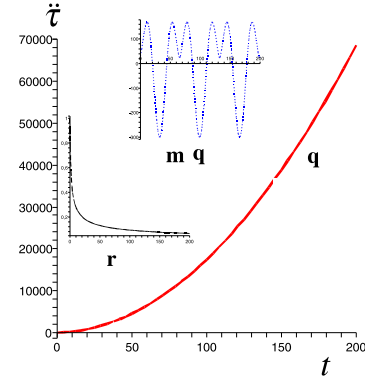


Рис. 3.19: Вид ускорения с различным источником.

С математической точки зрения уравнение (3.46) может быть интерпретировано как уравнение движения одной частицы с единичной массой под действием силы $\mathcal{F}(q_1, \tau)$. В выражении (3.48) E - некоторая постоянная интегрирования, которую можно рассматривать как уровень энергии и $\mathcal{U}(q_1, \tau)$ - потенциал, соответствующий силе $\mathcal{F}(q_1, \tau)$. Решим уравнение (3.46) численно, используя метод Рунге-Кутты. При этом начальное значение τ взято достаточно малым, тогда как соответствующая первая производная $\dot{\tau}$ вычисляется из уравнения (3.48) при заданном E .

Прежде чем представить численный результат, качественно изучим уравнения (3.46), (3.47), (3.48) и (3.49). В силу (3.47) из (3.46) находим, что $\dot{\tau} \rightarrow (3/2)kt > 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, т.е., если $\dot{\tau}$ рассматривается как ускорение ВІ пространства-времени, то спинорное поле с нетривиальной массой может быть принято как источник вечного ускорения. Что касается начальной стадии расширения (здесь мы имеем дело только с расширяющейся Вселенной), то положительность подынтегрального выражения налагает некоторые ограничения на значения τ , особенно в случае $\lambda > 0$ и $q \geq 2$ значение τ не может быть слишком близко к нулю в любой точке пространства-времени. В этом случае существует бесконечно высокая потенциальная стена при $\tau \rightarrow 0$, что делает невозможным для любой классической системы достичь точку $\tau = 0$ [см. рисунок 3.20]. Таким образом мы утверждаем, что при некоторых особых выборах параметров введение нелинейного спинорного поля с самодействием обеспечивает несингулярное решение. Как было показано в [244], регулярное решение получается только за счет нарушения условия энергодоминантности в теореме Хоукинга-Пенроуза (Hawking-Penrose) [155], что в случае ВІ пространство-время может быть записаны в

виде:

$$T_0^0 \geq T_1^1 a_1^2 + T_2^2 a_2^2 + T_3^3 a_3^2, \quad (3.50a)$$

$$T_0^0 \geq T_1^1 a_1^2, \quad (3.50b)$$

$$T_0^0 \geq T_2^2 a_2^2, \quad (3.50c)$$

$$T_0^0 \geq T_3^3 a_3^2. \quad (3.50d)$$

Рассмотрим случай когда λ отрицательна. Из (3.49) видно, что в окрестности $\tau = 0$ существует бездонная потенциальная яма [см. рисунок 3.21]. Если начальное значение τ слишком близко к нулю и постоянная E меньше чем \mathcal{U}_{\max} (максимальное значение потенциала в присутствии самодействия), Вселенная никогда не выйдет из этой ямы.

Решим уравнение (3.46) численно. Выберем параметры следующим образом: гравитационная постоянная Эйнштейна $\kappa = 1$, масса спинорного поля $m = 1$, степень нелинейности $q = 4$, $r = 4$ и $\zeta = 1/3$, что соответствует излучению. Мы также положим $C_{00} = -0.001$ и $E = 10$. Начальное значение τ взято $\tau_0 = 0.4$. Константа связи $\lambda_1 = 0.5$, тогда как постоянная самодействия берется или $\lambda = 0.5$ или $\lambda = -0.5$. Здесь на рисунках мы использовали следующие обозначения:

- 1 соответствует случаю с самодействием и взаимодействием;
- 2 соответствует случаю только с самодействием;
- 3 соответствует случаю только с взаимодействием.

Как видно из рисунка 3.20, в присутствии самодействия спинорного поля с положительной λ возникает бесконечно высокий потенциальный барьер при $\tau \rightarrow 0$, который означает, что в рассматриваемом случае τ не может быть тривиальной [если иметь в виду классический объект, Вселенная не может превращаться в точку если она не находится на бесконечно высоком энергетическом уровне]. Таким образом, нелинейность спинорного поля предоставляемого самодействием генерирует несингулярную эволюцию Вселенной. Но, как уже упоминалось раньше, настоящая регулярность достигается только за счет нарушения условия энергодоминантности теоремы Хоукинга-Пенроуза. Ясно также, что если нелинейность спинорного поля индуцируется скалярным полем, τ может иметь нулевое значение, порождая таким образом пространственно-временную сингулярность [264]. Заметим, что регулярность эволюции Вселенной может быть достигнута введением Λ -члена в систему. Подобная система была детально изучена в работах [244, 264]. Было показано, что введение положительного Λ , что соответствует отталкивающей силе и может быть рассмотрено как темная энергия, приводит к ускоренному расширению, тогда как отрицательный Λ , соответствующий дополнительной гравитационной силе и в зависимости от выбора E , порождает осциллирующий или апериодический режим расширения. Отметим также, что регулярное решение, полученное за счет отрицательного Λ -члена, в случае взаимодействующих спинорного и скалярного полей приводит к нарушению условия энергодоминантности [264].

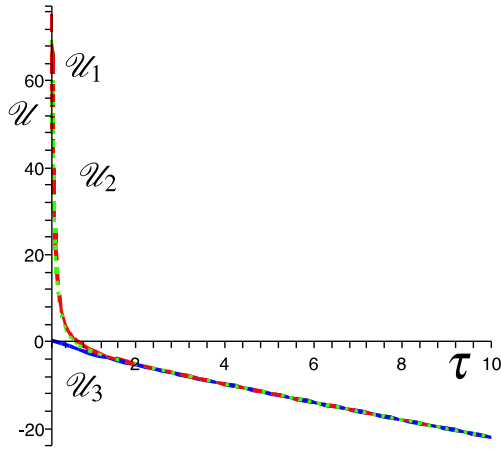


Рис. 3.20: Вид потенциала $\mathcal{U}(\tau)$ при $\lambda > 0$.

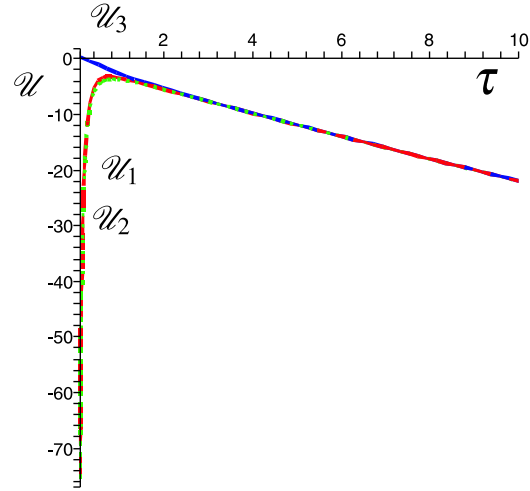


Рис. 3.21: Вид потенциала $\mathcal{U}(\tau)$ при отрицательной λ .

На рисунках 3.20 и 3.21 иллюстрированы потенциалы при различных знаках λ . На рисунках 3.22 и 3.23 показаны соответствующие плотность энергии и давление. В случае положительной λ , плотность энергии изначально отрицательна, тогда как давление положительное. В этом случае решение хотя и несингулярное, условие энергодоминантности нарушается. В случае отрицательной λ , давление всегда отрицательное.

Мы представим графики и плотности энергии и давление исключительно для того, чтобы показать, что плотность энергии на самом деле уменьшается с ростом Вселенной. Они также показывают, что существует некий интервал, где плотность энергии системы с нелинейностью спинорного поля, порожденной самодействием, является отрицательной. Более того, мы видим, что давление источника становится отрицательным в ходе эволюции (в случае самодействия с положительной λ , давление изначально положительно, но в ходе эволюции, оно становится отрицательным, тогда как в случае отрицательной λ также как и в случае с взаимодействием давление всегда отрицательное). Напомним, что темная энергия (например квинтэссенция, газа Чаплыгина), сконструированная для объяснения ускоренного расширения Вселенной, имеет отрицательное давление. Поэтому мы требуем рассматривать модели с нелинейным спинорным полем и взаимодействующими спинорным и скалярным полями как альтернативу моделям с темной энергией, поскольку они также способны описать Вселенную с ускоренным расширением [257, 258, 259].

На рисунках 3.24 и 3.25 проиллюстрировано ускорение Вселенной при положительной и отрицательной λ , соответственно. Как видно, в обоих случаях имеется уменьшающееся ускорение, что стремится к $(3/2)kt$ при $\tau \rightarrow \infty$.

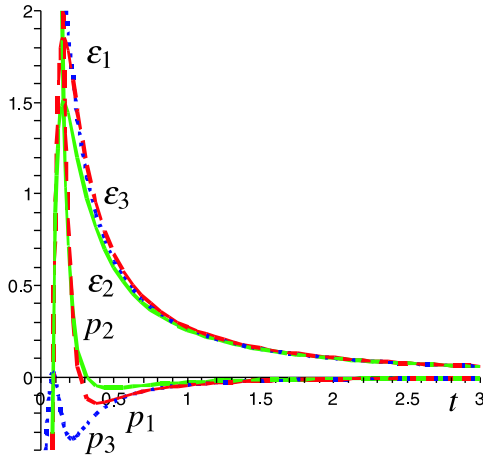


Рис. 3.22: Плотность энергии и давление при положительной λ .

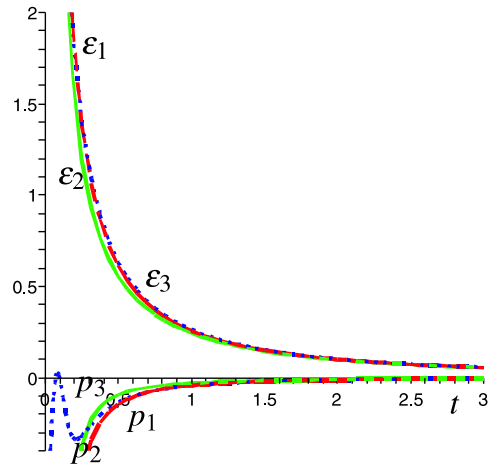


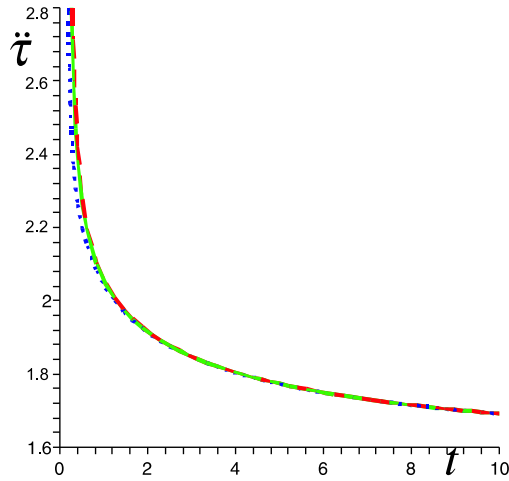
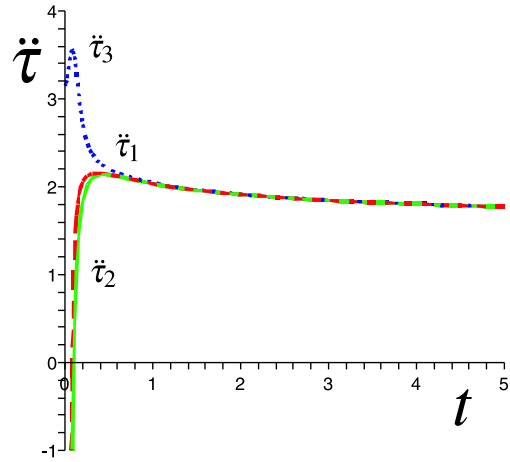
Рис. 3.23: Плотность энергии и давление при отрицательной λ .

Чтобы закрепить наше требование, что нелинейное спинорное поле может породить позднее ускорение, т.е., ускорение наблюдаемое в настоящее время, мы графически изображаем параметр замедления при положительной и отрицательной λ [см. рисунки 3.26 and 3.27].

Рисунки 3.24, 3.25, 3.26 и 3.27 показывают ускоренный режим расширения Вселенной. Как видно, ускорение уменьшается со временем. В зависимости от выбора нелинейности она подвергается начальной фазе замедления. Также видно, что нелинейный член играет ведущую роль в начале эволюции, тогда как в поздней стадии масса спинорного поля имеет критическое значение для ускоренного режима расширения.

3.5 Спинорная модель идеальной жидкости

И так, нами было показано, что при определенных выборах нелинейности спинорное поле может играть роль жидкости или темной энергии. Здесь мы вернемся к этому вопросу и установим, какой именно тип нелинейности отвечает за то или иное состояние материи.

Рис. 3.24: Ускорение Вселенной соответствующей положительной λ .Рис. 3.25: Ускорение Вселенной соответствующей отрицательной λ .

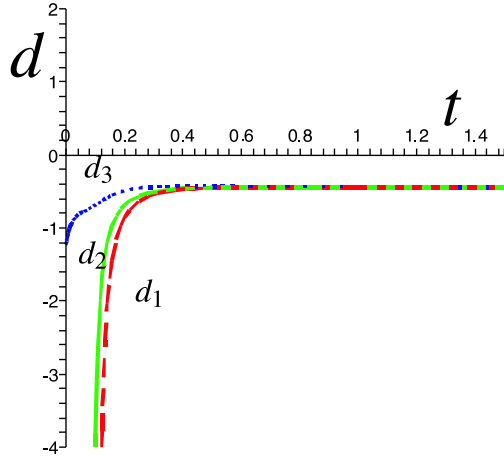
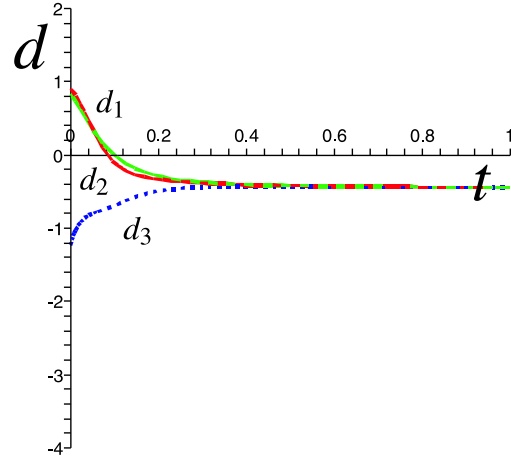
3.5.1 Моделирование идеальной жидкости с помощью нелинейного спинорного поля

В этой разделе мы опишем различные характеристики материи с помощью нелинейного спинорного поля.

Моделирование идеальной жидкости с баротропическим уравнением состояния

Напомним, что плотность энергии $\varepsilon = T_0^0$ и давление $p = -T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3$ идеальной жидкости подчиняется уравнению состояния

$$p = W\varepsilon, \quad (3.51)$$

Рис. 3.26: Параметр замедления при положительной λ .Рис. 3.27: Параметр замедления при отрицательной λ .

где W - постоянная. В зависимости от значения W (3.51) описывает идеальную жидкость от фантомной (phantom) до экипротической (ekpyrotic) материи, а именно

$$W = 0, \quad (\text{пыль}), \quad (3.52a)$$

$$W = 1/3, \quad (\text{излучение}), \quad (3.52b)$$

$$W \in (1/3, 1), \quad (\text{жесткая Вселенная}), \quad (3.52c)$$

$$W = 1, \quad (\text{Вселенная Зельдовича}), \quad (3.52d)$$

$$W \in (-1/3, -1), \quad (\text{квинтэссенция}), \quad (3.52e)$$

$$W = -1, \quad (\text{космологическая постоянная}), \quad (3.52f)$$

$$W < -1, \quad (\text{фантомная материя}), \quad (3.52g)$$

$$W > 1, \quad (\text{экипротическая материя}). \quad (3.52h)$$

Рассмотрим случай, когда нелинейность спинорного поля возникает в результате самодействия. Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$L_{\text{sp}} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi + F, \quad (3.53)$$

Для простоты предположим, что нелинейный член $F = F(S)$. Тогда для компонентов энергии и импульса имеем

$$T_0^0 = mS - F, \quad (3.54)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = S \frac{dF}{dS} - F. \quad (3.55)$$

Подставляя $\varepsilon = T_0^0$ и $p = -T_1^1$ в (3.51) находим

$$S \frac{dF}{dS} - (1 + W)F + mWS = 0, \quad (3.56)$$

с решением

$$F = \lambda S^{1+W} + mS, \quad (3.57)$$

где λ - постоянная интегрирования. Подставляя (3.57) в (3.54) находим, что

$$T_0^0 = -\lambda S^{1+W}. \quad (3.58)$$

Поскольку плотность энергии должна быть неотрицательная, мы заключаем, что λ - отрицательная, т.е., $\lambda = -\nu$, где ν - положительная постоянная. Тогда для компонент тензора энергии-импульса пишем

$$T_0^0 = \nu S^{1+W}, \quad (3.59a)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -\nu W S^{1+W}. \quad (3.59b)$$

Как видно, плотность энергии $\varepsilon = T_0^0$ всегда положительная, тогда как давление $p = -T_1^1 = \nu W S^{1+W}$ положительная при $W > 0$, т.е., для обычной жидкости и отрицательно при $W < 0$, т.е. для темной энергии. Подставляя (3.57) в (3.53), находим

$$L_{\text{sp}} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - \nu S^{1+W}, \quad (3.60)$$

Т.о., безмассовое спинорное поле с лагранжианом (3.60) описывает идеальную жидкость от фантомной до экпиротической материи [184, 261].

Моделирование газ Чаплыгина

Опишем газ Чаплыгина с помощью спинорного поля. Как известно, газ Чаплыгина задается уравнением состояния

$$p = -A/\varepsilon^\gamma. \quad (3.61)$$

В случае безмассового спинорного поля для F находим

$$\frac{(-F)^\gamma d(-F)}{(-F)^{1+\gamma} - A} = \frac{dS}{S}, \quad (3.62)$$

с решением

$$-F = (A + \lambda S^{1+\gamma})^{1/(1+\gamma)}. \quad (3.63)$$

С учетом этого компоненты тензора энергии-импульса имеют вид

$$T_0^0 = (A + \lambda S^{1+\gamma})^{1/(1+\gamma)}, \quad (3.64a)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = A/(A + \lambda S^{1+\gamma})^{\gamma/(1+\gamma)}. \quad (3.64b)$$

Как и ожидалось, имеем положительную плотность энергии и отрицательное давление.

Т.о., лагранжиан спинорного поля, соответствующий газу Чаплыгина имеет вид [261, 262, 263]

$$L_{\text{sp}} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - (A + \lambda S^{1+\gamma})^{1/(1+\gamma)}. \quad (3.65)$$

Моделирование квинтэссенций с модифицированным уравнением состояния

На конец мы с помощью нелинейного спинорного поля опишем квинтэссенцию с модифицированным уравнением состояния. Принимая во внимание, что квинтэссенция с модифицированным уравнением состояния задается (3.42) [256], т.е.,

$$p = W(\varepsilon - \varepsilon_{\text{cr}}), \quad W \in (-1, 0), \quad (3.66)$$

подставляя $\varepsilon = T_0^0$ and $p = -T_1^1$ в (3.66) находим

$$F = -\eta S^{1+W} + mS - \frac{W}{1+W} \varepsilon_{\text{cr}}, \quad (3.67)$$

где η некоторая положительная постоянная. С учетом этого для компонентов тензора энергии-импульса имеем

$$T_0^0 = \eta S^{1+W} + \frac{W}{1+W} \varepsilon_{\text{cr}}, \quad (3.68a)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -\eta W S^{1+W} + \frac{W}{1+W} \varepsilon_{\text{cr}}. \quad (3.68b)$$

Лагранжиан спинорного поля описывающий идеальную жидкость и квинтэссенцию с модифицированным уравнением состояния может быть задан следующим образом [263]

$$L_{\text{sp}} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - \nu S^{1+W} - \frac{W}{1+W} \varepsilon_{\text{cr}}. \quad (3.69)$$

Можно легко убедиться в том, что в случае $\varepsilon_{\text{cr}} = 0$ (3.69) описывает идеальную жидкость, тогда как с ненулевой ε_{cr} с $W \in (-1, 0)$ (3.69) генерирует квинтэссенцию с модифицированным уравнением состояния. Надо заметить, что ограничение $W > -1$ очень важна, поскольку оно не позволяет системе переходить барьер разделяющий фантомной материй (phantom divide barrier).

Т.о., мы видим, что нелинейное спинорное поле со специальной нелинейностью может заменить идеальную жидкость и темную энергию.

3.5.2 Моделирование идеальной жидкости с помощью взаимодействующих спинорного скалярного полей

Теперь рассмотрим систему с взаимодействующими спинорными и скалярными полями с лагранжианом

$$L_{\text{int}} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} (1 + \lambda_1 F_1), \quad (3.70)$$

где $F_1 = F_1(S)$. Обозначив $F_2 = 1 + \lambda_1 F_1$, в этом случае имеем

$$T_0^0 = mS + \frac{1}{2} \frac{S^2}{F_2^2}, \quad (3.71)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \frac{1}{2} \frac{S^2}{F_2^2} \left(S \frac{dF_2}{dS} - F_2 \right). \quad (3.72)$$

Здесь мы учли, что $\dot{\varphi}^2 = QS^2/F_2^2$. Здесь Q - некоторая постоянная. Для простоты положим $Q = 1$.

Подставляя (3.71) и (3.72) в (3.51), получим

$$S^2 \frac{dF_2}{dS} + (W - 1) S F_2 + 2mW F_2^2 = 0. \quad (3.73)$$

В случае безмассового спинорного поля имеем

$$F_2 = CS^{1-W}. \quad (3.74)$$

Что касается газа Чаплыгина, то в этом случае подставляя (3.71) и (3.72) в (3.61) при $\gamma = 1$ для безмассового спинорного поля имеем

$$S \frac{dF_2}{dS} - 4 \frac{F_2^4}{S^4} - F_2 = 0, \quad (3.75)$$

с решением [261]

$$F_2 = \left(\frac{1}{12} \right)^{1/3} S^{4/3}. \quad (3.76)$$

Т.о., взаимодействующие спинорное и скалярное поля также могут описывать идеальную жидкость и темную энергию.

3.6 Выводы

В рамках Бианки типа-I космологической модели рассмотрено поведение Вселенной при наличии источников с отрицательным давлением, что приводит к ускоренному расширению.

Как и ожидалось, стандартные источники темной энергии, такие как космологическая постоянная, квинтэссенция, газ Чаплыгина приводят к ускоренному расширению и быстрой изотропизации. Если же заполнить Вселенную жидкостью Ван-дер-Ваальса, то при некоторых значениях параметров в начальной стадии эволюции возникает довольно большое отрицательное давление, что приводит к начальной инфляции.

Предложена модель с модифицированной квинтэссенцией. Эта модель приводит к циклическому или осциллирующему поведению и таким образом избавляет от проблемы вечного ускорения.

Было так же показано, что при некоторых выборах параметров модели с нелинейным спинорным полем могут иметь отрицательные давления и способны объяснить проблемы ускоренного расширения. При этом нелинейность спинорного поля может быть результатом как самодействия, так и взаимодействия со скалярным полем. Показано, что нелинейность спинорного поля в этом играет важную роль в начальной стадии и приводит к быстрой изотропизации, а ускоренное расширение при больших временах происходит за счет массы спинорного поля. Поскольку нейтрино удовлетворяет уравнению Дирака и по-видимому имеет ненулевую массу, то полученный результат дает возможность рассматривать нейтрино как потенциальный источник ускоренного расширения.

Найдены типы нелинейности спинорного поля при которых спинорное поле может описывать идеальную жидкость и темную энергию.

Глава 4

Нелинейные спинорное и скалярное поля в модели Бианки VI

4.1 Введение

Хотя в качестве анизотропной космологической модели космологи в основном рассматривают модели типа Бианки I, существует множество других моделей, которые описывают анизотропное пространство-время и вызывают определенный интерес среди физиков [286, 305, 167, 287, 79, 62, 109, 110]. В работе [305] был использован метод анализа динамической системы (methods of dynamical systems analysis), чтобы показать, что присутствие магнитного поля, ортогонального к двум коммутирующим векторам Киллинга в любом пространственно однородном Бианки типа VI_0 вакуумном решении уравнения Эйнштейна, заменяет в эволюции около сингулярности сжатие (collapse) на отскок (bounce). Авторы работ [167] изучали проблему изотропизации Бианки моделей со скалярным полем с экспоненциальным потенциалом. Другие работы, упомянутые выше, посвящены решениям с идеальной жидкостью (tilted perfect fluid solutions), хаотическим сингулярностям (chaotic singularities) и обусловленной симметрии (conditional symmetries).

В этой главе исследуется самосогласованная система взаимодействующих нелинейных спинорного и скалярного полей в рамках анизотропных космологических моделях типа Бианки VI и V. Соответствующая система задается действием

$$\mathcal{S}(g; \psi, \bar{\psi}, \varphi) = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d\Omega, \quad (4.1)$$

где

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{sp} + \mathcal{L}_{sc} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{pf}. \quad (4.2)$$

В качестве Лагранжиана спинорного поля выберем

$$\mathcal{L}_{sp} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - M \bar{\psi} \psi + F(I, J), \quad (4.3)$$

где M - это масса спинорного поля. Безмассовое скалярное поле выбрано в форме

$$\mathcal{L}_{sc} = \frac{1}{2} \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha}, \quad (4.4)$$

а взаимодействие между спинорным и скалярным полями описывается лагранжианом [270]

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda_1}{2} \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} F_1(I, J). \quad (4.5)$$

Здесь λ_1 - константа связи. Так как лагранжиан материальных полей остается неизменным, мы подробно остановимся на гравитационном поле.

4.2 Гравитационное поле

В качестве гравитационного поля мы рассматриваем метрику типа Бианки-VI (BVI) [245, 246, 247, 47]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2 e^{-2mz} dx^2 - b^2 e^{2nz} dy^2 - c^2 dz^2, \quad (4.6)$$

где a, b, c суть функции от времени. Здесь m, n - некоторые произвольные постоянные. Заметим, что BVI метрика моделирует анизотропную и неоднородную Вселенную. Подходящий выбор параметров m, n , а также метрических функции a, b, c в метрике BVI, заданной (4.6) генерирует следующие типы Вселенной типа Бианки:

(1) При $m = n$ BVI метрика преобразуется в Бианки типа-VI₀ (BV) метрику, т.е., $m = n$, BVI \implies BV₀ \in открытая Вселенная Фридманна-Робертсона-Уокера (FRW) с интервалом

$$ds^2 = dt^2 - a^2 e^{-2mz} dx^2 - b^2 e^{2mz} dy^2 - c^2 dz^2. \quad (4.7)$$

(2) При $m = -n$ BVI метрика преобразуется в Бианки типа-V (BV) метрику, т.е., $m = -n$, BVI \implies BV \in открытая Вселенная Фридманна-Робертсона-Уокера (FRW) с интервалом

$$ds^2 = dt^2 - a^2 e^{-2mz} dx^2 - b^2 e^{-2mz} dy^2 - c^2 dz^2. \quad (4.8)$$

(3) При $n = 0$ BVI метрика преобразуется в Бианки типа-III (BIII) метрику, т.е., $n = 0$, BVI \implies BIII с интервалом

$$ds^2 = dt^2 - a^2 e^{-2mz} dx^2 - b^2 dy^2 - c^2 dz^2. \quad (4.9)$$

(4) При $m = n = 0$ BVI метрика преобразуется в Бианки типа-I (BI) метрику, т.е., $m = n = 0$, BVI \implies BI с интервалом

$$ds^2 = dt^2 - a^2 dx^2 - b^2 dy^2 - c^2 dz^2. \quad (4.10)$$

(5) При $m = n = 0$ и равных масштабных факторах по всем трем направлениям BVI метрика преобразуется в метрику Фридманна-Робертсона-Уокера (FRW), т.е., $m = n = 0$ и $a = b = c$, BVI \implies FRW с интервалом

$$ds^2 = dt^2 - a^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.11)$$

Выпишем нетривиальные компоненты тензора Риччи и Римана, а также символы Кристоффеля, соответствующие BVI метрике.

Нетривиальные символы Кристоффеля выглядят как

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^1 &= \dot{a}/a, & \Gamma_{02}^2 &= \dot{b}/b, & \Gamma_{03}^3 &= \dot{c}/c, \\ \Gamma_{11}^0 &= a\dot{a}e^{-2mz}, & \Gamma_{22}^0 &= b\dot{b}e^{2nz}, & \Gamma_{33}^0 &= c\dot{c}, \\ \Gamma_{31}^1 &= -m, & \Gamma_{32}^2 &= n, & \Gamma_{11}^3 &= \frac{ma^2}{c^2}e^{-2mz}, & \Gamma_{22}^3 &= -\frac{nb^2}{c^2}e^{2mz}.\end{aligned}$$

Не нулевые компоненты тензора Римана имеют вид

$$\begin{aligned}R_{01}^{01} &= -\frac{\ddot{a}_1}{a_1}, & R_{02}^{02} &= -\frac{\ddot{a}_2}{a_2}, & R_{03}^{03} &= -\frac{\ddot{a}_3}{a_3}, \\ R_{12}^{12} &= -\frac{mn}{a_3^2} - \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2}, & R_{13}^{13} &= \frac{m^2}{a_3^2} - \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1}, & R_{23}^{23} &= \frac{n^2}{a_3^2} - \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3}, \\ R_{31}^{10} &= \frac{m}{a_3^2} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right), & R_{01}^{13} &= m \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right), \\ R_{32}^{20} &= \frac{n}{a_3^2} \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right), & R_{02}^{23} &= n \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right).\end{aligned}$$

Нетривиальные компоненты тензора Риччи

$$\begin{aligned}R_3^0 &= \left(m\frac{\dot{a}}{a} - n\frac{\dot{b}}{b} - (m-n)\frac{\dot{c}}{c} \right) = \frac{1}{\tau} [m\dot{a}bc - n\dot{b}ca - (m-n)\dot{c}ab], \\ R_0^0 &= -\left(\frac{\ddot{a}}{a^2} + \frac{\ddot{b}}{b^2} + \frac{\ddot{c}}{c^2} \right) = -\frac{1}{\tau} [\ddot{a}bc + \ddot{b}ca + \ddot{c}ab], \\ R_1^1 &= -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} - \frac{m^2 - mn}{c^2} \right) = -\frac{1}{\tau} [\ddot{a}bc + \dot{a}\dot{b}c + \dot{c}ab] + \frac{m^2 - mn}{c^2}, \\ R_2^2 &= -\left(\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} - \frac{n^2 - mn}{c^2} \right) = -\frac{1}{\tau} [a\ddot{b}c + \dot{a}\dot{b}c + \dot{b}ca] + \frac{n^2 - mn}{c^2}, \\ R_3^3 &= -\left(\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} - \frac{m^2 + n^2}{c^2} \right) = -\frac{1}{\tau} [\ddot{c}ab + \dot{c}ab + \dot{b}ca] + \frac{m^2 + n^2}{c^2},\end{aligned}$$

где мы определили

$$\tau = abc. \quad (4.12)$$

Для того, чтобы исследовать сингулярность (сингулярная точка), нам надо изучать инвариантные характеристики пространства-времени. Как известно, в общей теории относительности эти инварианты составлены из тензора кривизны и метрики. Хотя в четырехмерном римановом пространстве существует 14 независимых инвариантов [36, 244], для того, чтобы определить наличие сингулярной точки, достаточно изучить только три из них, а именно скалярную кривизну $I_1 = R$, $I_2 = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ и скаляр Кречманна (Kretschmann) $I_3 = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ [90, 128].

Из тензора Римана и Риччи в этом случае имеем

$$I_1 = R = -\frac{2}{\tau} \left[\ddot{\tau} - \dot{a}\dot{b}\dot{c} - \dot{a}\dot{b}\dot{c} - \dot{a}\dot{b}\dot{c} - \frac{ab}{c}(m^2 - mn + n^2) \right], \quad (4.13a)$$

$$I_2 = (R_0^0)^2 + (R_1^1)^2 + (R_2^2)^2 + (R_3^3)^2 + R_3^0 R_0^3, \quad (4.13b)$$

$$I_3 = 4[(R_{01}^{01})^2 + (R_{02}^{02})^2 + (R_{03}^{03})^2 + (R_{12}^{12})^2 + (R_{31}^{31})^2 + (R_{23}^{23})^2]. \quad (4.13c)$$

Из (4.13) следует, что $I_1 \propto 1/\tau$, $I_2 \propto 1/\tau^2$, и $I_3 \propto 1/\tau^2$. Заметим, что остальные 11 инвариантов составлены из двух и более тензоров Риччи и (или) Римана и, следовательно, обратно пропорциональны к $(\tau)^p$, где p число тензоров, входящих в соответствующий инвариант. Таким образом, в любой точке пространства-времени, где $\tau = 0$, инварианты I_1, I_2, I_3 становятся бесконечными; следовательно, пространство-время в этой точке становится сингулярными.

