

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

на диссертацию В.Н. ПЕРВУШИНА "Квантовая теория поля с киральным лагранжианом и физика мезонов низких энергий", защищенной на специализированном совете по защите докторских диссертаций Д047.01.01 при Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований 7 сентября 1978 г.

Официальные оппоненты:  
член-корреспондент АН УССР, профессор Д.В. Волков (ХФТИ)  
доктор физико-математических наук, М.В. Терентьев (ИТЭФ)  
член-корреспондент АН СССР, профессор Д.В. Ширков (ОИЯИ)  
доктор физико-математических наук, А.Т. Филиппов (ОИЯИ)  
Ведущая организация - Институт математики СО АН СССР (г.Новосибирск)  
дали положительные отзывы о диссертации.

В диссертации В.Н. Первушина развита квантовая теория для нелинейных киральных лагранжианов (которые обычно рассматривались как феноменологические) и впервые в мировой литературе проведена обширная программа вычисления амплитуд конкретных физических процессов в однопетлевом приближении такой квантовой теории.

Основными теоретическими достижениями диссертации являются: формулировка ковариантной теории возмущений и доказательство теоремы о неперенормируемости константы слабого распада пиона, откуда следует основной тезис диссертации, что разложение амплитуд по петлям, в пределе нулевой массы пиона, совпадает в низших порядках с разложением по импульсам.

Программа вычисления широкого класса амплитуд низкоэнергетических процессов осуществлена в диссертации с впечатляющим успехом. В диссертации вычислены параметры низкоэнергетического пион-пионного рассеяния, электромагнитные формфакторы мезонов, их радиусы, амплитуды комптон-эффектов, поляризуемости пионов, формфакторы основных слабых распадов мезонов, разность масс нейтральных каонов.

Работами автора квантовая теория киральных взаимодействий, по существу, продвинута на качественно новый уровень. Автор не только показал, как нужно использовать эти теории для вычисления наблюдаемых эффектов, но и с успехом применил свои методы для вычисления существующих экспериментальных данных и предсказания новых эффектов. В диссертации предлагаются конкретные экспериментальные измерения редких распадов пионов на ускорителе ИФВЭ. Предложены конкретные измерения редких распадов этих пионов на ядрах.

Таким образом, в диссертации В.Н. Первушина дана новая трактовка основных направлений в физике элементарных частиц. Работы автора опубликованы в ведущих советских и зарубежных журналах, отражены в рефератах и монографиях.



# Проблемы калибровочных теорий

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

**ПРОБЛЕМЫ  
КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ**

*К 60-летию со дня рождения  
В. Н. Первушина*

Дубна 2004

*Под редакцией Б. М. Барбашова, В. В. Нестеренко*

В книге использованы фотографии Ю. А. Туманова, а также  
из личного архива В. Н. Первушина.

*Обложка Ю. А. Туманова*

**Проблемы калибровочных теорий:** К 60-летию со дня рождения  
П78 В. Н. Первушина / Под ред. Б. М. Барбашова, В. В. Нестеренко. — Дубна:  
ОИЯИ, 2004. — 137 с., 26 с. фото.  
ISBN 5-9530-0060-X

ISBN 5-9530-0060-X

© Объединенный институт ядерных  
исследований, 2004

# Слово о юбиляре

*(В качестве предисловия)*

Б.М. Барбашов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Когда настает шестидесятилетний юбилей и большая часть деятельной жизни — в прошлом, время садиться за «воспоминания». Дневник ведешь для себя, воспоминания пишешь для других, и «еще переписах, ли недописах» — первое относится к дневнику, второе — к воспоминаниям, в них всего не скажешь, но наш юбиляр в своей неформальной автобиографии поведал многое о своих научных деяниях.

Виктор Николаевич Первушин принадлежит к поколению ученых, родившихся в советское время, в 40-х гг. прошедшего столетия, и в зрелом возрасте заставших бурный рост физической науки в последней четверти XX в. Описать все это, хотя бы из своего субъективного «угла», — трудная задача: для этого нужно иметь много сил и времени, но и того, и другого не хватает, поэтому ограничиваются своим «уголком» этой обширной картины, тем, в чем принимали участие и что сделали сами.

Для юбиляра это научная работа в Дубне, и только попутно в своей автобиографии он касается всего остального, правда, занятие наукой для него и есть большая часть жизни, поэтому биография пишется не «жизнейская», а научная.

Нелегкий путь в науке он начал студентом физического факультета МГУ, затем стал аспирантом филиала НИИЯФ МГУ в г. Дубне на кафедре Д.И. Блохинцева, в 1971 г. он, уже защитивший кандидатскую диссертацию, был принят научным сотрудником в Лабораторию теоретической физики ОИЯИ. Теперь В.Н. Первушин — начальник сектора этой лаборатории, доктор физико-математических наук, профессор, автор многих вызвавших большой интерес работ по физике

частиц, квантовой теории поля и космологии. Совместно с профессором М.К. Волковым им была написана одна из первых монографий по квантовой теории поля с киральными лагранжианами, динамическим симметриям и физике пионов. Преданность науке, ее трудным и в то же время актуальным направлениям, стремление поделиться своим подходом к их пониманию позволяют В.Н. Первушину вовлечь молодых исследователей в круг своих интересов. В результате им подготовлена целая плеяда кандидатов наук, работающих теперь у нас в институте и в других научных центрах.

В заключение хочу заметить, что «предисловие — всегда послесловие», всегда, но не в данном случае, так как мне неизвестно, сколько еще будет сказано и написано коллегами и друзьями о юбиляре в честь его шестидесятилетия. От всего сердца желаю ему доброго здоровья и долгих лет активной творческой работы. Успехов Вам, Виктор Николаевич!

# Физика, философия, религия

В.В. Нестеренко

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Юбилей Виктора Николаевича Первушина, с которым я знаком уже более 30 лет, — это хороший повод для того, чтобы оглянуться назад и попытаться отметить, что было яркого, заслуживающего внимания.

Так сложилось, что мы с Виктором занимались часто близкими, а иногда одними и теми же задачами, хотя совместных публикаций у нас не так много (одна обзорная статья в ЭЧАЯ), тем не менее мы были и остаемся на виду друг у друга.

Оказались мы на «параллельных» путях в науке, конечно же, потому, что начинали исследовательскую деятельность у одного и того же научного руководителя — Бориса Михайловича Барбашова. Из той поры мне запомнились не только совместная проработка статей и «бурные» выступления Виктора на семинарах нашего сектора, которые Дмитрий Иванович Блохинцев часто проводил в своем кабинете, но и занятия философией, которые Виктор организовал по собственной инициативе для студентов и аспирантов филиала МГУ в Дубне. Уже тогда он серьезно интересовался нестандартными философскими проблемами, в частности связанными с процессом познания. Мне запомнился термин «эмоциональное окрашивание», которое, как следовало из доклада Виктора на одном из таких занятий, является важным во всех контактах человека с окружающим миром, в том числе и в процессе познания этого мира. Теперь, спустя тридцать лет, мне кажется, что это понятие хорошо передает и взаимодействие Виктора с внешним окружением — будь то решение физической задачи, или его философские искания, или же его религиозные взгляды, — все это окрашивается эмоциями вдохновения и искренности.

Если попытаться кратко охарактеризовать Виктора Николаевича, то это, наверное, можно сделать так. Он безгранично увлеченный фи-

зикой человек, всецело преданный ей, всегда полный идей, оптимизма и творческой энергии, постоянно находящийся в научном поиске. Его интересы не ограничиваются физикой, а простираются в область философии, религии. Часто научный поиск Виктор пытается совместить со своими философскими взглядами и религиозными убеждениями, делая это, может быть, не совсем понятными для окружающих путями, но всегда искренне. Его интерес к философии и проблемам религии — это не любопытство дилетанта, здесь он нашел приложение своей энергии, организуя конференции, направленные на инициирование сотрудничества физиков, философов и священнослужителей.

Так уж повелось, что если в течение нескольких месяцев не было выступлений Виктора Николаевича на семинаре в лаборатории, то можно ожидать, что скоро он обязательно расскажет о своих результатах в новой для него области исследований. Так было со «сжатым» вакуумом в КХД, с топологическими возбуждениями в неабелевых калибровочных полях, с трактовкой КХД как микроскопической теории сверхтекучести, с новым космологическим сценарием. И можно быть уверенным, что семинар будет проходить нестандартно — бурно, со спорами, не оставляя никого равнодушным.

Виктор должен благодарить судьбу, наградившую его таким богатым спектром дарований. Конечно, нет необходимости желать ему и дальше оставаться таким же деятельным, энергичным и увлеченным — это уже ничто не в силах изменить, годы, как и внешние обстоятельства, здесь бессильны. А мне, как это было на протяжении тридцати с лишним лет, по-прежнему приятно и интересно постоянно видеть рядом такой притягательный пример преданности науке и ощущать неиссякающий источник энергии и оптимизма.

# Научная автобиография

В.Н. Первушин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

## Вступление. Немного о себе

Юбилей дает повод к размышлению об итогах пройденного пути, и пора оценить то, что успел сделать. «Всему свое время и время всякой вещи под небом: время рождаться и время умирать» (Екклесиаст 3:1,2).

Год рождения 1944-й, война, вести с фронта, «катюши», «студебекеры», с ревом проезжающие по ночам мимо маленького дома на окраине России, за рекой Удой, в сибирском городке Улан-Уде (Верхне-Удинск, как его называли более трех веков назад предки; дореволюционная фотография моего деда, Василия Даниловича Первушина, в форме есаула досталась мне по наследству).

В конце 1956 г. я уехал вместе с родителями на Камчатку, где учился в нескольких школах и, насколько помню, каждое лето работал то каменщиком на строительстве школы, то тренером в пионерлагере, был и рабочим-топографом в Налычевской геолого-разведочной экспедиции где-то южнее знаменитой Долины гейзеров. После окончания школы работал слесарем-монтажником в Петропавловске-Камчатском. Леса и горы Камчатки, ее курящиеся вулканы с розовыми вершинами на ярко-голубом небе, окруженные буйной вулканической зеленью, оставили в памяти неизгладимое впечатление. Но красота эта таила в себе и опасность. Школа, где я получил аттестат зрелости, находилась на песчаной косе между Тихим океаном и р. Камчаткой, она была смыта в 1974 г. огромным цунами вместе с поселком и всеми его рыбоконсервными заводами.

После окончания школы посмотрел наугад в справочник для поступающих в вузы и выбрал физфак МГУ. Время приезда в Москву в мае 1962 г. совпало с веселым празднованием Дня Архимеда на



физфаке. Первые курсы учебы остались в памяти как годы свободы хрущевской оттепели, они запомнились концертами Ван Клиберна в консерватории, любимовским Бертольдом Брехтом на Таганке, Яковлевым в спектакле «Идиот» и студенческими строительными отрядами в Казахстане и под Смоленском.

Увлеченный популярной лекцией Д.И. Блохинцева на физфаке, я в 1965 г. выбрал для дальнейшей специализации его кафедру в Дубне. 1966–1967 гг. запомнились лекциями М.И. Подгорецкого и С.М. Биленького, их логикой и глубоким содержанием. Дипломную работу по применению метода функционального интегрирования в квантовой теории поля я подготовил под руководством Б.М. Барбашова, и он же рекомендовал меня в аспирантуру.

Конечно, мне повезло встретиться с людьми, которые существенно повлияли на мой выбор научного пути. Интересны формулировки смысла и целей научной деятельности, которые остались в моей памяти от первых встреч с ними (эти формулировки, конечно, никоим образом не являются исчерпывающими).

Д.И. Блохинцев рассматривал работу ученого как творческий поиск истины, где всегда есть увлекающий нас элемент игры, но ни в коем случае не как погоню за результатом и получение его любой ценой. Он считал, что науку нельзя превращать в спорт или объект бизнеса. (Первую поставленную им задачу — найти дискретный аналог уравнения Дирака — я так до сих пор и не решил, но Дмитрий Иванович и не требовал решения, он просто хотел зажечь желание работать и потом его поддерживал).

Для Б.М. Барбашова наука — это увлекательный, но тяжелый систематический труд по исследованию уравнений, описывающих различные физические модели, и математической логики их построения. (Здесь можно вспомнить задачи по применению методов функционального интегрирования в теории поля, которые мы с Б.М. ставили и решали.)

И.В. Полубаринов видел цели науки в решении актуальных проблем современной физики — квантования неабелевых калибровочных полей и формулировки ковариантного метода построения S-матрицы. (При нашей встрече в феврале 1966 г. И.В. подарил мне изданный в декабре 1965 г. препринт обзора «Уравнения квантовой электродинамики», заразив своим видением физических задач и определив тем самым тему моих работ на долгие годы вперед.)

Д.В. Волков искал глубинный смысл групп преобразований физических полей и координат и аналогии между различными областями физики. (Д.В. увлек меня идеей спонтанного нарушения киральной симметрии и методом форм Картана.)

Для Н.А. Черникова наука — это математически ясная и физически обоснованная постановка проблемы, которая следует из общего анализа современного развития физики. (Здесь надо вспомнить блестящие работы Н.А. по релятивистской статфизике, по теории Борна–Инфельда, конформной теории скалярного поля и его великолепную интуицию в вопросе, чем стоит заниматься, а чем нет.)

Н.Н. Боголюбов видел один из смыслов науки в фундаментальном обосновании математических методов и приближенных моделей, успешно описывающих природу. Именно задача по обоснованию в квантовой теории поля эйконального приближения для амплитуд рассеяния, поставленная Н.Н. Боголюбовым, легла в основу моей кандидатской диссертации.

## 1. Эйкональное приближение

Весна и начало лета 1969 г. были посвящены «мозговому штурму» задачи по обоснованию в квантовой теории поля эйконального приближения для амплитуд рассеяния, поставленной Н.Н. Боголюбовым. Б.М. Барбашов был приглашен Николаем Николаевичем как специалист по применению метода функционального интегрирования. Коллектив, который успешно решил эту задачу в 1969 г., возглавлял А.Н. Тавхелидзе, в него входили молодые тогда В.А. Матвеев, С.П. Кулешов, А.Н. Сисакян и автор этих строк [3, 5–7].

Осенью я рассмотрел более простой случай потенциального эйконала, опубликовал несколько работ по этой теме в созданном тогда журнале ТМФ [1, 2, 4], а затем с помощью функционального интегрирования вновь нашел решение полевой задачи Н.Н. В итоге через год, летом 1970 г., приятно удивленный Б.М. Барбашов держал в руках «рыбу» моей кандидатской диссертации. Он настоял, чтобы я переработал этот в общем-то сырой материал, добиваясь максимальной ясности изложения, так что мой доклад осенью на эту тему смог удовлетворить аудиторию ЛТФ. После защиты диссертации в конце

декабря 1970 г. я был зачислен в сектор Д.И. Блохинцева с 1 января 1971 г., досрочно закончив аспирантуру.

В это время (1966 - 1970 гг.), благодаря общению и дискуссиям с И.В. Полубариновым, я стал свидетелем увлекательной истории становления теории калибровочных полей, происходившей на моих глазах.

## 2. Квантование калибровочных полей

Как уже отмечалось, в начале 1966 г. я принялся изучать теорию калибровочных полей по обзору И.В. Полубаринова. Этот замечательный обзор был посвящен гамильтонову операторному квантованию электродинамики, развитому такими классиками науки, как Дирак, Гейзенберг, Паули и Швингер. Уже в начале 60-х Швингер доказал релятивистскую ковариантность наблюдаемых в неабелевой теории, считая методы, не зависящие от системы отсчета, неадекватными операторному *фундаментальному* квантованию<sup>1</sup>. Один из наиболее ценных результатов обзора И.В. Полубаринова заключался в построении явного вида релятивистских преобразований физических полей из одной системы отсчета в другую. Смыслом и конечным итогом этой работы было определение группы преобразований многообразия начальных данных, оставляющих без изменения все структурные соотношения этого многообразия, включая уравнения движения. В ЛТФ это направление представляла серия работ В.И. Огиевского и И.В. Полубаринова.

Однако теоретическая физика на своем пути сделала крутой поворот к другому методу описания физических явлений, наблюдаемых на ускорителях высоких энергий. Это были в основном процессы рассеяния элементарных частиц, сечения которых не зависят от выбора системы отсчета. Именно свободный от системы отсчета метод использовал для описания таких процессов рассеяния в электродинамике Ричард Фейнман. Фейнман обнаружил, что этот метод не работает в неабелевой теории. Проблема квантования и построения унитарной теории возмущений для неабелевой теории в рамках метода, не зависящего от выбора системы отсчета, была блестяще решена Л.Д. Фадде-

---

<sup>1</sup>«We reject all Lorentz gauge formulations as unsuited to the role of providing the fundamental operator quantization» (J. Schwinger, Phys. Rev., 127 (1962) 324).

евым и В.Н. Поповым. Историческим результатом, полученным методом Фаддеева–Попова, было доказательство перенормируемости электрослабой теории Хуфтом и Вельтманом. Журнал ТМФ открывался в 1969 г. статьей Фаддеева, где доказывалась эквивалентность метода Фаддеева–Попова *фундаментальному* гамильтонову методу без всякого упоминания преобразований систем отсчета, т.е. именно того, что Дирак, Швингер и Полубаринов (в своем обзоре) считали главным.

Полубаринов не был готов воспринять такой упрощенный *эвристический* подход к построению квантовой теории поля ценой потери начальных данных и систем отсчета, преобразованию которых и был посвящен его обзор. Что чувствует человек, у которого пошатнулось его понимание релятивистской квантовой физики? Он забирает свой обзор из УФН, чтобы разобраться в соотношении гамильтонова квантования и метода Фаддеева–Попова, не зависящего от системы отсчета. Прежде всего у Полубаринова возник вопрос об области применимости этого метода. И эта область была указана Фаддеевым самым способом доказательства теоремы эквивалентности метода Фаддеева–Попова гамильтонову методу — это процессы рассеяния квантов исходных полей теории. Если это так, то для целей описания процессов, выходящих за рамки этой области, например, для описания связанных состояний, становится актуальной задача воспроизвести в формализме функционального интегрирования преобразования систем отсчета, полученные Швингером.

Только в 1987 г. вместе с Нгуен Суан Ханом мне удалось выяснить, как применять интеграл Фаддеева–Попова для описания связанных состояний в неабелевых теориях<sup>2</sup> и как преобразуется этот интеграл при переходе в другую систему отсчета<sup>3</sup>, что тогда и интересовало По-

---

<sup>2</sup>Еще в электродинамике было известно, что при квантовании всех степеней свободы возникают связанные состояния с мнимыми массами, в то время как в *фундаментальном* дираковском подходе, где квантуются только те переменные, которые остаются после разрешения связей, такие нефизические состояния отсутствуют. Есть основания предполагать, что подобное изменение спектра будет иметь место и в случае релятивистской струны; начало *фундаментальному* методу описания струны, явно зависящему от системы отсчета, было положено Б.М. Барбашовым и Н.А. Черниковым в 1974 г., продолжено А.Г. Рейманом и Л.Д. Фаддеевым в 1975 г. и ждет своего окончательного решения. Шаги в этом направлении были сделаны в нашей работе с Б.М. Барбашовым и Д.В. Проскуриным [95].

<sup>3</sup>Зависимость от системы отсчета всегда можно заменой переменных перенести в фазовые факторы при физических источниках, но убрать эти факторы, а вместе с ними и зависимость от системы отсчета можно только для задач рассеяния.

лубаринова. Наша работа по выводу этих преобразований, направленная в «Intern. J. Mod. Phys.», понравилась его редактору профессору Печчеи, и он решил рекомендовать ее в «Mod. Phys. Lett.», несмотря на довольно большой объем нашей статьи [72].

Работа [72], опубликованная в «Mod. Phys. Lett.» в 1987 г., оказалась почти незамеченной. Дело в том, что за 20 лет существования *эвристического* метода квантования выросло уже не одно поколение физиков, которые искренне считают потенциал, полученный решением связей в конкретной системе отсчета, нерелятивистским приближением и не отличают выбор переменных от выбора калибровки физических источников Дирака. Не зная другого метода, кроме *эвристического*, и не видя границ его применимости, они используют этот метод для описания спектра связанного состояния, адронизации, конфайнмента и других непертурбативных эффектов, где он может дать неверные результаты, как это показано на примере монополей в работах [69, 81]. Поэтому я считаю публикацию обзора И.В. Полубаринова [80] (почти через 40 лет со дня его написания) и своего обзора [81] по применению и обобщению результатов И.В. на связанные состояния своевременной и полезной для тех, кто задумывается над пределами применимости методов, которые они используют в своих задачах.

### 3. Киральная теория и ее обоснование в КХД

После защиты кандидатской диссертации и поступления на работу в ЛТФ встал вопрос, что делать дальше. Дискуссии с Полубариновым по его обзору (1965 г.) и дальнейшие работы по квантованию неабелевых теорий уже заинтриговали меня проблемой их соответствия гамильтонову подходу, но заниматься этой областью было тогда явно не по моим силам. Вся эта область исследования находилась в то время слишком далеко от эксперимента, а я, благодаря эйконалу, уже ощутил некий азарт описания реально наблюдаемых физических явлений. Кроме того, не было хорошего опыта работы с диаграммами в теории возмущений и понимания их внутренней структуры, о чем мне позже говорил В.Н. Грибов, дискуссии с которым во время советско-американских школ в Армении в начале 80-х помогли мне осознать

проблему выбора граничных условий и класса функций в квантовой теории поля.

Опыт работы с диаграммами дала киральная теория возмущения, развитая нами с М.К. Волковым в 1973–1976 гг. в целой серии статей, опубликованных в основном в ЯФ и «Phys. Lett.» [11–23], а также в монографии [10], вышедшей под редакцией Д.И. Блохинцева. М.К. Волков разработал суперпропагаторный метод суммирования рядов теории возмущений, позволяющий однозначно вычислять амплитуды физических процессов для существенно нелинейных лагранжианов. В то время, когда ни стандартная модель, ни квантовая хромодинамика еще не утвердились как общепризнанные теории, эти существенно нелинейные лагранжианы, предложенные Вайнбергом и Швингером, рассматривались как основа феноменологических теорий мезонов. Эти теории удачно и компактно воспроизводили многочисленные результаты алгебры токов — симбиоза групповых методов и дисперсионных соотношений, использовавшихся тогда для оценки предсказаний амплитуд низкоэнергетических мезонных процессов.

В 1973 г. мы с М.К. Волковым начали с петлевых диаграмм для электромагнитного формфактора пиона и за два года вычислили амплитуды многих физических низкоэнергетических процессов с впечатляющим согласием с имеющимися экспериментальными данными, а также с предсказаниями и предложением конкретных и осуществимых экспериментов. Поляризуемость пионов была измерена по нашему предложению экспериментаторами ЛЯП и ИФВЭ [33, 34] буквально через несколько лет в опытах по кулоновскому рассеянию пионов на ядрах на ускорителе ИФВЭ в Протвино. Причем экспериментальные данные оказались в хорошем согласии с нашими предсказаниями.

Каждые полгода я ездил в харьковский Физтех к Дмитрию Васильевичу Волкову, выступая там с докладами перед экспериментаторами и теоретиками. Мне удалось тогда сформулировать теорию возмущений в терминах форм Мауэра — Картана, описывающих произвольные движения ортогональных реперов в групповом пространстве, и обобщить результаты Д.В. Волкова для диаграмм-деревьев на петлевые диаграммы [20, 24, 29], что позволило нам с Д.И. Казаковым значительно облегчить вычисление вкладов от двухпетлевых диаграмм и находить результаты, считая несколько диаграмм там, где другие считали сотни и тысячи [26, 28]. Д.В. Ширков предложил мне тогда

совместное с ним руководство кандидатской диссертацией Д.И. Казакова, которую он успешно защитил.

Тогда же, в 1976 г., мы с Дитмаром Эбертом предприняли первую попытку в направлении обоснования киральных лагранжианов в рамках КХД, сформулировав функциональный интеграл по бислокальным переменным, который позволял вычислить спектр связанных состояний, их формфакторы и амплитуды со спонтанным нарушением симметрии, довольно простым квазиклассическим методом [25, 27, 30].

Все эти результаты, собранные вместе под названием «Квантовая теория поля с киральным лагранжианом и физика мезонов низких энергий», я представил как докторскую диссертацию, которую защитил 7 сентября 1978 г. И в дальнейшем использовал эти результаты для описания различных адронных процессов методом киральных лагранжианов<sup>4</sup> [35–44], а также для обоснования этих лагранжианов [45–69, 81] с помощью фундаментального квантования хромодинамики, которому научился по обзору И.В. Полубаринова [80]. Но это уже другая история.

## 4. Глобальные возбуждения калибровочных полей

К 1978 г. уже окончательно получила признание квантовая хромодинамика как теория взаимодействующих кварков и глюонов, которых еще никто не наблюдал. Сам факт их ненаблюдаемости Фейнман сформулировал как кварк-адронную дуальность, которая прекрасно определяла квантовые числа кварков, удивительно хорошо совпадающие с теорией. В то же время появились инстантоны Белавина, Полякова, Шварца и Тюткина, которые В.Н. Грибов предложил трактовать как подбарьерные переходы между классическими вакуумами с разными фазами. Кроме того, В.Н. Грибовым была обнаружена неоднозначность кулоновской калибровки в КХД, или ее вырождение, что вело к нулевому значению интеграла Фаддеева–Попова.

---

<sup>4</sup>Результаты, полученные в работах [10–32], включая ковариантную теорию возмущений [20, 26] и анализ длин рассеяния пионов, выполненный совместно с С.А. Бунятовым и А.А. Бельковым [31, 32], были существенно использованы Гассером и Лейтвилером при формулировке широко применяемой теперь киральной теории возмущений (см. J. Gasser, H. Leutwyler, *Ann. Phys.*, 158 (1984) 142).

Приобретя опыт в квантовой теории поля, я стал рассматривать все эти проблемы с точки зрения гамильтонова метода Дирака [80, 81], где квантуются только те переменные, которые остаются после разрешения связей. Разрешая явно эти связи, мы обнаружили, что метод Дирака в неабелевых калибровочных теориях демонстрирует нам возможность существования однородных решений уравнений связи. Эти однородные решения описывают глобальные возбуждения всей системы полей в целом, типа возбуждений, с которыми мы имеем дело при описании сверхтекучего движения [58]. *Эвристический* метод это сверхтекучее движение не замечает, поскольку не решает связи, а лишь предполагает формально возможность их решения.

Вместе с моими молодыми сотрудниками Н. Илиевой, С. Гогилдзе и А. Хведелидзе мы изучали глобальные возбуждения калибровочного поля на различных моделях и примерах, пытаясь понять класс функций, на котором такое глобальное движение может быть сосредоточено, и его физические следствия [58–68]. В какой-то мере итог этим исследованиям подвела наша работа с Л. Ланцманом [69], где был рассмотрен эффект сверхтекучести на точных решениях типа монополей Богомольного – Прасада – Зоммерфельда в теориях со скалярным полем. Мы перешли к пределу конечной плотности массы скалярного поля, устремляя саму массу на бесконечность. Тогда скалярное поле, исчезая из спектра состояний теории наподобие Чеширского кота, оставило после себя три «улыбки»: кварк-адронную дуальность (как чисто квантовый эффект деструктивной интерференции фазовых факторов топологического вырождения начальных данных), растущий потенциал адронизации (образующий мезоны и их взаимодействия типа эффективного кирального лагранжиана, как мы это показали в начале 90-х гг. вместе с В. Каллисом, Ю. Калиновским, Н. Сариковым, Д. Блашке, Г. Репке и группой И.В. Пузынина [45–57, 81]) и сверхтекучее глобальное движение глюонов (которое обеспечивает большую массу  $\eta'$ -мезона). Теория с монополюм дает уже знакомый образ реального мира физики сильных взаимодействий. Но стоило нам перейти к переменным, не зависящим от системы отсчета, как все эти три монополюсных эффекта стали описываться только фазовыми факторами источников квантованных полей и вообще исчезли после перехода к источникам *эвристического* подхода, как когда-то ранее исчезли одновременные связанные состояния в *эвристической* КЭД. Вывод о том, что знакомый образ реального мира не воспроизводится полно-



стью *эвристическим* методом, наверняка бы удовлетворил И.В. Полубаринова, который к этому времени, увы, уже ушел из жизни. Ушел из жизни и Владимир Наумович Грибов. Последнюю мою встречу с Грибовым в Будапеште в 1996 г. любезно организовала Юлия Нири (с которой когда-то в далеком 1970 г. на одном совете мы защищали кандидатские). Владимир Наумович, выслушав мою краткую информацию о наших попытках в Ростове описать КХД-вакуум [55, 56] и указав сразу их недостатки, обрушил на меня экспрессивную двухчасовую лекцию о конфайнменте. И здесь он сделал мне последний подарок, отказавшись от своей старой интерпретации инстантонов и объяснив, почему они являются нефизическими решениями. Именно такое объяснение мы и использовали в упомянутой выше статье в ЯФ [69], чтобы заменить инстантоны монополями.

## 5. Коперниковская Вселенная

Один из главных итогов моих исследований калибровочных теорий — это необходимость помнить о разделении физической теории на уравнения движения и начальные данные, измеренные в определенной системе отсчета. Отсюда возник вопрос, куда отнести единицы измерения начальных данных: к уравнениям или к самим данным — и можно ли тогда написать уравнения единой теории, не зависящие от выбора единиц измерения? Такая теория возникает из стандартной модели элементарных частиц и ОТО Эйнштейна путем замены всех масс, включая массу Планка, единым скалярным дилатонным полем, при этом сама ОТО рассматривается как масштабно-инвариантная теория этого дилатонного поля, предложенная Пенроузом, Черниковым и Тагировым. Именно такую теорию мы изучали с Марексом Павловски, руководство научной работой которого я принял после ухода из жизни его первого руководителя польского физика Ричарда Рончки.

Эта была идея Рончки — отождествить такую дилатонную теорию с ОТО, и она тогда разделялась многими физиками. Симметрия рассматриваемой единой дилатонной теории с математической точки зрения позволяла сводить все уравнения этой теории к уравнениям ОТО и стандартной модели фиксацией дилатона его современным значением, которое определяется экспериментально измеряемой константой

гравитационного взаимодействия. Однако такая фиксация дилатона вводит его современное значение в уравнения движения как абсолютный параметр<sup>5</sup>, что напоминает насильственную абсолютизацию положения Земли в механике Ньютона при описании системы Птолемея. В единой дилатонной теории, которая, так же как и механика Ньютона, состоит из уравнений движения и начальных данных, существует возможность отнести массы и константу гравитационного взаимодействия не к *абсолютным константам* уравнений движения, а к *относительным параметрам* многообразия начальных данных дилатона. Именно такую, коперниковскую интерпретацию дилатона мы предложили в нашей статье [87].

Коперниковская *относительность* дилатона в единой теории открыла нам движение релятивистской Вселенной в полевым *пространстве событий* вдоль ее геодезической гиперповерхности, подобное движению релятивистской частицы в пространстве-времени Минковского вдоль ее геодезической линии.

