

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. Н. Н. БОГОЛЮБОВА

На правах рукописи



Прохоров Георгий Юрьевич

**Проявления квантовых аномалий в статистической физике:
киральные вихревой эффект**

Специальность: 01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна – 2020

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова
Объединенного института ядерных исследований

Научные руководители – **Теряев Олег Валерианович**,
доктор физико-математических наук,
начальник отделов ЛТФ и ЛФВЭ ОИЯИ, г. Дубна

Захаров Валентин Иванович,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник Федерального
государственного бюджетного учреждения
«Институт теоретической и экспериментальной
физики имени А. И. Алиханова» НИЦ
«Курчатовский институт», г. Москва

С электронной версией диссертацией можно ознакомиться на официальном сайте
Объединенного института ядерных исследований в информационно-
телекоммуникационной сети «Интернет» по адресу: <http://dissertations.jinr.ru/>. С печатной
версией диссертации можно ознакомиться в Научно-технической библиотеке ОИЯИ
(г. Дубна, Московская область, ул. Жолио-Кюри, д. 6).

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук

Быстрицкий Юрий Михайлович

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Недавно было показано, что в нецентральных соударениях тяжёлых ионов формируются сверхвысокие магнитные поля и огромный угловой момент. Соответствующее этому моменту вращение на 25 порядков быстрее скорости вращения Земли. С другой стороны, современная теоретическая физика предсказывает глубокую связь между квантовой теорией поля и гидродинамикой. В частности, предсказано существование необычных квантово-полевых эффектов во вращающейся жидкости, или жидкости, помещённой во внешние калибровочные или гравитационные поля. Таким образом, становится возможным наблюдение этих эффектов в экспериментах с тяжёлыми ионами. При этом было показано, что данные эффекты связаны с фундаментальным явлением в квантовой теории поля – квантовыми аномалиями. Таким образом, сегодня появилась возможность исследования квантовых аномалий в экспериментах по соударению тяжёлых ионов.

Возникновение поляризации у адронов является примером подобного экспериментального наблюдения квантовых аномалий. Была установлена связь поляризации барионов с аксиальным зарядом кварков, который они приобретают именно за счёт гидродинамических эффектов, следующих из киральной квантовой аномалии [1].

Транспортные явления, возникающие в жидкости из безмассовых частиц и связанные с квантовыми аномалиями, являются предметом изучения физики киральных эффектов [2]. Основным физическим объектом, где должны проявляться данные эффекты, является кварк-глюонная плазма (КГП), так как при высоких температурах КГП с хорошей точностью описывается уравнениями для почти идеальной киральной жидкости, т. е. жидкости, состоящей из безмассовых частиц. Физика киральных явлений относится к передовым областям современной фундаментальной теоретической и экспериментальной физики (см. обзор современного состояния этой области в [2]) и именно исследованию киральных эффектов посвящена данная диссертационная работа.

Двумя важнейшими и наиболее активно обсуждаемыми в современной литературе киральными эффектами, являются киральный магнитный эффект

(КМЭ) и киральный вихревой эффект (КВЭ) [2]. Эти эффекты находятся в центре внимания теоретиков [3, 4]. В настоящее время, значительные усилия прикладываются для поиска киральных эффектов в экспериментах по соударению тяжёлых ионов, в частности в данных по поляризации [1]. Сделанное в [1] предсказание для поляризации, как следствия КВЭ подтвердилось в эксперименте STAR по измерению глобальной поляризации Λ и $\bar{\Lambda}$ гиперонов в периферических Au-Au столкновениях. Недавняя программа по соударению изобаров (ядер с одной массой, но разным электрическим зарядом) на релятивистском ускорителе тяжёлых ионов (RHIC) в Брукхейвенской национальной лаборатории в значительной степени мотивирована возможностью экспериментального наблюдения КМЭ. Количественный теоретический анализ и дальнейшее экспериментальное изучение поляризации адронов на Нуклотронном Ионном Коллайдере NICA может послужить интересной альтернативой экспериментальному поиску КМЭ. В диссертационной данной работе основное внимание уделено КВЭ.

Существенным шагом в развитии физики киральных эффектов стало экспериментальное подтверждение их существования, полученное в системах твёрдого тела. Так КМЭ был обнаружен в дираковских и вейлевских полуметаллах – системах с псевдорелятивистским спектром квазичастиц.

Значительный интерес к данному классу вопросов подтверждается и частотой появления новых результатов и работ в этой области. Так, недавно был предложен подход к вычислению поляризации в фазе конфайнмента, основанный на рассмотрении вихрей в пионной сверхтекучей жидкости.

В [5] был предложен новый метод, позволяющий изучать киральные явления с точки зрения физической кинетики. В этой работе была предложена ковариантная функция Вигнера, задающая распределение частиц со спином в нестационарной среде в состоянии локального термодинамического равновесия, что с хорошей степенью точности позволяет описывать эффекты, связанные с ускорением и вращением, с точки зрения термодинамики.

Другой новый статистический подход к изучению киральных явлений основан на квантово-статистическом операторе плотности для среды, обладающей тепловой завихрённостью. Так, в [6] были исследованы эффекты движения среды во втором порядке по производным. Недавно подход со статистическим

оператором был обобщён на среду с аксиальным химическим потенциалом, и было показано существование новых транспортных явлений, связанных с вектором, перпендикулярным завихренности и ускорению. Оба метода [5, 6] были использованы в диссертации при решении поставленных задач.

В настоящий момент также активно исследуется связь киральных эффектов с гравитационными эффектами и гравитационной аномалией, например, в [3]. Сейчас стало очевидно, что гравитационная аномалия играет существенную роль в данных явлениях, и отвечает за эффекты, связанные с температурой.