4.3 Уравнения полей и их решения

Как и раньше, начнем с уравнений гравитационного поля, так как они терпят самые большие изменения. Для ВVI пространства-времени уравнения Эйнштейна имеют вид

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} - \frac{n^2}{c^2} = \kappa T_1^1 + \Lambda, \quad (4.14a)$$

$$\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} - \frac{m^2}{c^2} = \kappa T_2^2 + \Lambda, \quad (4.14b)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{mn}{c^2} = \kappa T_3^3 + \Lambda, \quad (4.14c)$$

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} - \frac{m^2 - mn + n^2}{c^2} = \kappa T_0^0 + \Lambda, \quad (4.14d)$$

$$m\frac{\dot{a}}{a} - n\frac{\dot{b}}{b} - (m-n)\frac{\dot{c}}{c} = \kappa T_3^0. \quad (4.14e)$$

Здесь точка означает производную по времени (t), а T_μ^ν - тензор энергии-импульса материальных полей.

В последующем мы рассмотрим два типа нелинейности.

4.3.1 Нелинейное спинорное поле в отсутствии скалярного поля

Сначала мы рассмотрим случай, когда нелинейность спинорного поля порождается самодействием. В этом случае лагранжиан материального поля имеет вид:

$$\mathcal{L}_{\text{spinor}} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - M \bar{\psi} \psi + F(I, J). \quad (4.15)$$

Здесь M - масса спинорного поля, $F(I, J)$ - самодействие спинорного поля. Из (4.15) для спинорного поля имеем

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - M\psi + \mathcal{D}\psi + i\mathcal{G}\gamma^5\psi = 0, \quad (4.16a)$$

$$i\nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + M\bar{\psi} - \mathcal{D}\bar{\psi} - i\mathcal{G}\bar{\psi}\gamma^5 = 0, \quad (4.16b)$$

где $\mathcal{D} = 2SF_I$ and $\mathcal{G} = 2PF_J$. Матрицы аффинной спинорной связности в случае метрики (4.6) имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= 0, \\ \Gamma_1 &= \frac{1}{2} \left[\dot{a}\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^0 - m\frac{a}{c}\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^3 \right] e^{-mz} \\ \Gamma_2 &= \frac{1}{2} \left[\dot{b}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^0 + n\frac{b}{c}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3 \right] e^{nz}, \\ \Gamma_3 &= \frac{1}{2} \dot{c}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0 \end{aligned}$$

Легко показать, что в этом случае

$$\gamma^\mu \Gamma_\mu = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\tau}}{\tau} \bar{\gamma}^0 + \frac{m-n}{2c} \bar{\gamma}^3.$$

Заметим, что матрицы Дирака $\gamma^\mu(x)$ в ВVI связаны с аналогичными матрицами в плоском пространстве-времени соотношением

$$\gamma^0 = \bar{\gamma}^0, \quad \gamma^1 = \bar{\gamma}^1 e^{mz}/a, \quad \gamma^2 = \bar{\gamma}^2/b e^{nz}, \quad \gamma^3 = \bar{\gamma}^3/c.$$

Предположим, что спинорное поле зависят только от t и z :

$$\psi(t, z) = v(t) e^{ikz}, \quad \bar{\psi}(t, z) = \bar{v}(t) e^{-ikz} \quad (4.17)$$

Тогда для спинорного поля находим

$$\bar{\gamma}^0 \left(\dot{v} + \frac{\dot{\tau}}{2\tau} v \right) - \left(\frac{m-n}{2c} - i\frac{k}{c} \right) \bar{\gamma}^3 v + i\Phi v + \mathcal{G}\bar{\gamma}^5 v = 0, \quad (4.18a)$$

$$\left(\dot{\bar{v}} + \frac{\dot{\tau}}{2\tau} \bar{v} \right) \bar{\gamma}^0 - \left(\frac{m-n}{2c} + i\frac{k}{c} \right) \bar{v} \bar{\gamma}^3 - i\Phi \bar{v} - \mathcal{G}\bar{v} \bar{\gamma}^5 = 0. \quad (4.18b)$$

где $\Phi = M - \mathcal{D}$, $\mathcal{D} = 2SF_I$ и $\mathcal{G} = 2PF_J$. Введем новую функцию

$$u_j(t) = \sqrt{\tau} v_j(t).$$

Тогда для компонент спинорного поля из (4.18) находим

$$\dot{u}_1 + i\Phi u_1 - \left[\frac{m-n}{2c} - i\frac{k}{c} + \mathcal{G} \right] u_3 = 0, \quad (4.19a)$$

$$\dot{u}_2 + i\Phi u_2 + \left[\frac{m-n}{2c} - i\frac{k}{c} - \mathcal{G} \right] u_4 = 0, \quad (4.19b)$$

$$\dot{u}_3 - i\Phi u_3 - \left[\frac{m-n}{2c} - i\frac{k}{c} - \mathcal{G} \right] u_1 = 0, \quad (4.19c)$$

$$\dot{u}_4 - i\Phi u_4 + \left[\frac{m-n}{2c} - i\frac{k}{c} + \mathcal{G} \right] u_2 = 0. \quad (4.19d)$$

Из уравнений (4.16) и (4.18), мы также находим, что билинейные спинорные формы

$$\begin{aligned} S &= \bar{\psi}\psi = \bar{v}v, & P &= i\bar{\psi}\bar{\gamma}^5\psi = i\bar{v}\bar{\gamma}^5v, & A^0 &= \bar{\psi}\bar{\gamma}^5\bar{\gamma}^0\psi = \bar{v}\bar{\gamma}^5\bar{\gamma}^0v, \\ A^3 &= \bar{\psi}\bar{\gamma}^5\bar{\gamma}^3\psi = \bar{v}\bar{\gamma}^5\bar{\gamma}^3v, & V^0 &= \bar{\psi}\bar{\gamma}^0\psi = \bar{v}\bar{\gamma}^0v, & V^3 &= \bar{\psi}\bar{\gamma}^3\psi = \bar{v}\bar{\gamma}^3v, \\ Q^{30} &= i\bar{\psi}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\psi = i\bar{v}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0v, & Q^{21} &= \bar{\psi}\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^5\psi = i\bar{\psi}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^1\psi = i\bar{v}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^1v, \end{aligned}$$

подчиняются следующей системе уравнений

$$\dot{S}_0 - 2\frac{k}{c}Q_0^{30} - 2\mathcal{G}A_0^0 = 0, \quad (4.20a)$$

$$\dot{P}_0 - 2\frac{k}{c}Q_0^{21} - 2\Phi A_0^0 = 0, \quad (4.20b)$$

$$\dot{A}_0^0 - \frac{m-n}{c}A_0^3 + 2\Phi P_0 + 2\mathcal{G}S_0 = 0, \quad (4.20c)$$

$$\dot{A}_0^3 - \frac{m-n}{c}A_0^0 = 0, \quad (4.20d)$$

$$\dot{V}_0^0 - \frac{m-n}{c}V_0^3 = 0, \quad (4.20e)$$

$$\dot{V}_0^3 - \frac{m-n}{c}V_0^0 + 2\Phi Q_0^{30} - 2\mathcal{G}Q_0^{21} = 0, \quad (4.20f)$$

$$\dot{Q}_0^{30} + 2\frac{k}{c}S_0 - 2\Phi V_0^3 = 0, \quad (4.20g)$$

$$\dot{Q}_0^{21} + 2\frac{k}{c}P_0 + 2\mathcal{G}V_0^3 = 0, \quad (4.20h)$$

где использовано $F_0 = \tau F$. Из этих уравнений находим первый интеграл

$$(S_0)^2 + (P_0)^2 + (A_0^0)^2 - (A_0^3)^2 - (V_0^0)^2 + (V_0^3)^2 + (Q_0^{30})^2 + (Q_0^{21})^2 = C = \text{const.} \quad (4.21)$$

До того как решить уравнения Эйнштейна (4.14) вернемся к уравнениям (4.19). Из первого и третьего уравнений находим

$$\dot{u}_{13} = (\mathcal{G} - Q)u_{13}^2 - 2i\Phi u_{13} + (\mathcal{G} + Q), \quad (4.22)$$

где, $u_{13} = u_1/u_3$ и $Q = [m - n - 2ik]/2c$. Уравнение (4.22) - это уравнение типа Рикатти [177] с переменными коэффициентами. Преобразование [313]

$$v_{13} = \exp\left(-\int (\mathcal{G} - Q)u_{13}dt\right), \quad (4.23)$$

приводит уравнения Рикатти общего вида (4.22) к линейному уравнению второго порядка, а именно

$$(\mathcal{G} - Q)\ddot{v}_{13} + [2i\Phi(\mathcal{G} - Q) - \dot{\mathcal{G}} + \dot{Q}]\dot{v}_{13} + (\mathcal{G} - Q)^2(\mathcal{G} + Q)v_{13} = 0. \quad (4.24)$$

Иногда удобнее и легче решать линейное уравнение второго порядка, чем нелинейное уравнение первого порядка. Здесь мы напишем общее решение уравнения (4.22). Для этого перепишем уравнения (4.22) в форме

$$\dot{w}_{13} = (\mathcal{G} - Q)w_{13}^2 e^{-2i \int \Phi(t) dt} + (\mathcal{G} + Q)e^{2i \int \Phi(t) dt}, \quad (4.25)$$

где мы подставили $u_{13} = w_{13} \exp[-2i \int \Phi(t) dt]$. Это неоднородное нелинейное уравнение для w_{13} . Решения однородного уравнения типа (4.25), т.е.,

$$\dot{w}_{13} = (\mathcal{G} - Q)w_{13}^2 \exp\left(-2i \int \Phi(t) dt\right) \quad (4.26)$$

пишется в виде

$$w_{13} = -\left[\int (\mathcal{G} - Q) \exp\left(-2i \int \Phi(t) dt\right) dt + C\right]^{-1}, \quad (4.27)$$

где C некоторая произвольная постоянная. Тогда общее решение неоднородного уравнения (4.25) может быть представлено в виде

$$w_{13} = -\left[\int (\mathcal{G} - Q) \exp\left(-2i \int \Phi(t) dt\right) dt + C(t)\right]^{-1}, \quad (4.28)$$

где зависящий от времени параметр $C(t)$ определяется из

$$\dot{C} = \left[\int (\mathcal{G} - Q) \exp\left(-2i \int \Phi(t) dt\right) dt + C(t)\right]^2 (\mathcal{G} + Q) e^{2i \int \Phi(t) dt}. \quad (4.29)$$

Таким образом при конкретно заданной нелинейности из решений уравнений Эйнштейна находим соотношение между u_1 и u_3 (а также u_2 и u_4) и, следовательно, и компоненты спинорного поля.

Исследуем уравнения Эйнштейна (4.14). Для этого перепишем компоненты энергии-импульса:

$$T_0^0 = MS - F + \frac{k}{c}V^3, \quad (4.30a)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - F, \quad (4.30b)$$

$$T_3^3 = \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - F - \frac{k}{c}V^3, \quad (4.30c)$$

$$T_3^0 = -kV^0. \quad (4.30d)$$

Требует, чтобы выполнялся закон сохранения энергии-импульса, т.е.,

$$T_{\nu;\mu}^\mu = T_{\nu,\mu}^\mu + \Gamma_{\beta\mu}^\mu T_\nu^\beta - \Gamma_{\nu\mu}^\beta T_\beta^\mu = 0. \quad (4.31)$$

Учитывая, что T_μ^ν суть функция только от t , из (4.31) находим

$$\Phi \dot{S}_0 - \mathcal{G} \dot{P}_0 + \frac{k}{c} \dot{V}_0^3 - \frac{k}{c} \frac{m-n}{c} V_0^0 = 0, \quad (4.32a)$$

$$\dot{V}_0^0 - \frac{m-n}{c} V_0^3 = 0. \quad (4.32b)$$

Легко можно убедиться в том, что уравнения (4.32) находятся в согласии с (4.20).

Вернемся к уравнениям (4.14). Ввиду (4.30) из (4.14e) вытекает следующее отношение между метрическими функциями a , b , c :

$$\left(\frac{a}{c}\right)^m = \left(\frac{b}{c}\right)^n \mathcal{N} \exp\left(-\kappa k \int V^0 dt\right), \quad \mathcal{N} = \text{const}. \quad (4.33)$$

Вычитание (1.53a) из (1.53b) дает

$$\frac{d}{dt} \left[\tau \frac{d}{dt} \left\{ \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right\} \right] = \frac{m^2 - n^2}{c^2} \tau. \quad (4.34)$$

Аналогично, вычитания (1.53a) из (1.53c) и (1.53b) из (1.53c) приводят к

$$\frac{d}{dt} \left[\tau \frac{d}{dt} \left\{ \ln\left(\frac{a}{c}\right) \right\} \right] = -\frac{mn + n^2}{c^2} \tau - \frac{\kappa k}{c} V^3 \tau \quad (4.35)$$

и

$$\frac{d}{dt} \left[\tau \frac{d}{dt} \left\{ \ln\left(\frac{b}{c}\right) \right\} \right] = -\frac{mn + m^2}{c^2} \tau - \frac{\kappa k}{c} V^3 \tau, \quad (4.36)$$

соответственно. Можно показать, что ввиду (4.20) и (4.33) уравнения (4.34), (4.35) и (4.36) взаимозаменяемы.

Учитывая, что $\tau = abc$, из (4.33) можно выразить a и b в терминах c , так что

$$a = \left[\tau^n c^{m-2n} \mathcal{N} \exp\left(-\kappa k \int V^0 dt\right) \right]^{1/(m+n)}, \quad (4.37)$$

и

$$b = \left\{ \left[\tau^m c^{n-2m} / \left[\mathcal{N} \exp\left(-\kappa k \int V^0 dt\right) \right] \right] \right\}^{1/(m+n)}. \quad (4.38)$$

В свете (4.37), (4.38) и (4.20) из (4.34) находим

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = 3 \frac{\dot{\tau} \dot{c}}{\tau c} + 3 \left(\frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\dot{c}^2}{c^2} \right) - 2 \frac{\kappa k}{c} V^3 - \frac{(m+n)^2}{c^2}. \quad (4.39)$$

Для получения (4.39) мы использовали только четыре из пяти уравнений Эйнштейна, а (1.53d) осталось нетронутым. С другой стороны, суммируя (1.53a), (1.53b) и (1.53c) и трижды (1.53d), получим уравнение для τ , что ввиду (4.30), выглядит как

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = 2 \frac{m^2 - mn + n^2}{c^2} + \frac{\kappa}{2} \left[3(MS + \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - 2F) + 2 \frac{k}{c} V^3 \right]. \quad (4.40)$$

Таким образом осталось два уравнения, а именно (4.39) и (4.40), для двух неизвестных c и τ . Их можно скомбинировать чтобы получить

$$\frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\dot{c}^2}{c^2} + \frac{\dot{\tau} \dot{c}}{\tau c} = \frac{\kappa k}{c} V^3 + \frac{m^2 + n^2}{c^2} + \frac{\kappa}{2} [MS + \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - 2F]. \quad (4.41)$$

Таким образом мы пришли к уравнению (4.41), где все уравнения, как спинорные так и гравитационные, были уже использованы. Полагая, что c есть функция от τ (или наоборот) и задавая конкретные виды нелинейности спинорного поля в последующем найдем решения уравнения (4.41).

Таким образом, мы получили основные уравнения для нелинейного спинорного поля и метрических функций. Сравнивая эти уравнения с теми для VI во второй главе мы заключим, что введение неоднородностей как в гравитационное поле (через m и n), так и в спинорное поле (через k) существенно усложняет общую картину. В последующем мы явно выпишем решения этих уравнений для некоторых конкретных типов нелинейности.

Рассмотрим уравнение (4.41). Как видно, в нем содержатся две неизвестные функции, а именно c и τ , где τ определяется как $\tau = abc$. Для начала мы наложим дополнительную связь между c и τ , точнее, $c = \tau$ или $c = \sqrt{\tau}$. Заметим, что такая связь налагает некоторые ограничения на метрические функции, хотя при этом пространство-время остается анизотропным. Далее детально изучим уравнение (4.41) для различных нелинейностей.

Случай I

Допустим

$$c = \tau. \quad (4.42)$$

При таком предположении ввиду $\tau = abc$, находим $a = 1/b$. В самом деле, из (4.37) и (4.38) находим

$$a = \left[\tau^{m-n} \mathcal{N} \exp \left(-\kappa k \int V^0 dt \right) \right]^{1/(m+n)}, \quad (4.43)$$

и

$$b = \left\{ \tau^{n-m} / \left[\mathcal{N} \exp \left(-\kappa k \int V^0 dt \right) \right] \right\}^{1/(m+n)}. \quad (4.44)$$

С учетом (4.42), из (4.41) следует

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = \frac{\kappa k}{\tau} V^3 + \frac{m^2 + n^2}{\tau^2} + \frac{\kappa}{2} [MS + \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - 2F]. \quad (4.45)$$

Изучим (4.45) для некоторых специальных выборов нелинейности спинорного поля.

Линейное спинорное поле

Для начала рассмотрим линейный случай предположив $F(I, J) = 0$. Это немедленно приводит к $\mathcal{D} = 0$ и $\mathcal{G} = 0$. Уравнение (4.45) тогда имеет вид

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = \frac{\kappa k}{\tau} V^3 + \frac{m^2 + n^2}{\tau^2} + \frac{\kappa}{2} MS. \quad (4.46)$$

Как видно, для того чтобы решить уравнение (4.46), надо сначала определить V^3 и S . В случае линейного спинорного поля из (4.20) имеем

$$\dot{S}_0 - 2\frac{k}{c}Q_0^{30} = 0, \quad (4.47a)$$

$$\dot{P}_0 - 2\frac{k}{c}Q_0^{21} - 2MA_0^0 = 0, \quad (4.47b)$$

$$\dot{A}_0^0 - \frac{m-n}{c}A_0^3 + 2MP_0 = 0, \quad (4.47c)$$

$$\dot{A}_0^3 - \frac{m-n}{c}A_0^0 = 0, \quad (4.47d)$$

$$\dot{V}_0^0 - \frac{m-n}{c}V_0^3 = 0, \quad (4.47e)$$

$$\dot{V}_0^3 - \frac{m-n}{c}V_0^0 + 2MQ_0^{30} = 0, \quad (4.47f)$$

$$\dot{Q}_0^{30} + 2\frac{k}{c}S_0 - 2MV_0^3 = 0, \quad (4.47g)$$

$$\dot{Q}_0^{21} + 2\frac{k}{c}P_0 = 0, \quad (4.47h)$$

с первым интегралом

$$(S_0)^2 + (V_0^3)^2 + (Q_0^{30})^2 - (V_0^0)^2 = 0, \quad (4.48a)$$

$$(P_0)^2 + (A_0^0)^2 + (Q_0^{21})^2 - (A_0^3)^2 = 0. \quad (4.48b)$$

Таким образом видно, что даже в случае линейного спинорного поля с ненулевым k ($k \neq 0$) нельзя явно выписать выражения для V^3 или S . Таким образом, для того чтобы выразить S или P , а следовательно и массовый член или нелинейность спинорного поля в терминах τ , предположим, что спинорное поле не зависит от пространственных переменных, т.е., положим, что $k = 0$.

Из (4.20) в этом случае мы имеем

$$S = \frac{C_0}{\tau}, \quad (4.49)$$

где C_0 - это постоянная интегрирования. Уравнение (4.45) в данном случае имеет вид

$$\ddot{\tau} = \frac{m^2 + n^2}{\tau} + \frac{\kappa}{2} MC_0. \quad (4.50)$$

Решение уравнения (4.50) может быть записано в квадратурах

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{2(m^2 + n^2) \ln \tau + \kappa M C_0 \tau + E}} = t, \quad E = \text{const.} \quad (4.51)$$

Для того, чтобы решение имело смысл, необходимо чтобы подынтегральное выражение в (4.51) было положительным. То есть, для того, чтобы начальное значение τ могло быть близко к нулю, необходимо чтобы m и n были достаточно малыми, а постоянная E имела довольно большое значение.

Компоненты спинорного поля могут быть получены из (4.27). В рассматриваемом случае $\mathcal{G} = 0$, $Q = (m - n)/2\tau$ и $\Phi = M$.

Нелинейное спинорное поле с $k = 0$

Рассмотрим пространственно независимое нелинейное спинорное поле. Сначала выберем нелинейный член как функцию от $I = S^2$, затем безмассовое спинорное поле с нелинейностью как функцию от $J = P^2$.

Если нелинейный член выбран как $F = F(I) = \lambda S^\eta$, где λ константа самодействия, то ввиду $S = C_0/\tau$ для τ имеем

$$\ddot{\tau} = \frac{m^2 + n^2}{\tau} + \frac{\kappa}{2} M C_0 + \frac{\kappa \lambda (\eta - 2) C_0^\eta}{2\tau^{\eta-1}}, \quad (4.52)$$

с решением в квадратурах

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{2(m^2 + n^2) \ln \tau + \kappa M C_0 \tau - \kappa \lambda C_0^\eta \tau^{2-\eta} + E}} = t. \quad (4.53)$$

Как видно, введение нелинейного члена налагает дополнительное ограничение на малость начального значения τ . Компоненты спинорного поля как и в случае линейного спинорного поля могут быть получены из (4.27). В данном случае $\mathcal{G} = 0$ и $Q = (m - n)/2c$.

В случае безмассового спинорного поля, если нелинейный член выбран в виде $F = F(J) = \lambda P^\eta$, то из (1.50) для P получим

$$P = D_0/\tau. \quad (4.54)$$

Уравнение для τ имеет вид

$$\ddot{\tau} = \frac{m^2 + n^2}{\tau} + \frac{\kappa \lambda (\eta - 2) D_0^\eta}{2\tau^{\eta-1}} \quad (4.55)$$

с решением в квадратурах

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{2(m^2 + n^2) \ln \tau - \kappa \lambda D_0^\eta \tau^{2-\eta} + E}} = t. \quad (4.56)$$

Компоненты спинорного поля как и раньше могут быть найдены из (4.27). В этом случае, $Q = (m - n)/2c$ и $\Phi = 0$.

Случай II

Рассмотрим случай, когда

$$c = \sqrt{\tau}. \quad (4.57)$$

Это приводит к следующим выражениям для a and b :

$$a = \left[\tau^{m/2} \mathcal{N} \exp\left(-\kappa k \int V^0 dt\right) \right]^{1/(m+n)} \quad (4.58)$$

и

$$b = \left\{ \left[\tau^{n/2} / \left[\mathcal{N} \exp\left(-\kappa k \int V^0 dt\right) \right] \right] \right\}^{1/(m+n)}. \quad (4.59)$$

При таком предположении из (4.41) получим

$$\ddot{\tau} = 2\kappa k V^3 \sqrt{\tau} + 2(m^2 + n^2) + \kappa [MS + \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - 2F] \tau. \quad (4.60)$$

Это уравнение как и в предыдущем случае может быть решено точно, если полагать, что $k = 0$ и выбрать нелинейность спинорного поля в виде $F = F(I)$ или для безмассового спинорного поля в виде $F = F(J)$ или $F = F(I \pm J)$.

По причине, которая будет приведена ниже, рассмотрим нелинейное спинорное поле в BVI_0 Вселенной, подставляя $m = n$ в соответствующие уравнения. Для начала напишем уравнения для билинейных спинорных форм. Подставляя $m = n$ в (4.20) получим

$$\dot{S}_0 - 2\mathcal{G}A_0^0 = 0, \quad (4.61a)$$

$$\dot{P}_0 - 2\Phi A_0^0 = 0, \quad (4.61b)$$

$$\dot{A}_0^0 + 2\Phi P_0 + 2\mathcal{G}S_0 = 0, \quad (4.61c)$$

$$\dot{A}_0^3 = 0, \quad (4.61d)$$

$$\dot{V}_0^0 = 0, \quad (4.61e)$$

$$\dot{V}_0^3 + 2\Phi Q_0^{30} - 2\mathcal{G}Q_0^{21} = 0, \quad (4.61f)$$

$$\dot{Q}_0^{30} - 2\Phi V_0^3 = 0, \quad (4.61g)$$

$$\dot{Q}_0^{21} + 2\mathcal{G}V_0^3 = 0, \quad (4.61h)$$

со следующими соотношениями между билинейными формами спинорного поля

$$(S_0)^2 + (P_0)^2 + (A_0^0)^2 = B_1, \quad (4.62a)$$

$$A_0^3 = B_2, \quad (4.62b)$$

$$V_0^0 = B_3, \quad (4.62c)$$

$$(V_0^3)^2 + (Q_0^{30})^2 + (Q_0^{21})^2 = B_4, \quad (4.62d)$$

где B_i - постоянные интегрирования.

Вернемся к уравнениям Эйнштейна. Уравнение (4.14e) в этом случае имеет вид

$$\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} = -\frac{\kappa k}{m} V^0. \quad (4.63)$$

В отличие от BVI Вселенной, где соответствующее уравнение (4.14e) связывает все три метрических функции a , b , c , уравнение (4.63) связывает только a и b между собой:

$$a = \mathcal{N} \exp \left[-(\kappa k/m) \int V^0 dt \right] b. \quad (4.64)$$

Вспоминая, что $\tau = abc$, в свете (4.64) и (4.57), можно выражать a и b в терминах τ :

$$a = \mathcal{N}^{1/2} \tau^{1/4} \exp \left[-(\kappa k/2m) \int V^0 dt \right], \quad (4.65)$$

$$b = \mathcal{N}^{-1/2} \tau^{1/4} \exp \left[(\kappa k/2m) \int V^0 dt \right]. \quad (4.66)$$

В виду (4.65), (4.66) и того факта, что $\dot{V}_0^0 = 0$, из

$$\frac{d}{dt} \left[\tau \frac{d}{dt} \left\{ \ln \left(\frac{b}{c} \right) \right\} \right] = -\frac{2m^2}{c^2} \tau \quad (4.67)$$

получим

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = 3 \frac{\dot{\tau} \dot{c}}{\tau c} + 3 \left(\frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\dot{c}^2}{c^2} \right) - 4 \frac{m^2}{c^2}. \quad (4.68)$$

С другой стороны, уравнение (4.40) в данном случае имеет вид

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = 2 \frac{m^2}{c^2} + \frac{\kappa}{2} [3(MS + \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - 2F)] + \frac{\kappa k}{c} V^3. \quad (4.69)$$

Комбинируя (4.68) и (4.69) находим

$$\frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\dot{c}^2}{c^2} + \frac{\dot{\tau} \dot{c}}{\tau c} = \frac{\kappa k}{3c} V^3 + 2 \frac{m^2}{c^2} + \frac{\kappa}{2} [MS + \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - 2F]. \quad (4.70)$$

Таким образом мы заключим, что прямая подстановка $m = n$ в (4.41) не приводит к (4.70), так как уравнение (4.14e) для различных Бианки моделей дает различные отношения между метрическими функциями. Здесь мы просто упоминаем, что для VIII Вселенной, где $n = 0$, уравнение (4.14e) связывает a и c , тогда как для VI Вселенной, так же как и для FRW Вселенной, таких уравнений просто не существует. Заметим, что в BVI₀ Вселенной, где $m = n$, многие уравнения становятся существенно проще, но этого недостаточно для представления решения в явном виде, так как V^3 , S , и P остаются не определены явно. Поэтому, как и в предыдущем случае, мы рассмотрим пространственно независимое спинорное поле, подставляя $k = 0$. Это даст нам возможность явно решить уравнения спинорного и скалярного поля.

До того как подробно изучить уравнение (4.70), вернемся к уравнениям нелинейного спинорного поля. С учетом $m = n$ и $k = 0$ для спинорного поля сразу находим

$$\dot{u}_1 + i\Phi u_1 - \mathcal{G}u_3 = 0, \quad (4.71a)$$

$$\dot{u}_2 + i\Phi u_2 - \mathcal{G}u_4 = 0, \quad (4.71b)$$

$$\dot{u}_3 - i\Phi u_3 + \mathcal{G}u_1 = 0, \quad (4.71c)$$

$$\dot{u}_4 - i\Phi u_4 + \mathcal{G}u_2 = 0. \quad (4.71d)$$

Как и в BVI Вселенной, нелинейный член выберем в виде $F = F(I)$, а в случае безмассового спинорного поля $F = F(J)$ или $F = F(I \pm J)$. Уравнение спинорного поля (4.71) полностью совпадает с соответствующими уравнениями в VI пространстве-времени. Поэтому мы без подробностей выпишем соответствующие результаты.

Таким образом, если нелинейный член в лагранжиане выбран в виде $F = F(I)$, то компоненты спинорного поля выглядят [244] как

$$\psi_1(t) = (C_1/\sqrt{\tau}) \exp \left[-i \int (M - \mathcal{D}) dt \right], \quad (4.72a)$$

$$\psi_2(t) = (C_2/\sqrt{\tau}) \exp \left[-i \int (M - \mathcal{D}) dt \right], \quad (4.72b)$$

$$\psi_3(t) = (C_3/\sqrt{\tau}) \exp \left[i \int (M - \mathcal{D}) dt \right], \quad (4.72c)$$

$$\psi_4(t) = (C_4/\sqrt{\tau}) \exp \left[i \int (M - \mathcal{D}) dt \right]. \quad (4.72d)$$

здесь C_1, C_2, C_3, C_4 - постоянные интегрирования такие, что

$$C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 - C_4^2 = C_0,$$

с $C_0 = S\tau$.

В случае $F = F(J)$, компоненты спинорного поля имеют вид

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\tau}} (D_1 e^{i\sigma} + iD_3 e^{-i\sigma}), \quad (4.73a)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{\tau}} (D_2 e^{i\sigma} + iD_4 e^{-i\sigma}), \quad (4.73b)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{\tau}} (iD_1 e^{i\sigma} + D_3 e^{-i\sigma}), \quad (4.73c)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{\tau}} (iD_2 e^{i\sigma} + D_4 e^{-i\sigma}). \quad (4.73d)$$

Здесь $\sigma = \int \mathcal{G} dt$, и постоянные интегрирования D_i удовлетворяют

$$2(D_1^2 + D_2^2 - D_3^2 - D_4^2) = D_0,$$

а D_0 определяется из $P = D_0/\tau$.

Таким образом, в рассматриваемом случае билинейные формы спинорного поля обратно пропорциональны к τ , т.е., $S = C_0/\tau$ и $P = D_0/\tau$.

Вернемся к уравнению (4.70). Как видно, при $k = 0$, предположение $\tau = c$ не имеет смысла, так как в этом случае метрические функции a и b становятся постоянными. Как было отмечено выше, рассмотрим случай $c = \sqrt{\tau}$. При этом из (4.70) получим

$$\ddot{\tau} = 4m^2 + \kappa [MS + \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - 2F]\tau. \quad (4.74)$$

Рассмотрим случай $c = F = \lambda S^\eta$. Учитывая, что $S = C_0/\tau$ и $\mathcal{G} = 0$, из (4.74) находим

$$\ddot{\tau} = 4m^2 + \kappa [MC_0 + \lambda C_0^\eta (\eta - 2)\tau^{1-\eta}], \quad (4.75)$$

с решением в квадратурах

$$\frac{d\tau}{\sqrt{(8m^2 + 2\kappa MC_0)\tau - 2\lambda\kappa C_0^\eta \tau^{2-\eta} + E}} = t. \quad (4.76)$$

Заметим, что полагая $\lambda = 0$ и $M = 0$ в (4.76) мы получим случай с безмассовым нелинейным спинорным полем $c = \lambda P^\eta$ и линейным спинорным полем соответственно. Заметим, что для положительной E в случае линейного спинорного поля τ может иметь даже нулевое начальное значение.