Мы обнаружили, что причинное квантование движения релятивистской Вселенной в полевым *пространстве событий*, где дилатон играет роль полевого времени событий [88–91], по аналогии с квантованием релятивистской частицы дает возможность решения ключевых проблем энергии, времени, начальных данных для Вселенной без дополнительных предположений типа механизма инфляции [92, 93]<sup>6</sup>.

При этом закон Хаббла объясняется эволюцией дилатонных масс [87], а не расширением измеряемых длин во Вселенной, что в стандартной космологии соответствует выбору относительного эталона измерения расстояний. Вместе с Д. Блашке, Д. Беке и Д. Проскуриным мы рассмотрели в коперниковской «конформной космологии» последние данные, полученные с помощью телескопа «Хаббл», по зависимо-

---

<sup>5</sup>Критерием *абсолютности* параметра является его принадлежность законам природы, называемым уравнениями движения, а критерием *относительности* параметра является его принадлежность многообразию начальных данных.

<sup>6</sup>Эта аналогия Вселенной с частицей помогла понять космическую эволюцию как чисто релятивистский эффект, связывающий событийное время с временем геометрическим [77, 91]. Уравнения космической эволюции в однородном приближении возникали после усреднения точных уравнений по объему, а проблема горизонта объяснялась глобальной эволюцией дилатонных масс, возникающей при явном решении связей [92, 96, 98]. Космическая эволюция оказалась дилатонной версией явления сверхтекучести калибровочного поля, которое я искал более двадцати лет в теории сильных взаимодействий [68, 69].

сти красного смещения фотонов от расстояния до сверхновых, которые испускают эти фотоны. В результате оказалось, что данные по сверхновым и первичному нуклеосинтезу, пересчитанные в единицах относительного эталона длины, могут быть описаны одним режимом свободного безмассового поля, заполняющего всю Вселенную и не взаимодействующего с полями материи, а не калейдоскопом сменяющихся друг друга режимов стандартной космологии [94].

Рассматривая в работах [93–97] поведение частиц в рамках стандартной модели в ранней Вселенной, мы показали, что вся материя во Вселенной может быть объяснена ее космологическим рождением из физического вакуума<sup>7</sup>. Причем вычисленные современные значения барионной плотности, отношения чисел барионов и фотонов и температуры реликтового излучения находятся в хорошем согласии с данными наблюдений [93–97].

Было обнаружено, что космическая эволюция масс ведет к захвату космических объектов центральным полем и дает механизм образования галактик и их скоплений, при этом возникает класс существенно эллипсоидальных траекторий галактик [98–99]. Реальность таких траекторий подтверждается недавними наблюдениями группой И.Д. Караченцева анизотропии потоков хаббловских скоростей в Местной группе галактик. В конечном итоге хаос свободно движущихся частиц организуется космическим движением в конечные структуры материи, определяя даже квантование красных смещений, как было показано в наших совместных работах с польскими астрофизиками [100,101].

---

<sup>7</sup>Оказалось, что минимальная стандартная модель элементарных частиц описывает интенсивное резонансное рождение векторных  $W^-$ ,  $Z$ -бозонов из вакуума в ранней Вселенной, когда ее горизонт событий совпадает с комптоновской длиной этих бозонов. Температура бозонов возникает как константа космического движения Вселенной, определяемого по последним данным, полученным с помощью телескопа «Хаббл». Поперечные бозоны в течение их времени жизни формируют барионную асимметрию Вселенной, что является следствием поляризации этими бозонами вакуума Дирака левых фермионов согласно правилам отбора стандартной модели. Барионная асимметрия замораживается сверхслабым взаимодействием, ответственным за нарушение CP-симметрии. После распада бозонов их температура наследуется реликтовым излучением и вся последующая эволюция масс материи в постоянной холодной Вселенной повторяет известный сценарий горячей Вселенной, поскольку она определена конформно-инвариантным отношением массы к температуре.

В настоящее время накоплено достаточно фактов в пользу того, чтобы считать Вселенную ординарным физическим объектом, имеющим конечное время существования в конечном пространстве в конкретной системе отсчета, связанной с реликтовым излучением. При описании такой Вселенной возникают вопросы однозначного определения одновременного взаимодействия в космологии и отделения от калибровочных преобразований преобразования системы отсчета реликтового излучения (где родилась Вселенная) к системе отсчета приборов наблюдателя. Таким образом, я вновь возвратился к той самой задаче, которой был посвящен обзор Полубаринова по КЭД в далеком 1965 г.: однозначно определить взаимодействие и отделить преобразования систем отсчета от калибровочных преобразований для нелокальных связанных состояний типа атома водорода, с той разницей, что эта задача ставится в теории гравитации, а не в КЭД и уже не для атома водорода, а для всей Вселенной. И я вновь возвращаюсь к Игорю Васильевичу Полубаринову, разбирая его неопубликованные наброски, посвященные описанию движения ортогональных реперов в кривом пространстве-времени, и пытаюсь реализовать программу его столь значимого для меня обзора по КЭД, но уже для теории Вселенной. Но это еще предстоит сделать, а значит, и итоги подводить еще рано.

## Избранные работы

### Эйконоальное приближение

[1] ТМФ, 3 (1970) 320–325.

Квазиклассическое приближение в квантовой теории поля со статическим нуклоном.

(Совместно с Б.М. Барбашовым.)

[2] ТМФ, 4 (1970) 22–32.

Метод функционального интегрирования и эйконоальное приближение амплитуд потенциального рассеяния.

[3] ТМФ, 5 (1970) 330–342.

Приближение прямолинейных путей в квантовой теории поля.

(Совместно с Б.М. Барбашовым, С.П. Кулешовым, В.А. Матвеевым, А.Н. Сисакяном, А.Н. Тавхелидзе.)

- [4] ТМФ, 9 (1971) 264–272.  
Эйкональное представление амплитуд рассеяния дираковских частиц на произвольном потенциале.
- [5] Phys. Lett. B, 33 (1971) 484–488.  
Straight-line Paths Approximation in Quantum Field Theory.  
(In collaboration with B.M. Barbashov, S.P. Kuleshov, V.A. Matveev, A.N. Sissakian, and A.N. Tavkhelidze.)
- [6] Nuovo Cimento A, 4 (1971) 431–442.  
The Poisson Distribution of Secondary Particles in Straight-line Paths Approximation.  
(In collaboration with B.M. Barbashov, S.P. Kuleshov, V.A. Matveev, A.N. Sissakian.)
- [7] ТМФ, 10 (1972) 11–18.  
Исследование распределения вторичных частиц при высокоэнергетических адронных столкновениях в приближении прямолинейных путей.  
(Совместно с Б.М. Барбашовым, С.П. Кулешовым, В.А. Матвеевым, А.Н. Сисакяном.)
- [8] ЭЧАЯ, 4 (1973) 623–661.  
Оптическая модель сильных взаимодействий и эйкональное приближение в теории рассеяния.  
(Совместно с Б.М. Барбашовым, Д.И. Блохинцевым, В.В. Нестеренко.)
- [9] ТМФ, 29 (1976) 178–190.  
Высокоэнергетическое рассеяние частиц с аномальным магнитным моментом в квантовой теории поля.  
(Совместно с Нгуен Суан Ханом.)

## Киральная теория

- [10] Существенно нелинейная теория поля, динамические симметрии и физика пионов/Под ред. Д.И. Блохинцева. М.: Атомиздат, 1979.  
(Совместно с М.К. Волковым.)

- [11] Phys. Lett. B, 51 (1974) 356–360;  
ЯФ, 19 (1974) 652–659.  
Electromagnetic Pion Formfactor.  
(In collaboration with M.K. Volkov.)
- [12] ЯФ, 20 (1974) 762–774.  
Низкоэнергетическое рассеяние массивных пионов.  
(Совместно с М.К. Волковым.)
- [13] Phys. Lett. B, 51 (1974) 399–401;  
ЯФ, 21 (1975) 214–218.  
 $K_L - K_S$  Mass Difference.  
(In collaboration with M.K. Volkov.)
- [14] Phys. Lett. B, 55 (1975) 405–408.  
Pion Polarizability in Chiral Quantum Field Theory.  
(In collaboration with M.K. Volkov.)
- [15] ЯФ, 22 (1975) 346–355.  
Вычисление амплитуды  $\gamma\gamma - \pi\pi$  в квантовой киральной теории.  
(Совместно с М.К. Волковым.)
- [16] Phys. Lett. B, 58 (1975) 74–78.  
Description of Pion Decays in Quantum Chiral Theory.  
(In collaboration with M.K. Volkov.)
- [17] Nuovo Cimento A, 27 (1975) 277–293.  
Description of  $\pi\pi$  Scattering and the Pion Electromagnetic Properties  
in Quantum Chiral Field Theory.  
(In collaboration with M.K. Volkov.)
- [18] Phys. Lett. B, 58 (1975) 177–179.  
Electromagnetic Interactions of Kaons.  
(In collaboration with M.K. Volkov.)
- [19] ЭЧАЯ, 6 (1975) 632–668.  
Описание низкоэнергетических процессов в квантовой киральной  
теории.  
(Совместно с М.К. Волковым.)
- [20] ТМФ, 22 (1975) 291–299.  
О квантовании киральных теорий.

- [21] Phys. Lett. B, 64 (1976) 201–202.  
*K* Decay in Quantum Field Theory with Chiral Symmetry.  
(In collaboration with D.I. Kazakov and M.K. Volkov.)
- [22] УФН, 120 (1976) 363–391.  
Квантовая теория поля с киральным лагранжианом и низкоэнергетическая физика мезонов.  
(Совместно с М.К. Волковым.)
- [23] ТМФ, 28 (1976) 46–55.  
Перенормировка в нелинейной киральной теории.  
(Совместно с М.К. Волковым и Д.И. Казаковым.)
- [24] ТМФ, 27 (1976) 16–23.  
Динамическая аффинная симметрия и ковариантная теория возмущений для гравитации.
- [25] Dynamical Breakdown of Chiral Symmetry and Abnormal Perturbation Expansions.  
JINR Commun. E2-10020. Dubna, 1976.  
(In collaboration with D. Ebert.)
- [26] ТМФ, 31 (1977) 168–175.  
Инвариантная перенормировка теорий с нелинейной симметрией.  
(Совместно с Д.И. Казаковым и С.В. Пушкиным.)
- [27] ТМФ, 36 (1978) 313–323.  
Спектр дикварков в двухразмерной КХД.  
(Совместно с Д. Эбертом.)
- [28] J. Phys. A. Math. Gen., 11 (1978) 2093–2105.  
An Invariant Renormalization Method for Non-Linear Realizations of Dynamical Symmetry.  
(In collaboration with D.I. Kazakov and S.V. Pushkin.)
- [29] J. Phys. A. Math. Gen., 12 (1979) 1499–1510.  
Dynamical Affine Symmetry and Renormalization in Gravity.  
(In collaboration with G.V. Isaev and S.V. Pushkin.)

- [30] ЭЧАЯ, 10 (1979) 1114–1155.  
Континуальный интеграл в коллективных переменных и его применение в ядерной и адронной физике.  
(Совместно с Х. Рейнхардом и Д. Эбертом.)
- [31] ЯФ, 32 (1980) 212–219.  
Фазы и длины  $\pi\pi$ -рассеяния в теории с нарушенной киральной симметрией.  
(Совместно с А.А. Бельковым и С.А. Бунятовым.)
- [32] ЯФ, 32 (1980) 1111–1125.  
Полные сечения реакций  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$  вблизи порога в теории нарушенной киральной симметрии.  
(Совместно с А.А. Бельковым и С.А. Бунятовым.)
- [33] ЯФ, 32 (1980) 1053–1058.  
О возможном изучении поляризуемости пионов в реакции радиационного рассеяния на ядрах при высоких энергиях.  
(Совместно с А.С. Гальпериным, А.А. Ольшевским и Г.В. Мицельмахером.)
- [34] ЯФ, 37 (1983) 945–948.  
Перерассеяние пионов в комптон-эффekte.  
(Совместно с Г.В. Мицельмахером.)
- [35] ЯФ, 40 (1984) 966–973.  
О фоторождении пионных пар в ядерном кулоновском поле.  
(Совместно с А.А. Бельковым.)
- [36] ЯФ, 40 (1984) 1483–1494.  
О возможном изучении электромагнитных свойств нейтрального пиона на встречных электрон-позитронных пучках.  
(Совместно с А.А. Бельковым и Э.А. Кураевым.)
- [37] ЯФ, 44 (1986) 466–470.  
Свойства  $\pi\pi$ - и  $K\pi$ -мезонных атомов и параметры мезонного взаимодействия.  
(Совместно с А.А. Бельковым и Ф.Г. Ткебучавой.)
- [38] ЯФ, 44 (1986) 690–696.  
Киральное описание радиационных распадов заряженных каонов.  
(Совместно с А.А. Бельковым, Ю.Л. Калиновским и Н.А. Сариковым.)



- [39] Phys. Lett. B, 180 (1986) 141–145.  
 Nonleptonic Decays of Charmed Baryon in the Generalized Chiral Lagrangian Method.  
 (In collaboration with Yu.L. Kalinovsky and N.A. Sarikov.)
- [40] Phys. Lett. B, 166 (1986) 351–354.  
 Nonleptonic Decays of Baryons in Chiral Theory.  
 (In collaboration with N.A. Sarikov.)
- [41] ЯФ, 45 (1987) 1135–1137.  
 Киральные  $P^4$ -лагранжианы и амплитуда распада  $\eta^1 - \eta^2 \pi$ .  
 (Совместно с А.А. Бельковым.)
- [42] ЯФ, 45 (1987) 535–539.  
 Метод жестких мезонов в киральной теории  $SU(4) \times SU(4)$ .  
 (Совместно с Ю.Л. Калиновским и Н.А. Сариковым.)
- [43] Zeitschrift fur Physik, Ser. C: Particle and Fields, 35 (1987) 383–387.  
 Parameter of the  $\rho - A_1$  Sector with Improved Weinberg Relation from a Modern Chiral Lagrangian.  
 (In collaboration with D. Ebert and L. Kaschluhn.)
- [44] ЭЧАЯ, 19 (1988) 111–138.  
 Киральная феноменология слабых распадов очарованных барионов.  
 (Совместно с Ю.Л. Калиновским, Н.А. Сариковым, Г.Г. Тахтамышевым.)
- [45] ЯФ, 49 (1989) 1709–1717.  
 Билокальные мезонные лагранжианы и потенциальная модель.  
 (Совместно с Ю.Л. Калиновским, В. Каллисом, Б.Н. Курановым и Н.А. Сариковым.)
- [46] Phys. Lett. B, 231 (1989) 288–292.  
 Mesons in the Low-Energy Limit of QCD.  
 (In collaboration with Yu.L. Kalinovsky and L. Kaschluhn.)
- [47] Acta Phys. Polonica B, 21 (1990) 139–148.  
 How does the Gluon Propagate?  
 (In collaboration with A.A. Bogolubskaya, Yu.L. Kalinovsky, W. Kallies.)
- [48] Nuclear Phys. B (Proc. Sup ), 15 (1990) 197–206.  
 Hadron QCD (Bound States in Gauge Theories).

- [49] Fortschr. Phys., 38 (1990) 333–351.  
Can QCD be a Perturbative Theory for Hadrons?  
(In collaboration with Yu.L. Kalinovsky, W. Kallies, N.A. Sarikov.)
- [50] Fortschr. Phys., 38 (1990) 353–369.  
The Low-Energy Limit of a Bilocal QCD.  
(In collaboration with Yu.L. Kalinovsky and L. Kaschluhn.)
- [51] Can. J. Phys., 69 (1991) 684–691.  
Hadronization and Confinement in QCD.  
(In collaboration with Nguyen Suan Han.)
- [52] Few-Body System, 10 (1991) 87–104.  
Relativistic Bound State in QCD.  
(In collaboration with Yu.L. Kalinovsky, W. Kallies, L. Kaschluhn, L. Münchow, and N.A. Sarikov.)
- [53] Z. Phys. A, 346 (1993) 85–86.  
On the Chiral Transition Temperature in Nonlocal Effective QCD.  
(In collaboration with D. Blaschke, Yu.L. Kalinovsky, S. Schmidt, and G. Röpke.)
- [54] Nucl. Phys. A, 586 (1995) 711–733.  
Instantaneous Chiral Quark Model for Relativistic Mesons in a Hot and Dense Medium.  
(In collaboration with D. Blaschke, Yu.L. Kalinovsky, L. Münchow, G. Röpke, and S. Schmidt.)
- [55] Phys. Lett. B, 397 (1997) 129–132.  
Squeezed condensate of gluons and  $\eta - \eta'$  mass difference.  
(In collaboration with D. Blaschke, H.-P. Pavel, G. Röpke, and M.K. Volkov.)
- [56] Int. J. Mod. Phys. A, 14 (1999) 205–224.  
Squeezed gluon condensate and quark confinement in the global color model of QCD.  
(In collaboration with H.-P. Pavel, D. Blaschke, and G. Röpke.)
- [57] ЭЧАЯ, 30 (1999) 87–117.  
Обобщенный непрерывный аналог ньютоновского метода для численного изучения некоторых нелинейных квантово-полевых моделей.

(Совместно с И.В. Пузыниным, И.В. Амирхановым, Е.В. Земляной, Т.П. Пузыниной, Т.А. Стриж и В.Д. Лахно.)

## Глобальное возбуждение калибровочных полей

- [58] ТМФ, 45 (1980) 394–407.  
Квантовая хромодинамика как микроскопическая теория сверхтекучести.
- [59] ЯФ, 36 (1982) 263–273.  
Спиноры в самодуальном поле Янга–Миллса пространстве Минковского.
- [60] Z. Phys. C.: Particles and Fields, 22 (1984) 397–401.  
Spinor Analysis of the Yang–Mills Theory in Minkowski Space.  
(In collaboration with J. Horejsi.)
- [61] ЯФ, 39 (1984) 1011–1020.  
Квантовые эффекты в модели Швингера.  
(Совместно с Н.И. Илиевой.)
- [62] Riv. Nuovo Cimento, 10 (1985) 1–48.  
On the Vacuum in the Gauge Theories.
- [63] ТМФ, 45 (1986) 349–360.  
Калибровочно-инвариантные переменные и инфракрасный конфаинмент в КХД.  
(Совместно с Р.И. Азимовым.)
- [64] On Topological Vacuum Degeneration in Gauge Theories Group Theoretical Methods in Physics, Ed. M. Markov, V. Man'ko, E. Shabad. London: Harwood Acad. Publishers, 1986. P. 309–316.
- [65] ЭЧАЯ, 22 (1991) 573–614.  
Минимальное квантование двух размерных калибровочных теорий.  
(Совместно с Н. Илиевой.)
- [66] Int. J. Mod. Phys. A, 6 (1991) 4687–4697.  
Gauge-Field Topology in Two-Dimensions:  $\theta$ -Vacuum, Topological

Phase, and Composite Fields.

(In collaboration with N. Ilieva.)

[67] *Helv. Phys. Acta*, 67 (1994) 637–647.

Zero Modes of Gauss' Constraint in Gaugeless Reduction of Yang–Mills Theory.

(In collaboration with A.M. Khvedelidze.)

[68] *Int. J. Mod. Phys. A*, 14 (1999) 3531–3542.

Dirac variables and zero modes of Gauss constraint in finite volume two-dimensional QED.

(In collaboration with S. Gogilidze and N. Ilieva.)

[69] *ЯФ*, 66 (2003) 1416–1425.

Монопольный вакуум в неабелевых теориях.

(Совместно с Л.Д. Ланцманом.)

## Квантование калибровочных теорий

[70] *Phys. Lett. B*, 147 (1984) 76–80.

Quantum Supertwistors and Fundamental Superspaces.

(In collaboration with L.B. Litov.)

[71] *ЯФ*, 45 (1987) 1169–1176.

Гамильтонова формулировка калибровочных теорий с явным решением уравнений связи.

(Совместно с Н.И. Илиевой и Нгуен Суан Ханом.)

[72] *Mod. Phys. Lett. A*, 2 (1987) 367–371.

Operator Foundation of Functional Integral in Non-Abelian Gauge Theory.

(In collaboration with Nguyen Suan Han.)

[73] *Fortschr. Phys.*, 37 (1989) 611–655.

Gauge-Invariant Quantization of Abelian and Non-Abelian Theories.

(In collaboration with Nguyen Suan Han.)

[74] *ЯФ*, 56 (1993) 62–75.

Уравнение для квазирадиальной функции в импульсном представ-

лении на трехмерной сфере.

(Совместно с С.И. Виночкиным, Г.С. Погосьяном и А.Н. Сисакяном.)

- [75] Phys. Lett. B, 363 (1995) 76–78.  
Covariant Gauges for Constrained Systems.  
(In collaboration with S.A. Gogilidze and A.M. Khvedelidze.)
- [76] Phys. Rev. D, 53 (1996) 1111.  
On Admissible Gauges for Constrained Systems.  
(In collaboration with S.A. Gogilidze and A.M. Khvedelidze.)
- [77] J. Math. Phys. B, 37 (1996) 1760–1771.  
On Abelianization of First Class Constraints.  
(In collaboration with S.A. Gogilidze and A.M. Khvedelidze.)
- [78] ЭЧАЯ, 30 (1999) 66–85.  
Редукция в системах с локальной симметрией.  
(Совместно с С.А. Гогилидзе и А.М. Хведелидзе.)
- [79] Int. J. Mod. Phys. A, 14 (1999) 2285–2308.  
Reduced phase space quantization of massive vector theory.  
(In collaboration with H.-P. Pavel.)
- [80] ЭЧАЯ, 34 (2003) 738.  
Предисловие к обзору И.В. Полубаринова «Уравнения квантовой электродинамики».
- [81] Phys. of Part. and Nucl., 34 (2003) 678–737.  
Dirac Variables in Gauge Theories.

## Гравитация и космология

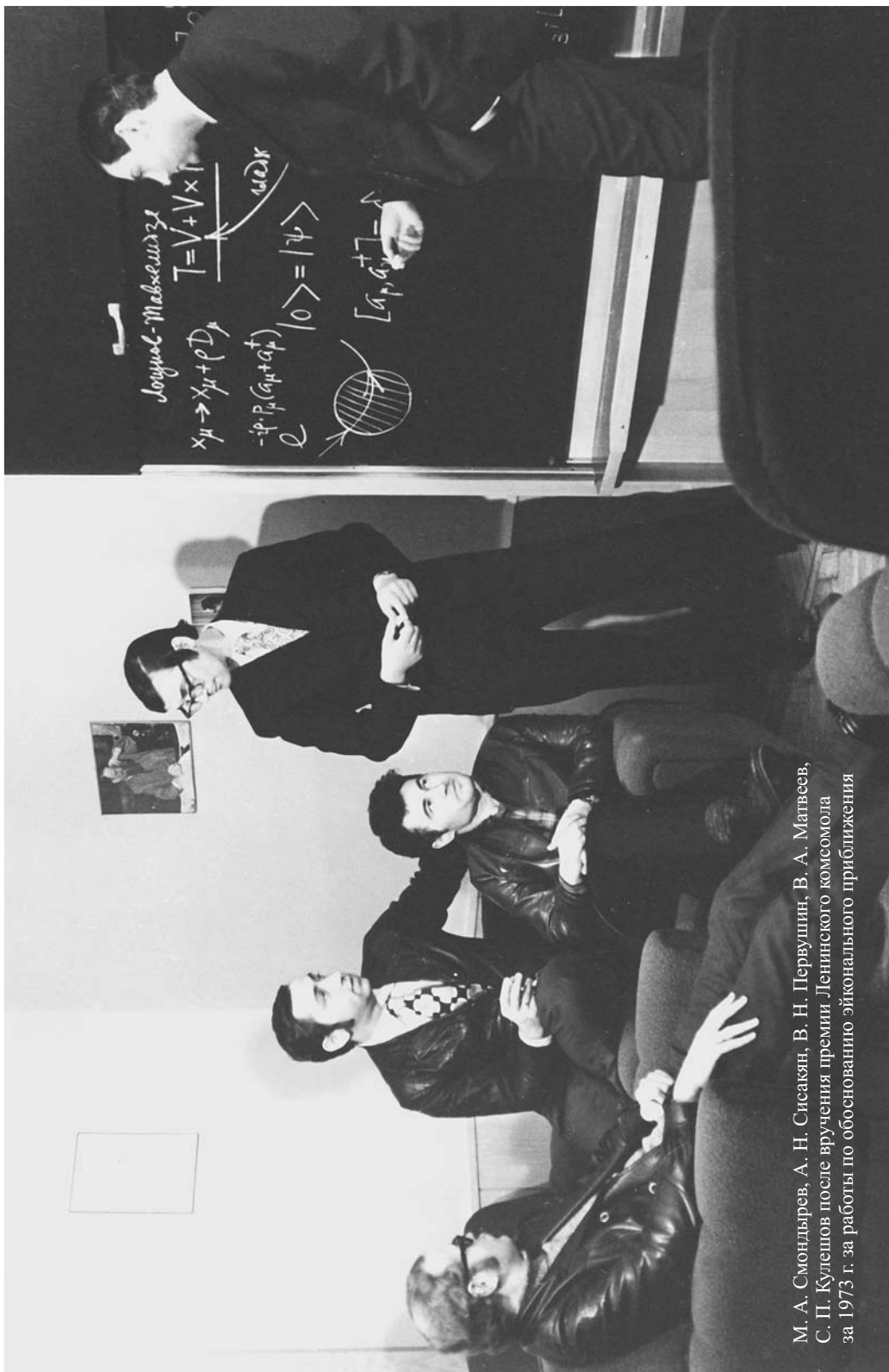
- [82] Phys. Rev. D, 51 (1995) 5654–5663.  
Gaugeless Reduction of Gravity and Evolution of Universe.  
(In collaboration with A.M. Khvedelidze and V.V. Papoyan.)
- [83] Phys. Lett. B, 365 (1996) 35–40.  
The Time Surface Term In Quantum Gravity.  
(In collaboration with S.A. Gogilidze, A.M. Khvedelidze, Yu.G. Palii, V.V. Papoyan, and V.I. Smirichinskii.)

- [84] Phys. Lett. B, 402 (1997) 263–269.  
Description of the Friedmann Observables in Quantum Universe.  
(In collaboration with A.M. Khvedelidze, Yu.G. Palii, and V.V. Papoyan.)
- [85] Mod. Phys. Lett. A, 13 (1998) 119–125.  
Conformal Symmetry and Higgs Effect in Quantum Cosmology.  
(In collaboration with V.I. Smirichinski.)
- [86] General Relativity and Gravitation, 37 (1998) 128–138.  
Proper Time Dynamics in General Relativity and Conformal Unified Theory.  
(In collaboration with L.N. Gyngazov, M. Pawlowski, and V.I. Smirichinski.)
- [87] Phys. Lett. B, 418 (1998) 263–269.  
Conformal Unification of General Relativity and Standard Model for Strong and Electroweak Interactions.  
(In collaboration with M. Pawlowski, V.V. Papoyan, and V.I. Smirichinski.)
- [88] J. Phys. A: Math. Gen., 32 (1999) 6191–6201.  
Bogoliubov quasiparticles in constrained systems.  
(In collaboration with V. I. Smirichinski.)
- [89] ЯФ, 61 (1998) 142–147.  
Динамика уравнений Эйнштейна в терминах собственных значений первой и второй кривизн.  
(Совместно с В.И. Смиричинским.)
- [90] ЯФ, 61 (1998) 642–647.  
Шпур внешней кривизны и динамика уравнений Эйнштейна.  
(Совместно с В.И. Смиричинским.)
- [91] Int. J. Mod. Phys. A, 16 (2001) 1715.  
Reparametrization-Invariant Path Integral in GR and “Big Bang” of Quantum Universe.  
(In collaboration with M. Pawlowski.)
- [92] ТМФ, 132 (2002) 181–197.  
Физические координаты как динамические переменные в релятивистских теориях.  
(Совместно с Б.М. Барбашовым и Д.В. Проскуриным.)

- [93] *Gravitation & Cosmology*, 8 (2002) 181–193.  
Cosmological Particle Origin in Standard Model.  
(In collaboration with D. Proskurin and A. Gusev.)
- [94] *Phys. Lett. B*, 530 (2002) 20–26.  
Description of Supernova Data in Conformal Cosmology without Cos-  
mological Constant.  
(In collaboration with D. Behnke, D.V. Blaschke, and D. Proskurin.)
- [95] *ЭЧАЯ*, 34 (2003) 138–189.  
Экскурс в современную космологию.  
(Совместно с Б.М. Барбашовым и Д.В. Проскуриным.)
- [96] *ЯФ*, 67 № 5 (2004) 1074–1086.  
Космологическое рождение векторных бозонов и реликтовое излу-  
чение.  
(Совместно с Д. Блашке, Д.В. Проскуриным, В.И. Веницким и А.А. Гу-  
севым.)
- [97] *Acta Physica Slovakia*, 53 (2003) 237–243.  
Early Universe as a  $W$ -,  $Z$ -Factory.
- [98] Proc. of Joint Intern. Conf. «New Geometry of Nature», Kazan State  
University, Kazan, Russia, August 25 – September 5, 2003, v. III., 9.  
On the alignment of cosmic anisotropies.  
(In collaboration with K. Bajan and P. Flin.)
- [99] *Astrophysics*, 47 (2004) 242–247, astro-ph/0301543.  
The Universe evolution as possible mechanism of formation of galaxies  
and their clusters.  
(In collaboration with A. Gusev, P. Flin, S. Vinitzky and A. Zorin.)
- [100] *Part. Nucl. Lett.*, 119 (2004) 65–71, astro-ph/0206114.  
Newtonian motion as origin of anisotropy of the local velocity field of  
galaxies.  
(In collaboration with M. Biernacka, P. Flin, and A. Zorin.)
- [101] *Phys. Part. Nucl.*, 35 (2004) 178–186.  
In search for quasar redshift periodicity.  
(In collaboration with K. Bajan, P. Flin, and W. Godlowski.)