Остаётся мало изученным вопрос о влиянии ускорения на поляризацию и свойства киральных жидкостей, в целом, и КГП в частности. В основном, в литературе [3, 4] исследованы эффекты, связанные с завихренностью, то есть, вращением жидкости. Однако набор первых производных от скорости помимо завихренности включает вектор ускорения – это соответствует ситуации в электродинамике, где рассматриваются магнитное и электрическое поля. При этом магнитное поле соответствует завихренности, а электрическое – ускорению.

Подводя итог, очевидно, что релятивистская гидродинамика, квантовые аномалии, киральные эффекты и поляризация адронов тесно связаны друг с другом и относятся к передовому краю современной фундаментальной физики, как теоретической, так и экспериментальной. Диссертационная работа нацелена на исследование вопросов, возникающих на стыке перечисленных областей.

Цель и задачи исследования

Целью данной диссертационной работы являлись разработка статистических подходов, позволяющих описывать эффекты завихренности и ускорения, поиск на их основе новых киральных эффектов и исследование связи между гидродинамическими свойствами релятивистской жидкости и явлениями из других областей фундаментальной физики, таких как квантовая теория поля и гравитация.

Для достижения данной цели было необходимо решить следующие задачи:

1. Вычислить квантовые поправки с ускорением и завихренностью в однопетлевом приближении теории поля при конечных температурах вплоть до третьего порядка теории возмущений. Рассмотреть дираковские поля как в массивном, так и в безмассовом случаях.

2. Разработать непертурбативный способ вычисления средних значений физических величин на основе ковариантной функции Вигнера для частиц со спином одна вторая. Вычислить с помощью данного метода среднее значение аксиального тока, получив непертурбативное обобщение кирального вихревого эффекта во всех порядках по завихрённости и массе. Сравнить с результатами пункта 1. Определить границы применимости функции Вигнера.

3. Исследовать и сравнить роль ускорения и завихрённости в релятивистской гидродинамике на примере аксиального тока и непертурбативных формул, полученных в пункте 2. Исследовать зависимость аксиального тока от взаимной ориентации векторов ускорения и завихрённости.

4. Проанализировать на примере аксиального тока роль конечной массы фермионов в среде с завихрённостью при различных температурах. Сформулировать критерии для численного исследования эффектов завихрённости.

5. Построить аналитическое продолжение аксиального тока в область температур ниже температуры Унру. Проанализировать на его основе переход через температуру Унру и возможные феноменологические следствия, связанные с данным переходом.

Новизна и практическая значимость

Оригинальными являются как разработанные методы, так и полученные с их помощью результаты. Впервые разработан алгоритм вычисления высших членов по тензору тепловой завихрённости квантовой статистической теории возмущений при конечной температуре. Прделанное вычисление третьего порядка в аксиальном токе является на настоящий момент рекордным (до этого были вычислены члены вплоть до второго порядка).

Впервые описан способ получения точных непертурбативных средних на основе функции Вигнера. До этого все расчёты носили пертурбативный характер [5], либо использовали дополнительные приближения. На основе разработанного метода удалось обосновать концепцию угловой скорости, как действительного химического потенциала и ускорения – как мнимого химического потенциала. Первая из этих концепций высказывалась и ранее, но нам удалось обобщить её на случай массивных фермионов, вторая же концепция о мнимости химического потенциала, связанного с ускорением – полностью оригинальная.

На основе сделанного наблюдения о роли ускорения как мнимого хими-

ческого потенциала нами был обнаружен новый эффект термодинамической неустойчивости в системе с ускорением.

Полученные результаты могут быть использованы при поиске эффектов, связанных с ускорением, на ускорителях элементарных частиц. При достаточной точности эксперимента, они позволят получить экспериментальное подтверждение эффекта Унру из физики тяжёлых ионов. Обнаруженный эффект подавления аксиального тока также представляет интерес с экспериментальной точки зрения и может оказаться существенен при описании измеряемой в эксперименте поляризации адронов.

Выносимые на защиту результаты

1. Вычислены поправки в третьем порядке теории возмущений по производным скорости (завихрённости и ускорению) к киральному вихревому эффекту на основе фундаментального квантового статистического подхода с оператором плотности Зубарева. Впервые получен коэффициент перед смешанными членами в аксиальном токе фермионов с ускорением и завихрённостью.

2. Разработан алгоритм нахождения точных непертурбативных формул на основе ковариантной функции Вигнера в среде с тензором тепловой завихрённости. На основе данного алгоритма получено непертурбативное выражение для аксиального тока в среде с завихрённостью во всех порядках по завихрённости и при произвольной массе частиц, обобщающее киральный вихревой эффект.

3. Обоснована концепция завихрённости, как нового действительного химического потенциала, и впервые выдвинута и обоснована концепция ускорения, как нового мнимого химического потенциала. Показано, что следствием второй из концепций является появление нестабильности в аксиальном токе при температуре Унру.

4. Предсказан эффект подавления аксиального тока при нулевой температуре в области завихрённости, меньшей двух масс, как следствие появления завихрённости в виде химического потенциала. На основе обнаруженного эффекта сформулирован критерий для численного исследования эффектов завихрённости.

5. Показана недостаточность функции Вигнера при описании эффектов ускорения. В частности, показано, что функция Вигнера приводит к ненулевой дивергенции аксиального тока в отсутствии внешних полей. Получено решение

данной проблемы на основе фундаментального подхода с оператором плотности.