4.3.2 Спинорное поле с индуцированной нелинейностью

В этом разделе мы рассмотрим самосогласованную систему спинорного, скалярного и гравитационного полей в рамках Бианки типа VI космологической модели. В предыдущем разделе нами были получены точные решения только в том случае, когда спинорное поле не зависело от пространственных координат. Имея это ввиду мы изначально рассмотрим спинорное и скалярное поля зависящими только от t полагая

$$\psi = \psi(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (4.77)$$

Из уравнения скалярного поля

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\sqrt{-g} g^{\nu\mu} (1 + \lambda F) \varphi_{,\mu} \right) = 0, \quad (4.78)$$

мы в этом случае имеем

$$\varphi = C \exp[(n - m)z] \int \frac{dt}{\tau(1 + \lambda F)} + C_1 \quad (4.79)$$

где C и C_1 - постоянные интегрирования. Уравнения для спинорного и гравитационного полей будет иметь такой же вид как и прежде, но в этом случае мы имеем

$$\mathcal{D} = \lambda S \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} \frac{\partial F}{\partial I}, \quad \mathcal{G} = \lambda P \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} \frac{\partial F}{\partial J}.$$

Для простоты в дальнейшем мы рассмотрим случай когда $F = I^n = S^{2n}$, что приводит к

$$\mathcal{D} = \frac{\lambda n C^2 \exp[2(n-m)z] S^{2n-1}}{\tau^2(1 + \lambda S^{2n})^2} = \frac{\lambda n C^2 \exp[2(n-m)z] C_0^{2n-1} \tau^{2n-1}}{(\tau^{2n} + \lambda C_0^{2n})^2},$$

где мы учитывали, что $S = C_0/\tau$. Поскольку уравнения спинорного поля и их решения по форме полностью совпадают с соответствующими выражениями в случае самодействия, то мы просто не будем их выписывать, а приступим к решению уравнения для τ . Соответствующее уравнение в этом случае имеет вид

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = 2 \frac{m^2 - mn + n^2}{c^2} + \frac{3\kappa}{2} [T_0^0 + T_1^1] + 3\Lambda. \quad (4.80)$$

Компоненты тензора энергии-импульса в этом случае имеют вид

$$T_0^0 = MS + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 (1 + \lambda F_1) + \varepsilon, \quad (4.81a)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 (1 + \lambda F_1) - p. \quad (4.81b)$$

С учетом этого уравнение (4.80) может быть записано в виде

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = 2 \frac{m^2 - mn + n^2}{c^2} + \frac{3\kappa}{2} [MS + \mathcal{D}S + \mathcal{G}P + (1 - \zeta) \varepsilon_0 / \tau^{1+\zeta}] + 3\Lambda. \quad (4.82)$$

Как и в предыдущем случае, оно допускает решение в квадратурах. Более подробно мы его изучим численно.

4.4 Численные решения

В этом разделе мы численно проанализируем уравнения (4.52) и (4.75). Для простоты рассмотрим случай с $F = F(I)$, так как полагая $\lambda = 0$ приходим к случаю с линейным спинорным полям, а полагая $M = 0$ получим случай с $F = F(J)$.

4.4.1 Численный анализ решения в случае самодействия

Анализируем полученные численно результаты в случае, когда нелинейность спинорного поля генерируется самодействием. Рассмотрим случаи с различными типами нелинейности.

Случай I

Пусть $F = \lambda S^\eta$. Тогда соответствующее уравнение имеет вид:

$$\ddot{\tau} = \mathcal{F}(p), \quad (4.83)$$

где

$$\mathcal{F}(p) = q_1 \frac{m^2 + n^2}{\tau} + q_2 m^2 + \kappa [q_3 M + q_4 \lambda (\eta - 2) \tau^{(1-\eta)}]. \quad (4.84)$$

Здесь p набор параметров, а именно, $p = \{\kappa, m, n, M, \lambda, \eta\}$. Уравнение (4.83) допускает следующий первый интеграл

$$\dot{\tau} = \sqrt{2[E - U(\tau)]}, \quad (4.85)$$

с потенциалом

$$U(\tau) = -[q_1(m^2 + n^2) \ln(\tau) + q_2 m^2 \tau + \kappa(q_3 M \tau - q_4 \lambda \tau^{(2-\eta)})]. \quad (4.86)$$

Заметим, что подставляя $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0.5$, $q_4 = 0.5$ и $q_1 = 0$, $q_2 = 4$, $q_3 = 1$, $q_4 = 1$, получим уравнения (4.52) и (4.75), которые соответствуют в случаях $c = \tau$ в BVI Вселенной и $c = \sqrt{\tau}$ в BVI₀ Вселенной соответственно.

Здесь мы проиллюстрируем некоторые численные результаты, полученные для выше упомянутых случаев. Параметры уравнений выбраны следующим образом: параметры неоднородности $m = 2$ и $n = 1$, гравитационная постоянная $\kappa = 1$. Для нелинейного спинорного поля берем $\lambda = 0.1$. Как видно из (4.86) и (4.85), для отрицательной η значение τ ограничено сверху. С другой стороны, поскольку метрика положительно определена, то τ также должен быть неотрицательный. В рисунках 4.1 и 4.2 показано численные результаты для некоторых отрицательных значений η .

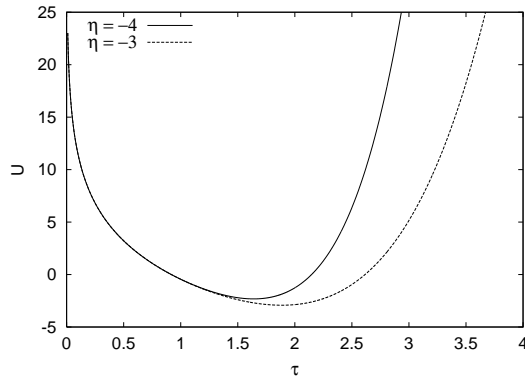


Рис. 4.1: Вид потенциала $U(\tau)$ (4.86) для разных значений η , а именно $\eta = -3$ и $\eta = -4$ в BVI модели с $m = 2$, $n = 1$, и $\lambda = 0.1$.

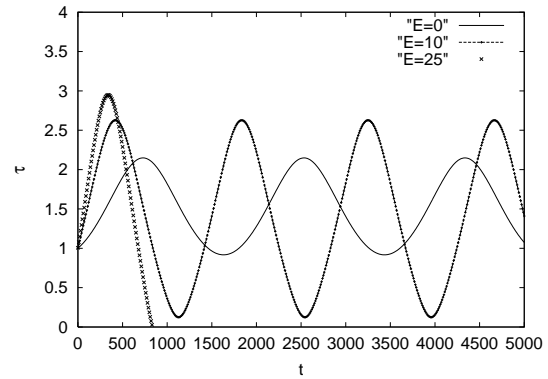


Рис. 4.2: Эволюция τ как решение уравнения (4.85) с потенциалом Рис. 4.1 при разных E . Здесь $\eta = -4$.

Как видно из Рис. 4.2, отрицательное η порождает осциллирующие моды в эволюции. В зависимости от значения E имеются два вида решения: периодическое (соответствует к $E = 0$ и $E = 10$) и ограниченное на конечном временном отрезке (соответствует к $E = 25$).

Рассмотрим, что происходит с условием энергодоминантности. Это условие в BVI

Вселенной имеет вид

$$T_0^0 \geq T_1^1 a^2 e^{-2mz} + T_2^2 b^2 e^{2nz} + T_3^3 c^2, \quad (4.87a)$$

$$T_0^0 \geq T_1^1 a^2 e^{-2mz}, \quad (4.87b)$$

$$T_0^0 \geq T_2^2 b^2 e^{2nz}, \quad (4.87c)$$

$$T_0^0 \geq T_3^3 c^2. \quad (4.87d)$$

Для $c = \tau$ и $k = 0$ с учетом (4.43) и (4.44), уравнение (4.87) в BVI пространстве-времени может быть записано в виде

$$T_0^0 \geq T_1^1 \tau^{2(m-n)/(m+n)} e^{-2mz} + T_2^2 \tau^{-2(m-n)/(m+n)} e^{2nz} + T_3^3 \tau^2, \quad (4.88a)$$

$$T_0^0 \geq T_1^1 \tau^{2(m-n)/(m+n)} e^{-2mz}, \quad (4.88b)$$

$$T_0^0 \geq T_2^2 \tau^{-2(m-n)/(m+n)} e^{2nz}, \quad (4.88c)$$

$$T_0^0 \geq T_3^3 \tau^2, \quad (4.88d)$$

тогда как для $c = \sqrt{\tau}$ и $k = 0$ с учетом (4.65) и (4.66) уравнение (4.87) в BVI Вселенной имеет вид

$$T_0^0 \geq T_1^1 \sqrt{\tau} \mathcal{N} e^{-2mz} + T_2^2 (\sqrt{\tau}/\mathcal{N}) e^{2nz} + T_3^3 \tau, \quad (4.89a)$$

$$T_0^0 \geq T_1^1 \sqrt{\tau} \mathcal{N} e^{-2mz}, \quad (4.89b)$$

$$T_0^0 \geq T_2^2 (\sqrt{\tau}/\mathcal{N}) e^{2nz}, \quad (4.89c)$$

$$T_0^0 \geq T_3^3 \tau. \quad (4.89d)$$

Компоненты тензора энергии-импульса при $k = 0$ выглядят

$$T_0^0 = MS - F, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \mathcal{D}S - F. \quad (4.90)$$

Для $F = \lambda S^\eta$, уравнение (4.90) с учетом $S = C_0/\tau$ имеет вид

$$T_0^0 = \frac{M}{\tau} - \frac{\lambda}{\tau^\eta}, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \frac{\lambda(\eta - 1)}{\tau^\eta}, \quad (4.91)$$

Для простоты положим $C_0 = 1$. Как видно из (4.91), для отрицательной η (например $\eta = -\eta_1$), плотность энергии системы T_0^0 становится отрицательной при $\tau > (M/\lambda)^{1/(1+\eta)}$ и уменьшается как τ^η . С другой стороны, все компоненты давления также отрицательны, но компоненты вдоль x и y осей уменьшается по закону $\tau^{[\eta_1+2(m-n)/(m+n)]}$ и $\tau^{[\eta_1-2(m-n)/(m+n)]}$ (см. Рис. 4.3). Это значит, что рано или поздно компоненты давления станут доминирующими, что графически изображено на Рис. 4.4. Заметим, что плотность энергии и давление в системе не зависят от константы E , тогда как значение τ в случае отрицательной η сильно зависит от нее. Как показано на Рис. 4.2, при некоторых значениях E , величина τ ограничена в пределах от 0 до 3, тогда как самая большая компонента давления в рассматриваемом случае становится доминирующим только при $\tau > 10$. Рисунок 4.3 показывает преобладание энергии в области

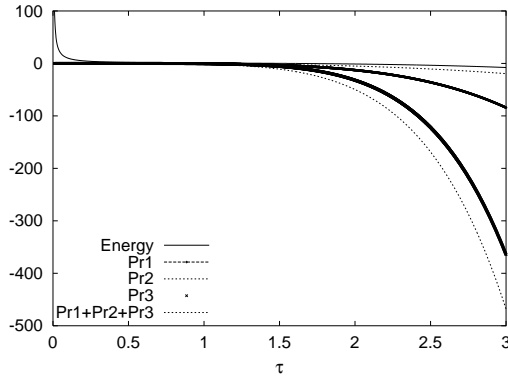


Рис. 4.3: Вид плотности энергии T_{00} и компонент давления T_{ii} , $i = 1, 2, 3$ соответствующими (4.91) при $\eta = -4$. Здесь Pr1, Pr2, и Pr3 обозначают компоненты давления вдоль осей x , y , и z , соответственно.

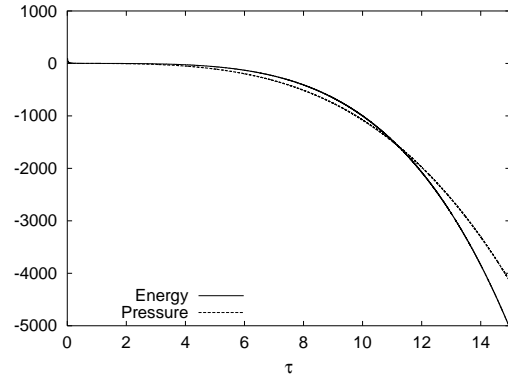


Рис. 4.4: Вид плотности энергии T_{00} и компоненты давления T_{22} при $\eta = -4$. Это отчетливо показывает преобладание давления, начиная с некоторых значений τ .

$\tau \in (0, 3)$. Это значит, что при подходящем выборе константы E , все же возможно построить регулярные решения без нарушения условия энергодоминантности.

Проиллюстрируем поведение τ для случая $c = \sqrt{\tau}$ в BVI_0 пространстве-времени (см. Рис. 4.5 и 4.6).

Как видно из Рис. 4.6, отрицательная η порождает осциллирующее решение. В зависимости от значений E возможно два типа решения. В отличие от предыдущего случая здесь имеется решение, где процесс может повторяться через некоторый интервал (времени) (как это видно для случая с $E = 25$ на Рис. 4.2 и 4.6). Как и в предыдущем случае, условие энергодоминантности остается в силе при отрицательной η .

Наконец, сравним модели при положительной η (см. Рис. 4.7 и 4.8).

Как и ожидалось, в этом случае Вселенная расширяется монотонно. В BVI_0 модели процесс расширения происходит более стремительно.

Случай II

Рассмотрим случай с тригонометрической нелинейностью, выбрав $F = \sin(S)$. В этом случае имеем

$$\mathcal{F} = q_1 \frac{m^2 + n^2}{\tau} + q_2 m^2 + \kappa \{q_3 M + q_4 \lambda [\cos(1/\tau) - 2\tau \sin(1/\tau)]\} \quad (4.92)$$

с потенциалом

$$U = -\{q_1(m^2 + n^2) \ln(\tau) + q_2 m^2 \tau + \kappa [q_3 M \tau - q_4 \lambda \tau^2 \sin(1/\tau)]\}. \quad (4.93)$$

Для простоты рассмотрим только случай в BVI Вселенной с $c = \tau$. Заметим, что для случая с $c = \sqrt{\tau}$ результаты подобны этим.

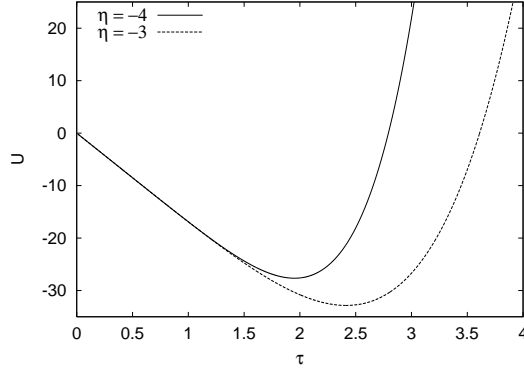


Рис. 4.5: Вид потенциала $U(\tau)$ (4.86) для различных значений η , а именно $\eta = -3$ и $\eta = -4$ для BVI_0 модели с $m = n = 2$ и $\lambda = 0.1$.

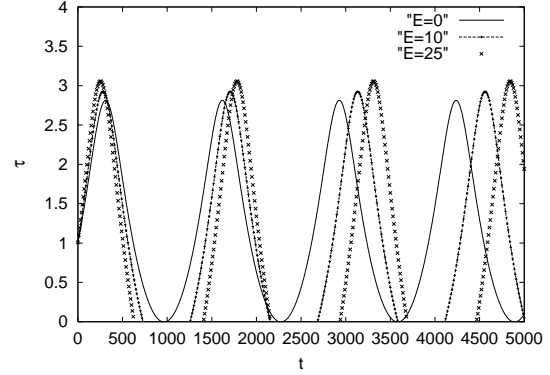


Рис. 4.6: Эволюция τ как решение уравнения (4.85) для различных значений E с $\eta = -4$. Соответствующий потенциал продемонстрирован на Рис. 4.5.

Случай III

Выберем $F = \exp(S)$. В этом случае имеем

$$\mathcal{F} = q_1 \frac{m^2 + n^2}{\tau} + q_2 m^2 + \kappa \{q_3 M + q_4 \lambda [1 - 2\tau] \exp(1/\tau)\} \quad (4.94)$$

с потенциалом

$$U = -\{q_1(m^2 + n^2) \ln(\tau) + q_2 m^2 \tau + \kappa [q_3 M \tau - q_4 \lambda \tau^2 \exp(1/\tau)]\}. \quad (4.95)$$

Как и в предыдущем случае рассмотрим только соотношение $c = \tau$ в BVI метрике.

На Рис. 4.9 изображены соответствующие потенциалы с нелинейным членом. Эти потенциалы являются синусоидальной или экспоненциальной функцией от S . Рассматривается случай $c = \tau$. Из рисунка видно, что при выбранной нелинейности эволюция Вселенной происходит также как со степенной нелинейностью и положительной η (см. Рис. 4.8 и 4.10).

4.4.2 Численный анализ с индуцированной нелинейностью

Рассмотрим случай, когда нелинейность спинорного поля возникает в результате взаимодействия со скалярным полем. Для простоты считаем, что $F_1 = F_1(I) = F_1(S)$. Кроме того, предположим, что $c = c(\tau)$. Тогда уравнение (4.82) может быть переписано в форме

$$\ddot{\tau} = \mathcal{F}(\tau, q), \quad (4.96)$$

где

$$\mathcal{F}(\tau, q) = 2(m^2 - mn + n^2) \frac{\tau}{c^2} + \frac{3\kappa}{2} \left[M + \mathcal{D} + \frac{1 - \zeta}{\tau \zeta} \right] + 3\Lambda \tau. \quad (4.97)$$

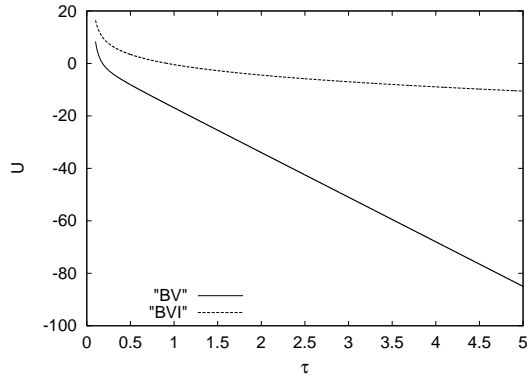


Рис. 4.7: Потенциал системы для положительной η , а именно $\eta = 4$ для BVI_0 ($m = 2, n = 1$) и BVI ($m = n = 2$) моделей с $\lambda = 0.1$. В отличие от случая с отрицательной η , потенциал в этом случае неограничен справа, таким образом допуская бесконечное расширение τ .

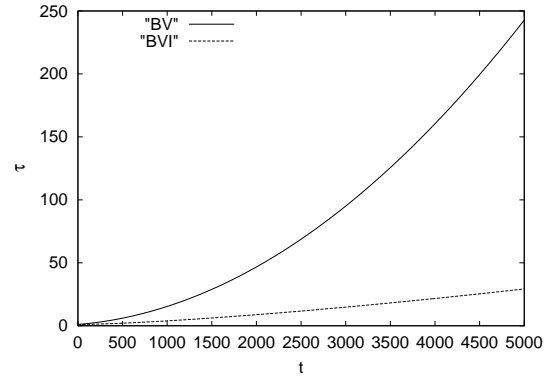


Рис. 4.8: Эволюция τ для положительной η в BVI_0 и BVI пространстве-времени. Как видно, эволюция в BV более стремительная.

Уравнение (4.96) допускает первый интеграл,

$$\dot{\tau} = \sqrt{2[E - U(\tau, q)]}, \quad (4.98)$$

с потенциалом

$$U(\tau, q) = -\{4(m^2 - mn + n^2) \int \frac{\tau d\tau}{c^2} + 3\kappa[M\tau + \int \mathcal{D}d\tau + \tau^{1-\zeta}] + 3\Lambda\tau^2\}. \quad (4.99)$$

Решаем уравнение (4.96) для (i) $c = \tau$ и (ii) $c = \sqrt{\tau}$.

Случай с $c = \tau$

Случай со степенной нелинейностью

Рассмотрим случай когда нелинейность спинорного поля задается степенной функцией от S . Предположим, что $F_1 = S^\eta$, где η - степень нелинейности. Правая часть уравнения (4.96) имеет вид

$$\mathcal{F}(\tau, q) = 2 \frac{m^2 - mn + n^2}{\tau} + \frac{3\kappa}{2} \left[MC_0 + \frac{\lambda C_s \eta \tau^{\eta-1}}{(\tau^\eta + \lambda C_0^\eta)^2} + \frac{(1 - \zeta)\varepsilon_0}{\tau^\zeta} \right] + 3\Lambda\tau, \quad (4.100)$$

где $C_s = C_{sc}^2 C_0^\eta / 2$. Для потенциала имеем

$$\mathcal{U}(\tau, q) = -\{4(m^2 - mn + n^2)\ln \tau + 3\kappa[MC_0 \tau - \lambda C_s / (\tau^\eta + \lambda C_0^\eta) + \varepsilon_0 \tau^{1-\zeta}\} + 3\Lambda\tau^2\}. \quad (4.101)$$

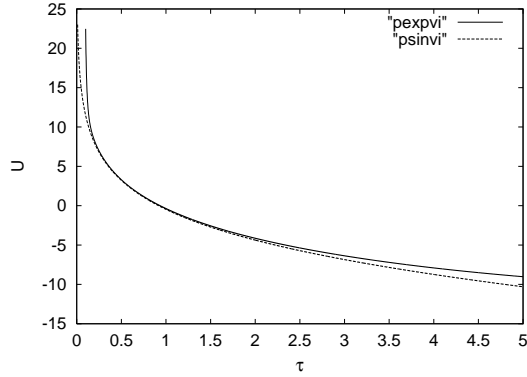


Рис. 4.9: Вид потенциала $U(\tau)$ заданного в виде (4.93) (“psinvi”) и (4.95) (“pexpvi”), соответственно, в BVI модели с $m = 2$, $n = 1$, и $\lambda = 0.1$.

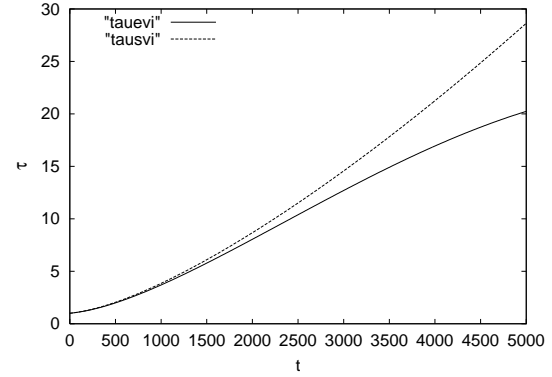


Рис. 4.10: Эволюция τ для потенциала заданного на Рис. 4.9. Здесь “tausvi” соответствует $F = \lambda \sin(S)$ и “tauevi” соответствует $F = \lambda \exp(S)$.

Будем решать уравнение (4.96) с правой частью заданной (4.100). Для простоты положим $\kappa = 1$, $C_0 = 1$, $C_s = 1$ и $\varepsilon_0 = 1$. Для численного решения были выбраны следующие значения: $m = 2$, $n = 1$, $M = 1$, $\lambda = 0.1$, $\zeta = 1/3$, $\eta = 3$. Заметим, что $\eta = -3$ дает примерно тот же результат, что и при $\eta = 3$. Для космологической постоянной выберем $\Lambda = 0, +1, -1$, соответственно. Уровень энергии выбран равным нулю ($E = 0$). Заметим, что в данном случае имеется бесконечно высокий потенциальный барьер при $\tau = 0$, что значит, что τ всегда положительно, т.е., имеется решение без сингулярностей. Заметим также, что при данном E минимальное значение τ (τ_{\min}) должно быть больше или равно значению τ в точке пересечения E и \mathcal{U} . Поскольку мы положили $E = 0$, то $\tau_{\min} \geq \tau_{\text{int}} : \mathcal{U}(\tau_{\text{int}}) = 0$. Для простоты начальное значение τ выбрано равным единице. Более того, в случае $\Lambda < 0$, что соответствует дополнительной гравитационной энергии, значение τ должно быть ограничено сверху, т.е., в этом случае значение τ лежит между двумя точками пересечения E и \mathcal{U} .

На Рис. 4.11 нарисован потенциал соответствующий формуле (4.101). На Рис. 4.12 показана эволюция τ при отрицательной Λ . Как видно, в этом случае модель допускает колебательный режим. На Рис. 4.13 и 4.14 показаны поведения τ для неотрицательной Λ . Как видно, введение положительного Λ -члена, что часто используется в качестве темной энергии, приводит к быстрому расширению Вселенной. Из Рис. (4.96) и (4.100) видно, что параметры m и n играют важную роль при малых τ . В случае расширяющейся Вселенной m и n становятся заметными на ранней стадии эволюции, тогда как в осциллирующей режиме они заметны при $\tau = \tau_{\min}$. Как видно из выражения (4.101), варьируя значения параметров m and n , высоту потенциального барьера в окрестности $\tau = 0$ можно менять, хотя она будет бесконечно высока при $\tau = 0$.

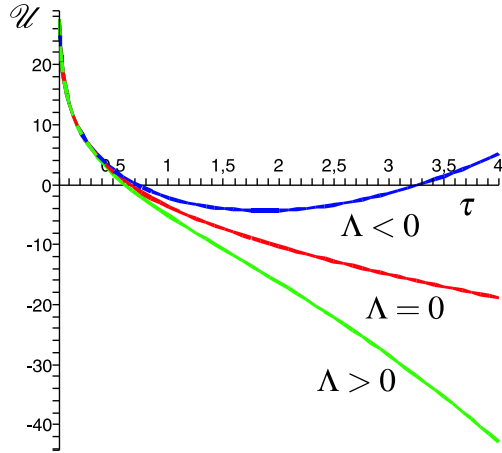


Рис. 4.11: Вид потенциала \mathcal{U} заданном выражением (4.101) при разных значениях Λ .

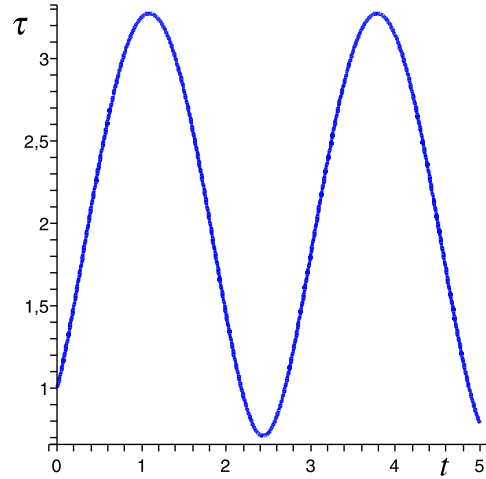


Рис. 4.12: Эволюция τ при отрицательной Λ .

Случай с тригонометрической нелинейностью

Рассмотрим случай, когда нелинейность спинорного поля задается тригонометрической функцией. Изучим два случая (i) $F_1 = \sin(S)$ и (ii) $F_1 = \exp(S)$.

Если $F_1 = \sin(S)$, то имеем

$$\mathcal{F}(\tau, q) = 2 \frac{m^2 - mn + n^2}{\tau} + \frac{3}{2} \left[M + \frac{\lambda \cos(1/\tau)}{\tau^2(1 + \lambda \sin(1/\tau))^2} + \frac{1 - \zeta}{\tau^\zeta} \right] + 3\Lambda\tau, \quad (4.102)$$

и

$$\mathcal{U}(\tau, q) = -\{4(m^2 - mn + n^2)\ln \tau + 3\kappa[M\tau - \lambda/2(1 + \lambda \sin(1/\tau)) + \tau^{1-\zeta}] + 3\Lambda\tau^2\} \quad (4.103)$$

При $F_1 = \exp(S)$ находим

$$\mathcal{F}(\tau, q) = 2 \frac{m^2 - mn + n^2}{\tau} + \frac{3}{2} \left[M + \frac{\lambda \exp(1/\tau)}{\tau^2(1 + \lambda \exp(1/\tau))^2} + \frac{1 - \zeta}{\tau^\zeta} \right] + 3\Lambda\tau, \quad (4.104)$$

и

$$\mathcal{U}(\tau, q) = -\{4(m^2 - mn + n^2)\ln \tau + 3\kappa[M\tau - \lambda/2(1 + \lambda \exp(1/\tau)) + \tau^{1-\zeta}] + 3\Lambda\tau^2\} \quad (4.105)$$

Оба эти случая рассмотрены и решены численно. Поведение потенциала \mathcal{U} и τ почти полностью совпадает с теми, что проиллюстрированы на Рис. (4.11 - 4.14).

Случай с $c = \sqrt{\tau}$

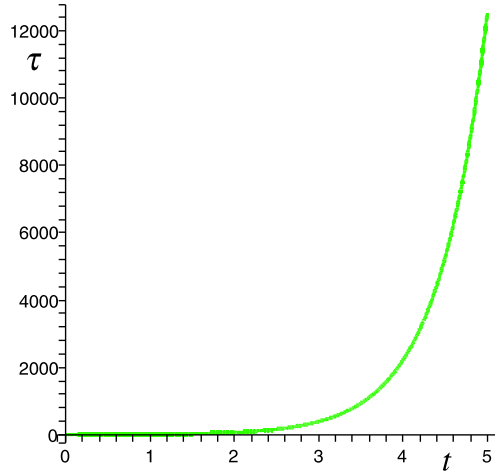


Рис. 4.13: Эволюция τ при положительной Λ .

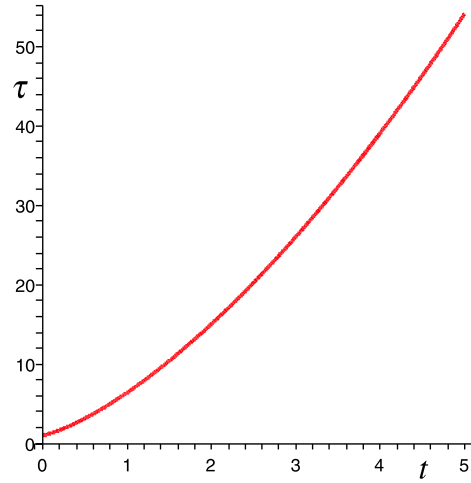


Рис. 4.14: Эволюция τ в отсутствие Λ -члена.

В этом случае имеем

$$\mathcal{F}(\tau, q) = 2(m^2 - mn + n^2) + \frac{3}{2} \left[M + \frac{\lambda \eta \tau^{\eta-1}}{(\lambda + \tau^\eta)^2} + \frac{1 - \zeta}{\tau^\zeta} \right], \quad (4.106)$$

и

$$\mathcal{U}(\tau, q) = -\{4(m^2 - mn + n^2)\tau + 3[M\tau - \lambda/(\lambda + \tau^\eta) + \tau^{1-\zeta}]\}. \quad (4.107)$$

В отличие от предыдущего случая, здесь τ может иметь нулевое значение, тем самым порождая пространственно-временную сингулярность. При конкретном E в случае отрицательной Λ решение может быть как осциллирующим так и неперiodическим.

Здесь, как и в предыдущем случае, выбраны следующие значения параметров $m = 2$, $n = 1$, $M = 1$, $\lambda = 0.1$, $\zeta = 1/3$, $\eta = 3$, $\Lambda = 0, +1, -1$ соответственно. Уровень энергии выбран как $E = 0$ и $E = -1$. Поведение τ при $\Lambda \geq 0$ совпадает с предыдущим случаем, тогда как при $\Lambda < 0$ эволюция Вселенной является неперiodической при $E \geq 0$ и осциллирующей при $E < 0$. На Рис. 4.15 нарисован потенциал соответствующему выражению (4.107). В отличие от предыдущего случая, он не имеет бесконечно высокого барьера при $\tau = 0$, что значит, что τ может иметь нулевое значение. На Рис. 4.16 проиллюстрирована эволюция τ при отрицательной Λ для двух различных значений E . В зависимости от значения E решение может быть как колебательным так и неперiodическим. Что касается параметров m и n , в данном случае они играют ту же роль что и масса спинорного поля.

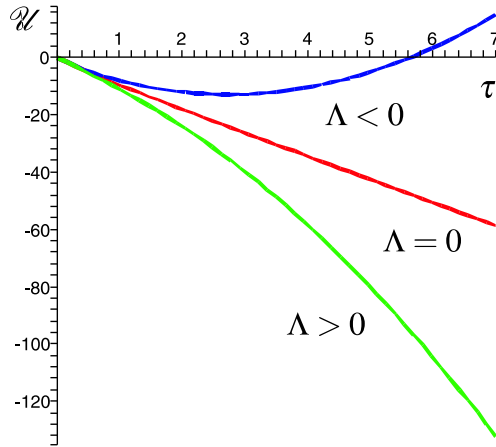


Рис. 4.15: Вид потенциала \mathcal{U} соответствующим (4.107) при разных Λ .

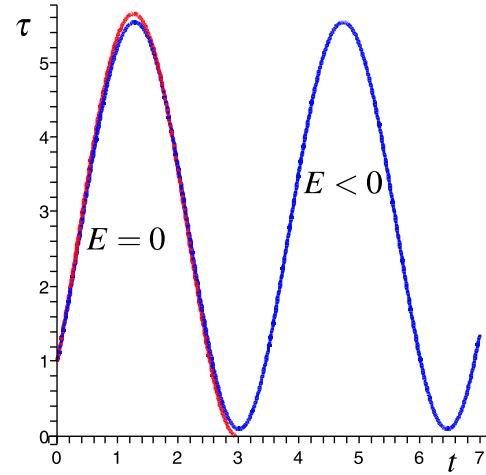


Рис. 4.16: Эволюция τ при отрицательной Λ для различных значений E .