М. А. Смондырев, А. Н. Сисякин, В. Н. Перушкин, В. А. Матвеев,  
С. П. Кулешов после вручения премии Ленинского комсомола  
за 1973 г. за работы по обоснованию эйконального приближения



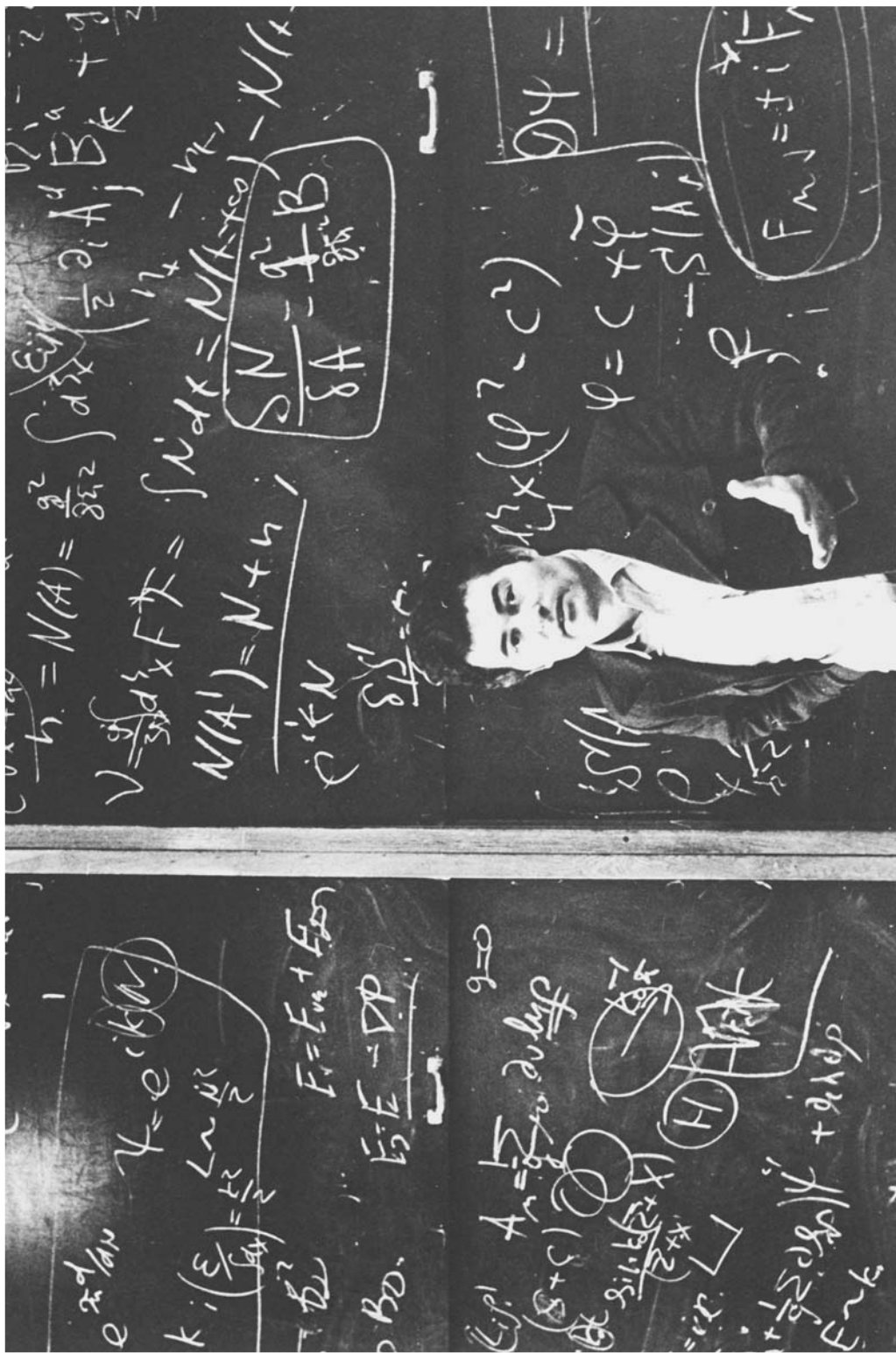
От вулканов Камчатки —  
покорять вершины науки (МГУ, май 1962 г.)



Гимнастика (МГУ, 1968 г.)

и труд (ЛЭП-500, Кемерово, 1969 г.)



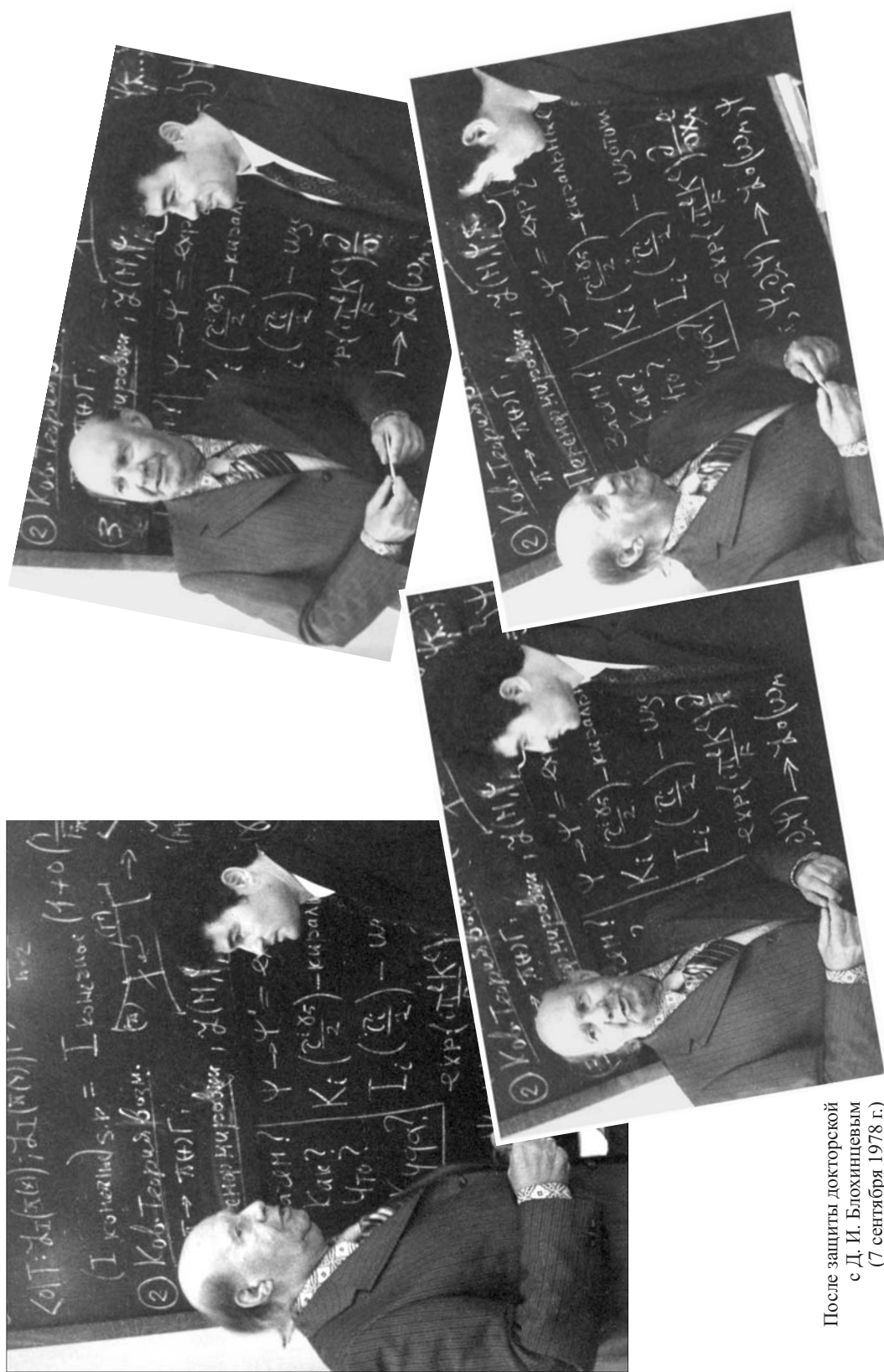


Дайте мне начальные данные... (Дубна, 1979 г.)



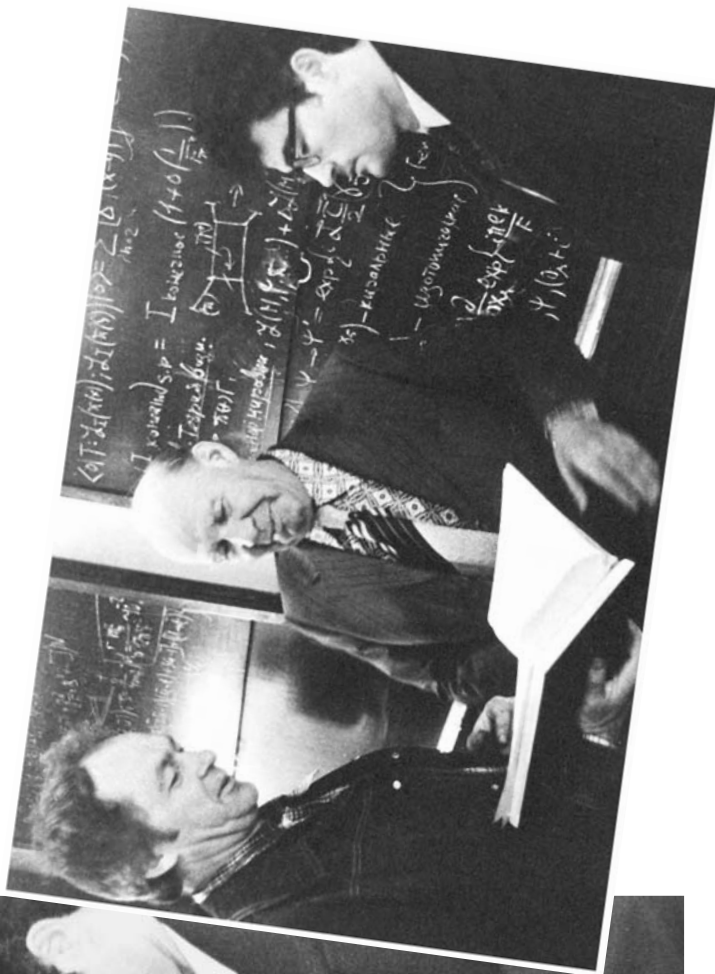


Субботник на ИБР-2, 1977 г.



После защиты докторской  
с Д. И. Блохиным  
(7 сентября 1978 г.)

С. Д. И. Блохинцевым и Г. В. Ефимовым.  
Планы на будущее (1978 г.)







Можно ли удивить А. Салама? (1993 г.)





Дискуссии на конференции в Алуште 1976 г.  
С. Л. Д. Фаддеевым



Слева направо:  
Д. В. Волков,  
В. Н. Первушин,  
М. П. Чавлейшвили,  
Я. А. Смородинский,  
В. Н. Грибов,  
А. П. Хелашвили,  
А. В. Ефремов,  
Г. А. Маханьков



Первое рабочее совещание по программе «Гейзенберг–Ландау» совместно с Университетом Роста «Сильные взаимодействия при конечных температурах» (Дубна, 1992 г.)



В. Н. Первушин, А. А. Изместьев, Г. Репке



Д. Бляшке, Л. Мюнхов, С. Шмидт, В. Н. Первушин, В. Каллис

М. В. Терентьев (ИТЭФ),  
 М. К. Волков, Д. И. Блохинцев,  
 В. Н. Первушин  
 и Г. В. Ефимов (1978 г.)







А. В. Ефремов, Д. В. Волков,  
В. Н. Первушин  
и Л. Д. Фаддеев (Алушта, 1979 г.)



Сученицей Невеной Илиевой  
(Алушта, 1979 г.)



Дискуссии во время конференции «Наука. Философия. Религия», 1993 г.





2-я конференция  
«Наука. Философия.  
Религия» (НФР),  
1991 г.



Открытие 3-й конференции  
НФР в 1992 г.

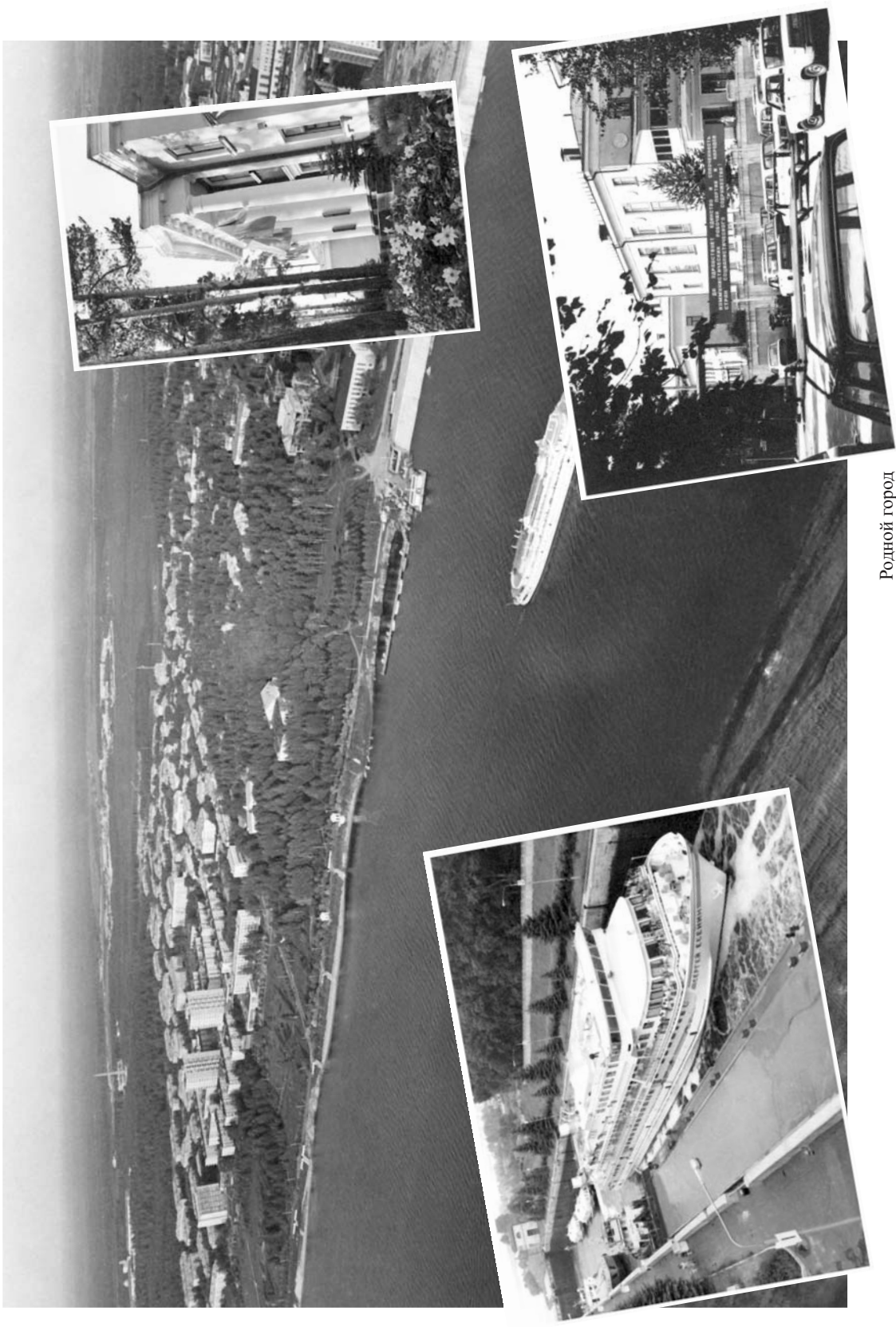


4-я конференция НФР в 1993 г.



Коллеги и ученики (слева направо): Г. С. Погосян, А. П. Исаев, С. И. Виницкий, В. Н. Первушин, А. Г. Зорин, А. Н. Сисакян, Г. А. Козлов, В. А. Зинчук, Ю. Г. Палий, А. А. Гусев, Д. В. Проскурин





Родной город





На школе молодых ученых



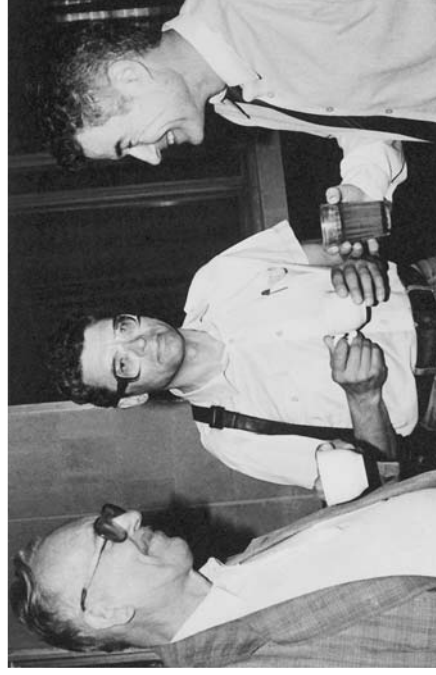
Истина рождается  
в процессе дискуссий.  
С Б. Ролликом (1994 г.)



С Д. Эбертом, В. Г. Кадлышевским (1994 г.)



С Д. В. Волковым (1979 г.)



С Д. В. Ширковым, М. К. Волковым





Последние руководящие указания.  
Вверху: В. Г. Кадлышевский, Ю. С. Владимирков;  
внизу: В. А. Никитин и А. И. Осипов (МДА, Сергиев Посад)



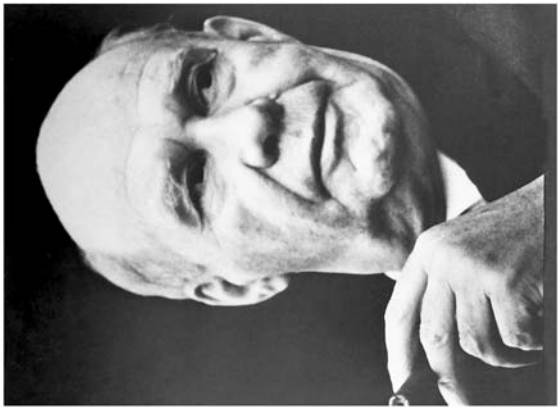
3-е рабочее совещание по программе «Гейзенберг–Ландау»







Фотопробы у Ю. А. Туманова



Конференция, посвященная 95-летию Д. И. Блохинцева, 2003 г.







После доклада на семинаре памяти Д. И. Блохинцева, 2004 г.

# Космическая эволюция галактик в относительных единицах

Б.М. Барбашов<sup>a,1</sup>, А.Г. Зорин<sup>a</sup>, В.Н. Первушин<sup>a,2</sup>,  
П. Флин<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>b</sup> Свентокшиская академия, Институт физики, Кельце, Польша

Обсуждается влияние эволюции Вселенной на движение космических объектов в центральном гравитационном поле. Показано, что космическая эволюция масс ведет к захвату галактик их скоплениями. Граница применимости стандартного ньютоновского приближения находится на расстоянии порядка размера сверхскоплений галактик (10 Мпк). Для таких объектов нарушается теорема вириала при вычислении орбитальных скоростей космических объектов, так как эволюция Вселенной дает вклад в значения орбитальных скоростей, который обычно приписывают темной материи. Полученные ротационные кривые показывают, что дефицит видимой барионной материи для сверхскоплений с массой  $M \sim 10^{15} M_{\odot}$  может быть уменьшен для конформной космологии, в которой конформные величины определяются как наблюдаемые с относительными эталонами измерения интервалов, в то время как для стандартной космологии этот дефицит становится гораздо больше.

Influence of the expanding Universe on the motion of cosmic objects in central gravitational field is discussed. It was shown that the cosmic evolution leads to the capture of galaxies by their clusters. The range of the validity of the conventional Newtonian mechanics for the expanding Universe is determined, and it is at the distance of the order of the size of superclusters. For such objects the virial theorem for orbital velocities is violated as the Universe evolution contributes to values of these velocities inscribed to Dark Matter. The

---

<sup>1</sup>E-mail: barbash@thsun1.jinr.ru

<sup>2</sup>E-mail: pervush@thsun1.jinr.ru

obtained rotational curves show us that the deficit of the visible baryon matter for superclusters  $M \sim 10^{15} M_{\odot}$  can be decreased in the version of cosmology where observational quantities are identified with the conformal ones.

## Введение

В последние годы, начиная с 1998-го, были получены новые данные [1, 2] для больших значений красного смещения  $z \sim 1$ ,  $z = 1, 7$ . Эти данные отражают состояние «вещества», которое даёт основной вклад в космическую эволюцию на расстояниях, сравнимых с размером Вселенной, и свидетельствуют о том, что наша Вселенная заполнена в основном не массивной «пылью» далеких и потому невидимых галактик, а загадочным веществом совершенно другой природы, с другим уравнением состояния, названным *квинтэссенцией* [3, 4]. Все эти данные принято интерпретировать во фридмановской космологии [5], основывающейся на общей теории относительности, как свидетельства расширяющейся Вселенной [6], уравнения эволюции которой определяются в основном так называемым  $\Lambda$ -членом в действии Эйнштейна.

В работах [7–11] была предложена другая точка зрения на эволюцию Вселенной, без введения  $\Lambda$ -члена, согласно которой последние данные в современной астрофизике свидетельствуют скорее о конформной симметрии законов природы, их независимости от выбора единиц измерения, что означает эволюцию всех масс, включая массу Планка. Спектр фотонов, испущенных атомами на далеких звездах миллиарды лет тому назад, запоминает размеры атомов, которые определялись их массами в то далекое время, и этот спектр сравнивается со спектром таких же атомов на Земле, но с увеличенной массой. В результате наблюдается красное смещение спектральных линий атомов на звездах. Оказалось, что в теории, где конформные величины отождествляются с наблюдаемыми, данные по зависимости красного смещения от расстояния до сверхновых и данные по нуклеосинтезу соответствуют одному и тому же предельно жесткому уравнению состояния [9].

Если отождествить наблюдаемые величины с конформными величинами (конформным временем, конформной плотностью, конформной температурой и бегущей массой Планка), то эволюция длин в кос-

мологии заменяется на эволюцию масс. Такое отождествление означает выбор уравнений общей теории относительности (ОТО) и стандартной модели (СМ) в конформно-инвариантной форме, где космический масштабный фактор масштабирует все массы, включая планковскую, и они же становятся начальными или современными данными. В этом случае планковская эпоха в ранней Вселенной теряет свою абсолютную предопределенность. Было показано [11, 12], что в том же режиме предельно жесткого уравнения состояния ранняя Вселенная является фабрикой космологического рождения массивных векторных бозонов из вакуума, когда комптоновская длина волны этих бозонов совпадает с горизонтом событий ранней Вселенной, поэтому конформно-инвариантные версии стандартной модели и общей теории относительности могут в принципе объяснить происхождение наблюдаемой материи как конечного продукта распада первичных бозонов.

В работе обсуждаются теоретические аргументы и наблюдательные факты в пользу конформной интерпретации современных астрофизических данных. В частности, рассмотрено движение космических объектов в центральном поле с учетом эволюции Вселенной и показано, что выводы конформной космологии говорят в пользу значительного уменьшения дефицита темной материи в сверхскоплениях галактик.

В разд. 1 рассматриваются конформно-инвариантные версии стандартной модели и общей теории относительности. В разд. 2 обсуждается смысл космической эволюции в рассматриваемой теории. В разд. 3 полученное решение уравнений Ньютона в расширяющейся Вселенной применяется для описания эволюции галактик.

## **1. Конформно-инвариантные версии стандартной модели и общей теории относительности**

### **1.1. Действие**

Действие ОТО и СМ можно записать в конформно-инвариантной форме, не зависящей от выбора единиц измерения с дилатоном  $w$  вме-

СТО масс:

$$S_{\text{CT}} = S_{\text{dilaton}} + \int d^4x \sqrt{-g} w^2 \partial_\mu Q \partial^\mu Q - \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\lambda}{4} [|\Phi_{\text{Higgs}}|^2 - y_h^2 w^2]^2 + S_{\text{SM}}[\lambda = 0], \quad (1)$$

здесь роль действия ОТО играет конформно-инвариантное действие [13] для скалярного поля — дилатона  $w$ :

$$S_{\text{dilaton}} = \int d^4x \left[ -\sqrt{-g} \frac{w^2 R(g)}{6} + w \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu w) \right], \quad (2)$$

заданного в пространстве с интервалом

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3)$$

Хиггсовская масса  $M_{\text{Higgs}}$  в действии СМ  $S_{\text{SM}}$  с набором полей  $f$ , включая фермионные и векторные поля, заменяется дилатоном  $(y_h w)$ , умноженным на константу  $y_h \sim 10^{-17}$ .  $Q$  — это скалярное поле с минимальным взаимодействием, которое интерпретируется как конформно-инвариантный угол смешивания двух дилатонных скалярных полей  $w_+ = w \operatorname{ch} Q$  и  $w_- = w \operatorname{sh} Q$ , заданных в 2-мерном пространстве с сигнатурой  $(+, -)$  [10].

Теория (1) инвариантна относительно конформных преобразований, включающих масштабные преобразования всех полей  $[w, F = g_{\mu\nu}, Q, f]$ :

$${}^{(n)}F_\Omega = {}^{(n)}F \cdot (\Omega)^n, \quad w_\Omega = \frac{w}{\Omega}, \quad (4)$$

где  $(n)$  — конформный вес поля  $F$ , а  $\Omega$  — параметр преобразования.

## 1.2. Переменные

Принято считать [14], что действие ОТО и СМ возникает из действия (1) как следствие выбора наблюдаемых переменных

$${}^{(n)}F_{\text{ОТО}} = {}^{(n)}F \cdot (w/\varphi_0)^n, \quad w_{\text{ОТО}}(x^0, x^i) = \varphi_0 = M_{\text{Planck}}(8\pi/3)^{1/2}. \quad (5)$$

Такой выбор наблюдаемых устраняет из действия (1) лишнюю степень свободы  $w$  с отрицательной вероятностью, заменяя ее абсолютным параметром  $\varphi_0$ , какого не было в исходной теории (1), но который

дает повод ввести так называемую планковскую эпоху возникновения Вселенной и утверждать, что из этой эпохи возникла современная Вселенная [14]. Замена переменных (5) интерпретируется как спонтанное нарушение масштабной инвариантности. В результате замены переменных симметрия уравнений движения теории (1) относительно масштабных преобразований (4) становится симметрией физических переменных (5). Однородное приближение метрики

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - (dx^i)^2], \quad (6)$$

где  $d\eta = N(x^0)dx^0$  есть конформное время, в такой спонтанно-нарушенной теории для переменных (5) ведет к стандартным космологическим моделям, где начальные данные планковской эпохи интерпретируются как фундаментальные величины, входящие в уравнения движения. Однако при этом возникают проблемы космических начальных данных, горизонта, однородности, а также сингулярности и квантовой волновой функции Вселенной, которые решаются на уровне однородного приближения инфляционным расширением пространства [6].

Существует мнение [15, 16], что все эти проблемы, включая появление планковской эпохи, являются следствием выбора дилатона (5) как абсолютного параметра  $\varphi_0$ , который вообще не содержится в уравнениях исходной теории (1), (2). В этой связи отметим, что такая абсолютизация современного значения дилатона (5) в (2), приводящая к действию ОТО и к предопределенности планковской эпохи, напоминает абсолютизацию современного положения Земли, которая ведет к системе Птолемея. Поэтому в работах [8, 9, 17] была предложена другая (коперниковская) интерпретация дилатона как динамической переменной:

$$w(x^0, x^i) = \varphi(x^0). \quad (7)$$

Такой выбор переменных можно рассматривать как аналог калибровки Барбашова–Черникова [16, 18], предложенной ими для релятивистской струны. Как действие релятивистской струны, так и действие теории (1) принадлежат к тому же виду, что и действие релятивистской частицы в СТО, которое задается в пространстве переменных  $[X_0|X_I]$ , называемом пространством событий. Одна из этих переменных,  $X_0$ , с отрицательным вкладом в кинетическую энергию, интерпретируется как параметр эволюции, при этом канонический импульс,

сопряженный параметру эволюции, отождествляется с наблюдаемой энергией [16].

Дилатон также можно рассматривать как однородный параметр эволюции  $\varphi$  в пространстве полевых переменных  $[\varphi|F]$ , где  $F$  — все остальные поля теории. Система полей  $[\varphi|F]$  представляет собой аналог пространства событий  $[X_0, X_i]$ , и, как было показано в работах [15, 16], введение такого полевого пространства позволяет решить проблемы энергии, времени, начальных данных, а также горизонта, однородности и сингулярности без дополнительных гипотез (типа инфляционного периода).

В работе [11] были исследованы условия, при которых происхождение материи можно объяснить в рассматривавшейся выше конформной теории космологическим рождением из вакуума первичных векторных бозонов в момент времени  $\sim 10^{-12}$  с, когда их масса порядка параметра Хаббла, и приведены аргументы в пользу того, что число пар бозонов достаточно, чтобы продукты их распада давали всю наблюдаемую материю.

После распада бозонов их температура  $(M_I^2 H_I)^{1/3} = (M_W^2 H_0)^{1/3} \simeq 2,7$  К возникает как интеграл космического движения Вселенной в результате рассеяния частиц, и эта температура наследуется реликтовым излучением. Вся последующая эволюция масс материи в постоянной холодной Вселенной повторяет известный сценарий горячей Вселенной, с тем же конформно-инвариантным отношением массы к температуре  $m/T$ , а также корневой зависимостью (9) масштабного фактора  $a = \varphi/\varphi_0$  от наблюдаемого конформного времени [10, 11].

### 1.3. Эволюция Вселенной

В однородном приближении, когда можно пренебречь обратным влиянием материи на эволюцию Вселенной, глобальное движение описывается уравнениями

$$\varphi'^2 - \varphi^2 Q'^2 = 0, \quad (\varphi^2)'' = 0 \quad (8)$$

со следующими решениями:

$$\varphi^2(\eta) = \varphi_I^2 [1 + 2H_I(\eta - \eta_I)], \quad (9)$$

$$Q' = \pm H = \pm \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{H_I}{1 + 2H_I(\eta - \eta_I)}, \quad (10)$$

где  $\varphi_I = \varphi(\eta = \eta_I)$  — начальные данные, а  $H_I = \varphi'_I/\varphi_I$  — конформный параметр Хаббла в момент времени  $\eta = \eta_I$ . Доминантность однородного скалярного поля  $Q$  (9) соответствует предельно жесткому уравнению состояния [9].