Апробация

Результаты диссертации были представлены **лично** автором на семинарах Лаборатории Теоретической Физики (ЛТФ) ОИЯИ и Лаборатории Физики Высоких Энергий (ЛФВЭ) ОИЯИ в Дубне, Национального Института Ядерной Физики (INFN) во Флоренции в Италии, Института Земного магнетизма, Ионосферы и Распространения Радиоволн в Троицке, а также на конференциях:

- The International Conference on Strangeness in Quark Matter (SQM 2017), Utrecht, Netherlands, **2017**.

- The Helmholtz International Summer School «Hadron Structure and Hadronic Matter, and Lattice QCD», JINR, Dubna, Russia, **2017**.

- XXIVth International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems «Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics» (XXIV Международный Балдинский семинар по проблемам физики высоких энергий), ОИЯИ, Дубна, Россия, **2018**.

- Matter under Extreme Conditions in Heavy-Ion Collisions and Astrophysics, ОИЯИ, Дубна, Россия, **2018**.

- Lattice and Functional Techniques for Exploration of Phase Structure and Transport Properties in Quantum Chromodynamics, BLTP, JINR, Dubna, Russia, **2018**.

- The 27th International Conference on Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions «QUARK MATTER 2018», Venice, Italy, **2018**.

- XVIII Workshop on High Energy Spin Physics DSPIN-19, ОИЯИ, Дубна, Россия, **2019**.

- The XXIV International Workshop «High Energy Physics and Quantum Field Theory» (QFTHEP-2019), D.V. Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University and Southern Federal University, Sochi, Russia, **2019**.

- The 5th Workshop on Chirality, Vorticity and Magnetic Field in Heavy Ion Collisions, Beijing, China, **2019**.

- The II International Workshop on Theory of Hadronic Matter under Extreme Conditions, BLTP, JINR, Dubna, Russia, **2019**.

- The 18th International Conference on Strangeness in Quark Matter (SQM 2019), Bari, Italy, **2019**.

- Весенняя онлайн-школа для студентов-бакалавров «Физика кварк-глюонной материи», Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия, **2020**.

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах в рецензируемых журналах, включённых в список ВАК и/или международных баз данных Web of Science и/или Scopus [A1-A7].

Личный вклад

Содержание диссертации и положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора. Автор принимал активное участие во всех этапах работы, в том числе разработке концептуальной части исследования и постановке задачи. Его вклад является определяющим в проведении самого исследования, аналитических и численных расчётов, разработке алгоритмов, а также подготовке и написании статей. Все выносимые на защиту результаты получены лично автором.

Достоверность

Достоверность полученных результатов основывается на использовании признанных, широко известных и апробированных методов квантовой статистической теории, таких как метод функции Вигнера и метод статистического оператора плотности Зубарева, возможностью воспроизведения хорошо известных результатов для кирального вихревого эффекта и эффекта Унру и других известных из литературы эффектов в предельных случаях, а также независимой проверкой результатов с точки зрения различных статистических, теоретико-полевых и геометрических подходов. Точное соответствие средних значений квантовых операторов, выведенных на основе существенно различных теоретических подходов, является нетривиальной проверкой этих результатов и серьёзным основанием в пользу их достоверности.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения, списка сокращений, библиографии и 2 приложений. Общий объём диссертации составляет 118 страниц, в том числе 16 рисунков и 1 таблица. Библиография включает 87 наименований на 9 страницах.

Основное содержание работы

Во Введении обосновывается актуальность диссертационной работы, обозначены цель и основные задачи исследования, аргументируется новизна и практическая значимость работы, её достоверность, приводятся основные результаты, выносимые на защиту, а также указаны личный вклад автора, сведения об апробации результатов исследования на научных конференциях и семинарах, список публикаций, и кратко описана структура работы.

Первая глава посвящена обсуждению наиболее важных результатов, полученных ранее и описанных в литературе, по теме исследования – физике киральных явлений –, а также обзору теоретических методов, которые используются в последующих двух главах для решения задач, обозначенных во Введении. В частности, описаны основополагающие результаты работ [4] и [2], где была выявлена связь релятивистской гидродинамики и фундаментального явления из квантовой теории поля – киральной квантовой аномалии, нарушающей сохранение кирального тока фермионов $j_5^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi$

$$\nabla_\mu j_5^\mu = -\frac{Q^2 e^2}{16\pi^2 \sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\mu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{384\pi^2 \sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\mu\rho\sigma} R_{\mu\nu\kappa\lambda} R_{\rho\sigma}{}^{\kappa\lambda}, \quad (1)$$

в присутствии внешних электромагнитного $F_{\mu\nu}$ и гравитационного $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$ полей (калибровочная и гравитационная, или Лоренцовая, киральные аномалии). В [4] было обобщено известное вычисление из курса теоретической физики Л. Д. Ландау, а именно было показано, что совместное рассмотрение законов сохранения в релятивистской гидродинамике, второго начала термодинамики и – что является новым элементом, внесённым в [4] – киральной квантовой аномалии (точнее её калибровочной части в (1)), позволяет строго обосновать существование ранее неизвестных гидродинамических эффектов. Первый из этих эффектов носит название кирального вихревого эффекта и состоит в появлении тока киральности $\langle j_5^\mu \rangle$ вдоль завихрённости ω^μ во вращающейся среде с температурой T и обычным μ и аксиальным μ_5 химическими потенциалами

$$\langle j_5^\mu \rangle = \left(\frac{T^2}{6} + \frac{\mu^2 + \mu_5^2}{2\pi^2} \right) \omega^\mu. \quad (2)$$

Второй из эффектов – киральный магнитный эффект, он состоит в появлении электрического тока в направлении магнитного поля, причём величина этого

тока определяется киральным дисбалансом в среде.