4.5 Выводы

Рассмотрена самосогласованная система нелинейного спинорного и BVI гравитационного полей. Найдены точные решения уравнений спинорного и гравитационного полей для специальных выборов нелинейности спинорного поля и неоднородности пространства-времени. Показано, что если нелинейность спинорного поля выбрана в виде степенной функции инвариантов $I = S^2$ или $J = P^2$ с отрицательной степенью, то данная модель обеспечивает колебательное решение. Для подходящего выбора постоянной интегрирования E эти решения являются регулярными в любой точке пространства-времени. Как было показано, хотя при подходящем выборе m и n BVI метрика порождает другие типы Бианки моделей, а именно BVI₀, BV, VIII и VI, решения уравнения Эйнштейна при этом не могут быть получены при подстановке соответствующих значений m и n в соответствующих решениях, полученных в BVI Вселенной, поскольку в разных моделях метрические функции связаны между собой по-разному. На самом деле из уравнения (4.14e)

$$m \frac{\dot{a}}{a} - n \frac{\dot{b}}{b} - (m - n) \frac{\dot{c}}{c} = \kappa T_3^0, \quad (4.108)$$

следует, что в BVI Вселенной метрические функции a , b , c связаны между собой соотношением (4.33).

Для BVI₀ Вселенной уравнение (4.108) имеет вид

$$m \left[\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} \right] = \kappa T_3^0, \quad (4.109)$$

что дает связь между a и b , которая выражается соотношением (4.64).

Для BV Вселенной из уравнения (4.108) имеем

$$m \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} - 2\frac{\dot{c}}{c} \right] = \kappa T_3^0, \quad (4.110)$$

что дает связь между a , b и c .

В случае VIII Вселенной имеем

$$m \left[\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{c}}{c} \right] = \kappa T_3^0, \quad (4.111)$$

что связывает a и c .

В VI или FRW моделях уравнение (4.108) просто не существует.

Глава 5

Статические плоско-симметричные решения взаимодействующих спинорного и скалярного полей в ОТО

5.1 Введение

В последние годы космологические модели, проявляющие плоскую симметрию, привлекают внимание многих специалистов. В настоящее время Вселенная сферически симметрична и распределение материи в ней изотропно и однородно. Но на ранней стадии эволюции у нее не могло быть такой гладкой картины. Ближе к сингулярности Большого Взрыва ни предположение о сферической симметрии, ни предположение об изотропности не может быть строго выполнено. Именно поэтому многие специалисты рассматривают плоскую симметрию, поскольку она менее строга, чем сферическая симметрия, и обеспечивает поле для изучения неоднородности ранней Вселенной. Заметим, что неоднородные космологические модели играют важную роль для понимания некоторых существенных черт, таких как формирование галактики на ранней стадии эволюции и процесса гомогенизации Вселенной.

С другой стороны, нелинейные феномены остаются одной из самых популярных тем исследований в течении последних лет. Хотя нелинейные классические поля не получили общего одобрения, нелинейное обобщение классического поля является одним из возможных путей для преодоления тех трудностей, которые испытывает теория, рассматривающая элементарные частицы как математические точки. Нахождение и исследование свойств регулярных локализованных решений нелинейных классических полевых уравнений (солитоны или частицеподобные решения) связано с надеждой создать свободную от расходимостей теорию элементарных частиц, которая могла бы описывать сложную пространственную структуру частиц, наблюдаемую экспериментально [297]. Уравнение гравитационного поля является нелинейным по природе, а само поле является универсальным и неэкранированным. Эти свойства приводят к определенным интересным физическим эффектам в собственном гравитационном

поле. Этот проект был реализован во множестве работ, где авторы подробно изучали скалярное и/или электромагнитное поля в рамках сферического и цилиндрического пространства-времени [11, 10, 42, 240, 241, 242, 260]. Однако, в работах, связанных с солитоноподобным решением нелинейных уравнений полей, часто игнорируется собственное гравитационное поле ¹.

В последние годы космологические модели, проявляющие плоскую симметрию, были изучены множеством авторов [232, 293, 314, 285, 213, 101, 63, 210, 228, 312]. В работе [232] была изучена природа начальной сингулярности в пространственно компактной плоско-симметричной скалярной космологии. Автор показал, что при этом сингулярность уничтожается (crushing) и подавляется скоростью (velocity dominated). Он также показал, что с приближением сингулярности скаляр Кречмана (Kretschmann) расходится равномерно. Для плоско-симметричной космологической модели Таруя (Taruya) и Намбу (Nambu) [293] реализовано расширение второго порядка и проанализировано чисто нелинейное возмущение гравитационной волны (GW). В работе [63] автор доказал существования класса плоско-симметричных космологических моделей с идеальной жидкостью. Эти модели имеют сингулярности типа Казнера с формой сигары. Точные вакуумные решения уравнений Эйнштейна, соответствующие статическим и стационарным плоско-симметричным пространствам-временам, были исследованы в работе [210]. Ори (Ori) сконструировал класс плоско-симметричных решений, обладающих нулевой или слабой сингулярностью кривизны. Эта сингулярность похожа на пространственно-временную сингулярность на горизонте Коши, вращающейся (или заряженной) черной дыры [213]. Хотя в настоящей стадии эволюции Вселенная является сферически-симметричной и распределение материи является изотропным и однородным, на ранней стадии эволюции (например ближе к большой взрывной сингулярности) ни предположение о сферической симметрии, ни об изотропности не могут быть строго справедливы. С этой точки зрения многие авторы рассматривают плоскую симметрию, которая является менее ограничивающей, чем сферическая симметрия, и обеспечивает поля для изучения неоднородности, так как эти модели играют важную роль для изучения таких существенных черт Вселенной, как формирование Галактики в начальной стадии эволюции и процесс гомогенизации.

Вселенная в настоящем сферически-симметрична и распределение вещества в ней в общем изотропно и однородно. Но в начальной стадии эволюции маловероятно, чтобы она могла иметь такую гладкую картину. Поэтому мы рассматриваем плоскую симметрию, которая обеспечивает возможность изучения неоднородности. Недавно мы изучили систему нелинейных спинорного и скалярного полей с минимальной связью в плоско-симметричной фоновой [273, 274]. В этой работе была изучена роль нелинейных спинорного и скалярного полей в формировании конфигурации с локализованной плотностью энергии, спина и заряда спинорного поля и конечной полной энергией. Отметим также, что в работе [24] были получены стационарные решения линейно-

¹Под собственным гравитационным полем мы подразумеваем следующие: материальное поле ведет себя как источник гравитационного поля. А гравитационное поле со своей стороны эффективно влияет на конфигурацию материального поля. В этом смысле “собственное” гравитационное поле является решением само-согласованной системы материального и гравитационного полей.

го и нелинейного спинорного полей в цилиндрической симметрии. Получено решение для стационарной цилиндрической конфигурации спинорного поля с квадратичной псевдовекторной нелинейностью [188]. Показано, что при этом образуется "кротовая нора". В работе [191] показано, что векторное гравитационное поле индуцирует, как и кручение, квадратичную псевдовекторную нелинейность у спинорного поля и получены стационарные сферические и цилиндрические решения уравнений Эйнштейна с таким спинорным полем. Показано, что в результате образуются "кротовые норы".

Действие нелинейных спинорного и скалярного полей мы выберем в виде (1.1). Лагранжиан спинорного и скалярного полей а также лагранжиан взаимодействия между ними будет таким же, как и в предыдущем главе. Но поскольку гравитационное поле в этом случае представляет собой плоско-симметричную метрику, то уравнения спинорного и скалярного полей претерпевают соответствующие изменение.

5.2 Плоско-симметричное гравитационное поле

В качестве гравитационного поля мы рассмотрим плоско-симметричное пространство-время. Неоднородная плоско-симметричная модель впервые была рассмотрена Таубом (Taub) [294, 295]. Как было определено Таубом [294], будем говорить, что пространство-время будет иметь плоскую симметрию, если оно допускает трехпараметрическую группу, порождаемую преобразованием

$$y^* = y + a, \quad (5.1a)$$

$$z^* = z + b, \quad (5.1b)$$

$$y^* = y \cos \theta + z \sin \theta, \quad (5.1c)$$

$$z^* = -y \sin \theta + z \cos \theta.$$

Метрика пространства-времени, допускающая плоскую симметрию может быть записана в виде [295]

$$ds^2 = e^{2\chi} dt^2 - e^{2\alpha} dx^2 - e^{2\beta} (dy^2 + dz^2), \quad (5.2)$$

где скорость света c принята равной единице и χ , α , β есть функции от x и t . Заметим, что (5.2) является одной из самых общих форм Вселенной, допускающей плоскую симметрию. Большинство авторов, работающих с плоско-симметричным пространством-временем, рассматривает случай, когда метрические функции зависят от одной переменной, хотя некоторые рассматривают самую общую форму [293, 228]. Поскольку координатное преобразование $X = x - vt$ позволяет нам восстановить общий случай, в этой работе мы выберем метрические функции, не зависящие от времени.

Надо отметить, что пространство-время с плоской симметрией имеет следующие свойства [294]:

- Пространство-время с плоской симметрией с $R_{\mu\nu} = 0$ допускает координатную систему, где интервал не зависит от x^0 , т.е., статическое.
- Пространство-время с плоской симметрией с $R_{\mu\nu} = 0$ допускает по крайней мере одну параметрическую группу с одним времени-подобным генератором.
- Пространство-время с плоской симметрией с $R_{\mu\nu} = 0$ и для которого $R_{\nu\alpha\beta}^{\mu}$ конечно для любой точки является плоским.

Таким образом, пространства-времени с плоской симметрией очень похожи на пространства-времени с сферической симметрией.

Вернемся теперь к нашей задаче. Статическое плоско-симметричное пространство-время мы выберем в виде [272, 273, 274, 51]

$$ds^2 = e^{2\chi} dt^2 - e^{2\alpha} dx^2 - e^{2\beta} (dy^2 + dz^2), \quad (5.3)$$

где метрические функции χ, α, β зависят только от пространственной переменной x . Выпишем нетривиальные компоненты символов Кристоффеля, тензоров Римана, Риччи и скалярной кривизны. Для символов Кристоффеля в этом случае находим:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \alpha', & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 \beta', & \Gamma_{10}^0 &= \chi', \\ \Gamma_{00}^1 &= \chi' e^{-2(\alpha-\chi)}, & \Gamma_{22}^1 &= \Gamma_{33}^1 = \beta' e^{-2(\alpha-\beta)}. \end{aligned}$$

Нетривиальные компоненты тензора Римана выглядят:

$$R_{10}^{10} = (\chi'' + \chi'^2 - \alpha' \chi') e^{-2\alpha}, \quad (5.4a)$$

$$R_{12}^{12} = R_{13}^{13} = (\beta'' + \beta'^2 - \alpha' \beta') e^{-2\alpha}, \quad (5.4b)$$

$$R_{23}^{23} = \beta'^2 e^{-2\alpha}, \quad (5.4c)$$

$$R_{02}^{02} = R_{03}^{03} = \beta' \chi' e^{-2\alpha}. \quad (5.4d)$$

Из тензора Римана получим следующие ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$R_0^0 = -(\chi'' + \chi'^2 - \alpha' \chi' + 2\beta' \chi') e^{-2\alpha}, \quad (5.5a)$$

$$R_1^1 = -(2\beta'' + 2\beta'^2 - 2\alpha' \beta' + \chi'' + \chi'^2 - \alpha' \chi') e^{-2\alpha}, \quad (5.5b)$$

$$R_2^2 = R_3^3 = -(\beta'' + 2\beta'^2 - \alpha' \beta' + \beta' \chi') e^{-2\alpha}. \quad (5.5c)$$

И наконец, напишем выражение для скалярной кривизны:

$$R = 2(-2\beta'' - 3\beta'^2 + 2\alpha' \beta' - \chi'' - \chi'^2 + \alpha' \chi' - 2\beta' \chi') e^{-2\alpha}. \quad (5.6)$$

Далее, мы наложим следующее координатное условие на метрические функции:

$$\alpha = 2\beta + \chi. \quad (5.7)$$

5.3 Уравнения полей и их решения

Так как общий вид уравнений полей остается таким же, как и в предыдущей главе, мы напишем их в явном виде с учетом геометрии. Так как существенное изменение терпит система уравнений Эйнштейна, то начнем именно с нее.

Уравнения Эйнштейна в этом случае выглядят

$$e^{-2\alpha}(2\beta'' - 2\chi'\beta' - \beta'^2) = -\kappa T_0^0, \quad (5.8a)$$

$$e^{-2\alpha}(2\chi'\beta' + \beta'^2) = -\kappa T_1^1, \quad (5.8b)$$

$$e^{-2\alpha}(\beta'' + \chi'' - 2\chi'\beta' - \beta'^2) = -\kappa T_2^2, \quad (5.8c)$$

$$G_3^3 = G_2^2, \quad T_3^3 = T_2^2. \quad (5.8d)$$

Здесь штрих означает производную по x и T_ν^μ - тензор энергии-импульса спинорного и скалярного полей:

$$T_\nu^\mu = T_{sp\nu}^\mu + T_{sc\nu}^\mu \quad (5.9)$$

Для того, чтобы написать уравнения скалярного поля заметим, что в плоско-симметричном пространстве-времени матрицы Дирака связаны с соответствующими матрицами для плоского пространства времени следующим образом

$$\gamma^0(x) = e^{-x}\bar{\gamma}^0, \quad \gamma^1(x) = e^{-\alpha}\bar{\gamma}^1, \quad \gamma^2(x) = e^{-\beta}\bar{\gamma}^2, \quad \gamma^3(x) = e^{-\beta}\bar{\gamma}^3, \quad (5.10)$$

а матрицы аффинной спинорной связности в этом случае имеют вид

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{2}\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^1 e^{-2\beta}\chi', \quad \Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^1 e^{-(x+\beta)}\beta', \quad \Gamma_3 = \frac{1}{2}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^1 e^{-(x+\beta)}\beta'. \quad (5.11)$$

Будем рассматривать спинорное и скалярное поля зависящими только от пространственной переменной x . Уравнение скалярного поля (1.35) имеет решение

$$\frac{d\Psi}{d\Upsilon}\varphi' = \varphi_0, \quad \varphi_0 = \text{const}. \quad (5.12)$$

Равенство (5.12) для заданных $\Psi(\Upsilon)$ является алгебраическим уравнением для φ' , которое нужно будет определять через метрическую функцию $e^{\alpha(x)}$.

Учитывая, что

$$\gamma^\mu\Gamma_\mu = -\frac{1}{2}e^{-\alpha}\alpha'\bar{\gamma}^1, \quad (5.13)$$

выпишем уравнение спинорного поля (1.34a)

$$i\bar{\gamma}^1\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha'}{2}\right)\psi + ie^\alpha\Phi\psi + e^\alpha\mathcal{G}\gamma^5\psi = 0. \quad (5.14)$$

Полагая $V(x) = e^{\alpha/2}\psi(x)$ с

$$V(x) = \begin{pmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \\ V_3(x) \\ V_4(x) \end{pmatrix}$$

для компонент спинорного поля из (5.14) выводим следующую систему уравнений:

$$V_4' + ie^\alpha \Phi V_1 - e^\alpha \mathcal{G} V_3 = 0, \quad (5.15a)$$

$$V_3' + ie^\alpha \Phi V_2 - e^\alpha \mathcal{G} V_4 = 0, \quad (5.15b)$$

$$V_2' - ie^\alpha \Phi V_3 + e^\alpha \mathcal{G} V_1 = 0, \quad (5.15c)$$

$$V_1' - ie^\alpha \Phi V_4 + e^\alpha \mathcal{G} V_2 = 0. \quad (5.15d)$$

Как видно, уравнение (5.15) дает следующее соотношение

$$V_1^2 - V_2^2 - V_3^2 + V_4^2 = \text{const.} \quad (5.16)$$

Из (1.34) пишем уравнения для инвариантов $S = \bar{\psi}\psi$, $P = i\bar{\psi}\gamma^5\psi$ and $A^1 = \bar{\psi}\bar{\gamma}^5\bar{\gamma}^1\psi$

$$S' + \alpha' S + 2e^\alpha \mathcal{G} A^1 = 0, \quad (5.17a)$$

$$P' + \alpha' P + 2e^\alpha \Phi A^1 = 0, \quad (5.17b)$$

$$A^{1'} + \alpha' A + 2e^\alpha \Phi P + 2e^\alpha \mathcal{G} S = 0. \quad (5.17c)$$

Определив $S_0 = S e^\alpha$, $P_0 = P e^\alpha$, $A_0 = A e^\alpha$, из (5.17) имеем

$$S_0' + 2e^\alpha \mathcal{G} A_0^1 = 0, \quad (5.18a)$$

$$P_0' + 2e^\alpha \Phi A_0^1 = 0, \quad (5.18b)$$

$$A_0^{1'} + 2e^\alpha \Phi P_0 + 2e^\alpha \mathcal{G} S_0 = 0. \quad (5.18c)$$

Система (1.50) допускает следующее решение:

$$S^2 + P^2 - A^{12} = C_0 e^{-2\alpha}, \quad C_0 = \text{const.} \quad (5.19)$$

Кроме того из системы (5.18) следует

$$\Phi S_0' - \mathcal{G} P_0' = 0. \quad (5.20)$$

Решим уравнения Эйнштейна. Для этого запишем выражения для компонент тензора энергии-импульса в явном виде. Используя свойства матриц Дирака в плоском пространстве-времени и явный вид ковариантного производного ∇_μ , для спинорного поля имеем

$$T_{\text{sp}1}^1 = m S - F(I, J), \quad T_{\text{sp}0}^0 = T_{\text{sp}2}^2 = T_{\text{sp}3}^3 = \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - F(I, J). \quad (5.21)$$

С другой стороны, приняв во внимание, что скалярное поле φ также зависит только от x , имеем

$$T_{\text{sc}1}^1 = 2\Upsilon \frac{d\Psi}{d\Upsilon} - \Psi(\Upsilon), \quad T_{\text{sc}0}^0 = T_{\text{sc}2}^2 = T_{\text{sc}3}^3 = -\Psi(\Upsilon). \quad (5.22)$$

Ввиду $T_0^0 = T_2^2$, разность уравнений (5.8a) и (5.8c) приводит к уравнению

$$\beta'' - \chi'' = 0, \quad (5.23)$$

с решением

$$\beta(x) = \chi(x) + Bx, \quad (5.24)$$

где B - постоянная интегрирования. Здесь предполагается, что вторая константа интегрирования равна нулю, так как она действует только на масштаб осей Y и Z . С учетом (5.23) из (5.7) находим

$$\beta'' = \frac{1}{3}\alpha'', \quad \chi'' = \frac{1}{3}\alpha''. \quad (5.25)$$

Решения уравнений (5.25) вместе с (5.7) и (5.24) приводят к следующим выражениям для $\beta(x)$ и $\chi(x)$

$$\beta(x) = \frac{1}{3}(\alpha(x) + Bx), \quad \chi(x) = \frac{1}{3}(\alpha(x) - 2Bx). \quad (5.26)$$

Будучи первыми интегралами, (5.8a), (5.8c) и (5.8b) являются дифференциальными уравнениями первого порядка. С учетом (1.37), (5.21) и (5.22), подставляя β и γ из (5.26) и T_1^1 в (5.8b) для α получим

$$\alpha'^2 - B^2 = -3\kappa e^{2\alpha} \left[mS - F(I, J) + 2\Upsilon \frac{d\Psi}{d\Upsilon} - \Psi(\Upsilon) \right]. \quad (5.27)$$

Как видно из (1.50) и (5.19), все инварианты есть функции от α , также как и правая сторона уравнения (5.27), и, следовательно, могут быть решены в квадратурах. Далее мы будем подробно изучать уравнение (5.27) для конкретного вида лагранжиана спинорного и скалярного поля.

Вернемся теперь к физически наблюдаемым величинам. Для компонент спинорного тока имеем

$$j^0 = [V_1^*V_1 + V_2^*V_2 + V_3^*V_3 + V_4^*V_4]e^{-(\alpha+\chi)}, \quad (5.28a)$$

$$j^1 = [V_1^*V_4 + V_2^*V_3 + V_3^*V_2 + V_4^*V_1]e^{-2\alpha}, \quad (5.28b)$$

$$j^2 = -i[V_1^*V_4 - V_2^*V_3 + V_3^*V_2 - V_4^*V_1]e^{-(\alpha+\beta)}, \quad (5.28c)$$

$$j^3 = [V_1^*V_3 - V_2^*V_4 + V_3^*V_1 - V_4^*V_2]e^{-(\alpha+\beta)}. \quad (5.28d)$$

Мы рассматриваем статическую конфигурацию полей и следовательно требуем, чтобы пространственные компоненты спинорного тока исчезли, т.е.,

$$j^1 = 0, \quad j^2 = 0, \quad j^3 = 0. \quad (5.29)$$

Это предположение обеспечивает дополнительное соотношение между константами интегрирования. Полный заряд, как и раньше, определяется в форме

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho \sqrt{-3} g dx dy dz. \quad (5.30)$$

Поскольку $\varrho = \varrho(x)$, т.е., распределение вещества имеет место только вдоль оси x , для того чтобы Q не стал бессмысленным, мы должны интегрировать по конечным интервалам по y и z и после этого нормировать на единицу. Иногда Q также определяется как

$$Q = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho \sqrt{-^3g} dx dy dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dy dz}. \quad (5.31)$$

В последующем мы возьмем интеграл по y и z в интервале $(0, 1)$ и определим полный (нормированный) заряд как

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho \sqrt{-^3g} dx. \quad (5.32)$$

Для проекции вектора спина на X , Y и Z оси находим

$$S^{23,0} = [V_1^* V_2 + V_2^* V_1 + V_3^* V_4 + V_4^* V_3] e^{-\alpha-2\beta-\chi}, \quad (5.33a)$$

$$S^{31,0} = [V_1^* V_2 - V_2^* V_1 + V_3^* V_4 - V_4^* V_3] e^{-2\alpha-\beta-\chi}, \quad (5.33b)$$

$$S^{12,0} = [V_1^* V_1 - V_2^* V_2 + V_3^* V_3 - V_4^* V_4] e^{-2\alpha-\beta-\chi}. \quad (5.33c)$$

Заметим, что мы здесь переписали только те величины, в которые явно входят метрические функции, все остальные же определяются как и в предыдущей главе.

5.4 Точные решения основных уравнений и их физические интерпретации

В этом разделе мы опишем некоторые точные решения основных уравнений при конкретных выборах нелинейного члена. Мы также дадим физические интерпретации соответствующих решений.

Линейные спинорное и скалярное поля

Рассмотрим самосогласованную систему линейного спинорного и безмассового скалярного полей. Это нужно делать для того, чтобы выяснить роль нелинейности в формировании регулярных локализованных решений таких как статическая одиночная волна или солитон [56, 273].

В данном случае для скалярного поля имеем $\Psi(\Upsilon) = \frac{1}{2}\Upsilon$. Подставляя ее в (5.12), находим

$$\varphi'(x) = \varphi_0. \quad (5.34)$$

Из (5.22) вследствие (5.34) получим

$$-T_{sc1}^1 = T_{sc0}^0 = T_{sc2}^2 = T_{sc3}^3 = -\frac{1}{2}\Upsilon = \frac{1}{2}\varphi_0^2 e^{-2\alpha}. \quad (5.35)$$

С другой стороны, для спинорного поля имеем

$$T_{\text{sp}1}^1 = m S, \quad T_{\text{sp}0}^0 = T_{\text{sp}2}^2 = T_{\text{sp}3}^3 = 0. \quad (5.36)$$

Нетрудно заметить, что для линейного спинорного поля из (5.17a) вытекает

$$S = C_0 e^{-\alpha}. \quad (5.37)$$

С учетом этого, а также из того факта, что $\alpha'(x) = -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx}$, из (5.27) имеем

$$\int \frac{dS}{\sqrt{(1 + \bar{\kappa}/2)B^2 S^2 - 3\kappa C_0^2 S}} = x, \quad \bar{\kappa} = 3\kappa\varphi_0^2/B^2. \quad (5.38)$$

Обозначив $M^2 = 3\kappa C_0^2$ и $H^2 = B^2(1 + \bar{\kappa}/2)$, из (5.38) находим

$$\frac{1}{H} \ln \left| \frac{H^2 S - M^2/2}{H} + \sqrt{H^2 S^2 - M^2 S} \right| = x. \quad (5.39)$$

На рисунке 5.1 показано поведение метрических функций α , β и χ по отношению к пространственному параметру x .

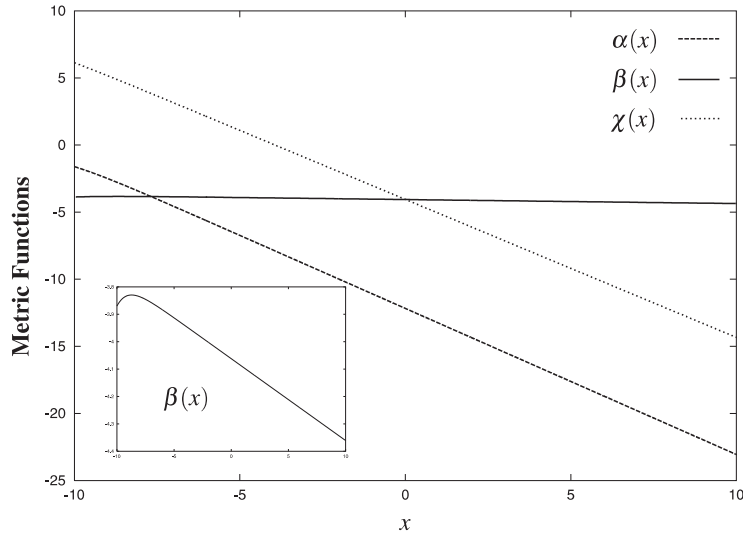


Рис. 5.1: Вид метрических функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, и $\chi(x)$ с параметром $\kappa = 1$, $C_0 = 1$, $\varphi_0 = 0.5$ и $B = 1$ в случае линейного спинорного и скалярного полей.

Вернемся к уравнениям спинорного поля (5.15). Перейдем к новой функции $U_j(S) = V_j(x)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Приняв во внимание, что в данном случае $\Phi = m$ и $\mathcal{G} = 0$, для

$U_j(S)$ находим

$$\frac{dU_4}{dS} + i\mathcal{F}(S)U_1 = 0, \quad (5.40a)$$

$$\frac{dU_3}{dS} + i\mathcal{F}(S)U_2 = 0, \quad (5.40b)$$

$$\frac{dU_2}{dS} - i\mathcal{F}(S)U_3 = 0, \quad (5.40c)$$

$$\frac{dU_1}{dS} - i\mathcal{F}(S)U_4 = 0, \quad (5.40d)$$

где использовано обозначение

$$\mathcal{F}(S) = mC_0/S\sqrt{H^2S^2 - M^2S}.$$

Объединив уравнения (5.40a) и (5.40d), получим

$$U_1^2 + U_4^2 = C_{14}^2, \quad C_{14}^2 = \text{const.} \quad (5.41)$$

Аналогичное соотношение вытекает из уравнений (5.40b) и (5.40c) для U_2 и U_3 . Ввиду этого, наконец находим

$$U_1 = iC_{14} \sinh(f_1(S)), \quad U_4 = C_{14} \cosh(f_1(S)), \quad (5.42)$$

$$U_2 = iC_{23} \sinh(f_1(S)), \quad U_3 = C_{23} \cosh(f_1(S)).$$

Здесь

$$f_1(S) = \int \mathcal{F}(S)dS = \frac{2mC_0\sqrt{H^2S^2 - M^2S}}{M^2S} = \frac{2mC_0\sqrt{H^2 - M^2/S}}{M^2}.$$

Положительность подкоренной величины в (5.38) влечет $S > M^2/H^2 > 0$. С другой стороны, f_1 растет с ростом S и принимает максимальное значение $f_{1\text{max}}|_{S \rightarrow \infty} \approx (2m/3\kappa C_0)\sqrt{B^2 + 3\kappa\varphi_0^2}$.

Для плотности энергии скалярного поля имеем

$$T_{\text{sc}0}^0(x) = \frac{1}{2}\varphi_0^2 e^{-2\alpha} = \frac{\varphi_0^2 S^2}{2C_0^2}. \quad (5.43)$$

Из (5.39) видно, что S экспоненциально растет с ростом x и, следовательно, плотность энергии скалярного поля не является локализованной, что и следует из (5.43).

Рассмотрим случай, когда скалярное поле имеет отрицательную плотность энергии. Тогда имеем $\Psi(\Upsilon) = -(1/2)\Upsilon$ и

$$-T_{\text{sc}1}^1 = T_{\text{sc}0}^0 = T_{\text{sc}2}^2 = T_{\text{sc}3}^3 = \frac{1}{2}\Upsilon = -\frac{1}{2}\varphi_0^2 e^{-2\alpha}. \quad (5.44)$$

В этом случае для S находим

$$\int \frac{dS}{\sqrt{(1 - \bar{\kappa}/2)B^2 S^2 - 3\kappa C_0^2 S}} = x. \quad (5.45)$$

Как видно, рассматриваемая система полей может быть реализована физически тогда и только тогда, когда $1 - \bar{\kappa}/2 > 0$, т.е. когда скалярный заряд $|\varphi_0| < \sqrt{2/3\kappa}B$. Более того, в специальном случае с $B = 0$ (не зависимо от величины скалярного заряда φ_0) существование скалярного поля с отрицательной плотностью энергии в общей теории относительности невозможно даже при отсутствии спинорного поля.

Подставляя (5.42) в (1.97), находим компоненты спинорного тока:

$$j^0 = (C_{14}^2 + C_{23}^2)(\sinh^2(f_1(S)) + \cosh^2(f_1(S)))e^{-(\alpha+\chi)}, \quad (5.46a)$$

$$j^1 = 0, \quad (5.46b)$$

$$j^2 = 2(C_{23}^2 - C_{14}^2)\sinh^2(f_1(S))\cosh^2(f_1(S))e^{-(\alpha+\beta)}, \quad (5.46c)$$

$$j^3 = 0. \quad (5.46d)$$

Ввиду (5.29), из (5.46) следует, что $C_{14} = C_{23}$. Для проекции вектора спина находим

$$S^{23,0} = 2C_{14}^2(\sinh^2(f_1(S)) + \cosh^2(f_1(S)))e^{-\alpha-2\beta-\chi}, \quad (5.47a)$$

$$S^{31,0} = 0, \quad (5.47b)$$

$$S^{12,0} = 0. \quad (5.47c)$$

Ввиду (1.98) и (1.103), из (5.30) и (1.104) в случае линейного спинорного и скалярного полей находим следующие выражения для полного заряда Q и проекции вектора спина вдоль оси X :

$$Q = 4C_{14}^4 \int_{-\infty}^{\infty} [\sinh^2(f_1(S)) + \cosh^2(f_1(S))]^2 dx, \quad (5.48)$$

и

$$S_x = 4C_{14}^4 \int_{-\infty}^{\infty} [\sinh^2(f_1(S)) + \cosh^2(f_1(S))]^2 dx. \quad (5.49)$$

Как видно из (5.48) и (5.49), при подходящем выборе постоянных B , C_0 , φ_0 и κ полный заряд системы может быть конечным. Таким образом, в случае линейного спинорного и скалярного полей с минимальной связью и заряд и спин спинорного поля ограничены. Плотность энергии системы, ввиду (5.36), определяется только за счет вклада скалярного поля:

$$T_0^0(x) = T_{sc0}^0(x) = \frac{\varphi_0^2 S^2}{2C_0^2}. \quad (5.50)$$

Из (5.50) вытекает, что плотность энергии системы не локализована и полная энергия системы $E = \int_{-\infty}^{\infty} T_0^0 \sqrt{-^3g} dx$ не конечна.

Рисунки 5.2 и 5.3 показывают поведение S по отношению к x для систем с различной нелинейностью. Как видно, для систем с нелинейным спинорным полем $S(x)$ растет быстрее, а введение нелинейного скалярного поля, хотя и немного, замедляет рост $S(x)$.

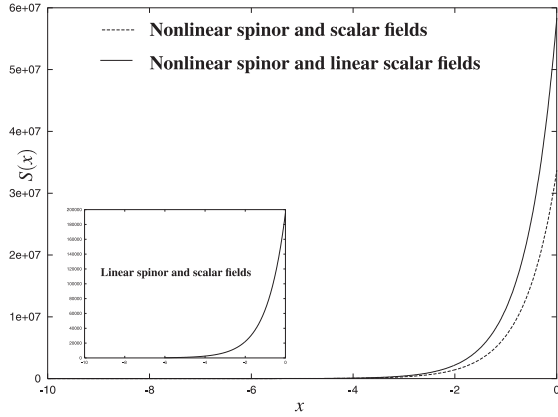


Рис. 5.2: Вид $S(x)$ для трех различных случаев при $S_{\text{in}} = 5$. Это отчетливо показывает роль нелинейного спинорного поля в росте $S(x)$.