## 2. Конформная космология

### 2.1. Конформные величины и анализ астрофизических наблюдательных данных

В космологии конформное время  $d\eta = dt/a(t)$  определяется как время фотона, летящего по геодезической на мировом конусе ( $c = 1$ ):

$$(ds)^2 = (dt)^2 - a^2(t)(dr)^2 = 0, \quad (11)$$

где  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  — координатное расстояние, а  $t$  — мировое время Фридмана, входящее в интервал (6). Из (11) имеем  $dt = a(t)dr$ , отсюда можно найти связь между координатным расстоянием и конформным временем:

$$r(\eta) = \int_t^{\eta_0} \frac{dt'}{a(t')} \equiv \eta_0 - \eta, \quad (12)$$

где  $\eta_0$  — современное значение конформного времени, при котором принято  $a(\eta_0) = 1$ ; а  $\eta$  — время излучения фотона атомом на космическом объекте, находящемся на координатном расстоянии  $r$  от Земли. Отсюда следует, что  $\eta$  равно разности современного конформного времени  $\eta_0$  и времени пролета фотона до Земли, совпадающего с координатным расстоянием. Из (12) имеем

$$\eta = \eta_0 - r. \quad (13)$$

Космологический фактор в этом случае становится шкалой массы Планка:

$$M_{\text{Planck}} = \varphi_0 \sqrt{8\pi\hbar c/3} = 2,177 \cdot 10^{-8} \text{ кг}, \quad (14)$$

вместо которой удобно ввести переменную, зависящую от конформного времени:

$$\varphi(\eta) = \varphi_0 \cdot \tilde{a}(\eta), \quad \tilde{a}(\eta) = a(t). \quad (15)$$



Массы элементарных частиц также становятся динамическими переменными:

$$m(\eta) = m_0 \cdot \tilde{a}(\eta). \quad (16)$$

Такие массы определяют спектр излучения атомов в момент времени  $\eta$ , их изменение  $m'/m = a'/a \sim 10^{-42}$  ГэВ значительно меньше энергии уровня атома для  $\tilde{a}(\eta_0) = 1$  с квантовым числом  $k$ :

$$E_k^0 = -\frac{m\alpha^2}{2k^2} \sim 10^{-8} \text{ ГэВ}, \quad (17)$$

являющимся собственным значением стационарного уравнения Шредингера

$$\hat{\mathbf{E}}(p, x)\Psi^0 \equiv \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m_0} - \frac{\alpha}{r} \right] \Psi^0 = E_k^0 \Psi^0. \quad (18)$$

Спектр атома водорода с массой, зависящей от времени (16), в любой другой момент  $\eta = \eta_0 - r$  можно найти, решая квазистационарное уравнение Шредингера

$$\hat{\mathbf{E}}_c(p, x)\Psi \equiv \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m_0\tilde{a}(\eta)} - \frac{\alpha}{r} \right] \Psi = E_k(\eta)\Psi, \quad (19)$$

решением которого является спектр

$$E_k(\eta) = \tilde{a}(\eta)E_k^0, \quad (20)$$

где  $E_k^0$  — уровни атома с постоянной массой (17). Строгий вывод (20) основан на каноническом преобразовании к фридмановским переменным  $(p, x) \rightarrow (P = p/a, X = xa)$ , в результате которого нестационарное уравнение Шредингера с переменной массой  $\hat{\mathbf{E}}_c(p, x)\Psi_c = -i\partial_\eta\Psi_c$  переходит в уравнение Шредингера

$$\hat{\mathbf{E}}(P, X)\Psi = -i\partial_t\Psi - H(t)PX\Psi \quad (21)$$

с постоянной массой и дополнительным членом, исчезающим при  $H \rightarrow 0$ , где  $H(t)$  — параметр Хаббла.

Из (20) следует определение красного смещения  $z(r)$

$$z(r) + 1 = \frac{E_k(\eta_0)}{E_k(\eta_0 - r)} = \frac{1}{\tilde{a}(\eta_0 - r)} \quad (22)$$

спектральных линий атома на космическом объекте, находящемся на *координатном* расстоянии  $r$  от Земли, относительно спектральных линий земных атомов  $E_k^0 = E_k(\eta_0)$  в момент детектирования космических фотонов  $\eta_0$  (при условии  $\tilde{a}(\eta_0) = 1$ ).

## 2.2. Модели эволюции Вселенной

Рассмотрим уравнение эволюции Вселенной

$$\varphi_0^2 a'^2 = \rho_c(a), \quad (23)$$

где  $a = \varphi/\varphi_0$ , в плоском пространстве для Вселенной, заполненной однородной материей, с зависимостью конформной плотности  $\rho_c$  от масштаба  $a(\eta)$  следующего вида:

$$\rho_c(a) = \rho_{\text{rigid}} a^{-2} + \rho_{\text{rad}} + \rho_M a + \rho_\Lambda a^4, \quad (24)$$

где  $\rho_{\text{rigid}} = Q'^2 a^2 \varphi_0^2 = \text{const}$  описывает изотропный вклад сверхжесткого уравнения состояния (9), для которого плотность равна давлению:  $\rho_{\text{rigid}} = p_{\text{rigid}}$  (см. (8) и (9)) (неизотропная версия этого состояния использовалась для описания ранней Вселенной начиная с 1921 г. [19] и позднее в работах [20–22]);  $\rho_{\text{rad}}$ ,  $\rho_M$  и  $\rho_\Lambda$  необходимы в стандартном подходе для описания радиационной эпохи первичного нуклеосинтеза, вклада барионной материи и вклада скалярного поля в инфляционную эпоху.

Можно найти решения уравнения (23) в терминах конформного времени  $\eta$  с начальными данными  $a(\eta_0) = 1$ ,  $a'(\eta_0) = H_0$ :

$$\begin{aligned} a_{\text{rigid}}(\eta) &= \sqrt{1 - 2H_0 r}, & a_{\text{rad}}(\eta) &= 1 - H_0 r, \\ a_M(\eta) &= \left[1 - \frac{1}{2}H_0 r\right]^2, & a_\Lambda(\eta) &= \frac{1}{1 + H_0 r}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $r = \eta_0 - \eta$ . Подчеркнем, что в конформных переменных  $\Lambda$ -член уже не ведет к режиму инфляции.

В наблюдательной космологии плотность (24) выражается в терминах современного значения критической плотности  $\rho_{\text{cr}}$ :

$$\rho_c(a) = \rho_{\text{cr}} \Omega(a), \quad (26)$$

$$\Omega(a) = \Omega_{\text{rigid}} a^{-2} + \Omega_{\text{rad}} + \Omega_M a + \Omega_\Lambda a^4 \quad (27)$$

и относительных плотностей  $\Omega_{\text{rigid}}$ ,  $\Omega_{\text{rad}}$ ,  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$ , удовлетворяющих условию  $\Omega_{\text{rigid}} + \Omega_{\text{rad}} + \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$  [23].

Учитывая эти соотношения, уравнение эволюции масштаба (24) на геодезической светового луча  $dr/d\eta = -1$  после подстановки  $a = 1/(1+z)$  и  $\eta = \eta_0 - r$  можем представить в виде

$$\frac{1}{H_0} \frac{dz}{dr} = (1+z)^2 \sqrt{\rho_{\text{cr}} [\Omega_{\text{rigid}}(1+z)^2 + \Omega_{\text{rad}} + \Omega_M(1+z)^{-1} + \Omega_\Lambda(1+z)^{-4}]},$$

где  $H_0 = \sqrt{\rho_{\text{cr}}}/\varphi_0$ . Решение этого уравнения

$$H_0 r(z) = \int_1^{1+z} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_{\text{rigid}}x^6 + \Omega_{\text{rad}}x^4 + \Omega_Mx^3 + \Omega_\Lambda}} \quad (28)$$

определяет координатное расстояние как функцию красного смещения  $z$ , из которого следуют формулы (25) для каждого состояния. Соотношение (28) используют для определения уравнения состояния материи во Вселенной по данным астрофизических измерений красного смещения в предположении плоского пространства. Формула (28) универсальна для всех эталонов измерения, но при этом определение фридмановского расстояния  $d$  (в случае абсолютного эталона) связано с конформным расстоянием (при использовании относительного эталона) соотношением

$$d(z) = a(z)(\eta_0 - \eta) = a(z)r(z), \quad a = \frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{1}{1+z}, \quad (29)$$

следующим из определения метрики (6) и формулы (13). Формула (29) является основой наблюдательной космологии (см., например, [24]).

Таким образом, разные эталоны для одних и тех же данных по зависимости красного смещения от расстояния соответствуют разным уравнениям состояния материи во Вселенной.

Рассмотрим теперь, какому состоянию материи соответствуют данные по сверхновым для абсолютного и относительного эталонов.

### 2.3. Космологические данные по сверхновым

В эволюционирующей Вселенной в отличие от стационарной Вселенной часть фотонов теряется за время их полета до Земли. Это происходит благодаря увеличению углового размера светового конуса испущенных фотонов (абсолютный эталон) или из-за уменьшения углового размера светового конуса поглощенных фотонов (относительный эталон), как это показано на рис. 1 для обоих случаев.

Чтобы восстановить полную светимость для обоих эталонов (как абсолютного, так и относительного), мы должны умножить координатное расстояние на фактор  $(1+z)^2$  [9], поэтому наблюдательная космология использует расстояние светимости  $\ell$ , которое определяется как измеряемое расстояние ( $d$  или  $r$ ), умноженное на фактор  $(1+z)^2$

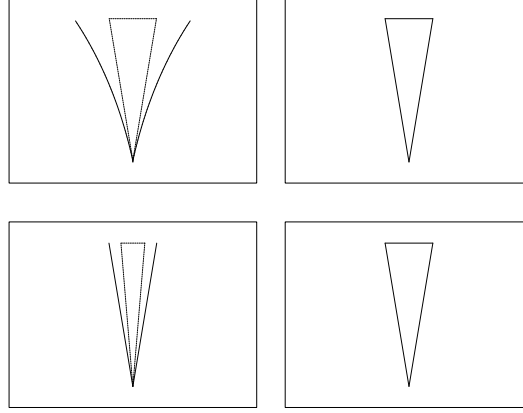


Рис. 1. Сравнение случая стационарной Вселенной (правые панели) со случаем эволюционирующей Вселенной с абсолютным эталоном (левая верхняя панель) и со случаем эволюционирующей Вселенной с относительным эталоном (левая нижняя панель)

для обоих эталонов. С учетом (29) имеем

$$\ell_{\text{абс. эт}}(z) = (1+z)^2 d(z) = (1+z)r(z), \quad (30)$$

$$\ell_{\text{отн. эт}}(z) = (1+z)^2 r(z). \quad (31)$$

В литературе первый случай отвечает стандартной космологии (SC), второй — конформной космологии (CC). Итак, для абсолютного эталона мы имеем дополнительный фактор  $(1+z)$  благодаря расширению Вселенной, а соотношения (30) и (31) означают, что наблюдательные данные описываются разными режимами для разных эталонов измерений. На рис. 2 [9] сравниваются результаты стандартной и конформной космологий для отношения между эффективной звездной величиной и красным смещением:  $m(z) = 5 \log[H_0 \ell(z)] + \mathcal{M}$ , где  $\mathcal{M}$  — константа по последним данным для сверхновых [1, 2]. Как видно из рис. 2, в области  $0 \leq z \leq 2$  наблюдательные данные, включающие последнюю точку (SN 1997ff) с  $z = 1,7$  [2], не могут отличить стандартную космологию (абсолютный эталон) с режимом

$$\Omega_{\text{rigid}} = 0, \quad \Omega_M \geq 0,15, \quad \Omega_\Lambda \leq 0,85 \quad (32)$$

от конформной космологии (относительный эталон) с режимом

$$\Omega_{\text{rigid}} \geq 0,7, \quad \Omega_M \leq 0,3, \quad \Omega_\Lambda = 0. \quad (33)$$

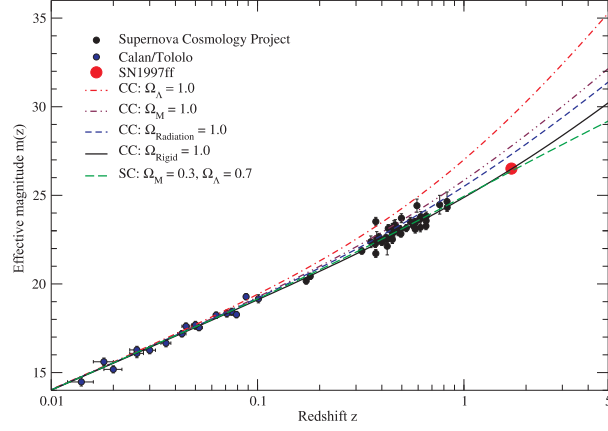


Рис. 2. Диаграмма Хаббла для плоской модели Вселенной в стандартной космологии (SC) и в конформной космологии (CC). Точки включают 42 красных смещения сверхновых [1], в том числе и самой дальней сверхновой SN 1997ff [2]. Лучшее согласие с этими данными требует космологической константы  $\Omega_\Lambda = 0,7$  и холодной материи  $\Omega = 0,3$  в случае стандартной космологии, в то время как в случае конформной космологии эти данные совместимы с режимом нуклеосинтеза и преобладанием сверхжесткого состояния свободного скалярного поля  $Q [z_{\text{cosmic}} + 1]^{-1}|_{(\text{Supernova})}(\eta) = \sqrt{1 + 2H_0(\eta - \eta_0)}$ ,  $H_0 l(z) = z + z^2/2$ ,  $m(z) = 5 \log [H_0 l(z)] + \mathcal{M}$  [10]

Далее, в случае относительного эталона измерений эволюция сверхновых не противоречит уравнению состояния первичного нуклеосинтеза с зависимостью космологического фактора от наблюдаемого времени (в данном случае — конформного) в виде (9)

$$\tilde{a}(\eta) = [z + 1]^{-1}(\eta) = \sqrt{1 + 2H_0(\eta - \eta_0)} \quad (\Omega_{\text{rigid}} = 1). \quad (34)$$

Из этого соотношения легко найти координатное расстояние  $r = \eta_0 - \eta$  как функцию  $z$ :

$$H_0 r(z) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{(1+z)^2} \right] = \frac{1}{(1+z)^2} \left( z + \frac{z^2}{2} \right), \quad (35)$$

откуда следует зависимость расстояния светимости (31) от красного смещения  $z$ :

$$\ell_{\text{отн. эт}}(z) = (1+z)^2 r(z) = \frac{1}{H_0} \left[ z + \frac{z^2}{2} \right]. \quad (36)$$

На рис. 2 функция (36), возникшая в результате решения уравнения предельно жесткого состояния (8), изображена сплошной линией и видно, что астрофизические данные по сверхновым и первичному нуклеосинтезу, пересчитанные в единицах относительного эталона, свидетельствуют: вся эволюция Вселенной происходит в режиме доминантности предельно жесткого уравнения состояния (9), (34) с относительной плотностью

$$\rho_{\text{rigid}}(\varphi) = \frac{\rho_{\text{cr}}}{a^2} = \frac{H_0^2 \varphi_0^2}{a^2} = \frac{H_0^2 \varphi_0^4}{\varphi^2}, \quad (37)$$

она сингулярна при нулевом значении масштабного фактора. Если эта плотность доминирует в современную эпоху, то она же доминировала и в первичную эпоху ранней Вселенной, для которой решение (34)

$$\varphi(\eta) = \varphi_I \sqrt{1 + 2H_I \eta} \quad (38)$$

выражается через начальные данные

$$\varphi_I = \varphi(\eta = 0), \quad H_I = \varphi'(0)/\varphi(0), \quad \rho_{\text{cr}I} = H_I^2 \varphi_I^2, \quad (39)$$

которые связаны с современными значениями  $\varphi_0 = \varphi(\eta_0)$ ,  $H_0 = \varphi'(\eta_0)/\varphi(\eta_0)$ ,  $\rho_{\text{cr}}$  соотношениями

$$H_I^4 \varphi_I^2 = H_0^4 \varphi_0^2 = H_I^2 \rho_{\text{cr}I}. \quad (40)$$

Обратимся теперь к эволюции галактик.

### 3. Космическая эволюция галактик

#### 3.1. Свободное движение в конформно-плоской метрике

Рассмотрим класс конформно-плоских метрик с интервалом

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - dx_i^2] = g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu, \quad (41)$$

где  $\eta$  — конформное время,  $x_1, x_2, x_3$  — конформные координаты, а  $a(\eta)$  — конформный масштабный фактор, временная зависимость которого определяется уравнением (23).

Квантовая полевая теория в такой метрике рассматривалась в [17, 25], где было показано, что в конформно-плоской метрике (41) одно-частичная энергия  $E = p_0$  определяется связью

$$p_\mu g_0^{\mu\nu} p_\nu - m^2(\eta) = 0, \quad (42)$$

откуда следует, что

$$p_0 = \sqrt{p^2 + m^2(\eta)} \simeq m(\eta) + \frac{p^2}{2m(\eta)}, \quad (43)$$

где  $m(\eta) = m_0 a(\eta)$  — бегущая масса.

Поэтому квантовая теория поля в конформно-плоской метрике в нерелятивистском пределе приводит к классическому действию для частицы

$$S_0 = \int_{\eta_I}^{\eta_0} d\eta [p_i x'_i - p_0 + m], \quad (44)$$

где  $x'_i = dx^i/d\eta$ , а  $p_0$  дано выражением (43).

Рассмотрим действие (44) для радиального движения в нерелятивистском пределе:

$$S_N = \int_{\eta_I}^{\eta_0} d\eta \frac{r'^2 m(\eta)}{2}, \quad (45)$$

здесь  $r = \sqrt{x_i x^i}$  и  $r' = dr/d\eta$ . В этом случае уравнением движения является

$$[r'(\eta)m(\eta)]' = 0 \quad (46)$$

с начальными данными  $r_I = r(\eta_I)$ ,  $r'_I = p_I/m_0$  и  $m_I = m(\eta_I)$ , которое имеет следующее решение:

$$r(\eta) = r_I + p_I \int_{\eta_I}^{\eta} \frac{d\bar{\eta}}{m(\bar{\eta})}. \quad (47)$$

Фридмановское время  $dt = d\eta a(\eta)$  и абсолютная координата

$$R(t) = a(\eta)r(\eta) \quad (48)$$

определяются конформным преобразованием с масштабным фактором

$$a(\eta(t)) = a(t),$$

который обычно выбирается равным единице для современной эпохи  $\eta = \eta_0$ :  $a(\eta_0) = 1$ , масштабный фактор в начальный момент времени  $\eta = \eta_I$  определяется  $z$ -фактором:  $a(\eta_I) = a_I = 1/(1+z_I)$ , где  $z(\eta_I) = z_I$ . Поскольку фридмановские переменные привязаны к современной эпохе  $\eta = \eta_0$ , время  $\eta_I$  удобно заменить на  $\eta_0$ . Тогда свободная координата  $R(t) = a(\eta)r(\eta)$  задается выражением

$$R(t) = a(t) \left[ r_0 + \frac{p_I}{m_0} \int_{t_I}^t \frac{d\bar{t}}{a^2(\bar{t})} \right]. \quad (49)$$

Абсолютная координата удовлетворяет уравнению движения

$$\ddot{R}(t) - (H^2 + \dot{H})R = 0, \quad (50)$$

где  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$  — параметр Хаббла, которое следует из действия

$$S_N(t) = \int_{t_I}^{t_0} dt \frac{(\dot{R} - HR)^2 m_0}{2}. \quad (51)$$

Такое же действие можно получить геометрическим путем, используя определение измеряемого интервала в стандартной космологии  $dl = a(t)dr = d[ra(t)] - r\dot{a}(t)dt = [\dot{R} - HR]dt$  и понятие абсолютной координаты  $R(t) = r a(t)$  в пространстве-времени с метрикой Фрийдмана—Леметра—Робертсона—Уокера (ФЛРУ)

$$(ds^2) = (dt)^2 - \sum_0 a^2(t)(dx^i)^2. \quad (52)$$

Наблюдаемые координаты  $X^i$  расширяющейся Вселенной могут быть записаны как

$$X^i = a(t)x^i, \quad dX^i = a(t)dx^i + x^i da(t), \quad (53)$$

а вместо евклидовых дифференциалов  $dX^i$  используются ковариантные

$$a(t)dx^i = d[a(t)x^i] - x^i da(t) = dX^i - X^i \frac{da(t)}{a(t)}. \quad (54)$$



Интервал (52) в терминах переменных (53) становится равным

$$(ds^2) = (dt)^2 - \sum_{i=1,2,3} (dX^i - H(t)X^i dt)^2, \quad (55)$$

где  $H(t)$  — снова параметр Хаббла. Все эти уравнения конформными преобразованиями сводятся к уравнениям (7.4)–(7.12), приведенным в книге Пиблса [26].

### 3.2. Центральное гравитационное поле в космологической теории возмущений

Все физические и астрофизические процессы во Вселенной, включая свободное движение галактик и их гравитационные взаимодействия, идут на фоне космической эволюции. Чтобы описать такого рода процессы, рассмотрим движение пробной частицы в центральном гравитационном поле, потенциал которого является компонентой метрики. Вывод соответствующей метрики можно сделать в рамках космологической теории возмущений [27].

Подставляя в уравнения Эйнштейна метрику в форме

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[ (1 - \Phi) d\eta^2 - (1 + \Phi) (dx^i + \partial_i \sigma d\eta)^2 \right], \quad (56)$$

где  $\Phi$  и  $\sigma$  — компоненты метрики, приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\varphi^2}{3} \Delta \Phi = -T_0^0, \quad (57)$$

$$\left[ \frac{\varphi^2}{6} (2\Delta\sigma - 3\Phi') \right]' = T_k^k, \quad (58)$$

где  $T_0^0$  и  $T_k^k$  — компоненты тензора энергии-импульса гравитирующего центра. В данном случае, в расширяющейся Вселенной  $a' \neq 0$  в синхронной системе отсчета  $\sigma = 0$ , возникает хаббловское движение центра, которое можно интерпретировать как существование ненулевого давления,  $T_k^k \neq 0$ . Из уравнения (58) следует, что имеется система отсчета с ненулевой радиальной компонентой вектора сдвига  $2\Delta\sigma = 3\Phi'$ , где это хаббловское давление исчезает. Решение уравнения (57) хорошо известно:

$$\Phi(x) = \frac{3}{\varphi^2 4\pi} \int d^3y \frac{T_{00}(y)}{|y - x|} \quad (59)$$

и для точечного источника  $T_{00} = M\delta^3(x)$  принимает следующую форму:

$$\Phi = \frac{r_g}{r}, \quad (60)$$

где

$$r_g = \frac{3M}{\varphi^2 4\pi}. \quad (61)$$

### 3.3. Движение пробной частицы в центральном поле

Энергия частицы, которая движется по геодезической линии в пространстве с заданной метрикой, может быть найдена путем решения уравнения массовой поверхности. Приравнивая квадрат 4-импульса  $p_\mu p^\mu$  к квадрату массы в метрике (56):

$$p^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = m^2, \quad (62)$$

найдем выражение для энергии  $p_0$

$$p_0 \approx \pm \left[ \left(1 - \frac{r_g}{2r}\right) m + \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} \right]. \quad (63)$$

Из условия положительности энергии  $p_0 > 0$  в правой части равенства (63) выбираем положительный знак, в результате в нерелятивистском пределе приходим к действию<sup>3</sup>

$$S_{\text{classic}} = \int_{\eta_I}^{\eta_0} d\eta [p_r r' + p_\theta \theta' - E_{\text{classic}}], \quad (64)$$

где

$$E_{\text{classic}} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{r_g m}{2r}, \quad (65)$$

а  $m = m(\eta)$  — масса пробного тела, которая зависит от времени (эволюции) и определяется в (16). Произведение  $r_g m$  является конформным инвариантом и от времени не зависит. Для постоянной массы  $m = m_0$  получаем классическое действие.

---

<sup>3</sup>Уравнения движения для свободной частицы с учетом расширения Вселенной не отличаются от приведенных в монографии Пиблса (для сравнения см. уравнения (7.4)–(7.12) в [26]).

В случае движения частицы с постоянной массой по окружности ( $r = r_0$ ) ньютоновская скорость  $w_0 = \sqrt{r_g/(2r_0)}$  совпадает с орбитальной  $v_0 = p_\theta/(m_0 r_0)$ . Равенство  $w_0 = v_0$  является основой анализа наблюдательных данных о темной материи во Вселенной [28–32].

Чтобы установить область применимости теории Ньютона с постоянной массой и статус циркулярных траекторий, будем исследовать задачу Кеплера для переменных масс (16), зависимость от времени которых определяется астрофизическими данными по сверхновым [9].

### 3.4. Задача Кеплера–Ньютона в конформной теории (решение в нерелятивистском пределе)

Принимая во внимание зависимость координатного расстояния от конформного времени (12) и космическую эволюцию в предельно жестком состоянии (25), можем перейти от параметра эволюции  $\eta$  к монотонно возрастающей функции  $a(\eta)$

$$a(\eta) = \sqrt{1 + 2H_0(\eta - \eta_0)}. \quad (66)$$

Тогда из уравнения движения для ньютоновского действия (64) с учетом зависимости массы от конформного времени (16) и соотношения (66) получаем точное параметрическое решение  $a(\tau)$  и  $r(\tau)$  с параметром  $\tau$ , введенным в [33]:

$$a(\tau) = c_1 \frac{N_1(\tau)}{\tau^{2/3} N(\tau)}, \quad \frac{r(\tau)}{r_0} = c_2 \tau^{2/3} N(\tau), \quad (67)$$

где

$$N(\tau) = \alpha_1 U(\tau)^2 + \beta_1 U(\tau)V(\tau) + \gamma_1 V(\tau)^2, \quad (68)$$

$$N_1(\tau) = \left( \tau \frac{dN(\tau)}{d\tau} + \frac{2}{3} N(\tau) \right)^2 \pm 4\tau^2 N(\tau)^2 + \omega^2 \Delta, \quad (69)$$

$$\Delta = 4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2 > 0, \quad c_1, c_2, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = \text{const}, \quad (70)$$

$$c_1 = \left( \frac{3w_0^2}{4c_0^2} \right)^{1/3} \frac{c_0 v_0}{2w^2 |\omega| \Delta^{1/2}}, \quad c_2 = \left( \frac{4c_0^2}{3w_0^2} \right)^{1/3} \frac{v_0}{|\omega| \Delta^{1/2}}. \quad (71)$$

Здесь

$$w_0^2 = \frac{r_g}{2r_0}, \quad v_0 = \frac{p_\theta}{m_0 r_0}, \quad c_0 = H_0 r_0 \quad (72)$$

— ньютоновская, орбитальная и космическая скорости соответственно.

Для верхнего знака в (69)

$$U(\tau) = J_{1/3}(\tau), \quad V(\tau) = Y_{1/3}(\tau), \quad \omega = \frac{2}{\pi}, \quad (73)$$

где  $J_{1/3}(\tau)$  и  $Y_{1/3}(\tau)$  — функции Бесселя первого и второго рода. Для нижнего знака

$$U(\tau) = I_{1/3}(\tau), \quad V(\tau) = K_{1/3}(\tau), \quad \omega = -1, \quad (74)$$

где  $I_{1/3}(\tau)$  и  $K_{1/3}(\tau)$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Решение (67)–(74) включает в себя 5 независимых констант, которые можно найти из следующей алгебраической системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_0} \Big|_{\tau=\tau_0} &= 1, & \frac{dr}{da} \Big|_{\tau=\tau_0} &= 0, & a|_{\tau=\tau_0} &= 1, \\ & & & & & \\ \frac{9}{64} \left( \frac{c_2^2}{c_1} \right)^2 \omega^2 \Delta &= \frac{v_0^2}{c_0^2}, & \frac{9}{128} \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^3 &= \frac{w_0^2}{c_0^2} \end{aligned} \quad (75)$$

в области их разрешимости. Например, для  $\tau_0 = 1$ ,  $v_0^2 = 0,25$ ,  $w_0^2 = 0,05$  и  $c_0 = 1$  система имеет следующее решение:  $c_1 = -0,48$ ,  $c_2 = -0,32$ ,  $\alpha_1 = -0,78$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = -0,48$ , при этом соблюдается условие  $\Delta > 0$ .

Решение, соответствующее нижнему знаку в (69), ограничено в нуле и не ограничено на бесконечности из-за свойств функции  $K_{1/3}(\tau)$ . Решение, соответствующее верхнему знаку (69), на бесконечности ограничено и описывает финитное движение по эллипсу. Характер движения при малых временах можно рассматривать как установление периодического режима после некоторого начального возмущения.

Эти два типа решения соответствуют двум разным знакам энергии (65): положительная энергия соответствует свободному движению частицы, а отрицательная энергия — ее связанному состоянию.

### 3.5. Захват частицы центральным полем вследствие космической эволюции

Из уравнений движения, следующих из (64) и определения энергии (65), можно найти скорость изменения энергии объекта:

$$\frac{dE_{\text{classic}}}{d\eta} = -H(\eta) \left[ \frac{p_r^2 + p_\theta^2/r^2}{2m} \right], \quad (76)$$

где  $H(\eta) = da/d\eta/a$  — параметр Хаббла. Из (76) следует, что производная от энергии всегда отрицательна и стремится к нулю, следовательно, сама энергия будет асимптотически понижаться до отрицательного значения, а причиной такого несохранения энергии является космическая эволюция масс (см. рис. 3).

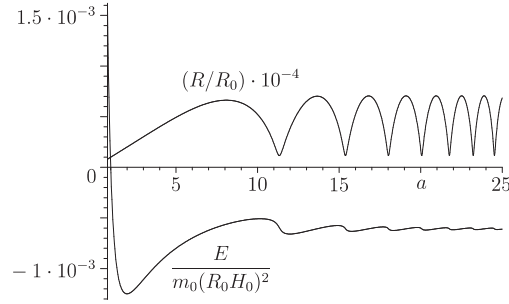


Рис. 3. На верхней части графика показано решение уравнений для действия (64) в безразмерных переменных  $y(x) = R/R_I$  и  $x = H_I(t - t_I)$  с граничными условиями  $y(x=0) = 1$  и  $y'(x=0) = 0$ . Кривая в нижней части графика демонстрирует эволюцию полной энергии (65) в переменных  $R = ar$  и  $P = p/a$

Таким образом, космическая эволюция масс уменьшает энергию пробной частицы до отрицательного асимптотического значения при условии  $E = 0$ , которое, в частности, имеет место при начальных данных  $v_I^2 = 2w_I^2$ , частица переходит в связанное состояние и ее траектория представляет собой эллипс.

Описанный механизм захвата частицы можно применить к динамике звезд и галактик, и он должен приводить к образованию галактик и формированию кластеров с анизотропным распределением хаббловских потоков в Местной группе, что находит подтверждение в недавних наблюдениях Караченцева [34, 35].

### 3.6. Граница применимости ньютоновского описания и проблема темной материи

В современных космологических исследованиях для анализа влияния темной материи используются характеристики ньютоновского движения в гравитационных полях кластеров или галактик [28–31], при этом возникает следующее несоответствие: ньютоновское движение галактик описывается в плоском пространстве-времени  $(ds^2) = (dt)^2 - \sum_i (dx^i)^2$ , а анализ наблюдательных данных проводится в терминах метрики ФЛРУ (52).

Рассмотрим ньютоновское движение частицы в гравитационном поле в пространстве с ФЛРУ-метрикой, в котором за наблюдаемые координаты в расширяющейся Вселенной приняты координаты (53) и вместо дифференциалов евклидова пространства  $dX^i$  используются ковариантные дифференциалы ФЛРУ-пространства (54). В этом случае задача Кеплера определяется уравнением

$$\ddot{R}(t) - (H^2 + \dot{H})R - \frac{(m_0 R^2 \dot{\theta})^2}{m_0^2 R^3} + \frac{r_g}{2R^2} = 0. \quad (77)$$

Это уравнение сводится к уравнению, уже решенному в п. 3.4 переходом к конформным переменным.