Далее обсуждается другой известный подход, описанный в [2], представляющий из себя альтернативный вывод КВЭ и КМЭ на основе эффективной теории поля для гидродинамики. В данной работе было показано, что в гидродинамике химический потенциал, умноженный на четырёх-скорость, необходимо рассматривать как эффективное внешнее калибровочное поле, и справедлива замена

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \mu u_\mu. \quad (3)$$

Учёт вклада этого поля в киральную аномалию (1) и разделение макроскопического и микроскопического токов позволяет получить основные киральные эффекты.

Кроме того, в первой главе приведено описание основных теоретических методов, использованных в двух последующих главах. Вначале вводится понятие тензора тепловой завихрённости $\varpi_{\mu\nu}$, имеющего вид антисимметричной комбинации первых производных 4-вектора обратной температуры $\beta_\mu = \frac{u_\mu}{T}$

$$\varpi_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\beta_\nu - \partial_\nu\beta_\mu), \quad (4)$$

и являющегося основным математическим объектом, несущим информацию о движении среды и градиентах температуры в релятивистской среде. Обсуждаются его свойства и вычисляются производные.

Далее рассмотрена ковариантная функция Вигнера для среды с тепловой завихрённостью: дано понятие функции Вигнера и описан способ её построения в общем случае, затем показаны проблемы определения данной функции для полей со спином. Затем приводится способ построения ковариантной функции Вигнера в случае среды с тепловой завихрённостью для частиц со спином 1/2 [5]. Данная функция Вигнера имеет вид модифицированного распределения Ферми-Дирака

$$X(x, p) = \left(\exp[\beta p - \xi] \exp \left[-\frac{1}{2} \varpi_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \right] + I \right)^{-1} \quad \Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

Описан способ вычисления квантово-статистических средних локального оператора на основе данной функции Вигнера. Показано, каким образом может быть

найден среднее значение физической величины, непертурбативное по завихренности, но использующее при этом больцмановское приближение.

Затем рассматривается второй из используемых в основной части диссертации методов, основанный на операторе плотности Зубарева для среды с тепловой завихренностью [7]

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp \left\{ - \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} [\hat{T}^{\mu\nu}(x)\beta_{\nu}(x) - \xi(x)\hat{j}^{\mu}(x)] \right\}. \quad (5)$$

Описание равновесной среды на основе оператора (5) является наиболее фундаментальным и позволяет находить квантово-статистические средние в среде с тепловой завихренностью и химическим потенциалом $\xi = \frac{\mu}{T}$. При этом эффекты ускорения в данном операторе нужно связывать с оператором буста, а эффекты завихренности – с оператором углового момента. На общем уровне описана теория возмущения в рамках теории поля при конечных температурах для данного оператора, в частности, приводится общий вид для ряда теории возмущений по завихренности и ускорению. Описана техника выделения связанных диаграмм, к вычислению которых сводится задача о нахождении квантовых поправок, соответствующих каждому члену ряда.

Во **Второй главе** исследуются предсказания функции Вигнера для КВЭ. В отличие от предыдущих работ, где все вычисления носили пертурбативный характер [5] (или основывались на дополнительных приближениях), нам удалось найти алгоритм вычисления точных непертурбативных средних на основе ковариантной функции Вигнера для частиц со спином $1/2$. Для этого необходимо построить бесконечный ряд для разложения функции Вигнера по тепловой завихренности, найти след от произведения матриц Дирака в каждом члене этого ряда и произвести обратное суммирование получившегося бесконечного ряда. След произвольного произведения гамма матриц может быть найден путём проектирования на базис матриц 4×4 , суммирование осуществляется по формулам для рядов разложения тригонометрических функций.

Данный алгоритм может быть использован для нахождения квантово-статистических средних различных термодинамических величин. В частности, в результате была получена следующая формула для кирального тока фермионов со спином $1/2$ и массой m в движущейся релятивистской жидкости с

завихрённостью ω_μ и ускорением a_μ

$$\langle j_\mu^5 \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ n_F(E_p - \mu - \frac{|\omega|}{2} + i\frac{|a|}{2}) - n_F(E_p - \mu + \frac{|\omega|}{2} + i\frac{|a|}{2}) \right. \\ \left. + n_F(E_p + \mu - \frac{|\omega|}{2} + i\frac{|a|}{2}) - n_F(E_p + \mu + \frac{|\omega|}{2} + i\frac{|a|}{2}) + c.c. \right\} \frac{\omega_\mu}{|\omega|}, \quad (6)$$

(рассматривается частный случай параллельных завихрённости и ускорения $(\omega a)^2 = \omega^2 a^2$, наиболее общий случай также был исследован). Уравнение (6) является обобщением КВЭ из [2-4] на случай среды с ускорением и случай массивных частиц. В формуле (6) n_F – распределение Ферми-Дирака, $|a| = \sqrt{-a_\mu a^\mu}$ (и соответственно для $|\omega|$). В частном случае безмассовых фермионов $m = 0$ интегралы в (6) могут быть найдены аналитически. Наиболее существенным наблюдением из (6) является демонстрация роли завихрённости и ускорения в релятивистской гидродинамике. А именно роль завихрённости сводится к появлению действительного химического потенциала, а роль ускорения (по-крайне мере части эффектов, связанных с ускорением) – к появлению мнимого химического потенциала

$$\mu \rightarrow \mu' = \mu \pm \frac{|\omega|}{2} \pm i\frac{|a|}{2}. \quad (7)$$