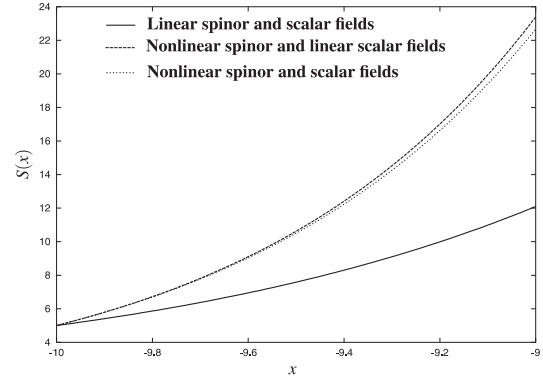


Рис. 5.3: Поведение $S(x)$ проиллюстрированную на рисунке 5.2 вблизи начальной точки.

5.4.1 Нелинейное спинорное и линейное скалярное поля

Случай I: $F = F(I)$. Рассмотрим случай когда нелинейный член в лагранжиане спинорного поля суть функция только от I (S), что приводит к $\mathcal{G} = 0$. Из (1.50) как и в случае линейного спинорного поля имеем $S = C_0 e^{-\alpha(x)}$. Для линейного скалярного поля, т.е. для $\Psi(\Upsilon) = (a/2)\Upsilon$, где $a = \pm 1$, находим $\Upsilon = -\varphi_0^2 e^{-2\alpha}$. Приняв это во внимание и рассуждая как и предыдущем параграфе, для S из (5.27) пишем уравнение

$$\frac{dS}{dx} = \pm \mathcal{L}(S), \quad \mathcal{L}(S) = \sqrt{B^2 S^2 - 3\kappa C_0^2 \left[mS - F(S) - a\varphi_0^2 S^2 / (2C_0^2) \right]}, \quad (5.51)$$

допускающее решение

$$\int \frac{dS}{\mathcal{L}(S)} = \pm(x + x_0). \quad (5.52)$$

При заданном конкретном виде функции $F(S)$ из (5.52) вытекает S и, следовательно, α, β, χ .

Вернемся к уравнениям спинорного поля (5.15). Полагая $V_j(x) = U_j(S)$, $j = 1, 2, 3, 4$ и приняв во внимание, что в данном случае $\mathcal{G} = 0$, для $U_j(S)$ получим

$$\frac{dU_4}{dS} + i\mathcal{F}(S)U_1 = 0, \quad (5.53a)$$

$$\frac{dU_3}{dS} + i\mathcal{F}(S)U_2 = 0, \quad (5.53b)$$

$$\frac{dU_2}{dS} - i\mathcal{F}(S)U_3 = 0, \quad (5.53c)$$

$$\frac{dU_1}{dS} - i\mathcal{F}(S)U_4 = 0, \quad (5.53d)$$

где $\mathcal{F}(S) = \Phi\mathcal{L}(S)C_0/S$. Дифференцируя (5.53a) относительно S и подставив (5.53d) в нем для U_4 получим

$$\frac{d^2U_4}{dS^2} - \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{d\mathcal{F}}{dS} \frac{dU_4}{dS} - \mathcal{F}^2 U_4 = 0. \quad (5.54)$$

Уравнение (5.54) можно преобразовать в виде

$$\frac{1}{\mathcal{F}} \frac{d}{dS} \left(\frac{1}{\mathcal{F}} \frac{dU_4}{dS} \right) - U_4 = 0, \quad (5.55)$$

с первым интегралом

$$\frac{dU_4}{dS} = \pm \sqrt{U_4^2 + C_1} \cdot \mathcal{F}(S), \quad C_1 = \text{const}. \quad (5.56)$$

Для $C_1 = a_1^2 > 0$ из (5.56) получим

$$U_4(S) = a_1 \sinh N_1(S), \quad N_1 = \pm \int \mathcal{F}(S) dS + R_1, \quad R_1 = \text{const}, \quad (5.57)$$

тогда как для $C_1 = -b_1^2 < 0$ из (5.56) находим

$$U_4(S) = a_1 \cosh N_1(S) \quad (5.58)$$

Подставляя (5.57) и (5.58) в (5.53d) находим

$$U_1(S) = ia_1 \cosh N_1(S), \quad U_1(S) = ib_1 \sinh N_1(S). \quad (5.59)$$

Аналогично, для U_2 и U_3 находим

$$U_3(S) = a_2 \sinh N_2(S), \quad U_3(S) = b_2 \cosh N_2(S). \quad (5.60)$$

и

$$U_2(S) = ia_2 \cosh N_2(S), \quad U_2(S) = ib_2 \sinh N_2(S), \quad (5.61)$$

где $N_2 = \pm \int \mathcal{F}(S) dS + R_2$. Здесь a_2, b_2 и R_2 - постоянные интегрирования. Таким образом мы нашли общие решения спинорного поля (5.53) с четырьмя произвольными постоянными.

Используя полученные решения, из (1.97) находим компоненты спинорного тока

$$j^0 = [a_1^2 \cosh(2N_1(S)) + a_2^2 \cosh(2N_2(S))] e^{-(\alpha+\chi)}, \quad (5.62a)$$

$$j^1 = 0, \quad (5.62b)$$

$$j^2 = -[a_1^2 \sinh(2N_1(S)) - a_2^2 \sinh(2N_2(S))] e^{-(\alpha+\beta)}, \quad (5.62c)$$

$$j^3 = 0. \quad (5.62d)$$

Предположение (5.29) приводит к следующим соотношениям между постоянными: $a_1 = a_2 = a$ and $R_1 = R_2 = R$, since $N_1(S) = N_2(S) = N(S)$. Хронометрически-инвариантные формы плотности заряда и полного заряда спинорного поля выглядят

$$\varrho = 2a^2 \cosh(2N(S)) e^{-\alpha}, \quad (5.63)$$

$$Q = 2a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cosh(2N(S)) e^{\alpha-\chi} dx. \quad (5.64)$$

Из (1.101) находим

$$S^{12,0} = 0, \quad S^{13,0} = 0, \quad S^{23,0} = a^2 \cosh(2N(S)) e^{-2\alpha}. \quad (5.65)$$

Таким образом, единственной нетривиальной компонентой тензора спина является $S^{23,0}$, что определяет проекцию вектора спина вдоль оси X . Из (1.103) напомним хронометрически-инвариантный тензор спина

$$S_{\text{ch}}^{23,0} = a^2 \cosh(2N(S)) e^{-\alpha}, \quad (5.66)$$

и проекцию вектора спина на ось X

$$S_1 = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cosh(2N(S)) e^{\alpha-\chi} dx. \quad (5.67)$$

(В (1.104) так же как и в (5.30) интегрирование по y и z производится в пределах $(0, 1)$). Заметим, что подынтегральные выражения в (5.64) и (5.67) совпадают.)

Проанализируем полученные результаты, выбрав нелинейный член в виде $F(I) = \lambda S^n = \lambda I^{n/2}$ с $n \geq 2$. Здесь λ - параметр нелинейности. При $n = 2$ мы имеем уравнение Гейзенберга-Иваненко [20]

$$ie^{-\alpha} \bar{\gamma}^1 (\partial_x + \frac{1}{2} \alpha') \psi - m\psi + 2\lambda (\bar{\psi} \psi) \psi = 0. \quad (5.68)$$

Подставляя $F = S^2$ в (5.52) для S мы получим выражение похожее на аналогичное выражение для линейного спинорного поля с небольшим изменением

$$H^2 \rightarrow H_1^2 = B^2 + 3\kappa\lambda C_0 + 3\kappa\varphi_0^2/2. \quad (5.69)$$

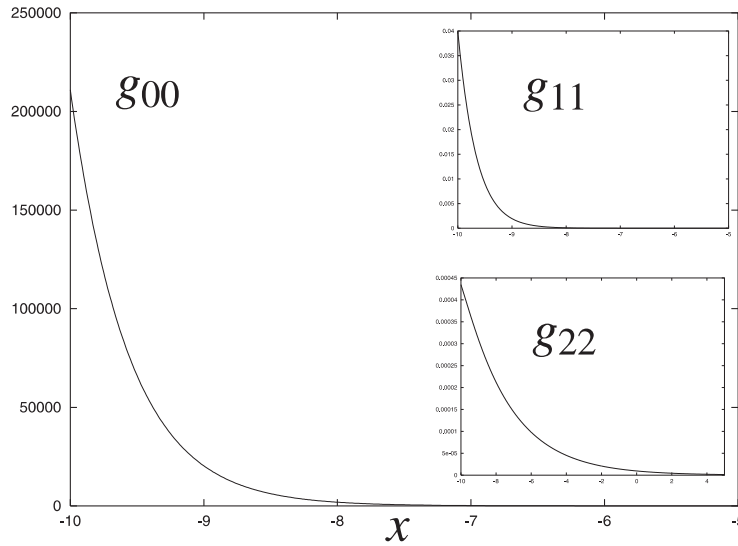


Рис. 5.4: Вид $g_{00}(x)$, $g_{11}(x)$ и $g_{22}(x)$ в случае нелинейных спинорного и скалярного полей. Здесь рассмотрена нелинейность спинорного поля типа Гейзенберга-Иваненко.

Поведение метрических функций, а именно, $\exp(2\alpha(x))$, $\exp(2\beta(x))$ и $\exp(2\chi(x))$ иллюстрируется на Рис. 5.4.

Выпишем функции ψ_j в явном виде. В этом случае имеем

$$\mathcal{F}(S) = m(C_0 - 2\lambda S)/S \sqrt{H_1^2 S^2 - M^2 S},$$

и

$$N_{1,2}(x) = (2H_1/3\kappa C_0) \tanh(\bar{H}_1 x) - 2\lambda C_0 x + R_{1,2}, \quad \bar{H}_1 = H_1/2.$$

Наконец мы пишем

$$\psi_{1,2}(x) = ia_{1,2} \frac{\sqrt{3\kappa m C_0}}{H_1} \cosh(\bar{H}_1 x) \cosh N_{1,2}(x), \quad (5.70)$$

$$\psi_{3,4}(x) = ia_{2,1} \frac{\sqrt{3\kappa m C_0}}{H_1} \cosh(\bar{H}_1 x) \cosh N_{2,1}(x).$$

Рассмотрим распределение плотности энергии системы полей:

$$T_0^0 = \left(\lambda + \frac{1}{2} \frac{\varphi_0^2}{C_0^2} \right) \frac{M^4}{H_1^4} \cosh^4(\bar{H}_1 x). \quad (5.71)$$

Из (5.71) следует, что плотность энергии системы не локализована и полная энергия системы $E = \int_{-\infty}^{\infty} T_0^0 \sqrt{-^3g} dx$ не ограничена. Заметим, что плотность энергии системы становится тривиальной, если

$$\lambda + \frac{1}{2} \frac{\varphi_0^2}{C_0^2} = 0. \quad (5.72)$$

Это возможно тогда и только тогда, когда плотности энергии спинорного и скалярного полей имеют разные знаки.

Напишем полный заряд системы

$$Q = 2a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cosh \left[\frac{4H_1}{3\kappa C_0} \tanh(\bar{H}_1 x) - 4\lambda C_0 x + 2R \right] \left(\frac{C_0 H_1^2}{M^2 \cosh^2(\bar{H}_1 x)} \right)^{3/2} e^{2Bx/3} dx. \quad (5.73)$$

Если $12\lambda^2 C_0^2 + \lambda C_0(4B - \kappa C_0) - \kappa \varphi_0^2/2 < 0$, то интеграл (5.73) сходится, что свидетельствует о возможности существования конечного заряда и спина системы.

При $n > 2$ плотность энергии рассматриваемой системы имеет вид

$$T_0^0 = \lambda(n-1)S^n + \frac{1}{2} \frac{\varphi_0^2}{C_0^2} S^2. \quad (5.74)$$

Это показывает, что регулярные решения с локализованной плотностью энергии существуют, если и только если $S = \bar{\psi}\psi$ есть непрерывная и ограниченная функция и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} S(x) \rightarrow 0$. Условие, при котором S обладает выше упомянутым свойством, запишется как

$$\int \frac{dS}{\sqrt{(1 + \bar{\kappa}/2)B^2 S^2 - 3\kappa C_0^2(mS - \lambda S^n)}} = x. \quad (5.75)$$

Как видно из (5.75), для $m \neq 0$ ни при каких значениях x , величина S не может стать тривиальной, так как при $S \rightarrow 0$, знаменатель подинтегрального выражения, начиная с некоторого конечного значения S , становится мнимым. Это значит, что для того чтобы $S(x)$ было тривиальной на пространственной бесконечности ($x \rightarrow \infty$), необходимо выбирать безмассовое спинорное поле, положив $m = 0$ в (5.75). Заметим, что в единой нелинейной спинорной теории Гейзенберга член с массой отсутствует. По мнению Гейзенберга масса частицы должна быть получена в результате квантования спинорной праматерии [12]. Отметим, что при нелинейных обобщениях уравнений классической теории поля массовый член не имеет того смысла, который он имеет в линейных полевых уравнениях, поскольку никак не определяет полную энергию (или массу) нелинейной системы [55]. Таким образом, без потери общности можно рассматривать безмассовое спинорное поле, положив $m = 0$. Заметим также, что в последующих параграфах, где нелинейность спинорного поля выбирается в виде $F = P^n$ или $F = (K_{\pm})^n$ с $K_{\pm} = (I \pm J)$, мы рассмотрим только безмассовое спинорное поле.

Из (5.75) при $m = 0$, $\lambda > 0$ и $n > 2$ для $S(x)$ получим

$$S(x) = \left[-H_1 / \sqrt{3\kappa\lambda C_0^2(\zeta^2 - 1)} \right]^{2/(n-2)}, \quad \zeta = \cosh[(n-2)\bar{H}_1 x] \quad (5.76)$$

откуда следует, что $\lim_{x \rightarrow 0} |S(x)| \rightarrow \infty$. Это означает, что $T_0^0(x)$ не ограничена при $x = 0$ и первоначальная система уравнений не имеет решения с локализованной плотностью энергии.

Если в (5.75) положить $m = 0$, $\lambda = -\Lambda^2 < 0$ и $n > 2$, то для S получим

$$S(x) = \left[H_1 / \sqrt{3\kappa\lambda C_0^2 \zeta} \right]^{2/(n-2)} \quad (5.77)$$

Из (5.77) видно, что $S(x)$ имеет максимум при $x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} S(x) \rightarrow 0$. Соответствующий графический вид функции $S(x)$ дан на Рис. 5.5.

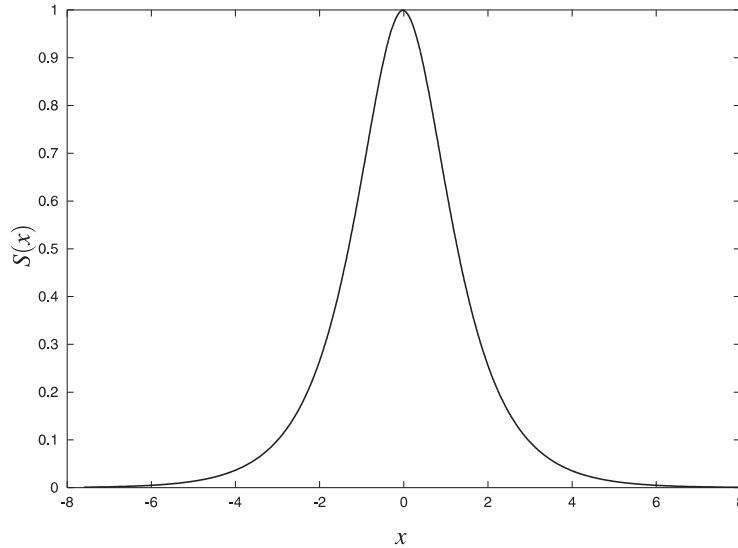


Рис. 5.5: Вид $S(x)$ в случае нелинейного спинорного поля с $n = 4$. Как видно, в этом случае функция $S(x)$ имеет максимум в точке $x = 0$.

Для плотности энергии в этом случае имеем

$$T_0^0 = -\Lambda^2(n-1)S^n + \frac{1}{2} \frac{\varphi_0^2}{C_0^2} S^2, \quad (5.78)$$

где S определяется из (5.77). С учетом S получается, что $T_0^0(x)$ есть знакопеременная функция.

Находим условие, когда полная энергия системы ограничена

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} T_0^0 \sqrt{-^3g} dx < \infty. \quad (5.79)$$

Для этого выпишем подынтегральное выражение (5.79)

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= T_0^0 \sqrt{-^3g} = \\ &= C_0^{5/3} \left[\frac{\varphi_0^2}{2C_0^2} - \frac{(n-1)H_1^2 \zeta^2}{3\kappa \Lambda C_0^2} \right] \left[\frac{H_1^2 \zeta}{3\kappa \Lambda^2 C_0^2} \right]^{1/3(n-2)} \cdot e^{2Bx/3}.\end{aligned}\quad (5.80)$$

Из (5.80) следует, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon(x) \rightarrow 0$ для любого значения параметров, тогда как

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда $H > 2B$ или $\kappa \varphi_0^2 > 2B^2$. Заметим, что вклад скалярного поля в полную энергию в этом случае положителен и конечен:

$$T_{sc0}^0 = \frac{\varphi_0^2}{2C_0^2} S^2, \quad E_{sc} = \int_{-\infty}^{\infty} T_{sc0}^0 \sqrt{-^3g} dx < \infty. \quad (5.81)$$

Обратим внимание на то, что в рассматриваемом случае скалярное поле является линейным и безмассовым. Поскольку, в отсутствие спинорного поля плотность энергии скалярного поля не локализована и полная энергия не конечна, в рассматриваемом случае свойства полевых конфигураций определяются соответствующими параметрами нелинейного спинорного поля. Вклад нелинейного спинорного поля в полную энергию является отрицательным. Более того, он остается конечным даже в отсутствие скалярного поля при $n > 2$ [59].

Компоненты спинорного поля в этом случае имеют вид

$$\psi_{1,2}(x) = ia_{1,2} E(x) \cosh N_{1,2}(x), \quad (5.82)$$

$$\psi_{3,4}(x) = a_{2,1} E(x) \sinh N_{2,1}(x),$$

где

$$E(x) = (1/\sqrt{C_0}) \left[H_1 / \sqrt{3\kappa \Lambda^2 C_0^2 \zeta} \right]^{1/(n-2)}$$

и

$$N_{1,2}(x) = -\frac{2nH_1 \sqrt{\zeta^2 - 1}}{3\kappa C_0 (n-2)\zeta} + R_{1,2}.$$

Напишем хронометрически инвариантную плотность заряда ϱ спинорного поля, соответствующую полученным решениям

$$\varrho(x) = \frac{2a^2}{C_0} \cosh \left\{ -\frac{4nH_1 \sqrt{\zeta^2 - 1}}{3\kappa C_0 (n-2)\zeta} + 2R \right\} \left\{ \frac{H_1^2}{3\kappa \Lambda^2 C_0^2 \zeta^2} \right\}^{1/(n-2)}. \quad (5.83)$$

Как видно из (5.83), плотность заряда локализована, так как $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varrho(x) \rightarrow 0$. Однако, плотность заряда спинорного поля, приходящаяся на единицу инвариантного объема $\varrho \sqrt{-^3g}$, не локализована:

$$\varrho \sqrt{-^3g} = 2a^2 \cosh[2N(x)] e^{\alpha-\gamma} = 2a^2 \cosh[2N(x)] (C_0/S)^{2/3} e^{2Bx/3}. \quad (5.84)$$

Это приводит к тому, что полный заряд спинорного поля также не ограничен. Что касается выражения для хронометрически инвариантного тензора спина (5.66), то оно совпадает с выражением для $\varrho(x)/2$, и выводы, сделанные для $\varrho(x)$ и Q , будут справедливы для тензора спина $S_{\text{ch}}^{23,0}$ и проекции вектора спина S_1 вдоль оси X , т.е. $S_{\text{ch}}^{23,0}$ локализован и S_1 не ограничена.

Полученное решение описывает конфигурацию нелинейного спинорного и линейного скалярного полей с локализованной плотностью энергии, однако соответствующая метрика имеет сингулярность на пространственной бесконечности, так как в этом случае

$$e^{2\alpha} = (C_0/S)^2 = C_0^2 \left\{ \frac{3\kappa\Lambda C_0^2 \zeta}{H_1^2} \right\}^{2/(n-2)} \Big|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow \infty \quad (5.85)$$

Рассмотрим безмассовое спинорное поле s

$$F = -\Lambda^2 S^{-\nu}, \quad \nu = \text{constant} > 0. \quad (5.86)$$

В этом случае плотность энергии системы нелинейного спинорного и линейного скалярного полей с минимальной связью принимает вид

$$T_0^0 = \Lambda^2(\nu + 1)S^{-\nu} + \frac{\varphi_0^2}{2C_0^2}S^2 \quad (5.87)$$

Для S в этом случае имеем

$$\int \frac{dS}{\sqrt{(1 + \bar{\kappa}/2)B^2 S^2 - 3\kappa C_0^2 \Lambda^2 S^{-\nu}}} = x \quad (5.88)$$

с решением

$$S(x) = \left[\frac{3\kappa\Lambda^2 C_0^2}{H_1^2} \zeta_1^2 \right]^{1/(\nu+2)}, \quad \zeta_1 = \cosh[(\nu + 2)\bar{H}_1 x]. \quad (5.89)$$

Для плотности энергии в этом случае имеем

$$T_0^0(x) = \Lambda^2(\nu + 1) \left[\frac{H_1^2}{3\kappa C_0^2 \Lambda^2 \zeta_1^2} \right]^{\nu/(\nu+2)} + \frac{\varphi_0^2}{2C_0^2} \left[\frac{3\kappa C_0^2 \Lambda^2 \zeta_1^2}{H_1^2} \right]^{2/(\nu+2)}. \quad (5.90)$$

Как видно из (5.90), вклад спинорного поля в плотность энергии конечен, что нельзя утверждать для скалярного поля.

Распределение плотности энергии системы полей, приходящееся на единицу инвариантного объема, дается выражением

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= T_0^0 \sqrt{-3g} = \left[\Lambda^2(\nu + 1)S^{-\nu} + \frac{\varphi_0^2}{2C_0^2}S^2 \right] e^{2\alpha - \gamma} \\ &= \left\{ \frac{H_1^2(\nu + 1)}{3\kappa\zeta_1^2} + \frac{\varphi_0^2}{2} \right\} \left\{ \frac{H_1^2}{3\kappa C_0^2 \Lambda^2 \zeta_1^2} \right\}^{1/3(\nu+2)} e^{2Bx/3}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Из (5.91) видно, что $\varepsilon(x)$ есть локализованная функция, т.е. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varepsilon(x) \rightarrow 0$, если $H > 2B$ от $\kappa\varphi_0^2 > 2B^2$. В этом случае полная энергия также конечна.

Компоненты спинорного поля в этом случае принимают вид

$$\psi_{1,2}(x) = ia_{1,2}E(x)\cosh N_{1,2}(x), \quad (5.92)$$

$$\psi_{3,4}(x) = a_{2,1}E(x)\sinh N_{2,1}(x),$$

где

$$E(x) = (1/\sqrt{C_0}) \left[\frac{\sqrt{3\kappa\Lambda^2 C_0^2}}{H_1^2} \zeta_1 \right]^{1/(\nu+2)}$$

и

$$N_{1,2}(x) = -\frac{2H\nu\sqrt{\zeta_1^2 - 1}}{3\kappa C_0(\nu+2)\zeta_1} + R_{1,2}.$$

Хронометрически инвариантная плотность заряда спинорного поля, приходящаяся на единицу инвариантного объема с $a_1 = a_2 = a$ и $N_1 = N_2$, имеет вид

$$\begin{aligned} \varrho\sqrt{-^3g} &= 2a^2 \cosh[2N(x)]e^{\alpha-\gamma} = \\ &= 2a^2(C_0)^{2/3} \cosh\left\{2R - \frac{4H_1\nu\sqrt{\zeta_1^2 - 1}}{3\kappa C_0(\nu+2)\zeta_1}\right\} \left\{\frac{H_1^2}{3\kappa C_0^2\Lambda^2\zeta_1^2}\right\}^{2/3(\nu+2)} e^{2Bx/3}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Из (5.93) следует, что $\varrho\sqrt{-^3g}$ есть локализованная функция и полный заряд Q конечен. Ограничен также спин спинорного поля.

Случай II: $F = F(J)$. Здесь мы рассмотрим безмассовое спинорное поле с нелинейностью $F = F(J)$. В этом случае из (5.17b) сразу следует

$$P = D_0 e^{-\alpha(x)}, \quad D_0 = \text{const}. \quad (5.94)$$

Из (5.15) мы тогда имеем

$$V_4' - e^\alpha \mathcal{G}V_3 = 0, \quad (5.95a)$$

$$V_3' - e^\alpha \mathcal{G}V_4 = 0, \quad (5.95b)$$

$$V_2' + e^\alpha \mathcal{G}V_1 = 0, \quad (5.95c)$$

$$V_1' + e^\alpha \mathcal{G}V_2 = 0, \quad (5.95d)$$

с решением

$$V_1 = C_1 \sinh[-\mathcal{A} + C_2] \quad (5.96a)$$

$$V_2 = C_1 \cosh[-\mathcal{A} + C_2] \quad (5.96b)$$

$$V_3 = C_3 \sinh[\mathcal{A} + C_4] \quad (5.96c)$$

$$V_4 = C_3 \cosh[\mathcal{A} + C_4] \quad (5.96d)$$

где C_1, C_2, C_3 и C_3 - постоянные интегрирования и $\mathcal{A} = \int e^\alpha \mathcal{G} dx$. Используя полученные решения, из (1.97) находим компоненты спинорного тока

$$j^0 = [C_1^2 \cosh[2(-\mathcal{A} + C_2)] + C_3^2 \cosh[2(\mathcal{A} + C_4)]] e^{-(\alpha+\chi)}, \quad (5.97a)$$

$$j^1 = [2C_1 C_3 \sinh(C_2 + C_4)] e^{-2\alpha}, \quad (5.97b)$$

$$j^2 = 0, \quad (5.97c)$$

$$j^3 = -[2C_1 C_3 \cosh[2\mathcal{A} - C_2 + C_4]] e^{-(\alpha+\beta)}. \quad (5.97d)$$

Предположение (5.29) о том, что пространственные компоненты спинорного тока являются тривиальными, приводит к тому, что по крайней мере одна из постоянных (C_1, C_3) есть ноль. Пусть $C_1 = 0$. Хронометрически инвариантная форма плотности заряда и полный заряд спинорного поля имеют вид

$$\varrho = C_3^2 \cosh[2(\mathcal{A} + C_4)] e^{-\alpha}, \quad (5.98)$$

$$Q = C_3^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cosh[2(\mathcal{A} + C_4)] e^{\alpha-x} dx. \quad (5.99)$$

Из (1.101) находим

$$S^{12,0} = -C_3^2 e^{-(2\alpha+\beta+\chi)}, \quad S^{31,0} = 0, \quad S^{23,0} = C_3^2 \sinh[2(\mathcal{A} + C_4)] e^{-2\alpha}. \quad (5.100)$$

Таким образом, в данном случае имеются две нетривиальные компоненты тензора спина: $S^{23,0}$ и $S^{12,0}$. Они определяют проекции вектора спина на оси X и Z соответственно. Из (1.103) выпишем хронометрически инвариантный тензор спина

$$S_{\text{ch}}^{23,0} = C_3^2 \sinh[2(\mathcal{A} + C_4)] e^{-\alpha}, \quad (5.101a)$$

$$S_{\text{ch}}^{12,0} = C_3^2 e^{-\alpha}. \quad (5.101b)$$

Проекции вектора спина на оси X и Z выглядят

$$S_1 = C_3^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sinh[2(\mathcal{A} + C_4)] e^{\alpha-x} dx, \quad (5.102a)$$

$$S_3 = C_3^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha-x} dx. \quad (5.102b)$$

Заметим, что уравнение для α и, следовательно, для P будет то же самое, что и в предыдущем случае (т.е., для S с $m = 0$):

$$\int \frac{dP}{\sqrt{B^2 P^2 - 3\kappa D_0^2 (-F(P) - a\varphi_0^2 P^2 / (2D_0^2))}} = \pm(x + x_0). \quad (5.103)$$

В следующем параграфе мы численно решим уравнение (5.103) вместе с (5.51).

Случай III: $F = F(I \pm J)$. Рассмотрим случай с $F = F(K_{\pm})$, где $K_{\pm} = I \pm J$. Как и в случае II, рассмотрим безмассовое спинорное поле. В этом случае имеем $\mathcal{D} = 2SF_{\pm}$ и $\mathcal{G} = \pm 2PF_{\pm}$, где мы обозначили $F_{\pm} = dF/dK_{\pm}$. Приняв во внимание, что при $m = 0$, $\Phi = -\mathcal{D}$, из (5.20) сразу находим

$$I \pm J = K_{\pm} = K_0 e^{-2\alpha}, \quad (5.104)$$

где K_0 - произвольная постоянная. Уравнение для определения α в этом случае совпадает с уравнением для P :

$$\int \frac{dK_{\pm}}{\sqrt{B^2 K_{\pm}^2 - 3\kappa K_0 K_{\pm} (-F(K_{\pm}) - \alpha \varphi_0^2 K_{\pm} / (2K_0))}} = \pm 2(x + x_0). \quad (5.105)$$

Заметим, что соотношение (5.104) может быть записано в виде $S_0^2 \pm P_0^2 = K_0$, т.е., S_0 и P_0 могут быть представлены в виде некоторых тригонометрических функций:

$$S_0 = \sin(\xi), \quad P_0 = \cos(\xi), \quad (5.106)$$

$$S_0 = \sinh(\xi), \quad P_0 = \cosh(\xi), \quad (5.107)$$

где $\xi = \sqrt{K_0} \int F_{\pm} dx$. После некоторых несложных комбинации, решения уравнений спинорного поля могут быть записаны в терминах гипергеометрической функции.

5.4.2 Нелинейное скалярное поле в отсутствии спинорного поля

Рассмотрим систему гравитационного и нелинейного скалярного полей. В качестве уравнения нелинейного скалярного поля выберем уравнение Борна-Инфельда (Born-Infeld), заданное лагранжианом [273]

$$\Psi(\Upsilon) = -\frac{1}{\sigma}(1 - \sqrt{1 + \sigma\Upsilon}), \quad (5.108)$$

где $\Upsilon = \varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}$ и σ - параметр нелинейности. Из (5.108) мы также имеем

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Psi(\Upsilon) = \frac{1}{2}\Upsilon \dots \quad (5.109)$$

Подставляя (5.108) в (5.12) для скалярного поля получим

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 + \sigma\varphi_0^2 e^{-2\alpha(x)}}}, \quad (5.110)$$

откуда находим

$$\Upsilon = -(\varphi')^2 e^{-2\alpha} = -\frac{\varphi_0^2 e^{-2\alpha(x)}}{1 + \sigma\varphi_0^2 e^{-2\alpha(x)}}. \quad (5.111)$$

Из (5.110) следует, что $\varphi'|_{\sigma=0} = \varphi_0$.