Закон сохранения энергии в плоском пространстве ( $H(t) = 0$ ) приводит к следующей зависимости орбитальной скорости от радиуса:

$$R\dot{\theta} = \sqrt{\frac{r_g}{2R}}, \quad (78)$$

где  $r_g = 2\alpha/m_I \simeq 3 \cdot 10^5 M$  см — гравитационный радиус объекта,  $M$  — его масса, выраженная в массах Солнца. В рассматриваемом же нами случае сверхжесткого уравнения состояния  $H = -3H^2$  уравнение (77) на классе решений  $R = R_I$ ,  $\dot{R}_I = 0$  приводит к выражению

$$R_I \dot{\theta} = \sqrt{\frac{r_g}{2R_I} + 2(H_I R_I)^2}, \quad (79)$$

или

$$v_I = \sqrt{w_I^2 + 2c_I^2},$$

где

$$v_I = R_I \dot{\theta}, \quad w_I^2 = \frac{r_g}{2R_I}, \quad c_I = R_I H_I. \quad (80)$$

В более общем случае для метрики (41)  $(ds^2) = a^2(\eta) [d\eta^2 - (dx^i)^2]$  с уравнением состояния (26)  $H_0^{-2}(da/d\eta)^2 = \Omega(a)$ , где  $\Omega(a)$  определяется в (27), имеем

$$\dot{H} + H^2 = -H^2 \left\{ 1 - \frac{a}{2\Omega} \frac{d\Omega}{da} \right\},$$

или, подставляя в (77), получаем

$$\ddot{R} + H^2 \left\{ 1 - \frac{a}{2\Omega} \frac{d\Omega}{da} \right\} R - \frac{(m_0 R^2 \dot{\theta})^2}{m_0^2 R^3} + \frac{r_g}{2R^2} = 0.$$

При этом теорема вириала  $v_I^2 = w_I^2$  переходит в следующее соотношение:

$$v_I^2 = w_I^2 + (H R_I)^2 \left\{ 1 - \frac{a}{2\Omega} \frac{d\Omega}{da} \right\}.$$

$\Omega(a) =$	$\Omega_{\text{rigid}} a^{-2}$	$\Omega_{\text{rad}}$	$\Omega_M a$	$\Omega_\Lambda a^4$
$\left\{ 1 - \frac{a}{2\Omega} \frac{d\Omega}{da} \right\} =$	2	1	1/2	-1

Из таблицы видно, что наименьшим дефицитом темной материи из четырех «чистых» состояний будет обладать предельно жесткое состояние  $\Omega_{\text{rigid}}$ , которое соответствует рассматриваемому нами случаю (79). Заметим, что в стандартной космологии космическая эволюция увеличивает дефицит темной материи:

$$R_I \dot{\theta} = \sqrt{\frac{r_g}{2R_I} - 0,5(H_I R_I)^2}. \quad (81)$$

Из (81) следует, что обычные ньютоновские характеристики для описания поведения орбитальных скоростей неприменимы на радиальных расстояниях, когда удвоенный квадрат космической скорости сравним по величине с квадратом ньютоновской скорости:  $2c_I^2 \geq w_I^2$ . За оценку радиального расстояния в этом случае можно взять расстояние (далее будем называть его критическим расстоянием)  $R_{\text{cr}}$ , при котором  $2c_I^2 = w_I^2$ , т.е.

$$R_{\text{cr}} = \left( \frac{r_g}{2H_I^2} \right)^{1/3}. \quad (82)$$

Современное значение параметра Хаббла  $H_0^{-1} \simeq 10^{28}$  см приводит к значению критического расстояния

$$R_{\text{cr}} \simeq 10^{20} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1/3} \text{ см.} \quad (83)$$

Критический радиус для скопления Кома ( $M \simeq 10^{15} M_{\odot}$  [28]) сравним с размерами скопления:

$$R_{\text{size}} \sim 3 \cdot 10^{25} \text{ см} > R_{\text{cr}} \sim 10^{25} \text{ см}, \quad (84)$$

и наши рассуждения применимы. Для нашей Галактики ( $M \simeq 10^{12} M_{\odot}$ ) соответствующая оценка дает

$$R_{\text{size}} \sim 10^{23} \text{ см} < R_{\text{cr}} \sim 10^{24} \text{ см}, \quad (85)$$

т.е. критический радиус нашей Галактики на порядок больше ее размера.

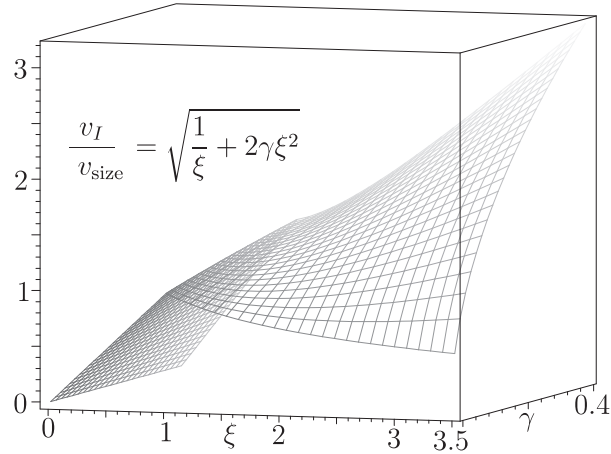


Рис. 4. Зависимость орбитальной скорости «частицы»  $v_I$  от ее радиуса, т.е. от расстояния до центра объекта,  $\xi = R/R_{\text{size}}$ , где  $R_{\text{size}}$  — размер объекта,  $\gamma = (R_{\text{size}}/R_{\text{cr}})^3$  и  $R_{\text{cr}} = [r_g H^2]^{1/3} = 10^{20} M^{1/3}$  см — значение радиуса, для которого ньютоновская скорость совпадает с хаббловской,  $M$  — масса объекта в единицах солнечных масс. При  $\gamma = 0$  ротационная кривая совпадает с кривой, полученной в механике Ньютона



Ротационную кривую циркулярной скорости  $v_I = R_I \dot{\theta}$  (79) удобно рассматривать в безразмерных величинах  $\xi = R/R_{\text{size}}$  и  $\gamma$ :

$$\frac{v_I}{v_{\text{size}}} = \sqrt{\frac{1}{\xi} + 2\gamma\xi^2}, \quad (86)$$

где  $v_{\text{size}} = \sqrt{r_g/(2R_{\text{size}})}$ ,  $\gamma = (R_{\text{size}}/R_{\text{cr}})^3$ ,  $R_{\text{size}}$  — размер объекта и  $R_{\text{cr}} = [r_g/H^2]^{1/3} = 10^{20} M^{1/3}$  см — значение радиуса, для которого ньютоновская скорость совпадает с хаббловской,  $M$  — масса объекта в единицах солнечных масс (рис. 4). Зависимость (86) при  $\gamma = 0$  соответствует ньютоновскому случаю, а кривая при  $\gamma \neq 0$  отклоняется от ньютоновской кривой. Такое поведение не требует введения гало темной материи за область применения приближения Ньютона при  $R \geq R_{\text{cr}}$  [29–32], поэтому нарушение вириальной теоремы, обнаруженное в скоплениях галактик и интерпретируемое как свидетельство существования темной материи, может с равным успехом рассматриваться как результат эволюции Вселенной.

### 3.7 Задача Кеплера — Ньютона в обобщенном поле Шварцшильда

Рассмотрим общий случай движения пробного тела или частицы в сферически-симметричном гравитационном поле тяжелой массы. Обобщим метрику Шварцшильда в синхронной системе отсчета с помощью замены обычной массы  $m_0$  ее конформным аналогом  $ma(\eta) = m(\eta)$ :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\alpha}{mr}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2\alpha/(mr)} - r^2 \sin^2(\theta) d\theta^2, \quad (87)$$

где  $m = m(\eta)$ ,  $r = \sqrt{x_i x^i}$ ,  $a(\eta) = \sqrt{1 + 2H_I(\eta - \eta_I)}$ , и рассмотрим движение в цилиндрических координатах

$$X^1 = R \cos \Theta, \quad X^2 = R \sin \Theta, \quad R = ar. \quad (88)$$

$H_I$  есть начальное значение скорости Хаббла в пространстве с жестким уравнением состояния материи [9], когда плотности энергии и

давления равны. В терминах конформного времени  $d\eta = dt/a$ , в конформных величинах  $r = R/a$  запишем действие для частицы в форме

$$S_{\text{Schw}} = \int_{\eta_I}^{\eta_0} d\eta \left[ P_r \frac{dr}{d\eta} + P_\theta \frac{d\theta}{d\eta} - E_{\text{Schw}} \right], \quad (89)$$

где  $Q_{\text{Schw}} = \left(1 - \frac{r_g m_I}{r m}\right)^{1/2}$ ,  $r_g = M_O G$ ,  $P_r$ ,  $P_\theta$  — сопряженные импульсы соответствующих координат и  $E_{\text{Schw}}$  — энергия системы

$$E_{\text{Schw}} = Q_{\text{Schw}} \sqrt{P_r^2 Q_{\text{Schw}}^2 + P_\theta^2 / r^2 + m^2} - m. \quad (90)$$

Траектория пробной частицы показана на рис. 5, а ньютоновский предел действия (89) имеет вид

$$S_A = \int_{\eta_I}^{\eta_0} d\eta \left[ P_r \frac{dr}{d\eta} + P_\theta \frac{d\theta}{d\eta} - \frac{P_r^2 + P_\theta^2 / r^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \right], \quad (91)$$

где  $\alpha = M_O m_I G$  — константа ньютоновского взаимодействия галактики с массой  $m_I$  в центральном гравитационном поле с центральной массой  $M_O$ .

Рассмотрим три скорости:

$$w_I = \sqrt{\frac{r_g}{2r_I}}, \quad v_I = \frac{P_\theta}{m_I r_I}, \quad c_I = H_I r_I \quad (92)$$

— ньютоновскую, орбитальную и космическую соответственно. Предел малых скоростей  $w_I$ ,  $v_I$ ,  $c_I \rightarrow 0$  соответствует классическому приближению (см. рис. 7) — классической задаче Кеплера с учетом расширения Вселенной. В этом пределе мы получаем действие (89), где вместо гамильтониана Шварцшильда (90) стоит его ньютоновский предел:

$$E_{\text{Schw}} \sim E_{\text{classic}} = \frac{P_r^2}{2am_I} + \frac{P_\theta^2}{2am_I r^2} - \frac{r_g m_I}{2r}. \quad (93)$$

Удобно исследовать решение задачи в безразмерных величинах

$$x = H_I(\eta - \eta_I), \quad r = r_I y, \quad P_r = m_I p, \quad (94)$$

в терминах которых эффективное действие для радиального движения принимает вид

$$S_{\text{eff}} = r_I m_I \int_{x_I}^{x_0} dx \left\{ p \frac{dy}{dx} - \frac{1}{c_I} E_{\text{eff}} \right\}, \quad (95)$$

где

$$\begin{aligned} E_{\text{eff}} &= m_I^{-1} E_{\text{Schw}} = \\ &= \sqrt{1 - 2w_I^2/(ay)} \sqrt{a^2 + (1 - 2w_I^2/(ay)) p^2 + v_I^2/y^2} - a \simeq \\ &\simeq \frac{p^2 + v_I^2/y^2}{2a} - \frac{w_I^2}{y}, \end{aligned} \quad (96)$$

$a = \sqrt{1 + 2x}$ . Приближенное равенство здесь имеет место для малых скоростей, тогда, если положить  $a = 1$ , получим классическое движение по орбите  $y = 1$ ,  $p = 0$ , где ньютоновская скорость  $w_I$  совпадает с орбитальной  $v_I$ . Это равенство, вернее, его нарушение является теоретической основой анализа наблюдательных данных о темной материи во Вселенной [28–31].

На рис. 5 приведено численное решение в безразмерных величинах (94) шварцшильдовских уравнений движения, которое начинается с состояния нулевой энергии (90) и нулевой радиальной скорости  $P_I = 0$ . Можно видеть, что частица захватывается в связанное состояние и это справедливо для всех космических скоростей.

На рис. 5, 6 и 7 приведены решения уравнений, следующие из (89), при начальных условиях  $y(0) = 1$ ,  $dy/dx = 0$  и параметрах  $v_I = c_I$ ,  $w_I^2 = 0, 25c_I^2$  ( $c_I = 1, 0, 25, 0, 01$ ). На всех рисунках траектория начинается с точки  $(1, 0)$ . Видно, что траектория пробного объекта удаляется на некоторое расстояние от начальной точки и далее становится периодической («захват» объекта) как по времени, так и в пространстве (рис. 7). При уменьшении скоростей траектории постепенно переходят в классические эллипсы задачи Кеплера, уравнения для которых решены в п. 3.4.

Итак, точное решение модифицированной задачи Кеплера с гамильтонианом (93) и численные решения в случае гамильтониана (90) показывают, что космическая эволюция масс уменьшает энергию пробной частицы (звезды и галактики). Космическая эволюция уменьшает энергию свободных звезд и галактик, заставляя их образовывать

связанные состояния, такие как галактики или их кластеры соответственно.

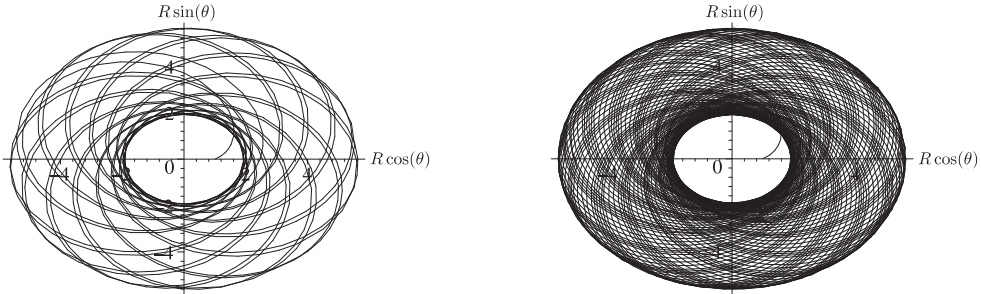


Рис. 5. Решение уравнений движения для действия (89) при  $c_I = 1$ ,  $v_I = 1$  и  $w_I^2 = 0,25$ . На обоих рисунках показана траектория движения одного и того же объекта из начальной точки  $(1, 0)$  для разных промежутков времени в обобщенном поле Шварцшильда (87)

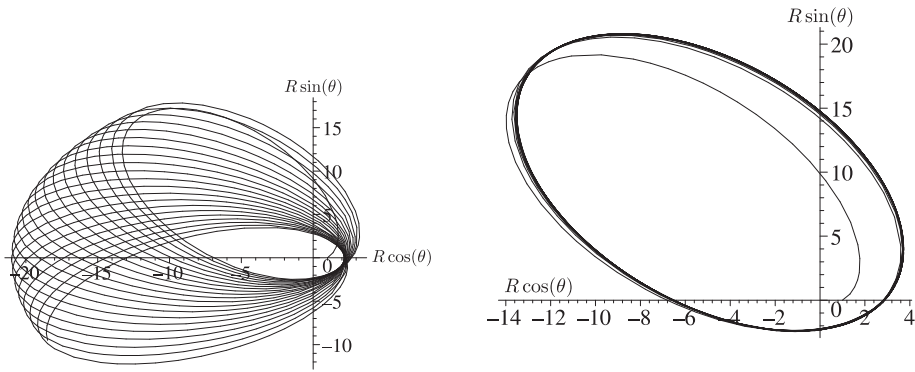


Рис. 6. Решение уравнений движения для (89) при  $c_I = 0,25$ ,  $v_I = 0,25$  и  $w_I^2 = 0,015625$ . Такие значения параметров соответствуют релятивистскому пределу уравнений для (89), в котором классический эллипс начинает поворачиваться против часовой стрелки

Рис. 7. Решение уравнений движения для (89) при  $c_I = 0,01$ ,  $v_I = 0,01$  и  $w_I^2 = 2,5 \cdot 10^{-5}$ . Такие значения параметров соответствуют классическому пределу и классическому эллипсу на сравнительно больших временах с начала движения. Так же как и в исходном случае  $c_I = 1$  (обобщенное поле Шварцшильда), частица при небольших временах «захватывается» эллипсом

## Заключение

В настоящей работе рассмотрены уравнения динамики пробной частицы в центральном гравитационном поле с учетом эволюции Вселенной и найдено их точное аналитическое решение для конформной космологической модели, совместимой с последними данными по сверхновым.

На основе полученных уравнений описан эффект захвата пробной частицы гравитационным полем в расширяющейся Вселенной. Было показано, что эффект захвата может приводить к образованию галактик и их кластеров с анизотропным векторным полем радиальных скоростей. Такое поле скоростей могло бы объяснить анизотропию потоков хаббловских скоростей в Местной группе галактик, наблюдающуюся И.Д. Караченцевым и коллегами.

В рамках рассматриваемой модели дана оценка границы применимости ньютоновского приближения, обычно используемого в литературе для описания темной материи, и получена формула для описания орбитальных скоростей с учетом эволюции Вселенной. Согласно этой формуле эволюция Вселенной может имитировать эффект темной материи в конформной космологии, в которой конформные величины определяются как наблюдаемые с относительными эталонами измерения интервалов. Следует отметить, что для стандартной космологии учет эволюции Вселенной увеличивает дефицит видимой барионной материи для сверхскоплений.

Авторы благодарны Д. Блашке, К.А. Бронникову, Д.В. Гальцову, В.Б. Приезжеву, В.А. Рубакову, Э.А. Тагирову и А.Т. Филиппову за полезные дискуссии.

## Список литературы

- [1] A.G. Riess et al., *Astron. J.*, 116 (1998) 1009; S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.*, 517 (1999) 565.
- [2] A.G. Riess et al., *Astrophys. J.*, 560 (2001) 49, astro-ph/0104455.
- [3] I. Zlatev, L. Wang and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, 82 (1999) 896; C. Wetterich, *Nucl. Phys. B*, 302 (1988) 668.
- [4] Д. Чернин, *УФН*, 171 (2001) 11.

- [5] A.A. Friedmann, *Z. für Phys*, 10 (1922) 377; *Ibid*, 21 (1924) 306;  
А.А. Фридман, *Мир как пространство и время*, М.: Наука, 1965.
- [6] А.Д. Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*, М.: Наука, 1990.
- [7] J.V. Narlikar, *Space Sci. Rev.*, 50 (1989) 523.
- [8] M. Pawłowski, V. V. Papoyan, V. N. Pervushin, and V. I. Smirichinski, *Phys. Lett. B*, 444 (1998) 293.
- [9] D. Behnke, D.B. Blaschke, V.N. Pervushin, and D.V. Proskurin, *Phys. Lett. B*, 530 (2002) 20, gr-qc/0102039.
- [10] V.N. Pervushin, D.V. Proskurin, and A. A. Gusev, *Gravitation & Cosmology*, 8 (2002) 181.
- [11] Д. Блашке и др., *Космологическое рождение векторных бозонов и микроволновое фоновое излучение*, *ЯФ*, т.67, №5 (2004) 1074, gr-qc/0103114, hep-th/0206246;  
V.N. Pervushin and D.V. Proskurin, *Gravitation & Cosmology*, 8 (2002) 161, gr-qc/0106006.
- [12] H.-P. Pavel and V.N. Pervushin, *Int. J. Mod. Phys. A*, 14 (1999) 2285.
- [13] R. Penrose, *Relativity, Groups and Topology*, Gordon and Breach, London, 1964;  
N. Chernikov, E. Tagirov, *Ann. Inst. Henri Poincarè*, 9 (1968) 109.
- [14] R. Kallosh, L. Kofman, A. Linde and A. Van Proeyen, *Class. Quant. Grav.*, 17 (2000) 4269.
- [15] M. Pawłowski, V. N. Pervushin, *Int. J. Mod. Phys.*, 16 (2001) 1715, hep-th/0006116;  
V. N. Pervushin and D. V. Proskurin, *Gravitation and Cosmology*, 7 (2001) 89.
- [16] Б.М. Барбашов, В.Н. Первушин, Д.В. Проскурин, *ТМФ*, 132 (2002) 181.
- [17] V. N. Pervushin and V. I. Smirichinski, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32 (1999) 6191.

- [18] Б.М. Барбашов, Н.А. Черников, Препринт ОИЯИ Р2-7852, Дубна, 1974.
- [19] E. Kasner, *Am. J. Math.*, 43 (1921) 217.
- [20] А.А. Гриб, С.Г. Мамаев, В.М. Мостепаненко, Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях, М.: Атомиздат, 1980.
- [21] Я.Б. Зельдович, А.А. Старобинский, *ЖЭТФ*, 61 (1971) 2161.
- [22] В.А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И.М. Халатников, *УФН*, 102 (1970) 463; *ЖЭТФ*, 60 (1971) 1969.
- [23] N. A. Bahcall, J. P. Ostriker, S. Perlmutter and P. J. Steinhardt, *Science*, 284 (1999) 1481, astro-ph/9906463.
- [24] J.V. Narlikar, *Introduction to cosmology*, Jones and Bartlett, Boston, 1983.
- [25] Э.А. Тагиров, Н.А. Черников, Препринт ОИЯИ Р2-3777, Дубна, 1968; К.А. Бронников, Э.А. Тагиров, Препринт ОИЯИ Р2-4151, Дубна, 1968; G. L. Parker, *Phys. Rev. Lett.*, 21 (1968) 562; *Phys. Rev.*, 183 (1969) 1057; *Phys. Rev. D*, 3 (1971) 346; А.А. Гриб, С.Г. Мамаев, *ЯФ*, 10 (1969) 1276.
- [26] P.J.E. Peebles, 'The Large-Scale Structure of the Universe, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1980.
- [27] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, М.: Наука, 1988.
- [28] Л.Е. Гуревич, А.Д. Чернин, *Введение в космологию*, М.: Наука, 1978.
- [29] J. Einasto, E. Saar, and A. Kaasik, *Nature*, 250 (1974) 309.
- [30] J. Einasto, E. Saar, A. Kaasik, and A.D. Chernin, *Nature*, 252 (1974) 111.
- [31] J.R. Primack, *Proceedings of 5th International UCLA Symposium on Sources and Detection of Dark Matter*, Marina del Rey, February 2002, ed. D. Cline, astro-ph/0205391.

- [32] V.C. Rubin, *Scientific American*, v. 248, issue 6 (1983) 88.
- [33] А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, *Справочник по нелинейным обыкновенным уравнениям*, М.: Факториал, 1997.
- [34] И.Д. Караченцев, *УФН*, 171 (2001) 860.
- [35] И.Д. Караченцев, Д.И. Макаров, *Астрофизика*, 44 (2001) 1.
- [36] M. Biernacka, P. Flin, V. Pervushin, A. Zorin, *Particles and Nuclei, Letters*, 2[119] (2004) 64; astro-ph/0206114.
- [37] V.N. Pervushin, D.V. Proskurin, V.A. Zinchuk, A.G. Zorin, *Proceedings of XXV International workshop on the fundamental problems of high energy physics and field theory, 25–28 June 2002, IHEP, Protvino, Russia*, p. 293, hep-th/0209070, v. 2.
- [38] K. Bajan, P. Flin, and V.Pervushin, *Proceedings of Joint International Conference “New Geometry of Nature”, vol. III, Kazan State University, Kazan, Russia, August 25 – September 5, 2003*, p. 9.
- [39] K. Bajan, W. Godlowski, P. Flin, and V.Pervushin, *Physics of Particles and Nuclei*, 2[35] (2004) 1.



# Dynamical Breakdown of Chiral Symmetry and Abnormal Perturbation Expansions<sup>1</sup>

D. Ebert, V.N. Pervushin<sup>2</sup>

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

Dynamical breakdown of  $\gamma_5$ -symmetry is studied in an Abelian gauge theory of massless “quarks” interacting with massless vector “gluons”. For this the path-integral approach with bilocal fields as dynamical variables is used. The classical field equation defined by the stationary point of the generating functional turns out to be identical with the Schwinger–Dyson equation for the quark propagator. After a short discussion of the possible solutions of this equation an abnormal perturbation expansion is worked out.

В работе изучается динамическое нарушение  $\gamma_5$ -симметрии в абелевой калибровочной теории безмассовых «кварков», взаимодействующих с векторным «глюоном». Для этой цели используется метод функционального интегрирования по билакальным динамическим переменным. Обсуждается решение «классического» уравнения билакальных полей, определяемое из условия стационарности подынтегрального выражения, и формулируется аномальная теория возмущения.

## Introduction

A great deal of current efforts in field theory is centered about the idea of a spontaneous breakdown of symmetries in gauge theories with massless fermions and vector mesons. In these approaches the particles acquire usually their masses spontaneously via the Higgs mechanism leaving us with renormalizable theories of massive fermions and vector mesons. This

---

<sup>1</sup>Reported at the XVIII International Conference on High Energy Physics, Tbilisi, July 1976; JINR Preprint E2-10020 (1976).

<sup>2</sup>E-mail: pervush@thsun1.jinr.ru

is at present a widely accepted method to construct unified theories of weak and electromagnetic interactions. It is, however, also desirable to investigate the possibility of a dynamical spontaneous breakdown of symmetry without introducing elementary Higgs fields having a vacuum expectation value. Thus, one has to seek for symmetry-violating solutions of the dynamical equations of the theory. This point of view has been formulated already a long time ago by Nambu and Jona-Lasinio [1] in their attempt to describe the spontaneous breakdown of chiral symmetry dynamically using the close analogy to superconductivity. They have stimulated a large amount of work in this kind of field [2, 3].

In this paper we examine an Abelian gauge model of interacting quarks and vector gluons where the radiative corrections turn out to be the origin of the spontaneous symmetry breaking. Throughout the work functional methods are employed which have been recognized to be a very effective tool for treating dynamical symmetry breaking. As will be shown in Sect. 1, the generation of a symmetry-violating scalar mass term in the fermion propagator may conveniently be studied by introducing a bilocal dynamical variable in the path-integral representation of the generating functional. The action principle applied to the effective action of the bilocal field yields then as the “classical” field equation the differential version of the Schwinger–Dyson equation in the lowest nontrivial approximation of perturbation theory. In Sect. 2 we shortly discuss the solutions of this equation, which was years ago the starting point of the finite quantum electrodynamics of Baker, Johnson and Willey [4]. In Sect. 3 a systematic abnormal perturbation expansion of the path integral has been worked out that uses the symmetry-breaking solution as the lowest order term. It takes into account higher order effects of quantum fluctuations around the stationary point of the effective bilocal action. Finally, the relation of the resulting abnormal perturbation diagrams to usual Feynman diagrams is demonstrated for the simplest Green’s functions of the model.

## 1. Generating Functional and New Dynamical Variables

Let us consider a theory of massless fermions (“quarks”) interacting with a massless neutral vector meson (“gluon”) field (for simplicity internal degrees of freedom are not taken into account). The generating functional

of all Green's functions, including the disconnected ones, is given in the path-integral formulation by<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
Z(j, \bar{\eta}, \eta) &= N \int DA_\mu D\psi D\bar{\psi} \delta[\partial_\mu A_\mu] \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + g \bar{\psi} \hat{A} \psi + j_\mu A_\mu + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\}, \quad (1) \\
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad \hat{A} = \gamma_\mu A_\mu.
\end{aligned}$$

Here  $\gamma_\mu$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $\eta$  are the external sources of the fields  $A_\mu$ ,  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ , and  $N$  is a normalization factor chosen such that  $Z(0, 0, 0) = 1$ . We remark that the Lagrangian appearing in Eq. (1) is invariant with respect to (i) chiral and (ii) scale transformations, (i)  $\psi \longrightarrow \exp(i\gamma_s \lambda) \psi$ , (ii)  $\psi(x) \longrightarrow \lambda^{3/2} \psi(\lambda x)$ ,  $A_\mu(x) \longrightarrow \lambda A_\mu(\lambda x)$ . Let us now show that the expression (1) may develop a scalar mass-like term for the fermion field leading to a dynamical breakdown of the  $\gamma_5$ -invariance of the theory. For this purpose we first integrate over the vector field  $A_\mu$  and then introduce a new bilocal field containing a scalar component. The  $A_\mu$ -integration yields

$$\begin{aligned}
Z(j, \bar{\eta}, \eta) &= N \int D\psi D\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \bar{\psi}(x) \left( i \hat{\partial} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - g \gamma_\mu \int d^4y D_{\mu\nu}(x-y) j_\nu(y) \right) \psi(x) + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right] - \\
&\quad - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \left[ j_\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) j_\nu(y) + \right. \\
&\quad \left. + g^2 \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) D_{\mu\nu}(x-y) \bar{\psi}(y) \gamma_\nu \psi(y) \right] \right\}, \quad (2)
\end{aligned}$$

where  $D_{\mu\nu}(x)$  is the gluon propagator in the Landau gauge:

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}(x) &= (g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu / \partial^2) D^c(x), \\
D^c(x) &= - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iqx}}{q^2 + i\varepsilon}.
\end{aligned} \quad (3)$$

---

<sup>3</sup>As we are not concerned with renormalization questions, necessary counterterms have been omitted in Eq. (1).

(We use the notations and conventions of Ref. [5] throughout.) Let us next introduce the abbreviation

$$K_{(\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2)}(x_1y_1, x_2y_2) = (\gamma_\mu)_{\alpha_1\beta_2}D_{\mu\nu}(x_1 - x_2)(\gamma_\nu)_{\alpha_2\beta_1} \times \delta(x_1 - y_2)\delta(y_1 - x_2) \quad (4)$$

and rewrite the four-fermion term in the exponent of Eq. (2) as

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)D_{\mu\nu}(x - y)\bar{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y) = \\ & = - \int d^4x_1 d^4y_1 d^4x_2 d^4y_2 [\bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1)\psi_{\beta_1}(y_1)] \times \\ & \quad \times K_{(\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2)}(x_1y_1, x_2y_2) [\bar{\psi}_{\alpha_2}(x_2)\psi_{\beta_2}(y_2)] \equiv \\ & \equiv - \bar{\psi}_{a_1}\psi_{b_1}K_{(a_1b_1;a_2b_2)}\bar{\psi}_{a_2}\psi_{b_2} = \\ & = - ([\bar{\psi} \times \psi], K[\bar{\psi} \times \psi]). \end{aligned} \quad (5)$$

The sign minus in front of the integral in Eq. (5) arises from the interchange of the  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  fields that have to be considered as anticommuting Grassman variables. Furthermore, for notational simplicity, a pair of discrete and continuous variables  $(\alpha_i, x_i)$  is abbreviated by a latin index  $a_i$  (summation over equal latin indices includes an integration over the continuous variable). Eq. (5) is then linearized in the expression  $\bar{\psi}_\alpha(x) \times \psi_\beta(y)$  by performing a (bilocal) Gauss integration<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \frac{i}{2} g^2 ([\bar{\psi} \times \psi], K[\bar{\psi} \times \psi]) \right\} = \\ & = [\text{Det}K^{-1}]^{\frac{1}{2}} \int D\chi \exp \left\{ -\frac{i}{2} (\chi, K^{-1}\chi) - i\bar{\psi}_a\psi_b g\chi_{ab} \right\}, \quad (6) \\ & K_{(ab,cd)}^{-1}K_{(cd,ef)} = \delta_{(ab,ef)} \equiv \delta_{ae}\delta_{bf}, \end{aligned}$$

where the bilocal field  $\chi_{\alpha\beta}(x, y)$  is treated as a  $C$ -number field. It can be decomposed in scalar, pseudoscalar, vector, axial vector and tensor components:

$$\begin{aligned} \chi(x, y) & = S(x, y) + \gamma_5 P(x, y) + \gamma_\mu V_\mu(x, y) + \\ & \quad + i\gamma_\mu\gamma_5 A_\mu(x, y) + \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] T_{\mu\nu}(x, y). \end{aligned} \quad (7)$$

---

<sup>4</sup>In Ref. [6] an analogous technique has been used for a nonrelativistic system of interacting fermions and bosons to obtain the gap equation of superconductivity.