Факт появления мнимой единицы перед ускорением в (7) не случаен и связан со свойствами генераторов буста \hat{K}_μ и углового момента \hat{J}_μ . В частности, для двухкомпонентных спиноров $\hat{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$, а $\hat{K} = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}$. Поэтому слагаемое в функции Вигнера (или операторе плотности) с тепловой завихрённостью $\varpi_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu} = \frac{2}{T} (\vec{a} \cdot \hat{K} + \vec{\omega} \cdot \hat{J}) = \frac{1}{T} (-i\vec{a} \cdot \vec{\sigma} + \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma})$ приводит к появлению слагаемого с ускорением, умноженным на мнимую единицу. Заметим при этом, что все эффекты оказываются чётными по ускорению и «мнимое ускорение» не приводит к мнимости в физических величинах – все нечётные слагаемые взаимно сокращаются при учёте лево и правокиральных частиц.

Исследованы частные случаи формулы (6): безмассовых фермионов $m = 0$, а также случай равных нулю ускорения и температуры $|a| = T = 0$, но конечной массы $m \neq 0$. В последнем случае было получено следующее выражение для

кирального тока

$$\begin{aligned} \langle j_\mu^5 \rangle = & \frac{1}{6\pi^2} \left\{ \theta\left(\mu + \frac{|\omega|}{2} - m\right) \left[\left(\mu + \frac{|\omega|}{2}\right)^2 - m^2 \right]^{3/2} \right. \\ & - \theta\left(\mu - \frac{|\omega|}{2} - m\right) \left[\left(\mu - \frac{|\omega|}{2}\right)^2 - m^2 \right]^{3/2} \\ & + \theta\left(-\mu + \frac{|\omega|}{2} - m\right) \left[\left(\mu - \frac{|\omega|}{2}\right)^2 - m^2 \right]^{3/2} \\ & \left. - \theta\left(-\mu - \frac{|\omega|}{2} - m\right) \left[\left(\mu + \frac{|\omega|}{2}\right)^2 - m^2 \right]^{3/2} \right\} \frac{\omega_\mu}{|\omega|}, \end{aligned} \quad (8)$$

где правая часть содержит ступенчатые тета-функции Хевисайда $\theta(x)$. Формула (8) позволяет показать, что появление завихрённости как химического потенциала приводит к подавлению аксиального тока в двумерной области $|\omega|/2 < m - |\mu|$, как показано на Рис. 1 слева.

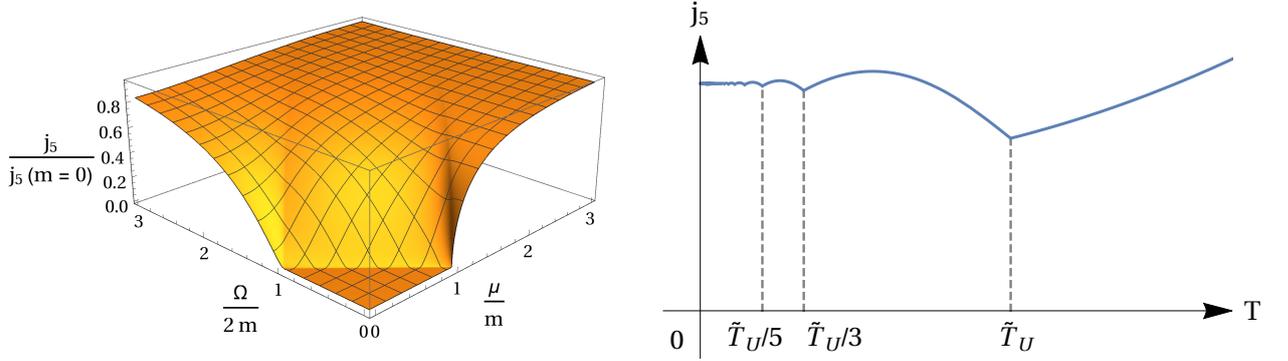


Рис. 1: *Слева*: аксиальный ток (8), как функция химического потенциала и угловой скорости $\Omega = |\omega|$ при $T = 0$. *Справа*: типичное поведение модуля аксиального тока как функции температуры при произвольных значениях остальных параметров (химический потенциал, угол между угловой скоростью и ускорением и др.).

Данный эффект является аналогом подавления термодинамических величин при малых химических потенциалах (в исследованиях на решётке данный эффект носит название Silver Blaze problem) и может использоваться в качестве критерия при численном исследовании эффектов вращения.

С другой стороны, рассмотрены следствия появления ускорения как мнимого химического потенциала в (7). В частности, это приводит к появлению неустойчивости в физических величинах – в том числе и в аксиальном токе – при температуре Унру, что является одним из проявлений эффекта Унру. Заметим, что мнимый химический потенциал, связанный с ускорением может быть

введён и независимо, как необходимое следствие эффекта Унру. Данные неустойчивости являются прямым аналогом фазовых переходов Робердже-Вейсса, возникающих в теориях с мнимым химическим потенциалом. Неустойчивости в аксиальном токе показаны на Рис. 1 справа. Мы видим, что модуль аксиального тока имеет изломы в точках $T = \frac{\tilde{T}_U}{2n+1}$, $n = 0, 1, \dots$. Температура \tilde{T}_U является обобщением обычной температуры Унру на случай, когда есть одновременно ускорение и вращение

$$\tilde{T}_U = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - \Omega^2 + \sqrt{|\mathbf{a}|^4 + \Omega^4 + 2|\mathbf{a}|^2\Omega^2 \cos(2\theta)}},$$

и сводится к температуре Унру $T_U = \frac{|\mathbf{a}|}{2\pi}$ либо когда угол между ускорением и завихрённостью равен нулю $\theta = 0$, либо когда завихрённость равна нулю $\Omega = 0$.