В рассматриваемом случае имеем

$$T_{sc0}^0 = T_{sc2}^2 = T_{sc3}^3 = -\Psi(\Upsilon) = \frac{1}{\sigma} \left(1 - 1/\sqrt{1 + \sigma\varphi_0^2 e^{-2\alpha(x)}}\right), \quad (5.112)$$

и

$$T_{sc1}^1 = 2\Upsilon \frac{d\Psi}{d\Upsilon} - \Psi = \frac{1}{\sigma} \left(1 - \sqrt{1 + \sigma\varphi_0^2 e^{-2\alpha(x)}}\right). \quad (5.113)$$

Подставляя (5.113) в (5.27), с учетом того, что $m = 0$ и $F(I, J) \equiv 0$ для α находим

$$\alpha' = \pm \sqrt{B^2 - \frac{3\kappa}{\sigma} e^{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 + \sigma\varphi_0^2 e^{-2\alpha(x)}}\right)}. \quad (5.114)$$

Из (5.114) получим

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{B^2 - \frac{3\kappa}{\sigma} e^{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 + \sigma\varphi_0^2 e^{-2\alpha(x)}}\right)}} = -\frac{2}{B} \ln|\xi + \sqrt{\bar{\kappa} + \xi^2}| + \quad (5.115)$$

$$+ \frac{1}{B\sqrt{1 + \bar{\kappa}/2}} \left[\ln|\sqrt{2B}\sqrt{\bar{\kappa} + \xi^2} + \sqrt{2B}\sqrt{1 + \bar{\kappa}\xi/2}| - \ln|\sqrt{3\kappa\varphi_0^2(\xi^2 - 2)}| \right] = x,$$

где $\xi^2 = 1 + \sqrt{1 + \sigma\varphi_0^2 e^{-2\alpha(x)}}$. Как видно из (5.115),

$$e^{2\alpha(x)} \Big|_{x \rightarrow +\infty} \approx \frac{\sigma\varphi_0^2}{2} e^{2\sqrt{1+\bar{\kappa}/2}Bx} \rightarrow \infty, \quad (5.116)$$

$$e^{2\alpha(x)} \Big|_{x \rightarrow -\infty} \approx \frac{\sigma\varphi_0^2}{2} e^{2Bx} \rightarrow 0. \quad (5.117)$$

Рассмотрим распределение плотности энергии нелинейного скалярного поля. Из (5.112) имеем

$$T_{sc0}^0(x) \Big|_{x=-\infty} = \frac{1}{\sigma}, \quad T_{sc0}^0(x) \Big|_{x=\infty} = 0. \quad (5.118)$$

Это показывает, что плотность энергии скалярного поля не локализована. Однако плотность энергии на единицу инвариантного объема локализована, если $\kappa\varphi_0^2 > 2B^2$:

$$\varepsilon(x) = T_{sc0}^0 \sqrt{-3g} = \frac{1}{\sigma} \left(1 - \frac{1}{1 + \sigma\varphi_0^2 e^{-2\alpha}}\right) e^{5\alpha/3 + 2Bx/3} \Big|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0. \quad (5.119)$$

В этом случае полная энергия скалярного поля тоже ограничена. Из (5.111) с учетом (5.116) и (5.117) также имеем

$$\Upsilon(x) \Big|_{x=-\infty} = -\frac{1}{\sigma}, \quad \Upsilon(x) \Big|_{x=+\infty} = 0. \quad (5.120)$$

Как видно из (5.120), функция $\Upsilon(x)$ кинккообразная.

Нелинейные спинорное и скалярное поля

Наконец, мы рассмотрим самосогласованную систему нелинейных спинорного и скалярного полей. Выберем самодействие спинорного поля в виде $F = \lambda S^n$, $n > 2$, тогда как скалярное поле выбрано в форме (5.108). Рассуждая также как и раньше, заключим, что спинорное поле в данном случае может быть выбрано с нулевой массой. Учитывая, что $e^{-2\alpha} = S^2/C_0^2$ для S пишем

$$\int \frac{dS}{\sqrt{B^2 S^2 + 3\kappa C_0^2 [\lambda S^n + (\sqrt{1 + \sigma \varphi_0^2 S^2/C_0^2} - 1)/\sigma]}} = x. \quad (5.121)$$

Из (5.121) оценим

$$S(x) \Big|_{x \rightarrow 0} \sim \frac{1}{x^{2/(n-2)}} \rightarrow \infty. \quad (5.122)$$

С другой стороны, для плотности энергии имеем

$$T_0^0 = \lambda(n-1)S^n + \frac{1}{\sigma} \left(1 - 1/\sqrt{1 + \sigma \varphi_0^2 S^2/C_0^2} \right) \quad (5.123)$$

которое утверждает: для того чтобы T_0^0 была локализована, необходимо, чтобы функция S тоже была локализована и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} S(x) \rightarrow 0$. Следовательно, из (5.122) заключим, что $S(x)$ есть сингулярная функция и плотность энергии неограничена в точке $x = 0$.

Для $\lambda = -\Lambda^2$ и $n > 2$ имеем

$$\int \frac{dS}{\sqrt{B^2 S^2 + 3\kappa C_0^2 [-\Lambda^2 S^n + (\sqrt{1 + \sigma \varphi_0^2 S^2/C_0^2} - 1)/\sigma]}} = x. \quad (5.124)$$

В этом случае $S(x)$ конечна и ее максимальное значение определяется из

$$S^n(x) = \frac{1}{3\kappa C_0^2 \Lambda^2} [B^2 S^2 + 3\kappa C_0^2 (\sqrt{1 + \sigma \varphi_0^2 S^2/C_0^2} - 1)/\sigma]. \quad (5.125)$$

Заметив, что на пространственной бесконечности эффекты нелинейности исчезают, из (5.124) находим

$$S(x) \Big|_{x \rightarrow -\infty} \sim e^{Hx} \rightarrow 0, \quad S(x) \Big|_{x \rightarrow +\infty} \sim e^{-Hx} \rightarrow 0, \quad (5.126)$$

где $H = \sqrt{B^2 + 3\kappa \varphi_0^2/2} = B\sqrt{1 + \bar{\kappa}/2}$. В этом случае плотность энергии T_0^0 , определяемая соотношением (5.123), локализована и полная энергия системы ограничена. Однако спин и заряд рассматриваемой системы неограничены.

Вернемся к общему случаю. Для $F = F(S)$ теперь имеем

$$T_1^1 = mS - F(S) + 2\Upsilon \frac{d\Psi}{d\Upsilon} - \Psi. \quad (5.127)$$

Из чего следует, что для произвольного выбора функции $\Psi(\Upsilon)$, подчиняющейся (1.13), всегда можно выбрать нелинейный член спинорного поля так, чтобы он устранил вклад скалярного поля в T_1^1 , т.е., благодаря полной свободе выбора $F(S)$, пишем

$$F(S) = F_1(S) + F_2(S), \quad F_2(S) = 2\Upsilon \frac{d\Psi}{d\Upsilon} - \Psi, \quad (5.128)$$

поскольку, $\Upsilon = \Upsilon(S^2)$. Чтобы доказать это, вернемся к уравнению (5.12), которое дает

$$\Upsilon \left(\frac{d\Psi}{d\Upsilon} \right)^2 = -\frac{\varphi_0^2 S^2}{C_0^2}. \quad (5.129)$$

Поскольку Ψ зависит только от Υ , то (5.129) заключает в себе алгебраическое уравнение для нахождения Υ как функции от S^2 . Для (5.128) находим

$$(\alpha')^2 - B^2 = -\frac{3\kappa C_0^2}{S^2} [mS - F_1(S)]. \quad (5.130)$$

Как видно, скалярное поле никак не влияет на пространство-время, но оно вносит вклад в плотность энергии и полную энергию системы, так как в этом случае

$$T_0^0 = SF_1'(S) - F_1(S) + S \frac{d}{d\Upsilon} \left(-2\Upsilon \frac{d\Psi}{d\Upsilon} + \Psi \right) \frac{d\Upsilon}{dS} + 2\Upsilon \frac{d\Psi}{d\Upsilon} - \Psi. \quad (5.131)$$

Заметим, что в (5.127) с произвольной $F(S)$ нельзя выбирать $\Psi(\Upsilon)$ таким что

$$2\Upsilon \frac{d\Psi}{d\Upsilon} - \Psi = F(S). \quad (5.132)$$

Это потому, что $\Psi(\Upsilon)$ не совсем произвольна, поскольку должно выполняться

$$\lim_{\Upsilon \rightarrow 0} \Psi(\Upsilon) \rightarrow \frac{1}{2}\Upsilon, \quad \lim_{\Upsilon \rightarrow 0} 2\Upsilon \frac{d\Psi}{d\Upsilon} - \Psi = \frac{1}{2}\Upsilon = \frac{\varphi_0^2}{2C_0^2} S^2 \quad (5.133)$$

тогда как при $S \rightarrow 0$ функция $F(S)$ ведет себя произвольным образом.

5.5 Численные решения

Численно решим уравнение (5.27). Для начала перепишем уравнение (5.27) для случая с $F = \lambda S^n$:

$$\alpha' = \sqrt{B^2 - 3\kappa e^{2\alpha} [mS - \lambda S^n - a\varphi_0^2 S^2 / C_0^2 + b(1 - \sqrt{1 + \sigma\varphi_0^2 S^2 / C_0^2}) / \sigma]}. \quad (5.134)$$

Вспомним, что здесь κ - гравитационная постоянная Эйнштейна, B - некоторая произвольная постоянная, связывающая α с β и χ , m - масса спинорного поля, λ - константа

самодействия спинорного поля, n - степень нелинейности спинорного поля, C_0 - некоторая произвольная постоянная, связывающая α с S , σ - параметр нелинейности скалярного поля и φ_0 - постоянная интегрирования, что возникает при интегрировании уравнения скалярного поля. Коэффициенты a и b выбираются следующим образом: i) $a = 0.5$ и $b = 0.0$ соответствует линейному скалярному полю; ii) $a = 0.0$ и $b = 1.0$ соответствует нелинейному скалярному полю типа Борна-Инфельда. Учитывая, что $S = C_0 e^{-\alpha}$, уравнение (5.134) может быть переписано в терминах S :

$$S' = \sqrt{B^2 S^2 - 3\kappa C_0^2 [mS - \lambda S^n - a\varphi_0^2 S^2 / C_0^2 + b(1 - \sqrt{1 + \sigma\varphi_0^2 S^2 / C_0^2}) / \sigma]}. \quad (5.135)$$

Как видно, уравнения (5.134) и (5.135) есть мульти-параметрические проблемы. Задавая конкретные значения параметров и значение $S(\alpha)$ в начальной точке $(-\infty)$ наблюдаем развитие $S(\alpha)$ относительно x и, следовательно, $\beta, \chi, \varphi, \psi$ и других величин. Положительность подкоренного выражения в (5.135) налагает некоторые ограничения на $S(\alpha)$, которые можно использовать для выбора значения $S(\alpha)$ в начальной точке. Уравнения (5.134) и (5.135) были численно решены при различных выборах параметров p . Заметим, что богатый выбор p порождает большое количество интересных результатов. Только некоторые из них проиллюстрированы в этом разделе.

5.6 Выводы

В рамках плоско-симметричного пространства-времени подробно изучена система нелинейных спинорного и скалярного полей с минимальной связью. Показано, что спинорное поле более чувствительно к гравитационному полю, чем скалярное поле. Показано, что плотность энергии и полная энергия линейных спинорного и скалярного полей не ограничены и рассматриваемая система не имеет физической бесконечности, следовательно, соответствующая конфигурация не наблюдаема для бесконечно удаленного наблюдателя, так как в этом случае

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g_{11}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha} dx = \frac{4C_0 H}{M^2} < \infty. \quad (5.136)$$

Показано, что введение нелинейного члена спинорного поля в систему устраняет эти недостатки и в результате получается конфигурация с конечной плотностью энергии и ограниченной полной энергией. В этом случае система имеет реальную, физически наблюдаемую бесконечность. Таким образом, нелинейность спинорного поля является ключевой для регулярных решений с локализованной плотностью энергии. Показано, что свойства системы нелинейных спинорного и скалярного полей с минимальной связью определяются той частью гравитационного поля, которая генерируется нелинейным спинорным полем. Показано также, что вместе с нелинейностью спинорного поля, гравитационное поле также играет важную роль в формировании полевых конфигураций с ограниченными полной энергией, спином и зарядом.

Заключение

В данной книге рассматривались самосогласованные системы нелинейных спинорных и анизотропных гравитационных полей. При этом нелинейность спинорного поля задавалась как в виде самодействия, так и с помощью взаимодействия со скалярным полем (в этом случае имеет место индуцированная нелинейность). В качестве гравитационного поля были рассмотрены Бианки типа I, VI и VI₀ модели, и также плоскосимметричное пространство-время. При этом эти пространства были заполнены различными жидкостями, например, идеальной, вязкой, намагниченной или жидкостью Ван-дер-Ваальса. Рассматривались также модели с темной энергией.

Основные результаты:

- Впервые с помощью нелинейного спинорного поля (НСП) моделируются различные характеристики материи, влияющие на эволюцию Вселенной.

Впервые было показано, что при некоторых конкретных выборах нелинейности в рамках модели типа Бианки-I:

★ нелинейное спинорное поле ускоряет процесс изотропизации;

★ нелинейное спинорное поле порождает Вселенную без сингулярностей. При этом, если нелинейность возникает за счет самодействия, то имеет место нарушение условия энергодоминантности, тогда как в случае индуцированной нелинейности спинорного поля получено регулярное решение без нарушения этого условия;

★ нелинейное спинорное поле объясняет феномен ускоренного расширения Вселенной.

- Исследована роль космологической постоянной в эволюции Вселенной. Показано, что при $\Lambda > 0$ получаем модель с вечным ускорением, тогда как при $\Lambda = 0$ имеем модель, где процесс расширения заканчивается. При $\Lambda < 0$ получаем модель или всюду регулярной осциллирующей Вселенной, или модель Вселенной, которая заканчивается Большим Крахом.

- Впервые было показано, что при наличии в системе вязкой жидкости Вселенная может быть расширяющейся или осциллирующей при любом знаке космологической постоянной. Впервые было показано, что вязкая жидкость вместе с нелинейным спинорным полем может генерировать решения с Большим Разрывом, когда за конечное время сама Вселенная, а также плотность энергии становятся бесконечными.
- Впервые было показано, что жидкость Ван-дер-Ваальса может воспроизводить две фазы эволюции, первая фаза - первоначальное ускорение (инфляция), которая переходит во вторую фазу - эпоху замедления. Впервые была введена квинтэссенция с модифицированным уравнением состояния и показано, что она порождает циклическую Вселенную, избавляя модель от проблемы вечного ускорения.
- Впервые было показано, что в случае модели типа Бианки-VI нелинейное спинорное поле может генерировать осциллирующую Вселенную при некоторых дополнительных условиях. При этих условиях изотропизация изначально анизотропной Вселенной не происходит.
- Впервые было показано, что в случае плоско-симметричной метрики нелинейное спинорное поле с учетом собственного гравитационного поля приводит к появлению конфигурации с конечной плотностью энергии и ограниченной полной энергией. Таким образом, нелинейность спинорного поля и гравитационное поле являются ключевыми для регулярных решений с локализованной плотностью энергии.

Приложение 1

Классическое спинорное поле

Существование фермионов - частиц со спином $1/2$ - является бесспорным как с теоретической точки зрения так и с экспериментальной; они описываются квантовыми спинорными полями. Считается, что классического предела для фундаментального квантового поля Ферми не существует. Можно предполагать, что классические спинорные поля возникают из эффективного описания более сложной квантовой системы.

Одна из первых попыток рассмотреть спинорное поле в классическом пределе была предпринята в работе [133]. В этой работе некоторые свойства единой теории поля что соответствует некоторым нуждам теории элементарных частиц. Такая теория имеет следующие принципиальные характеристики:

Уравнения движения получаются из вариационного принципа чьи плотность Лагранжиана является инвариантом относительно некоторой группы;

Уравнения движения нелинейные;

Физически допустимые решения уравнений полей всюду конечны и интегрируемы в квадратурах, чтобы не возникли классические бескончности;

Частицы, вместо того чтобы иметь независимое существование как полевая сингулярность, появляется как интенсивный локализованный сгусток поля.

Как утверждали авторы этой работы даже если будет найдено физическое оправдание, нельзя обсуждать полученные результаты без ссылки на квантовой теории.

Но все же многие авторы рассматривали спинорное поле в классическом понимании. А в работе [64] авторы дали некоторые оценки того в каком смысле мы можем рассматривать спинорное поле как классический объект. Под классическим спинором подразумевается набор четырех комплекс значных функции пространства-времени которые преобразуются по правилам спинорного представления группы Лоренца.

Квантовое Дираковское спинорное поле - это четырехкомпонентный объект ψ который преобразуется по формуле

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = \exp\left[\frac{1}{2}\lambda_{ab}\Sigma^{ab}\right]\psi, \quad (\text{A.1})$$

где $\Sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b]$ - генераторы спинорного представления группы Лоренца, а γ^a - 4×4 матрицы

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \bar{\gamma}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\gamma}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \bar{\gamma}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

удовлетворяющие алгебре Клиффорда

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}, \quad (\text{A.2})$$

где $\eta^{ab} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]$.

В каноническом представлении спиноры - операторнозначные (operator-valued) поля, действующие в Гильбертовом пространстве. Оператор спинорного поля $\widehat{\psi}$ должен удовлетворять уравнению Дирака

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \widehat{\psi} - m\widehat{\psi} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Для простоты рассмотрим массивное спинорное поле в плоском пространстве-времени. Будем работать в представлении Гейзенберга, в котором операторы зависят от времени, а состояния - нет. Будем интерпретировать классическое спинорное поле как среднее значение (expectation value) спинора в соответствующем состоянии $|s\rangle$:

$$\psi_{cl} \equiv \langle s | \widehat{\psi} | s \rangle \equiv \langle \widehat{\psi} \rangle. \quad (\text{A.4})$$

Если взять среднее значение уравнения (A.3), то получим, что ψ_{cl} удовлетворяет уравнению

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{cl} - m\psi_{cl} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Как видно, классическое спинорное поле ψ_{cl} подчиняется стандартному уравнению Дирака. Таким образом восстановлен один из основных компонентов, использованных в настоящей диссертации.

Заметим, что среднее значение спинорного поля в любом физическом состоянии является комплексной величиной. В самом деле, существуют состояния $|c\rangle$ такие, что $\langle c | \widehat{\psi}_a(x) | c \rangle = \psi_a(x)$, где $\psi_a(x)$ - четырехкомпонентное поле, имеющее грассманово значение. Однако эти состояния не являются частью физического пространства Фока, в чем можно легко убедиться, рассматривая плотность энергии в состоянии

$$\varepsilon_c = m \langle c | \widehat{\psi} \widehat{\psi} | c \rangle = m \bar{\psi} \psi. \quad (\text{A.6})$$

Напомним, что плотность энергии в любом физическом состоянии обязательно должна быть вещественным числом. Однако из $\psi_a\psi_b = -\psi_b\psi_a$ следует, что $\varepsilon_c^n = 0$ для любого $n > 4$, что невозможно для нетривиального вещественного числа.

Хотя среднее значение спинорного поля подчиняется уравнению Дирака (A.3), большая квантовая флуктуация вблизи его среднего значения может аннулировать классическое приближение. В нашем случае единственно наблюдаемая величина, которая входит в классические уравнения Эйнштейна - это плотность энергии (в общем случае это тензор энергии-импульса, но в случае линейного спинорного поля давление имеет нулевое значение). В классической трактовке она имеет вид

$$\varepsilon_{cl} = m\bar{\psi}_{cl}\psi_{cl}. \quad (\text{A.7})$$

Нам необходимо убедиться в том, что среднее значение плотности энергии $\langle\varepsilon\rangle = m\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ хорошо аппроксимируется уравнением (A.7). Тогда возникает хорошо известная проблема. Среднее значение $\bar{\psi}\psi$ в вакуумном состоянии равно $-\infty$. Стандартный метод работы с ним - заменить среднее значение перенормированной копией:

$$\langle\dots\rangle_{ren} \equiv \langle s|\dots|s\rangle - \langle 0|\dots|0\rangle. \quad (\text{A.8})$$

При этом оказывается, что среднее значение $\bar{\psi}\psi$ равно нулю в вакуумном состоянии и n - в состоянии, содержащим n частиц и античастиц в единице объема.

Для того, чтобы наша классическая аппроксимация была корректной, необходимо, чтобы имело место соотношение

$$\left| \frac{\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{ren} - \langle\bar{\psi}\rangle_{ren}\langle\psi\rangle_{ren}}{\langle\bar{\psi}\rangle_{ren}\langle\psi\rangle_{ren}} \right| \ll 1. \quad (\text{A.9})$$

В случае бозона состояние, которое удовлетворяет неравенству, аналогичному (A.9), имеет большое число заполнения. Поскольку самым большим числом заполнения для фермиона является единица, предполагается, что физическое состояние фермиона не может удовлетворять неравенству типа (A.9). Следовательно, этот случай отпадает.

Рассмотрим следующий случай. Пусть A и B - два комплексных числа и $|s\rangle$ - некоторое состояние, такое что

$$|s\rangle = A|0\rangle + B|1\rangle. \quad (\text{A.10})$$

Здесь $|0\rangle$ - вакуумное состояние и $|1\rangle = a_0^\dagger|0\rangle$ - одночастичное состояние с нулевым импульсом. Состояние нормализуется, если

$$|A|^2 + |B|^2 = 1. \quad (\text{A.11})$$

Оператор спинора может быть разложен в сумму операторов рождения и уничтожения

$$\psi = \sum_k (a_k u_k + b_k^\dagger v_k), \quad (\text{A.12})$$

где u_k и v_k - нормированные комплекснозначные спиноры с

$$\bar{u}_k u_k = -\bar{v}_k v_k = 1, \quad \bar{v}_k u_k = \bar{u}_k v_k = 0.$$

Можно легко проверить, что для состояния (A.10) выполняются

$$\langle \psi \rangle_{ren} = A^* B u_0, \quad (\text{A.13a})$$

$$\langle \bar{\psi} \rangle_{ren} = B^* A \bar{u}_0, \quad (\text{A.13b})$$

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{ren} = |B|^2. \quad (\text{A.13c})$$

Таким образом из условия (A.9) следует

$$|B|^2 = 1 - |A|^2 \ll 1. \quad (\text{A.14})$$

Последнее условие выполняется достаточно легко. Это означает, что спинорные поля можно рассматривать в классическом приближении, если их квантовое состояние близко к вакуумному состоянию.

Приложение 2

Связь между инвариантами, построенными из билинейных спинорных форм

Как было указано, среди пяти инвариантов, построенных из билинейных спинорных форм, только два являются независимым. Покажем это.

Поскольку ψ и ψ^* (комплексная сопряженная ψ) имеет по 4 компонента, можно построить всего $4 \cdot 4 = 16$ независимые билинейные комбинации. Это скаляры, псевдоскаляры, векторы, аксиальные векторы и тензоры соответственно.

$$S = \bar{\psi}\psi, \quad (\text{B.1a})$$

$$P = i\bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad (\text{B.1b})$$

$$v^\mu = (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi), \quad (\text{B.1c})$$

$$A^\mu = (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi), \quad (\text{B.1d})$$

$$Q^{\mu\nu} = (\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi), \quad (\text{B.1e})$$

где $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu]$ антисимметричный тензор. Инварианты, соответствующие билинейным формам суть

$$I_S = S^2 = (\bar{\psi}\psi)^2, \quad (\text{B.2a})$$

$$I_P = P^2 = (i\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2, \quad (\text{B.2b})$$

$$I_v = v_\mu v^\mu = (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) g_{\mu\nu} (\bar{\psi}\gamma^\nu\psi), \quad (\text{B.2c})$$

$$I_A = A_\mu A^\mu = (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi) g_{\mu\nu} (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi), \quad (\text{B.2d})$$

$$I_Q = Q_{\mu\nu} Q^{\mu\nu} = (\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi) g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} (\bar{\psi}\sigma^{\alpha\beta}\psi). \quad (\text{B.2e})$$

γ матрицы в этих выражениях подчиняются следующей алгебре

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{B.3})$$

и связаны с матрицами Дирака для плоского пространства-времени следующим образом

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x)e_\nu^b(x)\eta_{ab}, \quad \gamma_\mu(x) = e_\mu^a(x)\bar{\gamma}_a, \quad (\text{B.4})$$

где $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и e_μ^a - набор тетрадных 4-векторов.

Для диагональных метрик, таких как Бианки-I

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2.$$

имеем

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \bar{\gamma}_0, & \gamma_1 &= a(t)\bar{\gamma}_1, & \gamma_2 &= b(t)\bar{\gamma}_2, & \gamma_3 &= c(t)\bar{\gamma}_3, \\ \gamma^0 &= \bar{\gamma}^0, & \gamma^1 &= \bar{\gamma}^1/a(t), & \gamma^2 &= \bar{\gamma}^2/b(t), & \gamma^3 &= \bar{\gamma}^3/c(t). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Матрицы Дирака $\bar{\gamma}$ в плоском пространстве-времени выберем в виде

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \bar{\gamma}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\gamma}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \bar{\gamma}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Определив γ^5 следующим образом

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= -\frac{i}{4}E_{\mu\nu\sigma\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho, & E_{\mu\nu\sigma\rho} &= \sqrt{-g}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}, & \varepsilon_{0123} &= 1, \\ \gamma^5 &= -i\sqrt{-g}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3 = \bar{\gamma}^5, \end{aligned}$$

получим

$$\bar{\gamma}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что ψ - это четырехкомпонентная функция

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = \psi^*\gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*), \quad (\text{B.6})$$

Определив \bar{F} как билинейную спинорную форму в пространстве Минковского, имеем

следующие выражения для нетривиальных компонентов билинейных форм:

$$\bar{S} = (\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 - \psi_4^* \psi_4), \quad (\text{B.7})$$

$$\bar{P} = -i(\psi_1^* \psi_3 + \psi_2^* \psi_4 - \psi_3^* \psi_1 - \psi_4^* \psi_2), \quad (\text{B.8})$$

$$\bar{V}^0 = (\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4), \quad (\text{B.9})$$

$$\bar{V}^1 = (\psi_1^* \psi_4 + \psi_2^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_2 + \psi_4^* \psi_1), \quad (\text{B.10})$$

$$\bar{V}^2 = -i(\psi_1^* \psi_4 - \psi_2^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_2 - \psi_4^* \psi_1), \quad (\text{B.11})$$

$$\bar{V}^3 = (\psi_1^* \psi_3 - \psi_2^* \psi_4 + \psi_3^* \psi_1 - \psi_4^* \psi_2), \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{A}^0 = (\psi_1^* \psi_3 + \psi_2^* \psi_4 + \psi_3^* \psi_1 + \psi_4^* \psi_2), \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{A}^1 = (\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1 + \psi_3^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_3), \quad (\text{B.14})$$

$$\bar{A}^2 = -i(\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1 + \psi_3^* \psi_4 - \psi_4^* \psi_3), \quad (\text{B.15})$$

$$\bar{A}^3 = (\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 - \psi_4^* \psi_4), \quad (\text{B.16})$$

$$\bar{Q}^{01} = i(\psi_1^* \psi_4 + \psi_2^* \psi_3 - \psi_3^* \psi_2 - \psi_4^* \psi_1), \quad (\text{B.17})$$

$$\bar{Q}^{02} = (\psi_1^* \psi_4 - \psi_2^* \psi_3 - \psi_3^* \psi_2 + \psi_4^* \psi_1), \quad (\text{B.18})$$

$$\bar{Q}^{03} = i(\psi_1^* \psi_3 - \psi_2^* \psi_4 - \psi_3^* \psi_1 + \psi_4^* \psi_2), \quad (\text{B.19})$$

$$\bar{Q}^{12} = (\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4), \quad (\text{B.20})$$

$$\bar{Q}^{23} = (\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1 - \psi_3^* \psi_4 - \psi_4^* \psi_3), \quad (\text{B.21})$$

$$\bar{Q}^{13} = i(\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1 - \psi_3^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_3). \quad (\text{B.22})$$

Если F суть билинейная спинорная форма в криволинейном пространстве (в нашем случае в пространстве VI), то она связана с \bar{F} следующим образом:

$$S = \bar{S}, \quad (\text{B.23})$$

$$P = \bar{P}, \quad (\text{B.24})$$

$$V^0 = \bar{V}^0, \quad (\text{B.25})$$

$$V^1 = \bar{V}^1/a, \quad (\text{B.26})$$

$$V^2 = \bar{V}^2/b, \quad (\text{B.27})$$

$$V^3 = \bar{V}^3/c, \quad (\text{B.28})$$

$$A^0 = \bar{A}^0, \quad (\text{B.29})$$

$$A^1 = \bar{A}^1/a, \quad (\text{B.30})$$

$$A^2 = \bar{A}^2/b, \quad (\text{B.31})$$

$$A^3 = \bar{A}^3/c, \quad (\text{B.32})$$

$$Q^{01} = \bar{Q}^{01}/a, \quad (\text{B.33})$$

$$Q^{02} = \bar{Q}^{02}/b, \quad (\text{B.34})$$

$$Q^{03} = \bar{Q}^{03}/c, \quad (\text{B.35})$$

$$Q^{12} = \bar{Q}^{12}/ab, \quad (\text{B.36})$$

$$Q^{23} = \bar{Q}^{23}/bc, \quad (\text{B.37})$$

$$Q^{13} = \bar{Q}^{13}/ac. \quad (\text{B.38})$$

Из этих выражений находим

$$\begin{aligned} I_S &= S^2 = (\psi_1^* \psi_1)^2 + (\psi_2^* \psi_2)^2 + (\psi_3^* \psi_3)^2 + (\psi_4^* \psi_4)^2 \\ &+ 2[\psi_1^* \psi_1 \psi_2^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_1 \psi_3^* \psi_3 - \psi_1^* \psi_1 \psi_4^* \psi_4 \\ &- \psi_2^* \psi_2 \psi_3^* \psi_3 - \psi_2^* \psi_2 \psi_4^* \psi_4 + \psi_3^* \psi_3 \psi_4^* \psi_4]. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

$$\begin{aligned} I_P &= P^2 = -(\psi_1^* \psi_3)^2 - (\psi_2^* \psi_4)^2 - (\psi_3^* \psi_1)^2 - (\psi_4^* \psi_2)^2 \\ &- 2[\psi_1^* \psi_3 \psi_2^* \psi_4 - \psi_1^* \psi_1 \psi_3^* \psi_3 - \psi_1^* \psi_3 \psi_4^* \psi_2 \\ &- \psi_2^* \psi_4 \psi_3^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2 \psi_4^* \psi_4 + \psi_3^* \psi_1 \psi_4^* \psi_2]. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} I_V &= (\bar{V}^0)^2 - (\bar{V}^1)^2 - (\bar{V}^2)^2 - (\bar{V}^3)^2 \\ &= (\psi_1^* \psi_1)^2 + (\psi_2^* \psi_2)^2 + (\psi_3^* \psi_3)^2 + (\psi_4^* \psi_4)^2 \\ &- (\psi_1^* \psi_3)^2 - (\psi_2^* \psi_4)^2 - (\psi_3^* \psi_1)^2 - (\psi_4^* \psi_2)^2 \\ &+ 2[\psi_1^* \psi_1 \psi_2^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_1 \psi_4^* \psi_4 - \psi_2^* \psi_2 \psi_3^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_3 \psi_4^* \psi_4 \\ &- \psi_1^* \psi_4 \psi_2^* \psi_3 - \psi_3^* \psi_2 \psi_4^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_3 \psi_4^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_4 \psi_3^* \psi_1] \\ &= I_S + I_P. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

$$\begin{aligned}
 I_A &= (\bar{A}^0)^2 - (\bar{A}^1)^2 - (\bar{A}^2)^2 - (\bar{A}^3)^2 \\
 &= -(\psi_1^* \psi_1)^2 - (\psi_2^* \psi_2)^2 - (\psi_3^* \psi_3)^2 - (\psi_4^* \psi_4)^2 \\
 &\quad + (\psi_1^* \psi_3)^2 + (\psi_2^* \psi_4)^2 + (\psi_3^* \psi_1)^2 + (\psi_4^* \psi_2)^2 \\
 &\quad - 2[\psi_1^* \psi_1 \psi_2^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_1 \psi_4^* \psi_4 - \psi_2^* \psi_2 \psi_3^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_3 \psi_4^* \psi_4 \\
 &\quad - \psi_1^* \psi_4 \psi_2^* \psi_3 - \psi_3^* \psi_2 \psi_4^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_3 \psi_4^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_4 \psi_3^* \psi_1] \\
 &= -(I_S + I_P).
 \end{aligned} \tag{B.42}$$

$$\begin{aligned}
 I_Q &= 2[(\bar{Q}^{12})^2 + (\bar{Q}^{13})^2 + (\bar{Q}^{23})^2 - (\bar{Q}^{01})^2 - (\bar{Q}^{02})^2 - (\bar{Q}^{03})^2] \\
 &= (\psi_1^* \psi_1)^2 + (\psi_2^* \psi_2)^2 + (\psi_3^* \psi_3)^2 + (\psi_4^* \psi_4)^2 \\
 &\quad + (\psi_1^* \psi_3)^2 + (\psi_2^* \psi_4)^2 + (\psi_3^* \psi_1)^2 + (\psi_4^* \psi_2)^2 \\
 &\quad + 2[\psi_1^* \psi_1 \psi_2^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_1 \psi_4^* \psi_4 - \psi_2^* \psi_2 \psi_3^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_3 \psi_4^* \psi_4 \\
 &\quad + \psi_1^* \psi_4 \psi_2^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_2 \psi_4^* \psi_1 - \psi_1^* \psi_3 \psi_4^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_4 \psi_3^* \psi_1] \\
 &\quad - 4(\psi_1^* \psi_1 \psi_3^* \psi_3 + \psi_2^* \psi_2 \psi_4^* \psi_4) = 2(I_S - I_P).
 \end{aligned} \tag{B.43}$$

Так мы видим, что инварианты I_V , I_A и I_Q могут быть выражены в терминах I_S и I_P .