With Eq. (7) the integration measure reads  $D\chi = DSDPDVDADT$ . By inserting Eq. (6) to Eq. (2) and performing the integration over the quark field, the generating functional (1) can be rewritten in the final form

$$Z(j, \bar{\eta}, \eta) = N \int D\chi e^{iS(\chi)} Z(j, \bar{\eta}, \eta|\chi) \quad (8)$$

with

$$S(\chi) = \left[ -\frac{1}{2}(\chi, K^{-1}\chi) - i\text{tr} \ln(1 + gG_0\chi) \right], \quad (9)$$

$$Z(j, \bar{\eta}, \eta|\chi) = \exp \left[ -\frac{i}{2} j_\mu \cdot D_{\mu\nu} \cdot j_\nu + i\bar{\eta}G(g\chi - g\hat{A}_{\text{ext}})\eta + \text{tr} \ln(1 - gG(g\chi)\hat{A}_{\text{ext}}) \right]. \quad (10)$$

Green's functions  $G(g\chi - gA_{\text{ext}})$  and  $G_0$  are defined as follows:

$$i\hat{\partial}_x G_0(x, y) = -\delta(x - y), \quad (11)$$

$$(i\hat{\partial}_x + g\hat{A}_{\text{ext}})G(x, y|g\chi - g\hat{A}_{\text{ext}}) - g \int d^4z \chi(x, z)G(z, y|g\chi - g\hat{A}_{\text{ext}}) = -\delta(x - y),$$

where

$$\hat{A}_{\text{ext}}(x) = -\gamma_\mu \int d^4y D_{\mu\nu}(x - y)j_\nu(y), \quad (12)$$

and we have used the abbreviation

$$j_\mu \cdot D_{\mu\nu} \cdot j_\nu = \int d^4x d^4y j_\mu(x) D_{\mu\nu}(x - y) j_\nu(y).$$

Finally, to arrive at Eq. (8), we have employed the identities

$$\text{Det}A = \exp \text{tr} \ln A$$

and

$$\text{tr} \ln \left[ G_0^{-1} + g \left( \chi - \hat{A}_{\text{ext}} \right) \right] = \text{tr} \ln G_0^{-1} [1 + gG_0\chi] + \text{tr} \ln \left[ 1 - gG(g\chi)\hat{A}_{\text{ext}} \right],$$

where  $\text{tr}$  denotes the trace of the operator in square brackets considered as an integral operator in the functional space as well as the usual trace over matrix indices.

Let us consider for a moment the fermion sector only by setting  $j = 0$ . The expression  $Z(0, \bar{\eta}, \eta|\chi) = \exp i\bar{\eta}G(g\chi)\eta$  may be understood as the generating functional of a fermion moving in an external bilocal random field  $\chi(x, y)$  of probability distribution  $\exp iS(\chi)$ .

## 2. “Classical” Bilocal Field Equations and Discussion of Solutions

The functional  $S(\chi)$  that appears as a weight factor in the functional integral (8) may be naturally interpreted as the effective action of the bilocal field  $\chi(x, y)$ . The “classical” field  $M(x, y)$  is then determined by the solutions of the equation

$$g \left. \frac{\delta S(\chi)}{\delta \chi} \right|_{g\chi=M} = -K^{-1}M - ig^2G(M) = 0 \quad (13)$$

following from the action principle. Multiplying Eq. (13) by the operator  $K$  yields also<sup>5</sup>

$$M_{\alpha\beta}(x, y) = -ig^2 D_{\mu\nu}(x - y) [\gamma_\mu G(x, y|M)\gamma_\nu]_{\alpha\beta},$$

where

$$i\hat{\partial}_x G(x, y|M) - \int d^4z M(x, z)G(z, y|M) = -\delta(x - y). \quad (14)$$

As the equations (14) do not involve the external sources it is natural to assume translational invariance of the solutions, i.e.,

$$M(x, y) = M(x - y), \quad G(x, y|M) = G(x - y|M).$$

Furthermore, going to the momentum space, Eqs. (14) read

$$M(p) = i \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int d^4q D_{\mu\nu}(q - p) \gamma_\mu \frac{1}{M(p) - \hat{q}} \gamma_\nu, \quad (15)$$

$$G(p|M) = \frac{1}{M(p) - \hat{p}}.$$

---

<sup>5</sup>Such a manipulation may in principle change the class of solutions.

Because of  $PT$  and  $T$  invariance the possible solutions contain only scalar and vector components. Moreover, the vector part can be shown to vanish in the transverse Landau gauge (3). Thus, we finally arrive at

$$M(p) = -i \frac{\lambda}{\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(q-p)^2} \frac{M(p)}{q^2 - M^2(q)}; \quad \lambda = \frac{3g^2}{(4\pi)^2}. \quad (16)$$

It is worth remarking that Eqs. (15) and (16) are just the Schwinger—Dyson equations for the quark propagator in the lowest nontrivial approximation of perturbation theory [4, 5]. Moreover, Eq. (13) is the differential form of this equation:

$$\left( \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right)^2 M(p) = -4\lambda \frac{M(p)}{p^2 - M^2(p)}. \quad (17)$$

It is equivalent to the integral equation (16) if one takes into account the boundary conditions

$$\left[ p^2 \frac{dM(p)}{dp^2} + M(p) \right]_{p^2 \rightarrow \infty} = 0; \quad \left[ p^4 \frac{dM(p)}{dp^2} \right]_{p^2 \rightarrow 0} = 0 \quad (18)$$

that can be read off from Eq. (16) after performing the angular integrations<sup>6</sup>. Eq. (16) admits, in particular, a trivial symmetric solution  $M(p) = 0$ . The nontrivial solutions of a linearized version of Eq. (16) were studied years ago in the finite quantum electrodynamics of Baker, Johnson and Willey [4, 7] for large values of space-like momenta. Recently, the solutions of the nonlinear equation (17) have been studied, too, and extended to the timelike region [8].

Indeed, one easily finds nontrivial asymptotic solutions of Eqs. (17) and (10) by inserting the asymptotic expressions  $M(p) \propto (-p^2)^{-c}$ ,  $\sqrt{p^2}$  for  $p^2 \rightarrow -\infty, +\infty$ . This yields

$$M(p) \propto M_0 (-p^2)^{-\frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}}, \quad -p^2 \rightarrow \infty; \quad (19)$$

$$M^2(p) \propto p^2 \left( 1 + \frac{4}{3}\lambda \right), \quad p^2 \rightarrow \infty.$$

---

<sup>6</sup>In the functional approach used here there follow boundary conditions from the requirement that the action integral converges.



Furthermore, the numerical investigations performed in Ref. [8] show that  $M^2/p^2 < 1$  for  $p^2 > 0$ . Thus, the quark propagator  $G(p|M) = \frac{M^2(p) + p^2}{M^2(p) - p^2}$  does not develop a pole, the quarks being confined. As the authors of Ref. [8] emphasize, the situation may change drastically if the vector gluon becomes massive, too.

Nambu and Jona-Lasinio [1] pointed out first that Eq. (16) is the relativistic analogue of the gap equation in superconductivity [9]. They suggested that a massive Dirac particle should be a mixture of bare fermions with opposite chiralities but with the same fermion number much as a quasi-particle in a superconductor is a mixture of bare electrons with opposite electric charges but with the same spin. It is convenient to decompose Green's function (15) into its "normal" and "abnormal" parts:

$$G(M) = [G_{RR}(M) + G_{LL}(M)] + [G_{RL}(M) + G_{LR}(M)], \quad (20)$$

where

$$G_{\begin{matrix} RR \\ LL \end{matrix}}(M) = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} G M \frac{1 \mp \gamma_5}{2}, \quad (21)$$

$$G_{\begin{matrix} RL \\ LR \end{matrix}}(M) = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} G(M) \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$$

belong to the combinations  $\psi_R, \bar{\psi}_R, \psi_L, \bar{\psi}_L$ , etc., of quarks of right and left chiralities,  $\psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi$ ,  $\psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi$ . We obtain

$$G_{\begin{matrix} RR \\ LL \end{matrix}}(p|M) = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \hat{p} \frac{1}{p^2 - M^2(p)}, \quad (22)$$

$$G_{\begin{matrix} RL \\ LR \end{matrix}}(p|M) = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} M(p).$$

Thus, the abnormal quark Green's functions vanish identically in the symmetric case of no mass gap. Assuming the invariance of the vacuum under chiral transformations yields the transformation law

$$e^{i\gamma_5\lambda} G e^{i\gamma_5\lambda} = G \quad (23)$$

as can easily be seen by expressing  $G$  as a vacuum expectation value of the  $T$ -product of field operators. A nontrivial mass gap  $M(p) \neq 0$  obviously

violates Eq. (23) being associated to a non-invariant vacuum. It is just the existence of such symmetry-breaking solutions to the equations of the theory that has led to the concept of a dynamical spontaneous breakdown of a symmetry.

Concluding this section, we mention that Eq. (16) when rewritten in terms of the function  $M(p)/(p^2 - M^2(p))$  is identical with the pseudoscalar sector of the homogeneous fermion-antifermion Bethe–Salpeter equation at total four-momentum  $P^2 = 0$  with the nontrivial propagator (15) used [10]. Thus, for  $M(p) \neq 0$  there exists also a nontrivial solution  $\psi(p, 0) \sim \gamma_5 M(p)/(p^2 - M^2(p))$  of the homogeneous Bethe–Salpeter equation. As has been discussed at length in the literature (for a linearized propagator), these solutions belong, however, to a continuous spectrum and they are not normalizable [11]. An identification of these solutions with the usual Goldstone bosons arising if a symmetry is broken spontaneously seems thus to be excluded.

### 3. Abnormal Perturbation Expansion

The nontrivial solution of the nonlinear Eqs. (17) and (18) defines a quark propagator that includes already a definite class of radiation corrections of ordinary perturbation theory. Let us now show how further corrections to this symmetry-breaking solution, as, e.g., vertex and gluon propagator corrections, may be taken into account in a systematic way by expanding the integrand of Eq. (8) around the “classical” solution. Taking the nontrivial confinement solution [8] of the Schwinger–Dyson gap equation as a lowest order term, this approximation scheme has the advantage of preserving automatically some of the nonlinear features of field theory. For this purpose, we shift the field variable  $\chi$  around the solution  $M(x, y)$  of Eqs. (17) and (18):

$$g\chi(x, y) = M(x - y) + g\phi(x, y) \quad (24)$$

and expand the integrand of all the relevant path integrals in the bilocal quantity  $g\phi(x, y)$  that characterizes the strength of the field fluctuations around  $M$ . The generating functional (8) is then rewritten as

$$Z(j, \bar{\eta}, \eta) = \bar{N} \int D\phi e^{-\frac{i}{2}(\phi, S^{(2)}(M)\phi)} \left[ e^{iS_{\text{int}}(\phi)} Z(j, \bar{\eta}, \eta | M + g\phi) \right], \quad (25)$$

where

$$S_{\text{int}}(\phi) = i \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n} \text{tr}[G(M)\phi]^n, \quad (26)$$

$$S_{(\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2)}^{(2)}(M) = K_{(\alpha_1\beta_1;\alpha_3\beta_3)}^{-1} [\delta_{\alpha_3\beta_3} \delta_{\alpha_2\beta_2} - ig^2 K_{(\alpha_3\beta_3,kl)} G_{l\alpha_2}(M) G_{\beta_2k}(M)]. \quad (27)$$

In Eq. (25) we have absorbed the term  $\exp iS(M)$  in the new normalization constant  $\bar{N}$  and used the fact that the linear term in the functional Taylor expansion of  $S(\chi)$  is absent due to Eq. (13). In the following the path-integral averaging, e.g., of Eq. (25), will be written briefly as

$$Z(j, \bar{\eta}, \eta) = \frac{\langle e^{iS_{\text{int}}(\phi)} Z(j, \bar{\eta}, \eta | M + g\phi) \rangle_{\phi}}{\langle e^{iS_{\text{int}}(\phi)} \rangle_{\phi}}. \quad (28)$$

Let us now define the propagator  $D_{(\alpha\beta;\gamma\delta)}^{\phi}(x, y, x', y')$  of the bilocal field  $\phi_{\alpha\beta}(x, y)$  by<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} D_{(\alpha\beta;\gamma\delta)}^{\phi}(xy; x'y') &= i \langle \phi_{\alpha\beta}(xy) \phi_{\gamma\delta}(x'y') \rangle_{\phi} = \\ &= \left[ S^{(2)}{}^{-1}(M) \right]_{(\alpha\beta,\gamma\delta)}(xy, x'y'). \end{aligned} \quad (29)$$

Note that  $D^{\phi}$  acts as a two-particle propagation kernel that satisfies the following integral equation of the Bethe–Salpeter type:

$$D_{(\alpha\beta;\gamma\delta)}^{\phi} = K_{(\alpha\beta,\gamma\delta)} + ig^2 K_{(\alpha\beta,kl)} G_{li}(M) G_{jk}(M) D_{(ij,\gamma\delta)}^{\phi}. \quad (30)$$

From Eqs. (29) and (27) we obtain the perturbation expansion

$$\begin{aligned} D_{(\alpha\beta;\gamma\delta)}^{\phi}(xy; x'y') &= (\gamma_{\mu})_{\alpha\delta} (\gamma_{\nu})_{\gamma\beta} D_{\mu\nu}(x-y) \delta(x-y') \delta(y-x') + \\ &+ ig^2 [\gamma_{\mu} G(x, y' | M) \gamma_{\delta}]_{\alpha\delta} D_{\mu\nu}(x-y) [\gamma_{\sigma} G(x', y | M) \gamma_{\nu}]_{\gamma\beta} D_{\rho\sigma}(y'-x') + \\ &+ (ig^2)^2 \int d^4z d^4w [\gamma_{\mu} G(x, w | M) \gamma_{\lambda} G(w, y' | M) \gamma_{\rho}]_{\alpha\delta} \times \\ &\times [\gamma_{\tau} G(x', z | M) \gamma_{\sigma} G(z, y | M) \gamma_{\nu}]_{\gamma\beta} \times \\ &\times D_{\mu\nu}(x-y) D_{\tau\rho}(x'-y') D_{\sigma\lambda}(z-w) + \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (31)$$

The graphical representation of Eqs. (29) and (31) is given in Fig. 1. Here

---

<sup>7</sup>These definitions always include a normalization factor  $\langle 1 \rangle_{\phi}$  which is suppressed for brevity.

$$\begin{aligned}
D_{(\alpha\beta;\gamma\delta)}^\phi(xy; x'y') &= \bullet \text{---} \bullet \\
&= \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \text{---} \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ | \quad | \quad | \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ | \quad | \quad | \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} + \dots = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}
\end{aligned}$$

Fig. 1.

the dashed line symbolizes the propagator of the original bilocal field  $\phi$  which will be also sometimes written in the form of a contraction  $\overline{\varphi_{\alpha\beta}(x, y)\varphi_{\gamma\delta}(x', y')}$ . In the second row of Fig. 1 we give the expansion of the propagator in terms of Feynman graphs where the solid lines represent the quark Green's functions  $G(x, y|M)$  that are solutions of Eq. (14). This class of graphs will also be represented by a zigzag line symbolizing the many-gluon exchange. The expectation value of a product of  $n$  bilocal fields may now easily be evaluated by means of a Wick theorem. We have, for example,

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle_\phi = \overline{\phi_1 \phi_2} \overline{\phi_3 \phi_4} + \overline{\phi_1 \phi_2 \phi_3} \phi_4 + \overline{\phi_1 \phi_2 \phi_4} \phi_3, \tag{32}$$

$$\langle \phi_1 \phi_2 \dots \phi_{2n+1} \rangle_\phi = 0.$$

In the following we use the Wick theorem also in the compact form

$$\langle f(\phi) \rangle_\phi = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left( \frac{\delta}{\delta B}, D^\phi \frac{\delta}{\delta B} \right) \right\} f(B) \Big|_{B=0}. \tag{33}$$

Let us now compute as examples the complete two-particle Green's functions  $G, \Delta$  of the quarks and vector gluons as well as the quark-gluon

vertex  $\Gamma$ . We get<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(x, y) &= \frac{1}{iZ} \frac{\delta}{\delta\eta_\beta(y)} \frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = \\ &= \langle e^{iS_{\text{int}}(\phi)} Z(j, 0, 0|M + g\phi) G_{\alpha\beta}(x, y|M + g\phi - g\hat{A}_{\text{ext}}) \rangle_\phi \end{aligned} \quad (34)$$

or, using Eq. (33),

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(x, y) &= \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left( \frac{\delta}{\delta B}, D^\phi \frac{\delta}{\delta B} \right) \right\} \left[ e^{iS_{\text{int}}(B)} Z(j, 0, 0|M + gB) \times \right. \\ &\quad \left. \times G_{\alpha\beta}(x, y|M + gB - \hat{A}_{\text{ext}}g) \right]_{B=0} \end{aligned} \quad (35)$$

and, similarly,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(x, y) &= i \frac{\delta}{\delta j_\nu(y)} \frac{\ln Z}{j_\mu(x)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = \\ &= D_{\mu\nu}(x - y) - g^2 \int d^4z d^4u d^4v \langle e^{iS_{\text{int}}(\phi)} D_{\mu\nu}(x - z) \times \\ &\quad \times \text{tr}[\gamma_\alpha G(z, u|M + g\phi - g\hat{A}_{\text{ext}}) \gamma_\tau G(u, v|M + g\phi - g\hat{A}_{\text{ext}})] \times \\ &\quad \times D_{\tau\alpha}(v - y) \rangle_\phi + \\ &\quad + g^2 [\langle e^{iS_{\text{int}}(\phi)} a_\mu(x) a_\nu(y) \rangle_\phi - \langle e^{iS_{\text{int}}(\phi)} a_\mu(x) \rangle_\phi \langle e^{iS_{\text{int}}(\phi)} a_\nu(y) \rangle_\phi]. \end{aligned} \quad (36)$$

Here

$$a_\mu(x) = - \int d^4y D_{\mu\nu}(x - y) \left[ j_\nu(y) + ig \text{tr} \gamma_\nu G(y, y|M + g\phi - g\hat{A}_{\text{ext}}) \right] \quad (37)$$

is a superposition of the external vector potential  $\hat{A}_{\text{ext}}(x)$  and of the effective averaged potential induced by the external current in the vacuum in the presence of the external bilocal field  $\chi$ . The three-point function is given by the following expression (including radiation corrections on the

---

<sup>8</sup>One may also obtain a slightly modified expansion of the quark Green's function by seeking for the stationary point of the whole integrand of Eq. (34). Instead of the field equation (13) we have then  $\delta/\delta M [e^{iS(M)} G(x, y|M)]$ . It can easily be shown that the resulting Schwinger–Dyson gap equation includes now the averaged field  $\bar{X}_\mu(x)$  of Eq. (37). A similar result has been obtained for a system of interacting Fermi and Bose particles in Ref. [12].

external lines):

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_\mu(x, y, z) &= \frac{1}{iZ} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(y)} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \frac{\delta Z}{\delta j_\mu(z)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = \\
&= \langle e^{iS_{\text{int}}(\phi)} Z(j, 0, 0 | M + g\phi) \times \\
&\times \left\{ \int d^4x' G(y, x' | M + g\phi - g\hat{A}_{\text{ext}}) \times \right. \\
&\times D_{\mu\nu}(x' - z) \gamma_\nu G(x', x | M + g\phi - g\hat{A}_{\text{ext}}) + \\
&+ \left. g^2 \int d^4x' \left( j_\nu(x') + i \text{tr} \left[ \frac{1}{1 - g^2 G(M + g\phi) \hat{A}_{\text{ext}}} G \gamma_\nu \right]_{(x', x')} \right) \times \right. \\
&\times \left. D_{\nu\mu}(x' - z) G(y, x | M + g\phi - g\hat{A}_{\text{ext}}) \right\} \Bigg\rangle_\phi. \tag{38}
\end{aligned}$$

The lowest order term of the three-point function (for  $j = 0$ )

$$\int d^4x' G(y - x' | M) [\gamma_\nu] G(x - x' | M) D_{\mu\nu}(x' - z) \tag{39}$$

just leads to the bare coupling of Eq. (14) as it should be. Finally, Fig. 2 shows, for illustration, some graphical examples of the abnormal perturbation expansion of Green's functions (34), (36), and (38). The graphs on the left-hand side represent contributions obtained by expanding the integrand of the path integrals in the bilocal field  $\phi$  (closed quark loops arise from  $S_{\text{int}}(\phi)$ ), whereas on the right-hand side the corresponding classes of Feynman graphs are drawn. We recall that a solid line denotes the nonperturbative quark propagator  $G(p|M)$  of Eq. (14).

## 4. Discussions and Concluding Remarks

It has been shown that the dynamical breakdown of chiral symmetry may conveniently be studied by using bilocal integration variables in the path-integral representation of the generating functional. It turns out that the ‘‘classical’’ equation of motion of the bilocal field is identical with the differential version of the Schwinger–Dyson equation for the quark propagator in the lowest nontrivial approximation of perturbation theory. The existence of nontrivial solutions to this differential equation with the boundary conditions (18) has been shown in Ref. [8]. There it has been





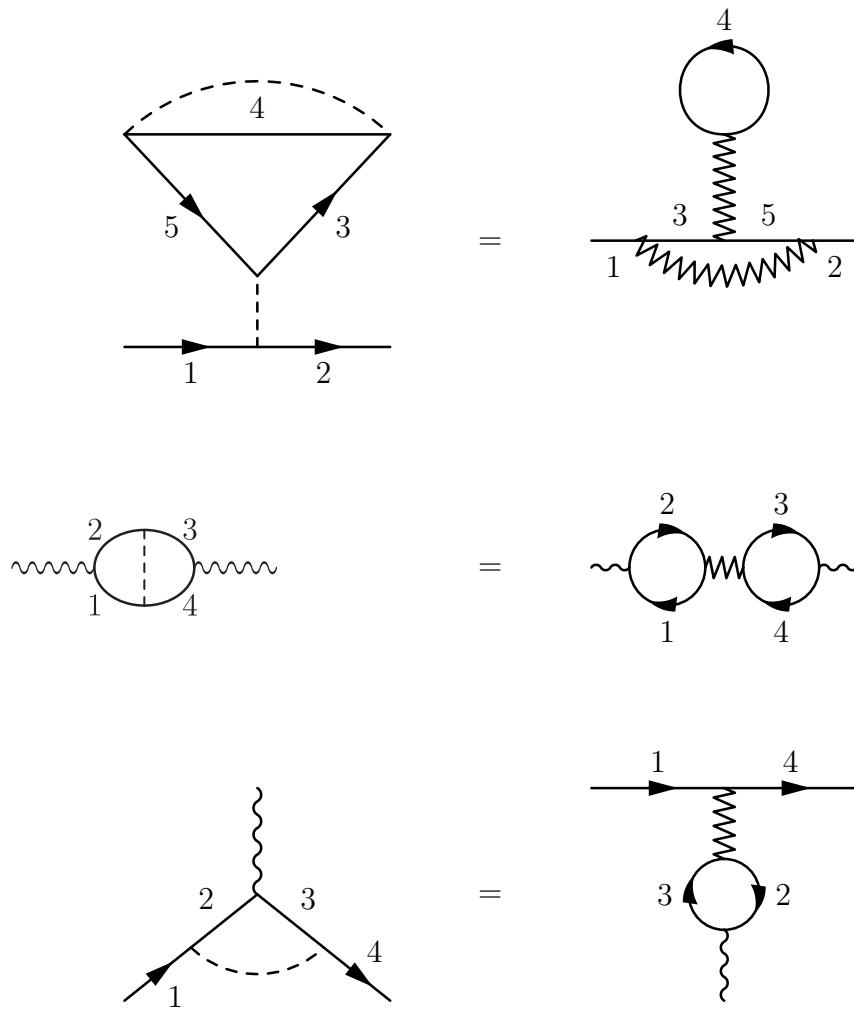


Fig. 2. (beginning on the previous page)

found that the quark propagator does not develop a particle pole in the timelike region, the quarks being confined. It should be remarked that this proof heavily relies on the boundary conditions (18) obtained from the integral form of the Schwinger–Dyson gap equation. It would be interesting whether quark confinement holds also if the additional radiative corrections are taken into account.

Finally, an abnormal perturbation expansion taking the nonperturbative solution of the Schwinger–Dyson equation as the lowest order term has been formulated and the correspondence of these diagrams to the Feynman diagrams has been established.

Concluding we mention that our approach bears a resemblance to the method of bilocal sources of Jackiw, Cornwall and Tomboulis [13] which has been used to construct an effective potential for composite operators. These authors have obtained the Schwinger–Dyson gap equation from the minimum of the effective potential.

## Acknowledgements

The authors would like to express their sincere thanks to D.I. Blokhintsev, A.T. Filippov, A.M. Polyakov, D.V. Volkov, and M.K. Volkov for useful discussions.

## Added Note

After completing this work we have obtained a paper of H. Kleinert [14] where the gap equation (13) has been derived, too, using bilocal techniques.

## References

- [1] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.*, 122 (1961) 345 ; *ibid.* 124 (1961) 246, see also V.G. Vaks and A.I. Larkin, *Zh. Teor. Eksp. Fiz.*, 40 (1961) 282 (in Russian); B.A. Arbuzov, A.N. Tavkhelidze and R.N. Faustov. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 139 (1961) 345 (in Russian).

- [2] R. Jackiw and K. Johnson, Phys. Rev., D8 (1973) 2386;  
J. Cornwall and R.B. Norton, Phys. Rev., D8 (1973) 3338;  
D. Gross and A. Neveu, Phys. Rev., D10 (1974) 2332.
- [3] A.T. Filippov, Proceedings of the IV International Conference on  
Nonlocal Quantum Field Theory (Alushta 1976), D-2-9788, Dubna  
(1976);  
P.I. Fomin et al., Preprint ITP-75-93E, Kiev (1975).
- [4] K. Johnson, M. Baker and R. Willey, Phys. Rev., 136 (1964) B1111;  
M. Baker and K. Johnson, Phys. Rev., D8 (1973) 1110 .
- [5] N.N. Bogolubov and D.V. Shirkov, Introduction in the Theory of  
Quantized Fields, Moscow (1974) (in Russian).
- [6] M.A. Braun, Preprint FIAN SSSR, No. 140, Moscow (1971).
- [7] R. Haag and A.J. Maria, Phys. Rev., 132 (1963) 2325;  
P. Langacker and H. Pagels, Phys. Rev., D9 (1974) 3413 .
- [8] R. Pukuda and T. Kugo, Preprint KUNS 350, Kyoto (1976).
- [9] J. Bardeen, L. Cooper and J. Schrieffer, Phys. Rev., 108 (1957) 1175;  
N.N. Bogolubov, Nuovo Cim., 7 (1958) 794.
- [10] U. Hakanishi, Progr. Theor. Phys., Suppl. 43 (1969) 1 .
- [11] J.S. Goldstein, Pnys. Rev., 21 (1953) 1516.
- [12] E.S. Fradkin, O.K. Kalashnikov, Preprint FIAN SSSR, No. 140,  
Moscow (1971).
- [13] J.M. Cornwall, R. Jackiw and E.Tomboulis, Phys. Rev., D10, 2428  
(1974).
- [14] H. Kleinert, Univ. de Genève prepr. (1976).

# Field Correlators in the Dual Abelian Higgs Model

D. Antonov<sup>1</sup>, D. Ebert<sup>2</sup>

Institute of Physics, Humboldt University of Berlin,  
Newtonstr. 15, 12489 Berlin, Germany

The bilocal electric field-strength correlators in the SU(2)-inspired dual Abelian Higgs model are derived with accounting for the contributions to these averages produced by closed dual strings. By means of screening in the plasma of such strings, the dual vector boson becomes heavier, i.e. the vacuum correlation length diminishes. What is more important is that such a screening produces a long-range interaction between points lying on the contour of the Wilson loop. This interaction generates a Lüscher-type term, even when one restricts oneself to the minimal surface, as it is usually done in the bilocal approximation to the stochastic vacuum model.

## Foreword

It is a great pleasure for one of us (D.E.), who has known Victor Pervushin since 1975 when we started to work together at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics in Dubna, to remember that fruitful time of cooperation. We were very young and optimistic and enthusiastically discussed new ideas and methods in physics.

In particular, D.E. remembers their first common investigations of the hadronization in QCD, which were based on path-integral techniques in bilocal fields [1, 2]. Although looking rather academically at that time, these new methods provided an important step in the path-integral derivation of effective chiral hadron Lagrangians from microscopic theories, like

---

<sup>1</sup>Permanent address: ITEP, B. Cheremushkinskaya 25, RU-117 218 Moscow, Russia;  
e-mail: antonov@df.unipi.it

<sup>2</sup>E-mail: debert@physik.hu-berlin.de

QCD or Nambu–Jona-Lasinio-type quark models. The important results obtained by M.K. Volkov and V.N. Pervushin in chiral quantum field theory [3] and the interesting work on bilocal hadronization of QCD were well-timed and certainly had a remarkable influence on later developments in this field.

Over all the past 30 years it was very nice to meet Victor, who with his sunny, cheerful mind looks at science with a deep feeling of internal satisfaction. On the occasion of this particular jubilee, we would like to wish him much further success and, in particular, to keep his harmony and optimism for future.