В **Третьей главе** был использован фундаментальный подход с оператором плотности Зубарева для вычисления квантовых поправок к КВЭ. Впервые описан алгоритм вычисления поправок третьего порядка по тензору тепловой завихрённости, который затем был применён к аксиальному току. Для этого были вычислены четырёхточечные квантовые корреляторы с тремя операторами буста или углового момента и одним оператором физической величины. Так, для нахождения коэффициента A_1 третьего порядка по завихрённости в аксиальном токе

$$\langle \hat{j}_5^\lambda(x) \rangle_3 = A_1 w^2 w^\lambda + A_2 \alpha^2 w^\lambda + A_3 (w\alpha) \alpha^\lambda, \quad (9)$$

необходимо было вычислить коррелятор с тремя операторами углового момента

$$A_1 = -\frac{1}{6|\beta|^3} \int_0^{|\beta|} [d\tau] \langle T_\tau \hat{J}_{-i\tau_x u}^3 \hat{J}_{-i\tau_y u}^3 \hat{J}_{-i\tau_z u}^3 \hat{j}_5^3(0) \rangle_{\beta(x), c}, \quad (10)$$

а для вычисления смешанного слагаемого $\langle \hat{j}_5^\lambda(x) \rangle_3 = A_2 \alpha^2 w^\lambda + \dots$ - коррелятор с двумя операторами буста и одним оператором углового момента

$$A_2 = -\frac{1}{6|\beta|^3} \left\{ \int_0^{|\beta|} [d\tau] \langle T_\tau (\hat{K}_{-i\tau_x u}^1 \hat{J}_{-i\tau_y u}^3 + \hat{J}_{-i\tau_x u}^3 \hat{K}_{-i\tau_y u}^1) \hat{K}_{-i\tau_z u}^1 \hat{j}_5^3(0) \rangle_{\beta(x), c} \right. \\ \left. + \int_0^{|\beta|} [d\tau] \langle T_\tau \hat{K}_{-i\tau_x u}^1 \hat{K}_{-i\tau_y u}^1 \hat{J}_{-i\tau_z u}^3 \hat{j}_5^3(0) \rangle_{\beta(x), c} \right\}. \quad (11)$$

В (10), (11) входят только связанные корреляторы, все несвязные корреляторы сокращаются за счёт вклада знаменателя $1/Z$ в операторе плотности. Этот факт

отражён в нижнем индексе c , нижний индекс $\beta(x)$ означает, что средние значения берутся при $\varpi = 0$, то есть усреднение производится по большому каноническому распределению. T_τ означает упорядочение по мнимому времени τ , а $|\beta| = \frac{1}{T}$.

Операторы буста и углового момента связаны с тензором энергии импульса и поэтому нахождение корреляторов вида (10), (11) сводится к нахождению типового коррелятора

$$C^{\alpha_1\alpha_2|\alpha_3\alpha_4|\alpha_5\alpha_6|\lambda|ijk} = \frac{1}{|\beta|^3} \int d\tau_x d\tau_y d\tau_z d^3x d^3y d^3z \langle T_\tau \hat{T}^{\alpha_1\alpha_2}(\tau_x, \mathbf{x}) \times \hat{T}^{\alpha_3\alpha_4}(\tau_y, \mathbf{y}) \hat{T}^{\alpha_5\alpha_6}(\tau_z, \mathbf{z}) \hat{j}_5^\lambda(0) \rangle_{\beta(x), c} x^i y^j z^k. \quad (12)$$

Коэффициенты A_1, A_2, A_3 в терминах величин (12) имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{6} \left\{ C^{02|02|02|3|111} + C^{02|01|01|3|122} + C^{01|02|01|3|212} + C^{01|01|02|3|221} \right. \\ &\quad \left. - C^{01|01|01|3|222} - C^{01|02|02|3|211} - C^{02|01|02|3|121} - C^{02|02|01|3|112} \right\}, \\ A_2 &= -\frac{1}{6} \left\{ C^{02|00|00|3|111} + C^{00|02|00|3|111} + C^{00|00|02|3|111} - C^{01|00|00|3|211} \right. \\ &\quad \left. - C^{00|01|00|3|121} - C^{00|00|01|3|112} \right\}, \\ A_3 &= -A_2 - \frac{1}{6} \left\{ C^{02|00|00|3|133} + C^{00|02|00|3|313} + C^{00|00|02|3|331} \right. \\ &\quad \left. - C^{01|00|00|3|233} - C^{00|01|00|3|323} - C^{00|00|01|3|332} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для нахождения корреляторов вида (10), (11) или (12) использовались известные выражения для тепловых функций Грина полей Дирака, после подстановки которых задача сводится к вычислению интегралов по импульсу, координатам, мнимому времени и суммированию по мацубаровским частотам. Все эти действия были выполнены аналитически, в частности, суммирование по мацубаровским частотам приводит к появлению в конечном ответе распределения Ферми-Дирака. При этом все операторы были представлены в расщеплённом виде. В частности, тензор энергии-импульса полей Дирака (в мнимом времени)

$$\begin{aligned} \hat{T}^{\alpha\beta}(X) &= \lim_{X_1, X_2 \rightarrow X} \mathcal{D}_{ab}^{\alpha\beta}(\partial_{X_1}, \partial_{X_2}) \bar{\Psi}_a(X_1) \Psi_b(X_2), \\ \mathcal{D}_{ab}^{\alpha\beta}(\partial_{X_1}, \partial_{X_2}) &= \frac{(-i)^{\delta_{0\alpha} + \delta_{0\beta}}}{4} [\tilde{\gamma}_\alpha(\tilde{\partial}_{X_2} - \tilde{\partial}_{X_1})_\beta + \tilde{\gamma}_\beta(\tilde{\partial}_{X_2} - \tilde{\partial}_{X_1})_\alpha]. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом были получены члены третьего порядка по тепловой завихренности, и полное выражение для аксиального тока в киральном пределе