Альтернативное доказательство выражений $I_V = -I_A = (I_S + I_P)$ и $I_Q = 2(I_S - I_P)$ может быть дано, используя преобразование Фирца (Feirz). Для этого вспомним, что любая 4×4 матрица Γ может быть представлена как линейная комбинация из γ^A :

$$\Gamma = \sum_A c_A \gamma^A, \quad c_A = \frac{1}{4} \text{Tr} \gamma_A \Gamma. \tag{B.44}$$

Это может быть явно записано в виде

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{4} \sum_A \Gamma_{lm} \gamma_{ml}^A \gamma_{Aik}. \tag{B.45}$$

Здесь

$$\gamma^A = \{I, \gamma^5, \gamma^\mu, i\gamma^\mu \gamma^5, i\sigma^{\mu,\nu}\}, \quad A = 1, 2..16. \tag{B.46}$$

Условие полноты дает

$$\delta_{ij} \delta_{kl} = \frac{1}{4} \sum_A \gamma_{Aik} \gamma_{jl}^A. \tag{B.47}$$

Умножая предыдущее выражение на $\bar{\psi}_i^a \psi_k^b \bar{\psi}_m^c \psi_l^d$, находим

$$(\bar{\psi}^a \psi^d)(\bar{\psi}^c \psi^b) = \frac{1}{4} \sum_A (\bar{\psi}^a \gamma_A \psi^b)(\bar{\psi}^c \gamma^A \psi^d). \tag{B.48}$$

Заменив $\psi^d \rightarrow \gamma^B \psi^d$ и $\psi^b \rightarrow \gamma^C \psi^b$ и используя выражение

$$\gamma^A \gamma^B = \sum_R C_R \gamma^R, \quad C_R = \frac{1}{4} \text{Tr} \gamma^A \gamma^B \gamma_R, \quad (\text{B.49})$$

получим другие тождества. Обозначив $I_S = (\bar{\psi}^a \psi^b)(\bar{\psi}^c \psi^d)$, $I'_S = (\bar{\psi}^a \psi^d)(\bar{\psi}^c \psi^b) \cdots \dots$, находим [132]

$$4I'_S = I_S + I_P + I_V + I_Q + I_A, \quad (\text{B.50})$$

$$4I'_P = I_S + I_P - I_V + I_Q - I_A, \quad (\text{B.51})$$

$$4I'_V = 4I_S - 4I_P - 2I_V + 2I_A, \quad (\text{B.52})$$

$$4I'_Q = 6I_S + 6I_P - 2I_Q, \quad (\text{B.53})$$

$$4I'_A = 4I_S - 4I_P + 2I_V - 2I_A. \quad (\text{B.54})$$

Небольшая манипуляция с предыдущими выражениями приводит к искомому результату.

Приложение 3

Пространственно-временная сингулярность

Для того, чтобы установить является ли пространство-время сингулярное, рассмотрим следующие инварианты пространства Бианки-I

Скалярная кривизна имеет вид

$$I_1 = R = -2 \left[\frac{\ddot{\tau}}{\tau} - \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} - \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} - \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} \right], \quad \tau = a_1 a_2 a_3. \quad (\text{C.1})$$

$$I_2 = \left[(R_0^0)^2 + (R_1^1)^2 + (R_2^2)^2 + (R_3^3)^2 \right], \quad (\text{C.2})$$

с

$$R_0^0 = - \left[\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} \right], \quad (\text{C.3a})$$

$$R_1^1 = - \left[\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} \right], \quad (\text{C.3b})$$

$$R_2^2 = - \left[\frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} \right], \quad (\text{C.3c})$$

$$R_3^3 = - \left[\frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} \right]. \quad (\text{C.3d})$$

и скаляр Кретчмана

$$\begin{aligned} I_3 &= 4 \left[(R^{01}_{01})^2 + (R^{02}_{02})^2 + (R^{03}_{03})^2 + (R^{12}_{12})^2 + (R^{23}_{23})^2 + (R^{31}_{31})^2 \right] \\ &= 4 \left[\left(\frac{\ddot{a}_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{\ddot{a}_2}{a_2} \right)^2 + \left(\frac{\ddot{a}_3}{a_3} \right)^2 + \left(\frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} \right)^2 + \left(\frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} \right)^2 + \left(\frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

В присутствии вязкой жидкости для метрических функции имеем

$$a_i = A_i \tau^{1/3} \exp \left((Y_i/3) \int \frac{e^{-2\kappa \int \eta dt}}{\tau(t)} dt \right), \quad (\text{C.5a})$$

$$\frac{\dot{a}_i}{a_i} = \frac{\dot{\tau}}{3\tau} + \frac{Y_i}{3\tau} e^{-2\kappa \int \eta dt}, \quad (i = 1, 2, 3, \quad Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0), \quad (\text{C.5b})$$

$$\frac{\ddot{a}_i}{a_i} = \frac{\ddot{\tau}}{3\tau} - \frac{2}{9} \left(\frac{\dot{\tau}}{\tau} \right)^2 - \frac{Y_i}{9\tau} \frac{\dot{\tau}}{\tau} e^{-2\kappa \int \eta dt} - \frac{2Y_i \kappa \eta}{3\tau} e^{-2\kappa \int \eta dt} + \frac{Y_i^2}{9\tau^2} e^{-4\kappa \int \eta dt}. \quad (\text{C.5c})$$

В отсутствие вязкой жидкости первого рода и в случае спинорного и скалярного полей с идеальной жидкости (C.5) принимает вид

$$a_i = A_i \tau^{1/3} \exp[(Y_i/3) \int \tau^{-1} dt], \quad (\text{C.6a})$$

$$\frac{\dot{a}_i}{a_i} = \frac{\dot{\tau}}{3\tau} + \frac{Y_i}{3\tau}, \quad (\text{C.6b})$$

$$\frac{\ddot{a}_i}{a_i} = \frac{\ddot{\tau}}{3\tau} - \frac{2}{9} \left(\frac{\dot{\tau}}{\tau} \right)^2 - \frac{Y_i}{9} \frac{\dot{\tau}}{\tau^2} + \frac{Y_i^2}{9\tau^2}. \quad (\text{C.6c})$$

Мы будем исследовать сингулярность на основе скаляра Кретчмана и для этого следуем критериям данными в работе [91]:

Для любого конечного t некоторые $a_i \rightarrow 0$. (C.4) показывает, что если более чем один масштабный фактор становится тривиальной при конечной t , то это и есть сингулярность. Как видно из (C.5) и (C.6) при $\tau \rightarrow 0$ (i) все $a_i \rightarrow 0$ если $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$, т.е. имеет место сингулярности; (ii) более чем один $a_i \rightarrow 0$ если более чем один $Y_i < 0$ и в данном случае мы имеем сингулярность; (iii) только один $a_i \rightarrow 0$ если только один $Y_i < 0$, т.е., пространство-время может быть несингулярным.

Отметим, что это условие сингулярности всегда выполняется в точке где $\tau = 0$.

Что касается $t \rightarrow \infty$, то такая асимптотика может быть сингулярной если хотя бы один из a_i исчезает быстрее чем экспонента. На самом деле в нашем случае имеем хотя один из a_i при $\tau \rightarrow 0$ исчезает быстрее чем экспонента, поскольку хотя бы один Y_i имеет отрицательное значение.

Таким образом мы заключаем, что в любой точке пространства-времени где $\tau = 0$ возникает сингулярность.

Благодарность

Выражаю глубокую благодарность моим учителям профессору **Рыбакову Юрию Петровичу** и профессору **Шикину Георгию Николаевичу** за многолетнее их внимание, поддержку, профессиональные советы и дискуссии.

Литература

- [1] *Альварато Р., Рыбаков Ю.П., Саха Б., Шикин Г.Н.* Взаимодействующие спинорное и скалярное поля: точные самосогласованные решения в пространстве типа Бианки-I. // Известия ВУЗов. Физика. 1995. Т. 38. № 7. С. 53 - 58.
- [2] *Альварато Р., Саха Б., Шикин Г.Н.* О взаимодействии спинорного и скалярного полей во внешнем космологическом гравитационном поле типа Бианки-I. // Вестник РУДН. Физика. 1996. V. 4. № 1. С. 38 - 51.
- [3] *Багров В.Г., Обухов В.В., Сахаров А.Г.* Интегрирование уравнений Эйнштейна-Дирака для штеккелевых пространств типа (3,1). // Известия ВУЗов. Физика. 1997. Т. 40. № 2. Р. 3 - 9.
- [4] *Багров В.Г., Обухов В.В., Осетрин К.Е.* Нетривиальные конформно-штеккелевы метрики пространств Эйнштейна. // Известия ВУЗов. Физика. 1997. Т. 40. № 10. Р. 74 - 78.
- [5] *Барбашов Б.М., Первушин В.Н., Проскурин Д.В.* Экскурс в современную космологию. // Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2003. т. 34. вып. 7. С. 137 - 189.
- [6] *Белинский В.А., Халатников И.М.* О влиянии вязкости на характер космологической эволюции. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1975. Т. 69. № 2(8). С. 401 - 413.
- [7] *Белинский В.А., Лифшиц Е.М., Халатников И.М.* Колебательный режим приближения к особой точке в релятивистской космологии. // УФН, 1970. т. 102. С. 463 - 500.
- [8] *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. 723 с.
- [9] *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973. 416 с.
- [10] *Бронников К.А. и Шикин Г.Н.* Самогравитирующие модели частиц с классическими полями и их устойчивость. // Итоги науки и техники. Т. 2. Гравитация и космология. ВИНТИ. М.: 1991. С. 4-55.
- [11] *Бронников К.А.* Статические цилиндрически-симметричные поля Эйнштейна-Максвелла. // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат. 1979. Вып. 10. С. 37 - 50.
- [12] *Гейзенберг В.* Введение в единую теорию поля элементарных частиц. М.: Мир, 1968. 239 с.
- [13] *Желморевич В.А.* Теория спиноров и ее применение в физике и механике. М.: Наука, 1982. 270 с.
- [14] *Жидков Е.П., Пузынин И.В.* Решение краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом стабилизации. // Доклады Академии Наук СССР. 1967. Т. 174. № 2. С. 271 - 273.
- [15] *Жидков Е.П., Севастьянов Л.А.* Макропараметры эффективного распределения и функции источника в математической модели экранируемого напыления. // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 9. С. 35 - 40.

- [16] *Зельдович Я.Б.* Магнитная модель Вселенной// Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 1970. Т. 48. С. 986 - 988.
- [17] *Зельдович Я.Б.* Рождение частиц в космологии// Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 1970. Т. 12. С. 443 - 447.
- [18] *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.* Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975. 735 с.
- [19] *Зельманов А.Л., Агаков В.Г.* Элементы общей теории относительности. М.: Наука, 1989. 236 с.
- [20] *Иваненко Д.Д.* Введение в теорию элементарных частиц// Успехи Физических Наук. 1947. Т. 32. № 2. С. 149 - 184.
- [21] *Иваненко Д.Д.* Введение в теорию элементарных частиц// Успехи Физических Наук. 1947. Т. 32. № 2. С. 261 - 315.
- [22] *Иваненко Д.Д.* Попытка построения единой нелинейной спинорной теории материи: Нелинейная квантовая теория поля. М.: Издательство Иностранной Литературы, 1959. с. 5 - 40.
- [23] *Иваненко Д.Д., Гололобова А.С., Кречет В.Г., Лапчинский В.Г.* Космологические решения для спинорного поля в ОТО// Известия ВУЗов. Физика. 1973. № 12. Р. 68 - 71.
- [24] *Иваненко Д.Д., Гололобова А.С., Кречет В.Г., Лапчинский В.Г.* Самогравитирующие спинорные конфигурации// Известия ВУЗов. Физика. 1973. № 12. Р. 59 - 62.
- [25] *Крамер Д., Штефани Х., Херльт Э., и Мак-Калум М.* Точные решения уравнения Эйнштейна// Перевод с английского. М.: "Энергоиздат" 1982. 416 С.
- [26] *Кречет В.Г.* Спинорные и электромагнитное поле в пространстве с кручением// Известия ВУЗов. Физика. 1978. № 11. Р. 31 - 35.
- [27] *Кречет В.Г., Пономарев В.Н.* НЕлинейность и кручение// Теоретическая и математическая физика. 1975. Т. 25. Р. 141 - 144.
- [28] *Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М.* Механика. Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Наука, 1988. 215 С.
- [29] *Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М.* Теория поля. Курс теоретической физики. Т. 2. М.: Наука, 1988. 509 С.
- [30] *Линде А.Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990. 275 С.
- [31] *Лукаш В.Н., Старобинский А.А.* Изотропизация космологического расширения за счет эффекта рождения частиц // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 1974. Т. 66. С. 1515 - 1527.
- [32] *Марков М.А. и Фролов В.П.* О минимальных размерах частиц в общей теории относительности// Теоретическая и математическая физика. 1972. Т. 13. № 1. С. 41 - 61.
- [33] *Милехин Г.А.* Нелинейные скалярные поля и множественное образование частиц// Известия Академии Наук СССР, серия Физика. 1962. Т. 26. С. 635 - 641.
- [34] *Милехин Г.А.* Уточнение гидродинамической теории множественного образования частиц// Международная конференция по космическим лучам Т. 1 Ядерная взаимодействия при энергии $10^{11} - 10^{14}$ эв. М.: Издательство Академии Наук СССР. 1960. С. 212 - 218.
- [35] *Мицкевич В.Н., Ефремов А.П., Нестеров А.И.* Динамика полей в общей теории относительности. М.: Энергоиздат, 1985. 185 с.
- [36] *Мицкевич В.Н.* Физические поля в общей теории относительности. М.: Наука, 1969. 326 с.

- [37] *Петров А.З.* Новые методы общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 496 с.
- [38] *Прудриков А.П., Брычков Ю.А. и Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1. М: Наука. 1981. С. 798.
- [39] *Редже Т.* Гравитационные поля и квантовая механика// Альберт Эйнштейн и теория гравитация: Перевод с английского. М.: "Мир" 1979. С. 460 - 466.
- [40] *Родичев В.И.* Пространство с кручением и нелинейные уравнения поля// Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 1961. Т. 40. № 5. С. 1469 -1472.
- [41] *Рыбаков Ю.П., Саха Б., Шикин Г.Н.* Точные самосогласованные решения нелинейных уравнений спинорного поля в пространстве Бианки-I.// "Неевклидовы пространства и новые проблемы физики"(Сборник статей, посвященный 200 летию со дня рождения Н.И. Лобачевского) М: Издательство Белка, 1993. С. 30 - 34.
- [42] *Рыбаков Ю.П., Саха Б. и Шикин Г.Н.* Самосогласованные дроблетоподобные решения уравнения электромагнитного поля с индуцированной нелинейностью.// Известия ВУЗов. Физика. 1992. Т. 35. № 10. С. 112 - 116.
- [43] *Рыбаков Ю.П., Саха Б. и Шикин Г.Н.* Нелинейные спинорные поля в пространстве типа Бианки I: Точные самосогласованные решения// Известия ВУЗов. Физика. 1994. Т. 37. № 7. С. 40 - 45.
- [44] *Рыбаков Ю.П., Саха Б. и Шикин Г.Н.* Нелинейное спинорное поле во внешнем гравитационном поле типа Бианки I и проблема устранения начальной сингулярности// Вестник РУДН: Физика. 1994. Т. 2. № 2. С. 61-78.
- [45] *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений. Препринт ИПМ. 1979. N. 161. (В сборнике "Режимы с обострением: эволюция идеи". Сост. В.С.Курдюмов. Под ред. Г.Г.Малинецкого. М.: Физматлит, 2006)
- [46] *Саха Б.* "Многомерные солитоны в нелинейных моделях с гравитацией" диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. РУДН. Москва. 1993. 85 С.
- [47] *Саха Б.* Спинорные поля в космологии типа Бианки VI//Вестник РУДН: Математика, информатика и физика. 2007. № 1-2. С. 62 - 65.
- [48] *Саха Б.* Ранняя инфляция, изотропизация и позднее ускорение Вселенной типа Бианки-I// Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2009. Т. 40. Вып. 5. С. 656-673.
- [49] *Саха Б. и Рихвицкий В.С.* Нелинейные спинорные поля в анизотропной Вселенной, заполненной вязкой жидкостью: точные решения и качественный анализ// Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2009. Т. 40. Вып. 5. С. 612-655.
- [50] *Саха Б. и Рихвицкий В.С.* Бианки типа-I космологическая модель с вязкой жидкостью и спинорным полем: качественный анализ//Вестник РУДН: Математика, информатика и физика. 2007. № 3-4. С. 130 - 134.
- [51] *Саха Б. и Шикин Г.Н.* Спинорные поля в плоско-симметричном пространстве-времени//Вестник РУДН: Математика, информатика и физика. 2007. № 1-2. С. 66 - 69.
- [52] *Чаплигин С.А.* О газовых струях// Ученые записки отделения физико-математических наук Московского университета. 1904. Вып. 21. С. 1 - 112.
- [53] *Шикин Г.Н.* Взаимодействующие скалярное и электромагнитное поля: Статические цилиндрически-симметричные решения с гравитацией// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц, М: Атомиздат. 1984. Вып. 14. С. 85 - 97.

- [54] *Шикин Г.Н.* Нелинейные спинорные поля во внешнем космологическом гравитационном поле и проблема устранения сингулярности начального состояния// Препринт ИПБРАЭ АН СССР. № 19. М.: 1991. 21 С.
- [55] *Швебер С.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: ИЛ, 1963. 842 с.
- [56] *Шикин Г.Н.* Основы теории солитонов в общей теории относительности.// М.: URSS Publishers. 1995. 88 с.
- [57] *Эдже Овоно Ф. и Терлецкий Я.П.* Исследование частицеподобных решений (ЧПП) в системе взаимодействующих скалярного, электромагнитного и гравитационного полей.// Известия ВУЗов. Физика. 1983. Т. 26. № 3. Р. 105 - 111.
- [58] *Abdel-Rahman A.M.M.* A critical density cosmological model with varying gravitational and cosmological "constants"// General Relativity and Gravitation. 1990. V. 22. № 6. P. 655 - 663.
- [59] *Adomou A. and Shikin G.N.* Nonlinear Spinor Field Equations in Gravitational Theory: Plane-Symmetrical Soliton-Like Solutions.// Gravitation & Cosmology. 1998. V. 4. № 2(14). P. 107 - 113.
- [60] *Alvarado R., Rybakov Yu.P., Saha B., Shikin G.N.* Exact Self-Consistent Solutions to the Interacting Spinor and Scalar Field Equations in Bianchi Type-I Space-Time.// Communications in Theoretical Physics. 1995. V. 4. № 2. P. 247-262.
- [61] *Amendola L., Finelli F., Burigana C., and Carturan D.* WMAP and the Generalized Chaplygin Gas. JCAP **0307**, 005 (2003).
- [62] *Apostolopoulos P.A.* On tilted perfect fluid Bianchi type VI₀ self-similar models.// General Relativity and Gravitation. 2004. V. 36. P. 1939-1945.
- [63] *Anguige K.* The nature of singularities in plane symmetric scalar field cosmologies // Classical and Quantum Gravity. 2000. V. 17. P. 2117- 2128.
- [64] *Armendáriz-Picón C., Greene P.B.* Spinors, Inflation, and Non-Singular Cyclic Cosmologies// General Relativity and Gravitation. 2003. V. 35. № 9. P. 1637 - 1658.
- [65] *Balakin A.B.* Magnetic relaxation in the Bianchi-I universe// Classical and Quantum Gravity. 2007. V. 24. № 20-21. P. 5221-5245.
- [66] *Bali R.* Magnetized cosmological model// International Journal of Theoretical Physics. 1986. V. 25. № 7. P. 755 - 761.
- [67] *Banerjee A., Duttachoudhury S.B., and Sanyal A.K.* Bianchi type I cosmological model with a viscous fluid// Journal of Mathematical Physics. 1985. V. 26. P. 3010 - 3015.
- [68] *Barrow J.D.* String-driven inflationary and deflationary cosmological models// Nuclear Physics B. 1988. V. 310. P. 743 - 763.
- [69] *Bean R. and Dore O.* Are Chaplygin gases serious contenders to the dark energy throne?// Physical Review D. 2003. V. 68. P. 023515.
- [70] *Beca L.M., Avelino P.P., de Carvalho J.P., and Martins C. J.* The Role of Baryons in Unified Dark Matter Models// Physical Review D. 2003. V. 67. P. 101301.
- [71] *Belinchon J.A.* Perfect fluid LRS Bianchi I with time varying constants// Astrophysics and Space Sciences. 2006. V. 302. P. 161-170.
- [72] *Belinchon J.A., Chakrabarty I.* Perfect fluid cosmological models with time-varying constants// International Journal of Modern Physics D. 2003. V. 12, № 6. P. 1113 - 1129.
- [73] *Belinchon J.A., Chakrabarty I.* Full causal bulk viscous cosmologies with time-varying constants// International Journal of Modern Physics 2003. V. 12. № 5. P. 861 - 883.

- [74] *Belinskii V.A., Khalatnikov I.M., Lifshitz E.M.* Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology.// *Advances in Physics*. 1970. V. 19. P. 525-573.
- [75] *Benaoum H.B.* Accelerated Universe from Modified Chaplygin Gas and Tachyonic Fluid// hep-th/0205140.
- [76] *Bento M.C., Bertolami O, and Sen A.A.* Generalized Chaplygin Gas, Accelerated Expansion and Dark Energy-Matter Unification// *Physical Review D*. 2002. V. 66. P. 043507.
- [77] *Bento M.C., Bertolami O, and Sen A.A.* Generalized Chaplygin gas and CMBR constraints// *Physical Review D*. 2003. V. 67. P. 063003.
- [78] *Bento M.C., Bertolami O, and Sen A.A.* WMAP Constraints on the Generalized Chaplygin Gas Model// *Physics Letters B*. 2003. V. 575. P. 172 - 180.
- [79] *Berger B.K.* Comment on the ‘chaotic’ singularity in some magnetic Bianchi cosmologies// *Classical and Quantum Gravity*. 1996. V. 13. P. 1273 - 1276.
- [80] *Berman M.S.* Static universe in a modified Brans-Dicke cosmology// *International Journal of Theoretical Physics*. 1990. V. 29. № 6. P. 567 - 570.
- [81] *Berman M.S.* Kantowski-Sachs cosmological models with constant deceleration parameter// *Nuovo Cimento B*. 1990. V. 105. № 2. P. 239 - 242.
- [82] *Berman M.S., Som M.M., Gomide F.M.* Brans-Dicke static universe// *General Relativity and Gravitation*. 1989. V. 21. № 3. P. 287 - 292.
- [83] *Berman M.S., Gomide F.M.* Cosmological models with constant deceleration parameters// *General Relativity and Gravitation*. 1988. V. 20. № 2. P. 191 - 198.
- [84] *Bertolami O.* Challenges to the Generalized Chaplygin Gas Cosmology// astro-ph/0403310.
- [85] *Biesiada M., Godlowski W., and Szydlowski M.* Generalized Chaplygin Gas Models tested with SNIa.// *Astrophysical Journal*. 2005. V. 622. P. 28 - 38. astro-ph/0403305.
- [86] *Bilic N., Tupper G.B. and Viollier R.D.* Unification of Dark Matter and Dark Energy: the Inhomogeneous Chaplygin Gas// *Physics Letters B*. 2002. V. 353. P. 17 - 21.
- [87] *Bordemann M. and Hoppe J.* The Dynamics of Relativistic Membranes I: Reduction to 2-dimensional Fluid Dynamics// *Physics Letters B*. 1993. V. 317. P. 315 - 320.
- [88] *Brans C. and Dicke R.H.* Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation// *Physical Review*. 1961. V. 124. P. 925 - 935.
- [89] *Brill D., Wheeler J.* Interaction of neutrinos and gravitational fields// *Reviews of Modern Physics*. 1957. V. 29. P. 465-479.
- [90] *Bronnikov K.A., Shikin G.N.* Cylindrically Symmetric Solitons with Nonlinear Self-Gravitating Scalar Fields.// *Gravitation & Cosmology*. 2001. V. 7. P. 231-240.
- [91] *K.A. Bronnikov, E.N. Chudayeva, and G.N. Shikin* Magneto-dilatonic Bianchi-I cosmology: isotropization and singularity problems// *Classical and Quantum Gravity*. 2004. V. 21. P. 3389 - 3403.
- [92] *Cai, Y., Qiu, T., Piao, Y., Li, M., Zhang, X.* Bouncing Universe with Quintom matter// arXiv:0704.1090 [gr-qc] (2007).
- [93] *Cai, Y., Wang, J.* Dark energy model with spinor matter and its quintom scenario// arXiv:0806.3890 [gr-qc] (2008).
- [94] *Cardenas R., Gonzalez T., Leiva Y., Martin O. and Quiros I.* Model of the universe including dark energy accounted for by both a quintessence field and a (negative) cosmological constant// *Physical Review D*. 2003. V. 67. P. 083501.

- [95] *Cardenas V.H.* Tachyonic quintessential inflation// Physical Review D. 2006. V. 73. P. 103512.
- [96] *Castagnino M.A., El Hasi C.D., Mazzitelli F.D., Paz J.P.* On the Dirac equation in anisotropic backgrounds// Physics Letters A. 1988. V. 128. № 1. P. 25 - 28.
- [97] *Chen W., Wu Y.S.* Implications of a cosmological constant varying as R^{-2} // Physical Review D. 1990. V. 41. № 2. P. 695 - 698.
- [98] *Chernikov N.A. and Tagirov E.A.* Quantum theory of scalar field in de Sitter space-time// Annales de l'Institut Henri Poincaré. 1968. V. 9. № 3. P. 109 - 141.
- [99] *Chernikov N.A.* A Homogeneous Static Gravitational Field and the Principle of Equivalence// Particles and Nuclei, Letters. 2001. № 2[105] P. 61 - 69.
- [100] *Chernikov N.A., Paramonova N.N., and Shavokhina N.S.* On free fall of a relativistic particle// Particles and Nuclei, Letters. 2005. V. 2. № 1[124] P. 13 - 16.
- [101] *Chervon S.V. and Shabalkin D.Yu.* A Plane-Symmetric Gravitational Field as a Generalized Nonlinear Sigma Model// Gravitation & Cosmology. 2000. V. 6. № 1(21). P. 41 - 44.
- [102] *Chimento L.P., Mollerach M.S.* Dirac equation in bianchi I metrics// Physics Letters A. 1987. V. 121. № 1. P. 7 - 10.
- [103] *Chimento L.P., Jakubi A.S., Mendez V., and Maartens R.* Cosmological solutions with nonlinear bulk viscosity// Classical and Quantum Gravity. 1997. V. 14. P. 3363 - 3375.
- [104] *Chimento L.P., Jakubi A.S., Pavon D., and Zimdahl W.* Interacting quintessence solution to the coincidence problem// Physical Review D **67**, 083513 (2003); arXiv:astro-ph/0303145.
- [105] *Chimento L.P.* Internal symmetry in Bianchi type-I cosmologies// Physical Review D **68**, 023504 (2003).
- [106] *Cho H.T., Speliotopoulos A.D.* Gravitational waves in Bianchi type-I universes: The classical theory// Physical Review D. 1995. V. 52. №. 10. P. 5445 - 5458.
- [107] *Cladwell, R.R., Dave, R., and Steinhardt, P.J.* Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State// Physical Review Letters. 1998. V. 80. № 8. P. 1582 - 1585.
- [108] *Copeland E.J., Garousi M.R., Sami M., and Tsujikawa S.* What is needed of a tachyon if it is to be the dark energy?// Physical Review D. 2005. V. 71. P. 043003.
- [109] *Christodoulakis T., Kofinas G. and Papadopoulos G.O.* Conditional symmetries and phase space reduction towards GCT invariant wave functions for the class A Bianchi type VI and VII vacuum cosmologies// Physics Letters B. 2001. V. 514. P. 149 - 154.
- [110] *Christodoulakis T. and Papadopoulos G.O.* Quantum Cosmology for the General Bianchi Type II, VI(Class A) and VII(Class A) vacuum geometries// e-print gr-qc/0109058.
- [111] *A.A. Coley, R.J. van den Hoogen, and R. Maartens* Qualitative viscous cosmology// Physical Review D. 1996. V. 54. P. 1393-1397.
- [112] *A.A. Coley and R.J. van den Hoogen* Qualitative analysis of causal anisotropic viscous-fluid cosmological models// Classical and Quantum Gravity. 1995. V. 12. P. 2335 - 2354.
- [113] *A.A. Coley and R.J. van den Hoogen* Qualitative analysis of viscous fluid cosmological models satisfying the Israel-Stewart theory of irreversible thermodynamics// Classical and Quantum Gravity. 1995. V. 12. P. 1977 - 1994.
- [114] *Colistete R., Fabris J.C., Goncalvez S.V., and de Souza P.E.* Dark energy, dark matter and the Chaplygin gas// gr-qc/0210079.
- [115] *Dabrowski M.P.* Phantom dark energy and its cosmological consequences// gr-qc/0701057v1.

- [116] *Damour T., Gibbons G.W., Taylor J.H.* Limits on the Variability of G Using Binary-Pulsar Data// Physical Review Letters. 1988. V. 61. № 10. P. 1151 - 1154.
- [117] *Desikan K.* Cosmological Models with Bulk Viscosity in the Presence of Particle Creation// General Relativity and Gravitation. 1997. V. 29. P. 435 - 443.
- [118] *Dev A., Jain D., and Alcaniz J.S.* Constraints on Chaplygin quartessence from the CLASS gravitational lens statistics and supernova data// Astronomy and Astrophysics. 2004. V. 417. P. 847-852. astro-ph/0311056.
- [119] *Dicke H.* Dirac's cosmology and Mach's principle// Nature (London) 1961. V. 192. № 4. P. 440 - 441.
- [120] *Diego J.M., Sliwa W., Silk J., Barcons X, and Voges W.* Cosmological constraints from the cluster contribution to the power spectrum of the soft X-ray background. New evidence for a low σ_8 // Monthly Notice of Royal Astronomical Society. 2003. V. 344. P. 951 - 964.
- [121] *Dirac P.A.M.* General Theory of Relativity. New York: Wiley, 1975. 71 p.
- [122] *Einstein A.* Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie// Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss. 1917. V. 1. P. 142 - 152.
- [123] *Einstein A.* Spielen die Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? // Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss. 1919. V. 1. P. 349 - 356.
- [124] *Ellis G.F.R.* Dynamics of pressure-free matter in general relativity// Journal of Mathematical Physics. 1967. V. 8. № 5. P. 1171 - 1194.
- [125] *Elst H. van, Dunsby P., and Tavakol R.* Constraints on inflationary solutions in the presence of shear and bulk viscosity// General Relativity and Gravitation. 1995. V. 27. P. 171 - 191.
- [126] *Fabris J.C., Goncalvez S.V., and de Souza P.E.* Density perturbations in an Universe dominated by the Chaplygin gas// General Relativity and Gravitation. 2002. V. 34. P. 53 - 63.
- [127] *Fabris J.C., Goncalvez S.V., and de Souza P.E.* Mass Power Spectrum in a Universe Dominated by the Chaplygin Gas// General Relativity and Gravitation. 2002. V. 34. P. 2111 - 2126.
- [128] *Fay S.* Sufficient conditions for curvature invariants to avoid divergences in hyperextended scalar-tensor theory for Bianchi models.// Classical and Quantum Gravity. 2000. V. 17. P. 2663-2673.
- [129] *Fay S.* Generalized scalar-tensor theory in the Bianchi type I model// General Relativity and Gravitation. 2000. V. 32. P. 187-202.
- [130] *Felder G., Frolov A., Kofman L. and Linde A.* Cosmology with negative potentials// Physical Review D. 2002. V. 66. P. 023507.
- [131] *Feng, B., Wang, X., Zhang, X.* Dark energy constraints from the cosmic age and supernova.// Phys. Lett. B. 2005. V. 607. P. 35.
- [132] *M. Fierz* Zur Fermischen Theorie des β -Zerfalls// Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei. 1937. V. 104. P. 553 - 565.
- [133] *Finkelstein R., LeLevier R., Ruderman M.* Nonlinear Spinor Fields// Physical Review. 1951. V. 83. № 2. P. 326 - 332.
- [134] *Friedmann A.A.* Über die Krümmung des Raumes// Z. Phys. 1922. V. 10. P. 377-386.
- [135] *Friedmann A.A.* Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes// Z. Phys. 1924. V. 21. P. 326-332.