## Introduction

The Stochastic Vacuum Model (SVM) [4] is nowadays commonly recognized as a promising nonperturbative approach to QCD (see Ref. [5] for reviews). Within the so-called bilocal or Gaussian approximation, well confirmed by the existing lattice data [6,7], this model is fully described by the irreducible bilocal gauge-invariant field strength correlator (cumulant),  $\langle\langle F_{\mu\nu}(x)\Phi(x, x')F_{\lambda\rho}(x')\Phi(x', x)\rangle\rangle$ . Here,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$  stands for the Yang–Mills field-strength tensor,  $\Phi(x, y) \equiv \frac{1}{N_c} \mathcal{P} \exp \left( ig \times \int_y^x A_\mu(u) du_\mu \right)$  is a parallel transporter factor along the straight-line path, and  $\langle\langle \mathcal{O}\mathcal{O}' \rangle\rangle \equiv \langle \mathcal{O}\mathcal{O}' \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle \langle \mathcal{O}' \rangle$  with the average defined w.r.t. the Euclidean Yang–Mills action. It is further convenient to parametrize the bilocal cumulant by the two coefficient functions  $D$  and  $D_1$  [4, 5] as follows:

$$\begin{aligned} & \frac{g^2}{2} \langle\langle F_{\mu\nu}(x)\Phi(x, x')F_{\lambda\rho}(x')\Phi(x', x)\rangle\rangle = \\ & = \hat{1}_{N_c \times N_c} \{ (\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}) D((x-x')^2) + \\ & + \frac{1}{2} [\partial_\mu^x ((x-x')_\lambda \delta_{\nu\rho} - (x-x')_\rho \delta_{\nu\lambda}) + \\ & + \partial_\nu^x ((x-x')_\rho \delta_{\mu\lambda} - (x-x')_\lambda \delta_{\mu\rho})] D_1((x-x')^2) \}. \end{aligned} \quad (1)$$

After that, setting for the nonperturbative parts of the  $D$ - and  $D_1$ -function various *Ansätze*, one can apply SVM to calculations of the high-energy scattering processes [8] or test these *Ansätze* in the lattice experiments [6, 7]. However, from the pure field-theoretical point of view, a challenge

remains to derive the coefficient functions analytically. Unfortunately, in QCD, this problem looks too complicated.

To proceed with, it is therefore reasonable to derive field-strength correlators not in QCD itself, but rather in some Abelian-type QCD-inspired models, which inherit confinement and allow for its analytic description. These include SU(2)- [9] and SU(3)- inspired dual Abelian-Higgs-type theories [10], as well as 3D compact QED [11]. The bilocal field-strength cumulant in these theories has been studied in Refs. [12–14], respectively. In the present minireview, we will briefly survey the results which concern the dual Abelian-Higgs-type theories, as well as their further elaborations performed in Ref. [15]. For the sake of simplicity, we will restrict ourselves to the SU(2)-inspired case, i.e., a simple dual Abelian-Higgs model (DAHM), although the SU(3)-generalization is straightforward.

A fact important for the further discussion is that in DAHM a sector with closed dual strings [16] exists. Such closed strings are short-living (virtual) objects, whose typical sizes are much smaller than the typical distances between them. This means that, similarly to monopoles in 3D compact QED, closed strings can be treated in the dilute-plasma approximation. Moreover, in the leading (semi-classical) approximation, the interaction of closed electric strings with large open ones, which end up at external quarks, can be disregarded at all. This is precisely the approximation in which field-strength correlators have been evaluated in Refs. [12, 13]. A leading correction to these semi-classical expressions, which stems from the interaction of closed strings with the open ones, has been found in Ref. [15] and will be reviewed below.

The outline of the minireview is as follows. In the next section, we will first mention a correspondence, based on the Abelian-projection method, between the DAHM and the SU(2)-QCD, which will be needed for the future purposes. Secondly, we will briefly review the main results of a calculation of electric field-strength correlators in the approximation when closed strings are disregarded. In Section 2, after a brief review of properties of the grand canonical ensemble of closed strings, we will evaluate the contribution of these objects to the field-strength correlators. The main results will finally be quoted in Summary.

# 1. Electric Field-Strength Correlators in the Absence of Closed Strings

## 1.1 The model

To derive from the Lagrangian of the SU(2)-gluodynamics an IR effective theory, based on the assumption of condensation of ‘‘Cooper pairs’’ of Abelian-projected monopoles, one usually employs the so-called Abelian dominance hypothesis [17]. It states that the off-diagonal (in the sense of the Cartan decomposition) fields can be disregarded, since after the Abelian projection those can be shown to become very heavy and therefore irrelevant to the IR region. The action describing the remaining diagonal fields and Abelian-projected monopoles reads

$$S_{\text{eff}} [a_\mu, f_{\mu\nu}^m] = \frac{1}{4} \int d^4x (f_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}^m)^2. \quad (2)$$

Here,  $a_\mu \equiv A_\mu^3$ ,  $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ , and the monopole field-strength tensor  $f_{\mu\nu}^m$  obeys Bianchi identities modified by monopoles,  $\partial_\mu \tilde{f}_{\mu\nu}^m \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu f_{\lambda\rho}^m = j_\nu^m$ . The monopole currents  $j_\mu^m$ 's should eventually be averaged over in the sense which will be specified below.

To proceed with the investigation of the monopole ensemble, it is useful to dualize the theory under study. This yields the following expression for the partition function:

$$\mathcal{Z} = \left\langle \int \mathcal{D}B_\mu \exp \left[ - \int d^4x \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - i B_\mu j_\mu^m \right) \right] \right\rangle_{j_\mu^m}, \quad (3)$$

where  $B_\mu$  is the magnetic vector-potential dual to the electric one,  $a_\mu$ , and  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ . Once the  $j_\mu^m$ -dependence of the action became explicit, it is now possible to set up the properties of the monopole ensemble. To describe the condensation of monopole Cooper pairs, it is first necessary to specify  $j_\mu^m$  as the collective current of  $N$  of those:

$$j_\mu^{m(N)}(x) = 2g_m \sum_{n=1}^N \oint dx_\mu^n(s) \delta(x - x^n(s)).$$

Here, the world line of the  $n$ -th Cooper pair is parametrized by the vector  $x_\mu^n(s)$ , and  $g_m$  is the magnetic coupling constant, related to the QCD coupling constant  $g$  via the quantization condition  $gg_m = 4\pi n$  with  $n$  being



an integer. In what follows, we will for concreteness restrict ourselves to the monopoles possessing the minimal charge, i.e., set  $n = 1$ , although the generalization to an arbitrary  $n$  is straightforward. Further, it is necessary to set for the measure  $\langle \dots \rangle_{j_\mu^m}$  the following expression [18]:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \exp \left( i \int d^4x B_\mu j_\mu^m \right) \right\rangle_{j_\mu^m} = \\
& = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \left[ \prod_{n=1}^N \int_0^\infty \frac{ds_n}{s_n} e^{4\lambda\eta^2 s_n} \int_{u(0)=u(s_n)} \mathcal{D}u(s'_n) \right] \times \\
& \times \exp \left\{ \sum_{l=1}^N \int_0^{s_l} ds'_l \left[ -\frac{1}{4} \dot{u}^2(s'_l) + 2ig_m \dot{u}_\mu(s'_l) B_\mu(u(s'_l)) \right] - \right. \\
& \left. - 4\lambda \sum_{l,k=1}^N \int_0^{s_l} ds'_l \int_0^{s_k} ds''_k \delta[u(s'_l) - u(s''_k)] \right\}. \quad (4)
\end{aligned}$$

Here, the vector  $u_\mu(s'_n)$  parametrizes the same contour as the vector  $x_\mu^n(s)$ . Clearly, the world-line action standing in the exponent in the r.h.s. of Eq. (4) contains besides the usual free part also the term responsible for the short-range repulsion (else called self-avoidance) of the trajectories of Cooper pairs. Equation (4) can further be rewritten as an integral over the dual Higgs field, describing magnetic Cooper pairs, as follows:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \exp \left( i \int d^4x B_\mu j_\mu^m \right) \right\rangle_{j_\mu^m} = \\
& = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* \exp \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} |D_\mu \Phi|^2 + \lambda (|\Phi|^2 - \eta^2)^2 \right] \right\}, \quad (5)
\end{aligned}$$

where  $D_\mu = \partial_\mu - 2ig_m B_\mu$  is the covariant derivative. Finally, substituting Eq. (5) into Eq. (3), we arrive at the DAHM:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} & = \int |\Phi| \mathcal{D}|\Phi| \mathcal{D}\theta \mathcal{D}B_\mu \times \\
& \times \exp \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} |D_\mu \Phi|^2 + \lambda (|\Phi|^2 - \eta^2)^2 \right] \right\}, \quad (6)
\end{aligned}$$

where  $\Phi(x) = |\Phi(x)| e^{i\theta(x)}$ . Clearly, the two main assumptions, made in the course of this derivation, were the disregarding of the off-diagonal degrees of freedom and the demand of condensation of monopole Cooper pairs.

## 1.2 Bilocal electric field-strength correlator

In order to investigate the bilocal cumulant of electric field strengths in the model (6), it is necessary to extend this model by external electrically charged test particles, i.e., particles, charged w.r.t. the Cartan subgroup of the original SU(2)-group. It is therefore natural to call these particles simply “quarks”. Such an extension can be performed by adding to the action (2) the term  $i \int d^4x a_\mu j_\mu^e$  with  $j_\mu^e(x) \equiv g \oint_C dx_\mu(s) \delta(x-x(s))$  standing for the conserved electric current of a quark, which moves along a certain closed contour  $C$ . Then, performing the dualization of the so-extended action and summing up over monopole currents according to Eq. (4), we arrive at Eq. (6) with  $F_{\mu\nu}$  replaced by  $F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^e$ . Here,  $F_{\mu\nu}^e$  stands for the field-strength tensor generated by quarks according to the equation  $\partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu}^e = j_\nu^e$ . A solution to this equation reads  $F_{\mu\nu}^e = -g \tilde{\Sigma}_{\mu\nu}^e$ , where  $\Sigma_{\mu\nu}^e(x) \equiv \int_{\Sigma^e} d\sigma_{\mu\nu}(\bar{x}(\xi)) \delta(x - \bar{x}(\xi))$  is the so-called vorticity tensor current defined at an arbitrary surface  $\Sigma^e$  (which is just the world sheet of an open dual Nielsen–Olesen string), bounded by the contour  $C$ .

From now on, we will be interested in the London limit of DAHM,  $\lambda \rightarrow \infty$ , where it admits an exact string representation. In that limit, the partition function (6) with external quarks reads

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}B_\mu \mathcal{D}\theta^{\text{sing}} \mathcal{D}\theta^{\text{reg}} \times \\ &\times \exp \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^e)^2 + \frac{\eta^2}{2} (\partial_\mu \theta - 2g_m B_\mu)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

In Eq. (7), we have further performed a decomposition of the phase of the dual Higgs field  $\theta = \theta^{\text{sing}} + \theta^{\text{reg}}$ , where the multivalued field  $\theta^{\text{sing}}(x)$  describes a certain configuration of dual strings and obeys the equation [19]

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\lambda \partial_\rho \theta^{\text{sing}}(x) = 2\pi \Sigma_{\mu\nu}(x). \quad (8)$$

Here,  $\Sigma_{\mu\nu}$  stands for the vorticity tensor current, defined at the world sheet  $\Sigma$  of a closed dual string, parametrized by the vector  $x_\mu(\xi)$ . On the other hand, the field  $\theta^{\text{reg}}(x)$  describes simply a single-valued fluctuation around the above-mentioned string configuration. Note that Eq. (8) is nothing but the Stokes theorem for  $\partial_\mu \theta^{\text{sing}}$ , written in the local form.

The string representation of the theory (7) can be derived analogously to Ref. [19], where this has been done for a model with a global U(1)-symmetry. One obtains

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}x_\mu(\xi) \mathcal{D}h_{\mu\nu} \times \\ &\times \exp \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{12\eta^2} H_{\mu\nu\lambda}^2 + g_m^2 h_{\mu\nu}^2 + i\pi h_{\mu\nu} \hat{\Sigma}_{\mu\nu} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

where  $\hat{\Sigma}_{\mu\nu} \equiv 4\Sigma_{\mu\nu}^e - \Sigma_{\mu\nu}$ , and  $H_{\mu\nu\lambda} \equiv \partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\lambda h_{\mu\nu} + \partial_\nu h_{\lambda\mu}$  is the field-strength tensor of a massive antisymmetric spin-1 tensor field  $h_{\mu\nu}$ . This field emerged via some constraints from the integration over  $\theta^{\text{reg}}$  and represents the massive dual vector boson. As far as the integration over the world sheets of closed strings,  $\mathcal{D}x_\mu(\xi)$ , is concerned, it appeared from the integration over  $\theta^{\text{sing}}$  by virtue of Eq. (8), which established a one-to-one correspondence between  $\theta^{\text{sing}}$  and  $x_\mu(\xi)$ . Physically this correspondence stems from the fact that the singularity of the phase of the dual Higgs field takes place just at closed-string world sheets. (Notice that, since in what follows we will be interested in effective actions, rather than the integration measures, the Jacobian emerging during the change of the integration variables  $\theta^{\text{sing}} \rightarrow x_\mu(\xi)$ , which has been evaluated in Ref. [20], will not be discussed below and is assumed to be included in the measure  $\mathcal{D}x_\mu(\xi)$ .)

Finally, the Gaussian integration over the field  $h_{\mu\nu}$  in Eq. (9) leads to the following expression for the partition function (7):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \exp \left[ -\frac{g^2}{2} \oint_C dx_\mu \oint_C dy_\nu D_m^{(4)}(x-y) \right] \int \mathcal{D}x_\mu(\xi) \times \\ &\times \exp \left[ -(\pi\eta)^2 \int d^4x \int d^4y \hat{\Sigma}_{\mu\nu}(x) D_m^{(4)}(x-y) \hat{\Sigma}_{\mu\nu}(y) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Here,  $D_m^{(4)}(x) \equiv \frac{m}{4\pi^2|x|} K_1(m|x|)$  is the propagator of the dual vector boson, whose mass  $m$ , generated by the Higgs mechanism, is equal to  $2g_m\eta$ , and  $K_\nu$ 's henceforth stand for the modified Bessel functions. Clearly, the first exponential factor in the r.h.s. of Eq. (10) is the standard result, which can be obtained without accounting for the dual Nielsen–Olesen strings. Contrary to that, the integral over string world sheets in the r.h.s. of

that equation stems just from the contribution of closed strings to the partition function and is the essence of the string representation. The respective string effective action describes both the interaction of closed world sheets  $\Sigma$ 's with the open world sheets  $\Sigma^e$ 's and self-interactions of these objects.

We are now in the position to discuss the bilocal correlator of electric field strengths in the model (7). Indeed, owing to the Stokes theorem, such an extended partition function (which is actually nothing but the Wilson loop of a test quark) can be written as  $\langle \exp(-\frac{ig}{2} \int d^4x \Sigma_{\mu\nu}^e f_{\mu\nu}) \rangle_{a_\mu, j_\mu^m}$ , where  $\langle \dots \rangle_{a_\mu, j_\mu^m} \equiv \langle \int \mathcal{D}a_\mu \exp(-S_{\text{eff}}[a_\mu, f_{\mu\nu}^m]) (\dots) \rangle_{j_\mu^m}$  with  $S_{\text{eff}}$  and  $\langle \dots \rangle_{j_\mu^m}$  given by Eqs. (2) and (4), respectively. Applying to this expression the cumulant expansion, we have in the bilocal approximation:

$$\mathcal{Z} \simeq \exp \left[ -\frac{g^2}{8} \int d^4x \int d^4y \Sigma_{\mu\nu}^e(x) \Sigma_{\lambda\rho}^e(y) \langle \langle f_{\mu\nu}(x) f_{\lambda\rho}(y) \rangle \rangle_{a_\mu, j_\mu^m} \right]. \quad (11)$$

Following the SVM, let us parametrize the bilocal cumulant by the two Lorentz structures similarly to the parametrization of Eq. (1):

$$\begin{aligned} \langle \langle f_{\mu\nu}(x) f_{\lambda\rho}(0) \rangle \rangle_{a_\mu, j_\mu^m} &= \left( \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda} \right) \mathcal{D}(x^2) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \partial_\mu \left( x_\lambda \delta_{\nu\rho} - x_\rho \delta_{\nu\lambda} \right) + \partial_\nu \left( x_\rho \delta_{\mu\lambda} - x_\lambda \delta_{\mu\rho} \right) \right] \mathcal{D}_1(x^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Owing to the Stokes theorem, Eq. (12) yields

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \simeq & \exp \left\{ -\frac{1}{8} \int d^4x \int d^4y [2g^2 \Sigma_{\mu\nu}^e(x) \Sigma_{\mu\nu}^e(y) \mathcal{D}((x-y)^2) + \right. \\ & \left. + j_\mu^e(x) j_\mu^e(y) G((x-y)^2)] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

where

$$G(x^2) \equiv \int_{x^2}^{+\infty} d\lambda \mathcal{D}_1(\lambda). \quad (14)$$

On the other hand, Eq. (13) should coincide with Eq. (10) divided by  $\mathcal{Z}[\Sigma_{\mu\nu}^e = 0]$  (which is just the standard normalization condition, encoded

in the integration measures); i.e., it reads

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \exp \left\{ - \int d^4x \int d^4y D_m^{(4)}(x-y) \times \right. \\ & \times \left[ (4\pi\eta)^2 \Sigma_{\mu\nu}^e(x) \Sigma_{\mu\nu}^e(y) + \frac{1}{2} j_\mu^e(x) j_\mu^e(y) \right] \left. \right\} \times \\ & \times \left\langle \exp \left[ 8(\pi\eta)^2 \int d^4x \int d^4y D_m^{(4)}(x-y) \Sigma_{\mu\nu}^e(x) \Sigma_{\mu\nu}^e(y) \right] \right\rangle_{x_\mu(\xi)}, \end{aligned} \quad (15)$$

where

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle_{x_\mu(\xi)} & \equiv \\ & \equiv \frac{\int \mathcal{D}x_\mu(\xi) (\dots) \exp \left[ -(\pi\eta)^2 \int d^4x \int d^4y \Sigma_{\mu\nu}(x) D_m^{(4)}(x-y) \Sigma_{\mu\nu}(y) \right]}{\int \mathcal{D}x_\mu(\xi) \exp \left[ -(\pi\eta)^2 \int d^4x \int d^4y \Sigma_{\mu\nu}(x) D_m^{(4)}(x-y) \Sigma_{\mu\nu}(y) \right]}. \end{aligned} \quad (16)$$

As has already been discussed in the Introduction, in the semi-classical approximation, closed dual strings can be disregarded, since their typical areas  $|\Sigma|$ 's are much smaller than the area  $|\Sigma^e|$  of the world sheet of a long open string, which confines a test quark. Owing to this, the exponential factor, which should be averaged over closed strings in the r.h.s. of Eq. (15), can be disregarded w.r.t. the first exponential factor in this equation, as well. Then, the comparison of the latter one with Eq. (13) readily yields for the function  $\mathcal{D}$  the following expression:

$$\mathcal{D}(x^2) = \frac{m^3}{4\pi^2} \frac{K_1(m|x|)}{|x|}, \quad (17)$$

whereas for the function  $\mathcal{D}_1$  we get the equation  $G(x^2) = 4D_m^{(4)}(x)$ , which leads to

$$\mathcal{D}_1(x^2) = \frac{m}{2\pi^2 x^2} \left[ \frac{K_1(m|x|)}{|x|} + \frac{m}{2} \left( K_0(m|x|) + K_2(m|x|) \right) \right]. \quad (18)$$

We see that in the IR limit,  $|x| \gg \frac{1}{m}$ , the asymptotic behaviours of the coefficient functions (17) and (18) are given by

$$\mathcal{D} \longrightarrow \frac{m^4}{4\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-m|x|}}{(m|x|)^{\frac{3}{2}}} \quad (19)$$

and

$$\mathcal{D}_1 \longrightarrow \frac{m^4}{2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-m|x|}}{(m|x|)^{\frac{5}{2}}}. \quad (20)$$

One can now see that, according to the lattice data [6, 7], the asymptotic behaviours (19) and (20) are very similar to the IR ones of the nonperturbative parts of the functions  $D$  and  $D_1$ , which parametrize the bilocal cumulant (1) in QCD. In particular, both functions decrease exponentially, and the function  $\mathcal{D}$  is much larger than the function  $\mathcal{D}_1$  due to the preexponential power-like behaviour. We also see that the role of the correlation length of the vacuum,  $T_g$ , i.e., the distance at which the functions  $D$  and  $D_1$  decrease, is played in the model (7) by the inverse mass of the dual vector boson,  $1/m$ .

Hence we see that, within the approximation when the contribution of closed strings to the partition function (15) is disregarded, the bilocal approximation to the SVM is an exact result in the theory (7); i.e., all the cumulants of the orders higher than the second one vanish. Higher cumulants naturally appear upon performing in Eq. (15) the average (16) over closed strings. However, this average yields important modifications already on the level of the bilocal cumulant. Namely, as we will see in the next section, it modifies the semi-classical expressions (17) and (18).

## 2. Electric Field-Strength Correlators in the Plasma of Closed Strings

To study the properties of closed strings, there is clearly no necessity to introduce external quarks. The field-strength correlators can be studied afterwards, i.e., already after the summation over the grand canonical ensemble of closed strings. Thus, let us first consider the theory (7) with  $F_{\mu\nu}^e = 0$ . Upon the derivation of the string representation of such a theory, we are then left with Eq. (9), where  $\Sigma_{\mu\nu}^e = 0$ . To study the grand canonical ensemble of closed strings, it is necessary to replace  $\Sigma_{\mu\nu}$  in Eq. (9) by the following expression:

$$\Sigma_{\mu\nu}^N(x) = \sum_{i=1}^N n_i \int d\sigma_{\mu\nu}(x_i(\xi)) \delta(x - x_i(\xi)). \quad (21)$$

Here,  $\xi$  is a 2D-coordinate, and  $n_i$ 's stand for winding numbers. In what follows, we will restrict ourselves to closed strings possessing the minimal winding numbers,  $n_i = \pm 1$ . That is because, analogously to the 3D-case [16,21], the energy of a single closed string is known to be a quadratic function of its flux, owing to which the vacuum prefers to maintain two closed strings of a unit flux, rather than one string of the double flux.

Then, taking into account that the plasma of closed strings is dilute, one can perform the summation over the grand canonical ensemble of these objects, which yields the following expression for the partition function:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} \exp \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{12\eta^2} H_{\mu\nu\lambda}^2 + g_m^2 h_{\mu\nu}^2 - 2\zeta \cos \left( \frac{|h_{\mu\nu}|}{\Lambda^2} \right) \right] \right\}. \quad (22)$$

Here  $|h_{\mu\nu}| \equiv \sqrt{h_{\mu\nu}^2}$ , and  $\Lambda \equiv \sqrt{\frac{L}{a^3}}$  is an UV momentum cutoff with  $L$  and  $a$  denoting the characteristic distances between closed strings and their typical sizes, respectively. Clearly, in the dilute-plasma approximation under study,  $a \ll L$  and  $\Lambda \gg a^{-1}$ . Also in Eq. (22),  $\zeta \propto e^{-S_0}$  stands for the fugacity (Boltzmann factor) of a single string, which has the dimension (mass)<sup>4</sup>, with  $S_0$  denoting the action of a single string.

Note that the value of  $S_0$  parametrically equals  $\sigma a^2$ , where the area of the string world sheet is proportional to  $a^2$ , and  $\sigma$  is the string tension of the loop, i.e., its energy per unit area. This energy can be evaluated from the action standing in the arguments of the exponents in the r.h.s. of Eq. (16) by virtue of the results of Ref. [22] and reads

$$\sigma = \frac{\eta^2}{2} \int d^2t \frac{K_1(|t|)}{|t|} \simeq \frac{\pi\eta^2}{2} \ln \left( \frac{\lambda}{g_m^2} \right). \quad (23)$$

Here we have in the standard way [21] set for a characteristic small dimensionless quantity in the model under study the value  $g_m/\sqrt{\lambda}$ , which is of the order of the ratio of  $m$  to the mass of the dual Higgs field. Moreover, it has been assumed that not only  $\sqrt{\lambda}/g_m \gg 1$ , but also  $\ln \left( \sqrt{\lambda}/g_m \right) \gg 1$ ; i.e., the last equality in the r.h.s. of Eq. (23) is valid with the logarithmic accuracy. The physical origin of this logarithmic divergency is analogous to that which takes place in 3D [16, 21]. It is due to the fact that, at the world sheet of a string, the condensate of the dual Higgs field is destroyed, and the dual vector boson remains massless.

The square of the full mass of the field  $h_{\mu\nu}$  following from Eq. (22) reads  $M^2 = m^2 + m_D^2 \equiv Q^2\eta^2$ . Here,  $m_D = 2\eta\sqrt{\zeta}/\Lambda^2$  is the additional contribution, emerging due to the screening of the dual vector boson in the plasma of closed electric strings, and  $Q = 2\sqrt{g_m^2 + \zeta}/\Lambda^4$  is the full magnetic charge of the dual vector boson.

To study the correlation functions of closed strings, it is convenient to represent the partition function (22) directly as an integral over the densities of these objects. This can be done by means of some kind of a Legendre transformation, and the result reads

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \int \mathcal{D}S_{\mu\nu} \exp \left\{ - \left[ (\pi\eta)^2 \int d^4x \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \int d^4y S_{\mu\nu}(x) D_m^{(4)}(x-y) S_{\mu\nu}(y) + V[S_{\mu\nu}] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

where the effective potential of closed strings,  $V$ , reads

$$\begin{aligned} V[S_{\mu\nu}] = & \int d^4x \left\{ \pi\Lambda^2 |S_{\mu\nu}| \ln \left[ \frac{\pi\Lambda^2}{2\zeta} |S_{\mu\nu}| + \sqrt{1 + \left( \frac{\pi\Lambda^2}{2\zeta} |S_{\mu\nu}| \right)^2} \right] - \right. \\ & \left. - 2\zeta \sqrt{1 + \left( \frac{\pi\Lambda^2}{2\zeta} |S_{\mu\nu}| \right)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

It can be proved that the correlation functions of  $S_{\mu\nu}$ 's, evaluated by virtue of the representation (24), are nothing but the correlation functions of densities of closed strings in the plasma.

These correlation functions can be calculated in the approximation when the plasma is sufficiently dilute; namely, its density obeys the inequality  $|S_{\mu\nu}| \ll \zeta/\Lambda^2$ . Within this approximation, the potential (25) becomes a simple quadratic functional of  $S_{\mu\nu}$ 's, and the generating functional for the correlators of densities of closed strings takes a simple Gaussian form.



It reads

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[J_{\mu\nu}] &= \frac{1}{\mathcal{Z}[0]} \int \mathcal{D}S_{\mu\nu} \exp \left\{ - \left[ (\pi\eta)^2 \int d^4x \times \right. \right. \\
&\times \int d^4y S_{\mu\nu}(x) D_m^{(4)}(x-y) S_{\mu\nu}(y) + \\
&\left. \left. + \int d^4x \left( -2\zeta + \frac{\pi^2 \Lambda^4}{4\zeta} S_{\mu\nu}^2 + J_{\mu\nu} S_{\mu\nu} \right) \right] \right\} = \\
&= \exp \left[ - \int d^4x \int d^4y J_{\mu\nu}(x) \mathcal{G}(x-y) J_{\mu\nu}(y) \right], \quad (26)
\end{aligned}$$

where

$$\mathcal{G}(x) \equiv \frac{\zeta}{\pi^2 \Lambda^4} (\partial^2 - m^2) D_M^{(4)}(x). \quad (27)$$

The desired bilocal correlation function of  $S_{\mu\nu}$ 's, stemming from Eq. (26), then has the form

$$\begin{aligned}
\langle S_{\mu\nu}(x) S_{\lambda\rho}(0) \rangle &= -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\rho\gamma\delta} \partial_\alpha^x \partial_\gamma^x g(x) = (\delta_{\lambda\nu} \delta_{\mu\rho} - \delta_{\nu\rho} \delta_{\mu\lambda}) \mathcal{G}(x) + \\
&+ (\delta_{\mu\lambda} \partial_\rho \partial_\nu + \delta_{\nu\rho} \partial_\mu \partial_\lambda - \delta_{\mu\rho} \partial_\lambda \partial_\nu - \delta_{\lambda\nu} \partial_\mu \partial_\rho) g(x), \quad (28)
\end{aligned}$$

where

$$g(x) = \frac{\zeta}{(\pi M \Lambda^2)^2} (\partial^2 - m^2) \left( D_M^{(4)}(x) - D_0^{(4)}(x) \right) \quad (29)$$

and  $\partial^2 g(x) = \mathcal{G}(x)$ .

This result can now readily be used for the calculation of contribution of closed strings to the bilocal cumulant (12). Indeed, applying to the average in the r.h.s. of Eq. (15) the cumulant expansion in the bilocal approximation, we get

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &\simeq \exp \left\{ - \int d^4x \int d^4y \times \right. \\
&\times D_m^{(4)}(x-y) \left[ (4\pi\eta)^2 \Sigma_{\mu\nu}^e(x) \Sigma_{\mu\nu}^e(y) + \frac{1}{2} j_\mu^e(x) j_\mu^e(y) \right] + \\
&+ 32(\pi\eta)^4 \int d^4x d^4y d^4z d^4u \times \\
&\left. \times D_m^{(4)}(x-z) D_m^{(4)}(y-u) \Sigma_{\mu\nu}^e(x) \Sigma_{\lambda\rho}^e(y) \langle \langle \Sigma_{\mu\nu}(z) \Sigma_{\lambda\rho}(u) \rangle \rangle_{x_\mu(\xi)} \right\}.
\end{aligned}$$

Comparing this expression with Eq. (11), we see that, owing to Eq. (28), the additional contribution of closed strings to the cumulant (12) has the form

$$\begin{aligned} \Delta \langle \langle f_{\mu\nu}(x) f_{\lambda\rho}(y) \rangle \rangle_{a_\mu, j_\mu^m} &= (4\pi g_m \eta^2)^2 \int d^4 z \int d^4 u \times \\ &\times D_m^{(4)}(x-z) D_m^{(4)}(y-u) \{ (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda}) \mathcal{G}(z-u) + \\ &+ [\delta_{\mu\rho} \partial_\lambda^z \partial_\nu^z + \delta_{\nu\lambda} \partial_\mu^z \partial_\rho^z - \delta_{\mu\lambda} \partial_\rho^z \partial_\nu^z - \delta_{\nu\rho} \partial_\mu^z \partial_\lambda^z] g(z-u) \}. \end{aligned}$$

Let us further compare this intermediate result with Eq. (12) and take into account that

$$(x-y)_\mu \mathcal{D}_1((x-y)^2) = -\frac{1}{2} \partial_\mu^x G((x-y)^2),$$

where the function  $G$  is defined by Eq. (14). This leads to the following system of equations, which determine the contributions of closed strings to the functions  $\mathcal{D}$  and  $G$ :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{D}((x-y)^2) &= (4\pi g_m \eta^2)^2 \int d^4 z \int d^4 u \times \\ &\times D_m^{(4)}(x-z) D_m^{(4)}(y-u) \mathcal{G}(z-u), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Delta G((x-y)^2) &= (8\pi g_m \eta^2)^2 \int d^4 z \int d^4 u \times \\ &\times D_m^{(4)}(x-z) D_m^{(4)}(y-u) g(z-u). \end{aligned} \quad (31)$$

Inserting now Eq. (27) into Eq. (30), we get

$$\Delta \mathcal{D}((x-y)^2) = -\frac{(4g_m \eta^2)^2 \zeta}{\Lambda^4} \int d^4 u D_m^{(4)}(y-u) D_M^{(4)}(x-u).$$

Carrying the integral out and adding the result to Eq. (17), we finally obtain for the function  $\mathcal{D}$  the following full result:

$$\mathcal{D}^{\text{full}}(x^2) = \frac{m^2 M}{4\pi^2} \frac{K_1(M|x|)}{|x|}. \quad (32)$$

Analogously, inserting Eq. (29) into Eq. (31), we have

$$\begin{aligned} \Delta G((x-y)^2) &= \zeta \left( \frac{8g_m \eta^2}{\Lambda^2 M} \right)^2 \int d^4 u \times \\ &\times D_m^{(4)}(y-u) \left[ D_0^{(4)}(x-u) - D_M^{(4)}(x-u) \right]. \end{aligned}$$

The expression for this integral together with Eq. (18) yield the following full result for the function  $\mathcal{D}_1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1^{\text{full}}(x^2) &= \frac{m_D^2}{\pi^2 M^2 |x|^4} + \frac{m^2}{2\pi^2 M x^2} \times \\ &\times \left[ \frac{K_1(M|x|)}{|x|} + \frac{M}{2} (K_0(M|x|) + K_2(M|x|)) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

We see that, as it should be, the functions (32) and (33) go over into Eqs. (17) and (18), respectively, when  $m_D \rightarrow 0$ , i.e., when one neglects the effect of screening in the ensemble of closed strings. An obvious important consequence of the obtained Eqs. (32) and (33) is that the correlation length of the vacuum,  $T_g$ , becomes modified from  $1/m$  (according to Eqs. (17) and (18)) to  $1/M$ . (It is worth emphasizing once again that this effect is due to the Debye screening of the dual vector boson in the ensemble of electrically charged closed strings, which makes this particle more heavy; namely, its mass becomes increased from  $m$  to  $M$ .) Indeed, it is straightforward to see that at  $|x| \gg 1/M$ ,

$$\mathcal{D}^{\text{full}} \longrightarrow \frac{(mM)^2}{4\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-M|x|}}{(M|x|)^{\frac{3}{2}}}$$

and

$$\mathcal{D}_1^{\text{full}} \longrightarrow \frac{m_D^2}{\pi^2 M^2 |x|^4} + \frac{(mM)^2}{2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-M|x|}}{(M|x|)^{\frac{5}{2}}}.$$

A remarkable fact is that the leading term of the IR asymptotics of the function  $\mathcal{D}_1^{\text{full}}$  is a pure power-like one, rather than that of the function  $\mathcal{D}_1$ , given by Eq. (20). This term produces a nonperturbative  $(1/r)$ -contribution to the  $\bar{q}q$ -potential, which by its structure resembles the Lüscher term. Typically, modelling the Lüscher term within the SVM is rather problematic. Indeed, in the standard approach, in order to get the Lüscher term, one should consider string fluctuations, while SVM is well-defined only on the minimal-area surface (see, e.g., Ref. [5]). Now, we have found another mechanism, which might generate a Lüscher-type term via a novel non-perturbative perimeter interaction.