$m = 0$ приобретает вид

$$\langle j_\mu^5 \rangle = \left(\frac{1}{6} [T^2 + \frac{|\omega|^2}{4\pi^2}] + \frac{\mu^2}{2\pi^2} + \frac{|a|^2}{8\pi^2} \right) \omega_\mu. \quad (15)$$

Линейные члены и кубический член по завихрённости в полученной формуле в точности соответствуют всем известным в литературе результатам для КВЭ, а член с ускорением – новый. При этом была решена проблема с сохранением аксиального тока, ранее обнаруженная в подходе с функцией Вигнера [A1] – показано, что ток (15) сохраняется $\partial^\mu \langle j_\mu^5 \rangle = 0$, что связано с тем, что равен нулю коэффициент перед членом $(\omega a)_\mu$. Было строго показано, что коэффициент A_3 перед этим членом, описываемый коррелятором

$$\begin{aligned} A_3 = & -A_2 - \frac{1}{6|\beta|^3} \left\{ \int_0^{|\beta|} [d\tau] \langle T_\tau (\hat{K}_{-i\tau_x u}^3 \hat{J}_{-i\tau_y u}^3 + \hat{J}_{-i\tau_x u}^3 \hat{K}_{-i\tau_y u}^3) \hat{K}_{-i\tau_z u}^3 \hat{J}_5^3(0) \rangle_{\beta(x),c} \right. \\ & \left. + \int_0^{|\beta|} [d\tau] \langle T_\tau (\hat{K}_{-i\tau_x u}^3 \hat{K}_{-i\tau_y u}^3 \hat{J}_{-i\tau_z u}^3 \hat{J}_5^3(0)) \rangle_{\beta(x),c} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

равен нулю.

В случае конечной массы коэффициенты в токе начинают зависеть от массы. Показано, что вычисленные таким образом коэффициенты перед линейным слагаемым и перед слагаемым только с завихрённостью A_1 в точности соответствуют предсказаниям функции Вигнера (формула (6) при $|a| = 0$). В частности, коэффициент A_1 имеет вид

$$A_1 = \frac{1}{48\pi^2 |\beta|^3} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \left(n_F'''(E_p - \mu) + n_F'''(E_p + \mu) \right) |\mathbf{p}|^2, \quad (17)$$

где $n_F'''(E)$ – третья производная распределения Ферми-Дирака по энергии. Таким образом, можно утверждать, что формула

$$\begin{aligned} \langle j_\mu^5 \rangle = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ n_F(E_p - \mu - \frac{|\omega|}{2}) - n_F(E_p - \mu + \frac{|\omega|}{2}) \right. \\ & \left. + n_F(E_p + \mu - \frac{|\omega|}{2}) - n_F(E_p + \mu + \frac{|\omega|}{2}) + c.c. \right\} \frac{\omega_\mu}{|\omega|}, \end{aligned} \quad (18)$$

является точным непертурбативным выражением для вихревого тока массивных фермионов на оси вращения, так как вплоть до вычисленных порядков теории возмущений есть точное соответствие между (18) и фундаментальным расчетом на основе оператора плотности.

Более того, можно рассмотреть первый порядок по массе для формулы (18)

$$\langle j_\mu^5 \rangle = \left(\frac{T^2}{6} - \frac{m^2}{4\pi^2} \right) \omega_\mu, \quad (19)$$

который в точности удовлетворяет известным в литературе результатам. Существует и ряд других частных случаев, доказывающих верность формулы (18).

Таким образом, формулу (18) следует рассматривать как достаточно хорошо обоснованное непертурбативное выражение для кирального тока фермионов во вращающейся среде на оси вращения. Откуда следует, что и эффект подавления аксиального тока при $T = 0$ в области $|\omega|/2 < m - |\mu|$, показанный на рисунке 1 слева, тоже получает обоснование с точки зрения фундаментального подхода с оператором плотности.

Интересным следствием формулы (18) является возможность стабилизировать и подавить киральный ток, как функцию температуры. Действительно, предполагая наличие у частиц тепловой массы $m_{eff} = \lambda T$, мы видим, что в линейном порядке по завихрённости

$$\langle \hat{j}_5^\lambda(x) \rangle^{(1)} = T^2 C \left(\frac{m}{T} \right) \omega^\lambda, \quad (20)$$

$C \left(\frac{m}{T} \right) = const$ и, таким образом, киральный ток в первом порядке не зависит от T . При этом $C \left(\frac{m}{T} \right) \leq \frac{1}{6}$ то есть ток подавлен по сравнению с безмассовым случаем (что интересно в контексте относительно недавних результатов на решётке).

В **Приложении А** приведены полезные свойства полилогарифмов, использованные во второй главе, в частности, случаи полиномиальности комбинаций нескольких полилогарифмов вида

$$\text{Li}_n(-e^{a+ib}) + (-1)^n \text{Li}_n(-e^{-a-ib}). \quad (21)$$

В **Приложении Б** дана таблица чётностей (зарядовой, пространственной и временной – СРТ) различных физических величин (тензора энергии-импульса, завихрённости, буста и др.).