- [136] *Gannouji R., Polarski D., Ranquet A., and Starobinsky A.A.* Scalar-tensor dark energy models// arXiv: astro-ph/0701650v1 (2007).
- [137] *Gannouji R., Polarski D., Ranquet A., and Starobinsky A.A.* Scalar-tensor models of normal and phantom dark energy// Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. JCAP. 2006. V. 09. P. 016.
- [138] *Gavrilov V.R., Melnikov V.N., and Triay R.* Exact solutions in multi-dimensional cosmology with shear and bulk viscosity// Classical and Quantum Gravity. 1997. V. 14. P. 2203 - 2218.
- [139] *Germani C. and Tsagas C.G.* Magnetized Tolman-Bondi collapse// Physical Review D. 2006. V. 73. P. 064010.
- [140] *Gibbons G.W.* Pulse Propagation in Born-Infeld Theory, the World Volume Equivalence Principle and the Hagedorn-like Equation of State of the Chaplygin Gas// Gravitation & Cosmology. 2002. V. 8. P. 2 - 6.
- [141] *Gogilidge S.A., Khvedilidge A.M., Mladenov D.M., and Pervushin V.N.* On Hamiltonian analysis of Bianchi IX cosmology// Gravitation & Cosmology. 1997. V. 3. P. 85 - 88.
- [142] *Gonzalez T and Quiros I.* Exact models with non-minimal interaction between dark matter and (either phantom or quintessence) dark energy// arXiv:gr-qc/0707.2089v1.
- [143] *Gorini V., Kamenshchik A., and Moschella U.* Can the Chaplygin gas be a plausible model for dark energy?// Physical Review D. 2003. V. 67. P. 063509.
- [144] *Gorini V., Kamenshchik, A., Moschella, U., and Pasquier, V.* The Chaplygin gas as a model for dark energy// gr-qc/0403062.
- [145] *Greene B.* The elegant universe. London: Vintage. 2000. 448 p.
- [146] *Grøn Ø.* Viscous inflationary universe models // Astrophysics and Space Science. 1990. V. 173 P. 191 - 225.
- [147] *Gross D.J., Neveu A.* Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories// Phys. Rev. D. 1974. V. 10. № 10. P. 3235-3253.
- [148] *Guth A.* Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems// Physical Review D. 1981. V. 23. № 2. P. 347 - 356.
- [149] *Harko T. and Mak M.K.* Decelerating causal bulk viscous cosmological models.// International Journal of Modern Physics D. 2000. V. 9. № 2. P. 97 - 110.
- [150] *Harko T. and Mak M.K.* Bianchi type I Universes with dilaton and magnetic fields.// International Journal of Modern Physics D. 2002. V. 11. № 8. P. 1171 - 1182.
- [151] *Hassaine M. and Horvathy P.A.* Chaplygin gas with field-dependent Poincare symmetry// Letters in Mathematical Physics. 2001. V. 57. P. 33 - 40.
- [152] *Hassaine M.* Supersymmetric Chaplygin gas// Physics Letters A. 2001. V. 290. P. 157 - 164.
- [153] *Hawking S.* A Brief History of Time. From the Big Bang to Black Holes// Toronto. Bantam Books. 1988. 198 p.
- [154] *Hawking S. and Mlodinow L.* A Briefer History of Time//Random House. USA. 2005. 176 p.
- [155] *Hawking S.W., Penrose R.* The singularities of gravitational collapse and cosmology.// Proceedings of the Royal Society of London. Mathematical and physical sciences. 1970. V. 314. P. 529-548.
- [156] *Hawking S.W. and Taylor R.J.* Helium production in anisotropic Big Bang Universe// Nature. 1966. V. 299. P. 1278.

- [157] *Hehl F.W., von der Heyde P., Kerlick G.D* General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects// *Reviews of Modern Physics*. 1976. V. 43. № 3. P. 393 - 416.
- [158] *Heisenberg W.* Doubts and hopes in quantum-electrodynamics// *Physica*. 1953. V. 19. P. 897-908.
- [159] *Heisenberg W.* Quantum Theory of Fields and Elementary Particles// *Review of Modern Physics*. 1957. V. 29. N. 3. P. 269-278.
- [160] *Henneaux M.* Bianchi type-I cosmologies and spinor fields// *Physical Review D*. 1980. V. 21. № 4. P. 857 - 863.
- [161] *Henneaux M.* Univers de Bianchi et champs spinoriels// *Annales de l'Institut Henri Poincaré*. 1981. V. 34. № 3. P. 329 - 349.
- [162] *G. Hinshaw et al.* Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Data Processing, Sky Maps, and Basic Results// *Astrophys. J. Suppl.* 2009. V. 180. P. 225 - 245.
- [163] *Horvath Z. and Kovacs Z.* Canonical theory of the Kantowski-Sachs cosmological models// *Astronomical Department of Eotvos University (PADEU)*. 2006. V. 17. P. 229 - 234.
- [164] *Hu B.L.* Gravitational waves in a Bianchi type-I universe// *Physical Review D*. 1978. V. 18. № 4. P. 969 - 982.
- [165] *Hu B.L., Parker L.* Anisotropy damping through quantum effects in the early universe.// *Physical Review D*. 1978. V. 17. P. 933-945.
- [166] *Huang W.* Anisotropic cosmological models with energy density dependent bulk viscosity.// *Journal of Mathematical Physics*. 1990. V. 31. № 6. P. 1456 - 1462.
- [167] *Ibáñez J., van der Hoogen R.J. and Coley A.A.* Isotropization of scalar field Bianchi models with an exponential potential// *Physical Review D*. 1995. V. 51. P. 928 - 930.
- [168] *Israel W.* Nonstationary irreversible thermodynamics: A causal relativistic theory// *Annals of Physics*. 1976. V. 100. P. 310 - 331.
- [169] *Israel W. and Stewart J.M.* On transient relativistic thermodynamics and kinetic theory// *Proceedings of Royal Society of London. A*. 1979. V. 365. P. 43 - 52.
- [170] *Israel W. and Stewart J.M.* Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. II// *Annals of Physics*. 1979. V. 118. P. 341 - 372.
- [171] *Jackiw R.* A Particle Field Theorist's Lectures on Supersymmetric, Non-Abelian Fluid Mechanics and d-Branes// [physics/0010042](#).
- [172] *Jacobs K.C.* Spatially homogeneous and euclidean cosmological models with shear// *The Astrophysical Journal*. 1968. V. 153. № 2. P. 661 - 678.
- [173] *Jacobs K.C.* Cosmologies of Bianchi type I with a uniform magnetic field // *The Astrophysical Journal*. 1969. V. 155. № 2. P. 379 - 391.
- [174] *Jordan P.* Zum gegenwartigen Stand der Diracschen kosmologischen Hypothesen// *Zeitschrift fur Physik A Hadrons and Nuclei*. 1959. V. 157. P. 112 - 121.
- [175] *Kaempffer F.A.* Spinor electrodynamics as a dynamics of currents// *Physical Review D*. 1981. V. 23. P. 918 - 921.
- [176] *Kamenshchik A.Yu., Moschella U., and Pasquier V.* An alternative to quintessence.// *Physics Letters B*. 2001. V. 511. № 2-4. P. 265 - 268.
- [177] *Kamke E.* Differentialgleichungen losungsmethoden und losungen. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1957. 576 p.

- [178] *Kantowski R. and Sachs R.K.* Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models.// Journal of Mathematical Physics. 1966. V. 7. P. 443 - 446.
- [179] *Kibble T.W.B.* Lorentz invariance and the gravitational field.// Journal of Mathematical Physics. 1961. V. 2. P. 212-221.
- [180] *R. K. Knop et al* New Constraints on Ω_M , Ω_Λ , and w from an Independent Set of 11 High-Redshift Supernovae Observed with the Hubble Space Telescope Astrophys. J. 2003. V.598, P. 102.
- [181] *E. Komatsu et al.* Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation// Astrophys. J. Suppl. 2009. V. 180. PP. 330 - 376.
- [182] *Krechet V.G.* Spinor field and nonmetricity of space-time// Soviet Physics Journal. 1980. V. 23 . P. 506 - 509.
- [183] *Krechet V.G.* Spinorial analysis and physical properties of fermions// Soviet Physics Journal. 1986. V. 29 . P. 790 - 794.
- [184] *Krechet V.G., Fil'chenkov M.L., and Shikin G.N.* Equivalence between the descriptions of cosmological models using a spinor field and a perfect fluid.// Gravitation & Cosmology. 2008. V. 14. № 3(55). P. 292 - 294.
- [185] *V.G. Krechet, M.L. Fil'chenkov and G.N. Shikin* Nonlinear Spinor Fields in Quantum Cosmology.// Gravitation & Cosmology. 2001. V. 7. № 3(27). P. 215 - 218.
- [186] *Krechet V.G., Filchenkov M.L. and Shikin G.N.* Interacting spinor, vector and scalar fields in Bianchi I cosmological model// Gravitation & Cosmology. 2004. V. 10 P. 149 - 152.
- [187] *Krechet V.G., Levkoeva M.V. and Mamontov S.I.* Spinor fields in five-dimensional rotational cosmological model and geometric interpretation of axions// Gravitation & Cosmology. 2002. Suppl. 8 N. 2. P. 79 - 82.
- [188] *Krechet V.G., Levkoeva M.V. and Sadovnikova D.V.* Topological effects in the five-dimensional geometric model of gravi-electroweak interactions// Gravitation & Cosmology. 2005. V. 11. P. 369 - 372.
- [189] *Krechet V.G. and Ponomarev V.N.* On analogy between neutrino and nonlinear spinor fields// Physics Letters A. 1976. V. 56. P. 14
- [190] *Krechet V.G. and Sandina I.V.* Selfgravitating wave fields in a Godel space//Soviet Physics Journal. 1982. V. 24 . P. 950 - 954.
- [191] *Krechet V.G. and Sadovnikova D.V.* Geometric and physical effects of spin-spin interaction in general relativistic theory of gravity// Gravitation & Cosmology. 2007. V. 13. P. 269 - 272.
- [192] *Kremer G.M.* Irreversible Processes in a Universe modelled as a mixture of a Chaplygin gas and radiation// General Relativity and Gravitation. 2003. V. 35. P. 1459 - 1466.
- [193] *Kremer G.M.* Cosmological models described by a mixture of van der Waals fluid and dark energy// Physical Review D. 2003. V. 68. P. 123507.
- [194] *Kristian J. and Sachs R.K.* Observations in cosmology// Apstrophysical Journal. 1966. V. 143. P. 379 - 399.
- [195] *Krori K.D. and Mukherjee A.* Bianchi Cosmologies with Particle Creation and Bulk Viscosity// General Relativity and Gravitation. 2000. V. 32. P. 1429 - 1438.
- [196] *Langacker P.* Grand unified theories and proton decay.// Physics Reports. 1981. V. 72. № 4. P. 185 - 385.
- [197] *Lemaitre G.H.* l'Univers en expansion// Annales Soc. Sci. Brux. A 1933. V. 53. P. 51-85.

- [198] *Lichnerowicz A.* Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics: lectures on the existence of solutions. New York: Benjamin, 1967. 196 p.
- [199] *Linder E.V.* On oscillating dark energy// *Astroparticle Physics*. 2006. V. 25. № 2. P. 167-171.
- [200] *Lukash V.N., Novikov I.D., Starobinsky A.A., Zel'dovich Ya.B.* Quantum effects and evolution of cosmological models.// *Nuovo Cimento B*. 1976. V. 35. P. 293-307.
- [201] MacCallum M.A.H. Anisotropic and inhomogeneous cosmologies//gr-qc/9212914
- [202] *Maeda K.* On time variation of fundamental constants in superstring theories// *Modern Physics Letters A*. 1988. V. 3. № 3. P. 243 - 249.
- [203] *Miedema P.G., van Leeuwen W.A.* Cosmological perturbations in Bianchi type-I universes// *Physical Review D*. 1993. V. 47. № 8. P. 3151 - 3164.
- [204] *Misner C.W.* The isotropy of the universe.// *The Astrophysical Journal*. 1968. V. 151. P. 431- 457.
- [205] *Misner W.* Transport process in the primordial fireball.// *Nature*. 1967. V. 214. P. 40 - 41.
- [206] Koivisto T. and Mota D.F. Accelerating cosmologies with an anisotropic equation of state: Vector fields, modified gravity and astrophysical constraints// arXiv:0801.3676V1 [astro-ph]
- [207] *Multamaki T., Manera M., and Gaztanaga E.* Large scale structure and the generalised Chaplygin gas as dark energy// *Physical Review D*. 2004. V. 69. P. 023004.
- [208] *Murphy G.L.* Big-Bang Model Without Singularities// *Physical Review D*. 1973. V. 8. P. 4231 - 4233.
- [209] *Nojiri S. and Odintsov S.D.* The oscillating dark energy: future singularity and coincidence problem// *Physics Letters B*. 2006. V. 637. № 3. P. 139-148.
- [210] *Nouri-Zonoz M. and Tavanfar A.R.* Plane-symmetric analogue of NUT space// *Classical and Quantum Gravity*. 2001. V. 18. P. 4293 - 4302.
- [211] *Ogawa N.* A Note on Classical Solution of Chaplygin-gas as D-brane// *Physical Review D*. 2000. V. 62. P. 085023.
- [212] *Olivares G., Atrio-Barandela F. and Pavon D.* Observational constraints on interacting quintessence models// *Physical Review D*. 2005. V. 71. P. 063523.
- [213] *Ori A.* Null weak singularities in plane-symmetric space-times// *Physical Review D*. 1998. V. 57. P. 4745 - 4753.
- [214] *Pacher T., Stein-Schabas J.A., and Turner M.S.* Can bulk viscosity drive inflation?// *Physical Review D*. 1987. V. 36. P. 1603 - 1606.
- [215] *Padmanabhan T.* Cosmological constant - the weight of the vacuum // *Physics Reports*. 2003. V. 380. № 5-6. P. 235-320.
- [216] *Parker L.* Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes. I// *Physical Review*. 1969. V. 183. № 5. P. 1057-1068.
- [217] *Parker L.* Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes. II// *Physical Review D*. 1971. V. 3. № 2. P. 346 - 356.
- [218] *Pavon D., Sen S., and Zimdahl W.* CMB constraints on interacting cosmological models// *JCAP*. 2004. V. 0405. P.009. arXiv:astro-ph/0402067.

- [219] *S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, and The Supernova Cosmology Project* Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae// *Astrophysical Journal*. 1999. V. 517. P. 565 - 586.
- [220] *Pradhan A., Amirhashchi H., and Saha B.* Bianchi type-I anisotropic dark energy models with constant deceleration parameter// e-print Archive 1010.1121v1 [gr-qc].
- [221] *Pradhan A., Amirhashchi H., and Saha B.* Variable Equation of State for Bianchi Type-VI₀ Dark Energy Model// submitted to *Astrophysics and Sapce Science* (2010).
- [222] *Pradhan A., Amirhashchi H., and Saha B.* An interacting two-fluid scenario for dark energy in FRW Universe// e-print Archive 1011.3940v1 [gr-qc].
- [223] *Pradhan A. and Pandey P.* Some Bianchi type I viscous fluid cosmological models with a variable cosmological constant e-print Archive: gr-qc/0407112.
- [224] *Anirudh Pradhan and Sanjay K. Singh* Bianchi type I magnetofluid cosmological models with variable cosmological constant revisited// *International Journal of Modern Physics D*. 2004. V. 13. P. 503.
- [225] *Pradhan A., Pandey P.* Plane-symmetric inhomogeneous magnetized viscous fluid universe with a variable Λ // *Czechoslovak Journal of Physics*. 2005. V. 55. № 6. P. 749 - 764.
- [226] *Pradhan A., Pandey P., Singh G.P., Deshpandey R.V.* Causal Bulk Viscous LRS Bianchi I Models With Variable Gravitational and Cosmological "Constant"// *ArXiv*. 2003. gr-qc/03100023.
- [227] *Pradhan A., Srivastav S.K., Singh R.S.* Tilted Bianchi Type V Bulk Viscous Cosmological Models with Varying Λ -Term// *ArXiv*. 2004. gr-qc/0408043.
- [228] *Pradhan A. and Pandey H.R.* Plane-symmetric inhomogeneous bulk viscous cosmological models with variable Λ // *International Journal of Modern Physics D*. 2003. V. 12. № 5. P. 941 - 951.
- [229] *Rabounski D.D., Borisova L.B.* Particles here and beyond the mirror.// e-print gr-qc/0304018.
- [230] *Ranada A.F.* Classical nonlinear Dirac field models of extended particles// in A.O. Barut (ed.) *Quantum theory, groups, fields and particles*. Reidel. 1983. P. 271 - 291.
- [231] *Ranada A.F., Soler M.* Elementary Spinorial Excitations in a Model Universe// *Journal of Mathematical Physics*. 1972. V. 13. № 5. P. 671-675.
- [232] *Rendall A.D.* The nature of singularities in plane symmetric scalar field cosmologies// *General Relativity and Gravitation*. 1995. V. 27. P. 213 - 221.
- [233] *Ribas M.O., Devecchi F.P., Kremer. G.M.* Fermions as sources of accelerated regimes in cosmology// *Physical Review D*. 2005. V. 72. P. 123502.
- [234] *Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiattia, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, David Reiss, Brian P. Schmidt, Robert A. Schommer, R. Chris Smith, J. Spyromilio, Christopher Stubbs, Nicholas B. Suntzeff, John Tonry* Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant// *Astronomical Journal* 1998. V. 116. P. 1009 - 1038.
- [235] *Robertson H.P.* Kinematics and world-structure// *Astrophysical Journal*. 1935. V. 82. P. 284.
- [236] *Robertson H.P.* Kinematics and world-structure II// *Astrophysical Journal*. 1936. V. 83. P. 187.
- [237] *Robertson H.P.* Kinematics and world-structure III// *Astrophysical Journal*. 1936. V. 83. P. 257.

- [238] *Rubano C., Scudellaro P. and Piedipalumbo E.* Oscillating dark energy: A possible solution to the problem of eternal acceleration// *Physical Review D*. 2003. V. 68. P. 123501.
- [239] *Rybakov Yu.P., Saha B., Shikin G.N.* Exact Self-Consistent Solutions to Nonlinear Spinor Field Equations in Bianchi Type-I Space-Time.// *Communications in Theoretical Physics*. 1994. V. 3. P. 199-210.
- [240] *Rybakov Yu.P., Saha B. and Shikin G.N.* Droplet-like Solutions to the Equations of Scalar Nonlinear Electrodynamics in General Relativity// *Communications in Theoretical Physics*. 1994. V. 3. № 1. P. 67 - 80.
- [241] *Rybakov Yu.P., Saha B. and Shikin G.N.* Solitons of Nonlinear Scalar Electrodynamics in General Relativity// *International Journal of Theoretical Physics*. 1997. V. 36. № 6. P. 1475 - 1494.
- [242] *Rybakov Yu.P., Saha B. and Shikin G.N.* Droplets in General Relativity: Exact Self-Consistent Solutions to the Interacting Scalar and Electromagnetic Field Equations.// *Gravitation & Cosmology*. 1998. V. 4. № 2(14). P. 114 - 120.
- [243] *Saha B.* Dirac Spinor in Bianchi-I Universe with time dependent Gravitational and Cosmological Constants.// *Modern Physics Letters A*. 2001. V. 16. № 20. P. 1287-1296.
- [244] *Saha B.* Spinor field in Bianchi type-I Universe: regular solutions.// *Physical Review D*. 2001. V. 64. P. 123501.
- [245] *Saha B.* Nonlinear Spinor Field in cosmology// *Physical Review D*. 2004. V. 69. P. 124006.
- [246] *Saha B.* Interacting spinor and scalar fields in Bianchi cosmology// 2007. [arXiv: gr-qc/0701059]
- [247] *Saha B.* Spinor Field with Induced Nonlinearity in Bianchi VI Cosmology: Exact and Numerical Solutions// *Gravitation & Cosmology*. 2010. V. 16 № 2. C. 160-167.
- [248] *Saha B.* Interacting scalar and spinor fields in Bianchi type I universe filled with magneto-fluid// *Astrophysics and Space Science*. 2005. V. 299. № 1. P. 149-158.
- [249] *Saha B.* Spinor fields in Bianchi type-I Universe// *Physics of Particles and Nuclei*. 2006. V. 37. Suppl. 1. P. S13-S44.
- [250] *Saha B.* Bianchi type Universe with viscous fluid// *Modern Physics Letters A*. 2005. V. 20. № 28. P. 2127-2143.
- [251] *Saha B.* Nonlinear spinor field in Bianchi type-I Universe filled with viscous fluid: some special solutions// *Romanian Reports in Physics*. 2005. V. 57. № 1. P. 7-24.
- [252] *Saha B.* Nonlinear spinor field in Bianchi type-I Universe filled with viscous fluid: numerical solutions// *Astrophysics and Space Science*. 2007. V. 312. P. 3-11.
- [253] *Saha B.* Interacting spinor and scalar fields in Bianchi type-I Universe filled with viscous fluid: exact and numerical solutions// *Gravitation & Cosmology*. 2009. V. 25. № 4. P. 353-361.
- [254] *Saha B.* Anisotropic cosmological models with perfect fluid and dark energy// *Chinese Journal of Physics*. 2005. V. 43. № 6. P. 1035-1043.
- [255] *Saha B.* Anisotropic cosmological models with a perfect fluid and a Λ term// *Astrophysics and space science*. 2006. V. 302. P. 83-91.
- [256] *Saha B.* Anisotropic cosmological models with perfect fluid and dark energy reexamined// 2006. V. 45. № 5. P. 983-995.
- [257] *Saha B.* Spinor field and accelerated regimes in cosmology// *Gravitation & Cosmology*. 2006. V. 12 № 2-3 (46-47). P. 215-218.

- [258] *Saha B.* Nonlinear spinor field in Bianchi type-I cosmology: inflation, isotropization, and late time acceleration// *Physical Review D.* 2006. V. 74. P. 124030.
- [259] *Saha B.* Nonlinear spinor field in Bianchi type-I cosmology: accelerated regimes// *Romanian Reports in Physics.* 2007. V. 59. № 2. P. 649-660.
- [260] *Saha B.* Solitons of scalar field with induced nonlinearity and their stability// *International Journal of Modern Physics A.* 2000. V. 15. № 10. P. 1481 - 1496.
- [261] *Saha B.* Spinor model of a perfect fluid// *Central European Journal of Physics.* 2010. (online first); 2009. arXiv: 0901.1387 [gr-qc].
- [262] *Saha B.* Spinor model of a perfect fluid: examples// *Romanian Reports in Physics.* 2010. V. 62. № 1. P. 209-216.
- [263] *Saha B.* Spinor model of a perfect fluid and their applications in Bianchi type-I and FRW models// *Astrophysics and Space Science.* 2010 (in press); 2009. arXiv: 0906.1474 [gr-qc]
- [264] *Saha B. and Boyadjiev T.* Bianchi type-I cosmology with scalar and spinor fields// *Physical Review D.* 2004. V. 69. P. 124010.
- [265] *Saha B. and Boyadjiev T.* Interacting spinor and scalar fields in a Bianchi type-I Universe: Oscillatory solutions in the "Gravity, Astrophysics and Strings @ the Black Sea"(Eds. P.P. Fiziev and M.D. Todorov) Kiten, Bulgaria, June 10 -16, 2004, St. Kliment Ohridski University Press, Sofia. 2005. P. 226-233.
- [266] *Saha B. and Rikhvitsky V.* Bianchi type I universe with viscous fluid and a Λ term: A qualitative analysis// *Physica D.* 2006. V. 219. P. 168-176.
- [267] *Saha B. and Rikhvitsky V.* Anisotropic cosmological models with spinor field and viscous fluid in presence of a Λ term: qualitative solutions// *Journal Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2007. V. 40. P. 14011-14027.
- [268] *Saha B. and Rikhvitsky V.* Anisotropic cosmological models with spinor and scalar fields and viscous fluid in presence of a Λ term: qualitative solutions// *Journal of Mathematical Physics.* 2008. V. 49. P. 112502.
- [269] *Saha B. and Shikin G.N.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi type-I Universe filled with Perfect Fluid: Exact Self-consistent Solutions.// *Journal of Mathematical Physics.* 1997. V. 38. № 10. P. 5305-5318.
- [270] *Saha B. and Shikin G.N.* Interacting Spinor and Scalar Fields in Bianchi Type I Universe Filled with Perfect Fluid: Exact Self-consistent Solutions.// *General Relativity and Gravitation.* 1997. V. 29. № 9. P. 1099-1112.
- [271] *Saha B. and Shikin G.N.* On the role of Λ -term in the evolution of Bianchi-I cosmological model with nonlinear spinor field.// *PFU Reports: Physics.* 2000. № 8. P. 17-20.
- [272] *Saha B. and Shikin G.N.* Nonlinear Spinor Field: Plane-symmetric Solutions// *Journal of Theoretical, Mathematical and Computational Physics.* 2002. V. 5. № 1. P. 54 - 71.
- [273] *Saha B. and Shikin G.N.* Plane-symmetric solitons of spinor and scalar fields.// *Czechoslovak Journal of Physics.* 2004. V. 54. № 6. P. 597-620.
- [274] *Saha B. and Shikin G.N.* Static plane-symmetric nonlinear spinor and scalar fields in GR.// *International Journal of Theoretical Physics.* 2005. V. 44. № 9. P. 1459-1494.
- [275] *Sahni, V.* Dark Matter and Dark Energy.// *Lecture Notes on Physics.* 2004. V. 653. P. 141-180. astro-ph/0403324.
- [276] *Sahni V. and Starobinsky A.A.* The case for a positive cosmological Λ term.// *International Journal of Modern Physics D.* 2000. V. 9. № 4. P. 373 - 443.

- [277] *Sahni V., Saini T.D., Starobinsky A.A., and Alam U.* Statefinder - a new geometrical diagnostic of dark energy// JETP Letters. 2003. V. 77. P. 243 - 248.
- [278] *Sandvik H., Tegmark M., Zaldarriaga M., and Waga I.* The end of unified dark matter?// astro-ph/0212114.
- [279] *Santos N.O., Dias R.S., and Banerjee A.* Isotropic homogeneous universe with viscous fluid.// Journal of Mathematical Physics. 1985. V. 26. № 4. P. 878 - 881.
- [280] *Sciama D.W.* Festschrift for Infeld. Pergamon Press, 1960. P. 415-439.
- [281] *Sen A.* Rolling Tachyon// Journal of High Energy Physics. 2002. V. 0204. P. 048.
- [282] *Sen A.* Field theory of tachyon matter// Modern Physics Letters A. 2002. V. 17. P. 1797 - 1804.
- [283] *Shao Y. and Gui Y.* Statefinder parameters for tachyon dark energy model// arXiv:gr-qc/0703111v1.
- [284] *Shao Y., Gui Y.X., and Wang W.* Parametrization of tachyon field.// Modern Physics Letters A. 2007. V. 22. P. 1175 - 1181.
- [285] *Silva M.F.A. da and Wang A.* On the sources of static plane symmetric vacuum space-times// Physics Letters A. 1998. V. 244. P. 462 - 466.
- [286] *Singh T., Agrawal A.K.* Homogeneous anisotropic cosmological models with variable gravitational and cosmological constants// International Journal of Theoretical Physics. 1993. V. 32. 6. P. 1041 - 1059.
- [287] *Socorro J. and Medina E.R.* Supersymmetric quantum mechanics for Bianchi class A models// Physical Review D. 2000. V. 61. P. 087702.
- [288] *Srivastava S.K.* Tachyon as a dark energy// arXiv:gr-qc/0409074v4.
- [289] *Steinhardt P.J. and Turok N.* Cosmic evolution in a cyclic Universe// Physical Review D. 2002. V. 65. 126003.
- [290] *Stewart J.M., Ellis G.F.R.* Solutions of Einstein's Equations for a Fluid Which Exhibit Local Rotational Symmetry// Journal of Mathematical Physics. 1968. V. 9. N. 7. P. 1072 - 1082.
- [291] *Szydlowski M. and Czja W.* Stability of FRW Cosmology with Generalized Chaplygin Gas// Physical Review D. 2004. V. 69. P. 023506.
- [292] *Takahashi Y.* Reconstruction of a spinor via Fierz identities// Physical Review D. 1982. V. 26. P. 2169 - 2171.
- [293] *Taruya A. and Nambu Y.* Application of gradient expansion to non-linear gravitational wave in plane-symmetric Universe.// Progress in Theoretical Physics. 1996. V. 95. № 2. P. 295 - 311.
- [294] *Taub A.H.* Empty space-times admitting a three parameter group of motions.// Annals of Mathematics. 1951. V. 53. № 3. P. 472 - 490.
- [295] *Taub A.H.* Isentropic Hydrodynamics in Plane Symmetric Space-Times.// Physical Review. 1956. V. 103. P. 454 - 467.
- [296] *M. Tegmark et al.* Cosmological Parameters from Eigenmode Analysis of Sloan Digital Sky Survey Galaxy Redshifts.// Astrophys.J. 2004. V. 607. PP. 655-660.
- [297] *Thirring J.K. and Skyrme T.H.R.* A model unified field equation.// Nuclear Physics. 1962. V. 31. 550 - 555.
- [298] *Thorne K.S.* Primordial element formation, primordial magnetic fields, and the isotropy of the Universe// The Astrophysical Journal. 1967. V. 148. № 1. P. 51 - 68.

- [299] *Thorne K.S.* Effect of a primordial magnetic field on the dynamics of the Universe// Bulletin of the American Physical Society. 1966. V. 11. P. 340.
- [300] *C.G. Tsagas, A. Challinor and R. Maartens* Relativistic cosmology and large-scale structure// Physics Reports. 2008. V. 465. P. 61 – 147.
- [301] *Tsampanlis M., Apostolopoulos P.S.* Symmetries of Bianchi I space-times// Journal of Mathematical Physics. 2000. V. 41. № 11. P. 7573 - 7588.
- [302] *Utiyama R.* Invariant Theoretical Interpretation of Interaction// Physical Review. 1956. V. 101. № 5. P. 1597-1607.
- [303] *Waga L., Falcan R.C., and Chanda R.* Bulk-viscosity-driven inflationary model// Physical Review D. 1986. V. 33. P. 1839 - 1841.
- [304] *A.G. Walker* On Milne's Theory of World-Structure// Proceedings of the London Mathematical Society. 1937. V. 42 (2) P. 90 - 127.
- [305] *Weaver M.* Big-Bang Model Without Singularities// Classical and Quantum Gravity. 2000. V. 17. P. 421 - 434.
- [306] *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology. NY.: Wiley, 1972. 657 p.
- [307] *Weinberg S.* Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding Universe.// The Astrophysical Journal. 1972. V. 168. № 2, P. 175 - 194.
- [308] *Weinberg S.* The cosmological constant problem// Review of Modern Physics. 1989. V. 61. P. 1 - 23.
- [309] *Weyl H.* A Remark on the Coupling of Gravitation and Electron// Physical Review. 1950. V. 77. № 5. P. 699-701.
- [310] *Will C.M.* Theory and Experiment in Gravitational Physics. (Cambridge University Press); arXiv:gr-qc/0103036.
- [311] *Wu Y.S., Wang Z.* Time Variation of Newton's Gravitational Constant in Superstring Theories// Physical Review Letters. 1986. V. 57. № 16. P. 1978 - 1981.
- [312] *Yazadjiev S.S.* Plane-symmetric inhomogeneous Brans–Dicke cosmology with an equation of state $p = \zeta\rho$ //Classical and Quantum Gravity. 2003. V. 20. P. 3365 - 3369.
- [313] *V.F. Zaitsev and A.D. Polyanin* A Handbook on Nonlinear Differential Equations (Nauka, Moscow, 1993).
- [314] *Zhuravlev V.M., Chervon S.V. and Shabalkin D. Yu* Effective Chiral Model of a Plane-Symmetric Gravitational Field.// Gravitation & Cosmology. 1997. V. 3. № 4(12). P. 312 - 316.
- [315] *Zlatev I., Wang L., and Steinhardt P.J.* Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant.// Physical Review Letters. 1999. V. 82. № 5. P. 896 -899.

Целью данной книги является теоретическое изучение эволюции Вселенной в различных ее стадиях в рамках единого подхода, основанного на анизотропных космологических моделях, определяемых различными источниками гравитационного поля. В качестве таких источников рассматривались нелинейное спинорное поле (НСП), вязкая жидкость, жидкость Ван дер Ваальса и темная энергия. В этой книге впервые с помощью НСП моделируются различные характеристики материи, влияющие на эволюцию Вселенной. Показано, что при соответствующем выборе параметров спинорное поле способно устранить сингулярность пространства-времени; ускорить процесс изотропизации и объяснить феномен ускоренного расширения Вселенной. Предложена модель квинтэссенции, допускающая колебательный режим расширения. С помощью НСП и вязкой жидкостью получено решение, соответствующее Большому Разрыву, что характерно для фантомной материи. Показано, что в случае плоско-симметричной метрики нелинейное спинорное поле с учетом собственного гравитационного поля приводит к появлению конфигурации с конечной плотностью энергии и ограниченной полной энергией. Также показано, что спинорное поле более чувствительно к гравитационному полю, чем скалярное.



Биджан Саха

Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований. Физик-теоретик, автор более 100 научных работ. В круг научных интересов входят космология, гравитация, квантовая механика протяженных частиц и электродинамика. Подробнее в <http://bijansaha.narod.ru>



9 783843 305655 978-3-8433-0565-5