В **Заключении** приведены основные результаты диссертации:

1. Вычислены поправки в третьем порядке теории возмущений по производным скорости (завихрённости и ускорению) к киральному вихревому эффек-

ту на основе фундаментального квантового статистического подхода с оператором плотности Зубарева. Впервые получен коэффициент перед смешанными членами в аксиальном токе фермионов с ускорением и завихрённостью.

2. Разработан алгоритм нахождения точных непертурбативных формул на основе ковариантной функции Вигнера в среде с тензором тепловой завихрённости. На основе данного алгоритма получено непертурбативное выражение для аксиального тока в среде с завихрённостью во всех порядках по завихрённости и при произвольной массе частиц, обобщающее киральный вихревой эффект.

3. Обоснованы концепции завихрённости, как нового действительного химического потенциала и впервые выдвинута и обоснована концепция ускорения, как нового мнимого химического потенциала. Показано, что следствием второй из концепций является появление неустойчивости в аксиальном токе при температуре Унру.

4. Предсказан эффект подавления аксиального тока при нулевой температуре в области завихрённости, меньшей двух масс, как следствие появления завихрённости в виде химического потенциала. На основе обнаруженного эффекта сформулирован критерий для численного исследования эффектов завихрённости.

5. Показана недостаточность функции Вигнера при описании эффектов ускорения. В частности, показано, что функция Вигнера приводит к ненулевой дивергенции аксиального тока в отсутствие внешних полей. Получено решение данной проблемы на основе фундаментального подхода с оператором плотности.

Благодарности

Автор очень благодарен своим научным руководителям доктору физико-математических наук Олегу Валериановичу Теряеву и доктору физико-математических наук Валентину Ивановичу Захарову. Я также признателен всем своим соавторам, в том числе А. С. Сорину, своим предыдущим научным руководителям В. А. Бейлину и Р. С. Пасечнику. Отдельная благодарность сотрудникам Национального Института Ядерной Физики (INFN) во Флоренции в Италии, Ф. Бекаттини, М. Буццеголи и А. Палермо. Я глубоко признателен моему первому

научному руководителю Григорию Моисеевичу Верешкову, под чьим руководством начинал работать в области фундаментальной физики.

Публикации автора по теме диссертации

- [A1] *Prokhorov George, Teryaev Oleg*. Anomalous current from the covariant Wigner function // *Phys. Rev.* — 2018. — Vol. D97, no. 7. — P. 076013.
- [A2] *Prokhorov George Y., Teryaev Oleg V., Zakharov Valentin I.* Effects of rotation and acceleration in the axial current: density operator vs Wigner function // *JHEP.* — 2019. — Vol. 02. — P. 146.
- [A3] *Prokhorov G., Teryaev O., Zakharov V.* Axial current in rotating and accelerating medium // *Phys. Rev.* — 2018. — Vol. D98, no. 7. — P. 071901.
- [A4] *Prokhorov Georgy, Teryaev Oleg, Zakharov Valentin.* Polarization in HIC: comparison of methods // *European Physical Journal Web of Conferences.* — Vol. 204 of *European Physical Journal Web of Conferences.* — 2019. — 9. — P. 05003.
- [A5] *Prokhorov G. Yu., Zakharov V. I., Teryaev O. V.* Rotation and spin dynamics in heavy-ion collisions // *European Physical Journal Web of Conferences.* — Vol. 191 of *European Physical Journal Web of Conferences.* — 2018. — 10.
- [A6] Vorticity and Λ polarization in baryon rich matter / Mircea Baznat, Konstantin Gudima, George Prokhorov et al. // *European Physical Journal Web of Conferences.* — Vol. 171 of *European Physical Journal Web of Conferences.* — 2018. — 2. — P. 07003.
- [A7] Chiral effects in external gravitational field / P.G. Mitkin, G. Prokhorov, O.V. Teryaev, V.I. Zakharov // *Nuclear and Particle Physics Proceedings.* — 2018. — Vol. 300-302. — Pp. 203 – 209. — QCD 18 is the 21st International Conference on Quantum Chromodynamics. // *Phys. Rev.* — 2018. — Vol. D97, no. 7. — P. 076013.

Список литературы

- [1] *Rogachevsky Oleg, Sorin Alexander, Teryaev Oleg*. Chiral vortaic effect and neutron asymmetries in heavy-ion collisions // *Phys. Rev.* — 2010. — Vol. C82. — P. 054910.

- [2] *Zakharov Valentin I.* Chiral Magnetic Effect in Hydrodynamic Approximation. — 2012. — [Lect. Notes Phys.871,295(2013)].
- [3] *Stone Michael, Kim Jiyoung.* Mixed Anomalies: Chiral Vortical Effect and the Sommerfeld Expansion // *Phys. Rev.* — 2018. — Vol. D98, no. 2. — P. 025012.
- [4] *Son Dam T., Surowka Piotr.* Hydrodynamics with Triangle Anomalies // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 103. — P. 191601.
- [5] Relativistic distribution function for particles with spin at local thermodynamical equilibrium / F. Becattini, V. Chandra, L. Del Zanna, E. Grossi // *Annals Phys.* — 2013. — Vol. 338. — Pp. 32–49.
- [6] *Buzzegoli M., Grossi E., Becattini F.* General equilibrium second-order hydrodynamic coefficients for free quantum fields // *JHEP.* — 2017. — Vol. 10. — P. 091. — [Erratum: JHEP07,119(2018)].
- [7] *Zubarev D.N.* Nonequilibrium statistical thermodynamics. Studies in soviet science. — Consultants Bureau, 1974.