Finally, it is worth noting that, due to the modification of the  $\mathcal{D}$ -function, one could have expected some change of the string tension of the open dual-string world sheet  $\Sigma^e$ . However, by virtue of the general formula expressing the string tension via the  $\mathcal{D}$ -function [22],  $\sigma = 4T_g^2 \int d^2 z \mathcal{D}(z^2)$ ,

one can check that this is not the case; i.e., the string tension of  $\Sigma^e$  is independent of whether we account for screening in the plasma of closed strings or not. The reason for that becomes clear from the resulting expression for  $\sigma$ . It reads  $16\pi\eta^2 \ln \frac{1}{c}$  with  $c$  standing for a characteristic small dimensionless quantity, and thus depends only on  $\eta$ , which is not affected by screening. Similarly to Eq. (23), setting for  $c$  the value  $g_m/\sqrt{\lambda}$ , we see that the string tension of  $\Sigma^e$  is by the factor 16 larger than the string tension of a closed string. Clearly, that is due to the factor 4 standing in the linear combination of  $\Sigma_{\mu\nu}$  and  $\Sigma_{\mu\nu}^e$  in  $\hat{\Sigma}_{\mu\nu}$  (cf. Eq. (10)). However, the coupling constant of the next-to-leading term in the gradient expansion of the nonlocal string effective action standing in the second exponential factor in the r.h.s. of Eq. (10) (the so-called rigidity term) does depend explicitly on the magnetic coupling constant and therefore becomes modified by the screening. Indeed, by virtue of the results of Ref. [22], one can see that, for the same world sheet  $\Sigma^e$ , this coupling constant without taking screening into account reads  $2\pi/(2g_m)^2$ , whereas in the presence of screening it goes over to  $2\pi/Q^2$ , as could have intuitively been expected.

## Summary

In the present article, we have briefly reviewed the properties of electric field-strength correlators in the DAHM, which correspond to the gauge-invariant correlators in the real QCD. First, we have reviewed the semi-classical analysis of these correlators. Then, the leading correction to this result, produced by the interaction of the open-string world sheet with closed electric strings, has been evaluated. This effect is essentially quantum, as well as the plasma of closed strings itself. In this way, it has been found that the correlation length of the vacuum becomes modified from the inverse mass of the dual vector boson, which it acquires by means of the Higgs mechanism, to its inverse full mass, which takes also into account the effect of Debye screening. Besides that, in one of the two coefficient functions, which parametrize the bilocal correlator of electric field strengths within the SVM, a nonperturbative power-like IR part appears, which was absent on the semi-classical level. This novel term opens up a possibility of generating a Lüscher-type term within the SVM.

It has been checked that, in the limit when the effect of screening is disregarded, the obtained novel expression for the bilocal field-strength correlator goes over to the semi-classical one, as it should be. Moreover, we have shown that the obtained modifications of the correlator do not affect the string tension, since this quantity depends only on the v.e.v. of the dual Higgs field and not on the mass of the dual vector boson. Contrary to that, the coupling constant of the so-called rigidity term changes due to the screening.

In conclusion, the obtained results demonstrate similarities in the vacuum structures of DAHM and QCD by means of the SVM. They might also shed some light on the origin of the Lüscher term in QCD.

## Acknowledgments

One of the authors (D.A.) is grateful to the Alexander von Humboldt Foundation for the financial support. He would also like to thank the staff of the Institute of Physics of the Humboldt University of Berlin for cordial hospitality.

## References

- [1] D. Ebert and V.N. Pervushin, *Bilocal functional approach to dynamical symmetry breaking* (Proc. XVIII Int. conference on high-energy physics, Vol. 1, pp. 125–127, Tbilisi, 1976); D. Ebert, V.N. Pervushin, *Dynamical Breakdown of Chiral Symmetry and Abnormal Perturbation Expansions*, JINR Prepr. E2-10020, Dubna, 1976 (see p. 62 in the present book).
- [2] D. Ebert and V.N. Pervushin, *Teor. Mat. Fiz. (USSR)*, 36 (1978) 313.
- [3] M.K. Volkov and V.N. Pervushin, *Essentially nonlinear Lagrangians, chiral theory, and meson physics* (Atomizdat, Moscow, 1979) [in Russian].
- [4] H.G. Dosch, *Phys. Lett. B*, 190 (1987) 177; Yu.A. Simonov, *Nucl. Phys. B*, 307 (1988) 512; H.G. Dosch and Yu.A. Simonov, *Phys. Lett. B*, 205 (1988) 339.

- [5] H.G. Dosch, *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 33 (1994) 121; Yu.A. Simonov, *Phys. Usp.*, 39 (1996) 313; A. Di Giacomo, H.G. Dosch, V.I. Shevchenko, and Yu.A. Simonov, *Phys. Rept.*, 372 (2002) 319.
- [6] M. Campostrini, A. Di Giacomo, and G. Mussardo, *Z. Phys. C*, 25 (1984) 173; A. Di Giacomo and H. Panagopoulos, *Phys. Lett. B*, 285 (1992) 133.
- [7] For the latest developments see: A. Di Giacomo and E. Meggiolaro, *Phys. Lett. B*, 537 (2002) 173; for reviews see *e.g.*: A. Di Giacomo, arXiv:hep-lat/9912016; E. Meggiolaro, *Phys. Lett. B*, 451 (1999) 414.
- [8] For a review see: S. Donnachie, H.G. Dosch, P. Landshoff, and O. Nachtmann, *Pomeron physics and QCD* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002).
- [9] S. Mandelstam, *Phys. Rep. C*, 23 (1976) 245; G. 't Hooft, in: *High energy physics, Vol. 2*, Ed. A. Zichichi (Editrice Compositori, Bologna, 1976), p. 1225; *Nucl. Phys. B*, 190 (1981) 455.
- [10] S. Maedan and T. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.*, 81 (1989) 229.
- [11] A.M. Polyakov, *Nucl. Phys. B*, 120 (1977) 429.
- [12] M. Baker, N. Brambilla, H.G. Dosch, and A. Vairo, *Phys. Rev. D*, 58 (1998) 034010; U. Ellwanger, *Eur. Phys. J. C*, 7 (1999) 673; D. Antonov and D. Ebert, *Eur. Phys. J. C*, 8 (1999) 343.
- [13] D. Antonov and D. Ebert, *Phys. Lett. B*, 444 (1998) 208; D.A. Komarov and M.N. Chernodub, *JETP Lett.*, 68 (1998) 117.
- [14] D. Antonov and D. Ebert, *Eur. Phys. J. C*, 12 (2000) 349.
- [15] D. Antonov, *JHEP*, 07 (2000) 055.
- [16] V.N. Popov, *Functional integrals in quantum field theory and statistical physics* (Reidel, Dordrecht, 1983).
- [17] Z.F. Ezawa and A. Iwazaki, *Phys. Rev. D*, 25 (1982) 2681; *Phys. Rev. D*, 26 (1982) 631.
- [18] K. Bardakci and S. Samuel, *Phys. Rev. D*, 18 (1978) 2849.

- [19] K. Lee, Phys. Rev. D, 48 (1993) 2493. P. Orland, Nucl. Phys. B, 428 (1994) 221; M. Sato and S. Yahikozawa, Nucl. Phys. B, 436 (1995) 100; M. Kiometzis *et al.*, Fortschr. Phys., 43 (1995) 697.
- [20] E.T. Akhmedov *et al.*, Phys. Rev. D, 53 (1996) 2087.
- [21] E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevski, *Statistical physics, Vol. 2* (Pergamon, New York, 1987).
- [22] D.V. Antonov, D. Ebert, and Yu.A. Simonov, Mod. Phys. Lett. A, 11 (1996) 1905.

# Relation between Conformal Relativity, Brans–Dicke and Low-Energy-Effective Superstring Theories

M.P. Dąbrowski<sup>a</sup>, D. Behnke<sup>b</sup>, D. Blaschke<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Institute of Physics, University of Szczecin, 70-451 Szczecin, Poland

<sup>b</sup> Fachbereich Physik, Universität Rostock, D-18051 Rostock, Germany

<sup>c</sup> Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

Conformal relativity theory which was proposed many years ago by Hoyle and Narlikar followed by Chernikov and Tagirov has recently been given some new aspects and was developed by Pervushin and collaborators.

In this contribution we present the basic properties of conformal relativity. We show how it relates to the Brans–Dicke theory and to the low-energy-effective superstring theory. The conformal relativity action appears to be equivalent to a transformed Brans–Dicke action for Brans–Dicke parameter  $\omega = -3/2$  in contrast to a reduced (graviton-dilaton) low-energy effective superstring action which corresponds to a Brans–Dicke action with Brans–Dicke parameter  $\omega=-1$ .

## Introduction

Pervushin and collaborators [1,2] have recently renewed the interest in conformal relativity theory which is just a version of the Hoyle–Narlikar theory [3–7]. In particular, they reinterpreted the geometrical evolution of the universe as an evolution of the mass represented by a scalar field in a flat universe.

The idea is quite interesting — especially, because it can help to resolve the problem of the cosmological constant or the dark energy in the universe [8–12].

In this paper we look for the relations between conformal relativity and the other alternative gravity theories such as Brans–Dicke theory



[13] and the whole stream of the contemporary investigations whose task is the unification of the gauge interactions with gravity represented by superstring and M-theory [14–16]. Brans–Dicke theory belongs to a larger class of the scalar-tensor theories of gravity [17] whose properties have been recently studied in the context of supernovae data [18, 19].

A signature of the metric convention  $(- + + +)$  is applied throughout the paper, together with the Riemann and Ricci tensor convention of Misner, Thorne and Wheeler [20] or Hawking and Ellis [21].

## 1. Conformal Relativity

Suppose that we have two spacetime manifolds  $\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{M}}$  with metrics  $g_{\mu\nu}, \tilde{g}_{\mu\nu}$  and *the same* coordinates  $x^\mu$ . We say that the two manifolds are *conformal* to each other if they are related by the following *conformal transformation*

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

and the function  $\Omega$ , which is called a conformal factor, must be a twice-differentiable function of coordinates  $x^\mu$  and lie in the range  $0 < \Omega < \infty$ . The conformal transformations shrink or stretch the distances between the two points described by the same coordinate system  $x^\mu$  on the manifolds  $\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{M}}$ , respectively, but they preserve the angles between vectors (in particular, null vectors which define light cones), which leads to a conservation of the (global) causal structure of the manifold [21].

In an arbitrary number of spacetime dimensions  $D$  the determinants of the metrics  $g = \det g_{\mu\nu}$  transform as

$$\sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^D \sqrt{-g}. \quad (1.2)$$

It is obvious from (1.1) that the following relations for the inverse metrics and the spacetime intervals hold:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2}g^{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2. \quad (1.4)$$

Finally, the notion of conformal flatness means that

$$\tilde{g}_{\mu\nu}\Omega^{-2}(x) = g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

where  $\eta_{\mu\nu}$  is the flat Minkowski metric.

The application of (1.1) to the Christoffel connection coefficients gives [21]

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{1}{\Omega} (g_{\mu}^{\lambda}\Omega_{,\nu} + g_{\nu}^{\lambda}\Omega_{,\mu} - g_{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}\Omega_{,\kappa}), \quad (1.6)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{1}{\Omega} (\tilde{g}_{\mu}^{\lambda}\Omega_{,\nu} + \tilde{g}_{\nu}^{\lambda}\Omega_{,\mu} - \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\lambda\kappa}\Omega_{,\kappa}). \quad (1.7)$$

We define the Riemann tensor as [21]

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^{\mu} - \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^{\mu} + \Gamma_{\rho\kappa}^{\mu}\Gamma_{\sigma\nu}^{\kappa} - \Gamma_{\sigma\kappa}^{\mu}\Gamma_{\rho\nu}^{\kappa}, \quad (1.8)$$

and the Ricci tensor reads as

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma}, \quad (1.9)$$

so that the Ricci scalar is

$$R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

An important feature of the conformal transformations is that they preserve Weyl conformal curvature tensor

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{2}{D-2} (g_{\mu[\sigma}R_{\rho]\nu} + g_{\nu[\rho}R_{\sigma]\mu}) + \\ &+ \frac{2}{(D-1)(D-2)} Rg_{\mu[\rho}g_{\sigma]\mu}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

which means that we have

$$\tilde{C}_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.12)$$

under (1.1).

In  $D = 4$  spacetime dimensions the Ricci tensors and Ricci scalars transform as

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \Omega^{-2} [4\Omega_{,\mu}\Omega_{,\nu} - \Omega_{,\sigma}\Omega^{,\sigma}g_{\mu\nu}] - \Omega^{-1} [2\Omega_{;\mu\nu} + \square\Omega g_{\mu\nu}], \quad (1.13)$$

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - 3\Omega^{-2}\Omega_{,\rho}\Omega^{,\rho}\tilde{g}_{\mu\nu} + \Omega^{-1} [2\Omega_{;\mu\nu} + \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{\square}\Omega], \quad (1.14)$$

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} \left[ R - 6 \frac{\square \Omega}{\Omega} \right], \quad (1.15)$$

$$R = \Omega^2 \left[ \tilde{R} + 6 \frac{\tilde{\square} \Omega}{\Omega} - 12 \tilde{g}^{\mu\nu} \frac{\Omega_{,\mu} \Omega_{,\nu}}{\Omega} \right], \quad (1.16)$$

and the appropriate d'Alembertian operators change under (1.1) as

$$\tilde{\square} \phi = \Omega^{-2} \left( \square \phi + 2g^{\mu\nu} \frac{\Omega_{,\mu}}{\Omega} \phi_{,\nu} \right), \quad (1.17)$$

$$\square \phi = \Omega^{-2} \left( \tilde{\square} \phi - 2\tilde{g}^{\mu\nu} \frac{\Omega_{,\mu}}{\Omega} \phi_{,\nu} \right). \quad (1.18)$$

In these formulas the d'Alembertian  $\tilde{\square}$  taken with respect to the metric  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  is different from  $\square$  which is taken with respect to a conformally rescaled metric  $g_{\mu\nu}$ .

In order to understand the problem of conformal invariance let us start our discussion with the vacuum Einstein–Hilbert action of general relativity which reads as

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R}, \quad (1.19)$$

where

$$\kappa^2 = 8\pi G. \quad (1.20)$$

For a while, let us make an assumption that this constant is

$$\kappa^2 = 6, \quad (1.21)$$

so that one gets the action (1.19) in the form

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{12} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R}. \quad (1.22)$$

Application of the conformal transformation (1.1) together with the help of (1.15) yields

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \Omega^2 \left( \frac{1}{6} R - \frac{\square \Omega}{\Omega} \right). \quad (1.23)$$

As one can easily see, the vacuum part of the Einstein–Hilbert action is not invariant under conformal transformation (1.1), apart from the case of the global transformations of the trivial type  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \text{const} \times g_{\mu\nu}$ .

The conformal symmetry is broken, which can be seen twice. Firstly, from the obvious conformal factor on the r.h.s. of Eq. (1.23). Secondly, this follows from the fact that the Ricci scalar does not appear in the additional term. This means that there is no additional coupling of the gravitational part represented by  $R$  to the conformal factor  $\Omega(x)$ . The structure of the additional term has the structure of a kinetic term of an arbitrary scalar field. Thus, the idea is to couple a massless scalar field  $\tilde{\Phi}$  to the gravitational part (Ricci scalar) in order to absorb the conformal factor, as follows

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left( \frac{1}{6} \right) \tilde{R} \tilde{\Phi}^2. \quad (1.24)$$

The result of this transformation is

$$S_{\text{C}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \Omega^2 \left( \frac{1}{6} R \tilde{\Phi}^2 - \frac{\square \Omega}{\Omega} \tilde{\Phi}^2 \right). \quad (1.25)$$

This action, in turn, can be expressed in terms of a redefined scalar field

$$\tilde{\Phi} = \Omega^{-1} \Phi \quad (1.26)$$

as

$$S_{\text{C}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{6} R \Phi^2 - \frac{\square \Omega}{\Omega} \Phi^2 \right), \quad (1.27)$$

so that the conformal factor is absorbed by the transformation rule of the scalar field.

Since the structure of the action (1.27) is similar to the action for a massless scalar field, the hope arises that the scalar field might repair the defect of the lack of conformal invariance. In order to do this, we first study the conformal transformation of the action for a massless scalar field  $\tilde{\Phi}$

$$S_{\tilde{\Phi}} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\Phi} \square \tilde{\Phi}, \quad (1.28)$$

which after the application of (1.26) yields

$$S_{\tilde{\Phi}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \Phi \square \Phi - \frac{\square \Omega}{\Omega} \Phi^2 \right), \quad (1.29)$$

where we have used the relation

$$\tilde{\square} \tilde{\Phi} = \frac{1}{\Omega^3} \left[ \square \Phi - \frac{\square \Omega}{\Omega} \Phi \right]. \quad (1.30)$$

The relations (1.28) and (1.29) show that also the scalar field action is not conformally invariant.

The equations derived so far suggest the following. If one wants to have an action, which is invariant under conformal transformations (1.1), one should ingeniously combine the Einstein–Hilbert action  $S_{\text{EH}}$  for the vacuum case with the action  $S_{\tilde{\Phi}}$  for a massless scalar field  $\tilde{\Phi}$  coupled to the gravitational part of the first action. This new action  $S_{\tilde{\Phi}} + S_{\text{EH}}$  reads as

$$\tilde{S} = S_{\tilde{\Phi}} + S_{\text{EH}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\Phi} \left( \frac{1}{6} \tilde{R} \tilde{\Phi} - \tilde{\square} \tilde{\Phi} \right), \quad (1.31)$$

which, in fact, is conformally invariant since the conformally transformed action (including the field redefinition (1.26)) has the same form, i.e.,

$$S = S_{\Phi} + S_C = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \Phi \left( \frac{1}{6} R \Phi - \square \Phi \right). \quad (1.32)$$

Now we can see that the original form of the Einstein–Hilbert action can be recovered from (1.31) provided we assume that

$$\kappa^2 = \frac{6}{\tilde{\Phi}^2} = \frac{6}{\varphi_0^2} = \text{const} \quad (1.33)$$

instead of (1.21).

Notice that the action (1.31) (or similarly (1.32)) may be represented in a slightly different form by the application of the expression for a covariant d'Alembertian for a scalar field in general relativity theory

$$\tilde{\square} \tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \tilde{\partial}_\mu \left( \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\partial}^\mu \tilde{\Phi} \right), \quad (1.34)$$

and by integrating out the boundary term, to the form [17]

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{1}{6} \tilde{R} \tilde{\Phi}^2 + \tilde{\partial}_\mu \tilde{\Phi} \tilde{\partial}^\mu \tilde{\Phi} \right], \quad (1.35)$$

in which the second term is just a standard kinetic term for a scalar field (cf. [21, 29]). The equations (1.35) are also conformally invariant since the application of the formulas (1.2), (1.15) and (1.26) together with the appropriate integration of the boundary term gives the same form of the equations

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{6} R \Phi^2 + \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \right], \quad (1.36)$$

The conformally invariant actions (1.31) and (1.32) are the basis to derive the equations of motion via the variational principle. The resulting equations of motion are conformally invariant, too. The equations of motion for scalar fields  $\tilde{\Phi}$  and  $\Phi$  are conformally invariant,

$$\left( \tilde{\square} - \frac{1}{6} \tilde{R} \right) \tilde{\Phi} = \Omega^{-3} \left( \square - \frac{1}{6} R \right) \Phi = 0, \quad (1.37)$$

and have the structure of the Klein–Gordon equation with the mass term replaced by the curvature term [4]. The conformally invariant Einstein equations are obtained from variation of  $\tilde{S}$  with respect to the metric  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  and read as

$$\begin{aligned} \left( \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} \right) \frac{1}{6} \tilde{\Phi}^2 + \tilde{\Phi}_{,\mu} \tilde{\Phi}_{,\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\Phi}_{,\alpha} \tilde{\Phi}^{\prime,\alpha} + \\ + \frac{1}{6} \left[ \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\square} (\tilde{\Phi}^2) - (\tilde{\Phi}^2)_{;\mu\nu} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Notice that one can abbreviate the energy-momentum tensor of the scalar field in (1.38) as

$$T_{\mu\nu}^{\tilde{\Phi}} = \tilde{\Phi}_{,\mu} \tilde{\Phi}_{,\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\Phi}_{,\alpha} \tilde{\Phi}^{\prime,\alpha}. \quad (1.39)$$

The gravitational field equations of motion (1.38) can also be rewritten by the relations ( $\tilde{\cdot}$  means that the covariant derivative is taken with respect to the metric  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ )

$$\tilde{\square} (\tilde{\Phi}^2) = 2 \tilde{\Phi}_{,\alpha} \tilde{\Phi}^{\prime,\alpha} + 2 \tilde{\Phi} \tilde{\square} \tilde{\Phi}, \quad (1.40)$$

$$(\tilde{\Phi}^2)_{;\mu\nu} = 2 \tilde{\Phi}_{,\mu} \tilde{\Phi}_{,\nu} + 2 \tilde{\Phi} \tilde{\Phi}_{;\mu\nu} \quad (1.41)$$

as

$$\begin{aligned} \left( \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} \right) \frac{1}{6} \tilde{\Phi}^2 &+ \frac{1}{6} \left[ 4\tilde{\Phi}_{,\mu} \tilde{\Phi}_{,\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\Phi}_{,\alpha} \tilde{\Phi}^{,\alpha} \right] + \\ &+ \frac{1}{3} \left[ \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\Phi} \square \tilde{\Phi} - \tilde{\Phi} \tilde{\Phi}_{;\mu\nu} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

In order to prove the conformal invariance of the action (1.42) it is necessary to know the rule of the conformal transformations for the double covariant derivative of a scalar field which reads as

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{;\mu\nu} &= \tilde{\Phi}_{,\mu\nu} - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} \tilde{\Phi}_{,\rho} = \\ &= -\Omega^{-2} \tilde{\Phi} \Omega_{;\mu\nu} + \Omega^{-1} \tilde{\Phi}_{;\mu\nu} + 4\Omega^{-3} \tilde{\Phi} \Omega_{,\mu} \Omega_{,\nu} - \\ &\quad - 2\Omega^{-2} (\tilde{\Phi}_{,\mu} \Omega_{,\nu} + \Omega_{,\mu} \tilde{\Phi}_{,\nu}) - \\ &\quad - \Omega^{-3} \tilde{\Phi} g_{\mu\nu} \Omega_{,\rho} \Omega^{,\rho} + \Omega^{-2} g_{\mu\nu} \tilde{\Phi}_{,\rho} \Omega^{,\rho}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{;\mu\nu} &= \tilde{\Phi} \Omega_{;\mu\nu} + \Omega \tilde{\Phi}_{;\mu\nu} + \frac{2}{\Omega} \tilde{\Phi} \Omega_{,\mu} \Omega_{,\nu} + 2 \left( \Omega_{,\mu} \tilde{\Phi}_{,\nu} + \tilde{\Phi}_{,\mu} \Omega_{,\nu} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\Omega} \tilde{\Phi} \tilde{g}_{\mu\nu} \Omega_{,\rho} \Omega^{,\rho} - \frac{1}{\Omega} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\Phi}_{,\rho} \Omega^{,\rho} = 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Inserting (1.13), (1.15), (1.30) and (1.43) into (1.42) gives the same *conformally invariant* form of the field equations as

$$\begin{aligned} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \frac{1}{6} \Phi^2 &+ \frac{1}{6} [4\Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \Phi_{,\alpha} \Phi^{,\alpha}] + \\ &+ \frac{1}{3} [g_{\mu\nu} \Phi \square \Phi - \Phi \Phi_{;\mu\nu}] = 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

These are exactly the same field equations as in the Hoyle–Narlikar theory [6]. Note that the scalar field equations of motion (1.37) can be obtained by the appropriate contraction of equations (1.42) and (1.45).

Another point is that the equations (1.42) or (1.45) apparently could give directly the vacuum Einstein field equations for  $\tilde{\Phi} = \varphi_0 = \sqrt{6}/\kappa = \sqrt{6/8\pi G} = \text{const}$  (cf. Eq. (1.33)). The same is obviously true for the field equations (1.45) with the same value of  $\Phi = \varphi_0 = \sqrt{6}/\kappa = \sqrt{6/8\pi G} = \text{const}$ . However, this limit is restricted to the case of vanishing Ricci curvature  $R = 0$  or  $\tilde{R} = 0$  which can be seen from the scalar field equations

of motion (1.37). In fact, the limit requires an involvement of a conformal factor which we will show later.

If one admits matter part (which can be represented by a perfect-fluid energy momentum tensor, for example) into the action (1.32),

$$S_{\text{Matter}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{Matter}}, \quad (1.46)$$

one has the matter energy-momentum tensor as follows

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{Matter}}). \quad (1.47)$$

The admission of (1.46) into the conformally invariant action (1.32) generalizes the field equations (1.45) to

$$\begin{aligned} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \frac{1}{6} \Phi^2 &+ \frac{1}{6} [4\Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \Phi_{,\alpha} \Phi^{,\alpha}] + \\ &+ \frac{1}{3} [g_{\mu\nu} \Phi \square \Phi - \Phi \Phi_{;\mu\nu}] = T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

which after contraction give a modified equation (1.37)

$$\left( \square - \frac{1}{6} R \right) \Phi = \frac{T}{\Phi}. \quad (1.49)$$

Note that putting  $\Phi = \phi_0 = \sqrt{6/8\pi G}$  into (1.48) gives Einstein field equations provided  $T = -(1/6)R\Phi^2$ .

Applying (1.1), (1.2) and (1.3) we can write down the energy-momentum tensor in the conformal frame as

$$\tilde{S}_{\text{Matter}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \Omega^{-4} \mathcal{L}_{\text{Matter}}, \quad (1.50)$$

with

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\partial}{\partial \tilde{g}_{\mu\nu}} \left( \sqrt{-\tilde{g}} \Omega^{-4} \mathcal{L}_{\text{Matter}} \right) = \\ &= \Omega^{-4} \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial \tilde{g}_{\mu\nu}} \frac{1}{\partial g_{\lambda\kappa}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{Matter}}) = \\ &= \Omega^{-6} T^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.51)$$



where the following relation has been applied

$$\frac{\partial \tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial g_{\lambda\kappa}} = \Omega^2 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\lambda\kappa}} = \Omega^2 \delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\kappa. \quad (1.52)$$

The admission of (1.50) gives the conformally invariant field equations (1.38) as

$$\begin{aligned} \left( \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} \right) \frac{1}{6} \tilde{\Phi}^2 &+ \frac{1}{6} \left[ 4 \tilde{\Phi}_{;\mu} \tilde{\Phi}_{;\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\Phi}_{;\alpha} \tilde{\Phi}^{;\alpha} \right] + \\ &+ \frac{1}{3} \left[ \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\Phi} \square \tilde{\Phi} - \tilde{\Phi} \tilde{\Phi}_{;\mu\nu} \right] = \tilde{T}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.53)$$

which after contraction give a modified equation (1.37)

$$\left( \square - \frac{1}{6} \tilde{R} \right) \tilde{\Phi} = \frac{\tilde{T}}{\tilde{\Phi}}. \quad (1.54)$$

Note that putting  $\tilde{\Phi} = \tilde{\phi}_0 = \sqrt{6/8\pi G}$  into (1.53) gives Einstein field equations provided  $\tilde{T} = -(1/6) \tilde{R} \tilde{\Phi}^2$ .

Now one can apply a perfect fluid as a source of the gravitational field with the four-velocity  $u^\mu$ , the energy density  $\varrho = \varrho(x)$  and the pressure  $p = p(x)$ , i.e.,

$$T^{\mu\nu} = (\varrho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (1.55)$$

and  $u_\mu u^\mu = -1$ . Transforming (1.55) into a conformally related frame, one gets

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{\mu\nu} &= (\tilde{\varrho} + \tilde{p}) \tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu + \tilde{p} \tilde{g}^{\mu\nu} = \\ &= (\tilde{\varrho} + \tilde{p}) \Omega^{-2} u^\mu u^\nu + \tilde{p} \Omega^{-2} g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

where we have used

$$\tilde{u}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tilde{s}} = \frac{1}{\Omega} \frac{dx^\mu}{ds} = \Omega^{-1} u^\mu. \quad (1.57)$$

Imposing conservation law as in general relativity, we have

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (1.58)$$

which in a conformally related frame (1.1) reads as

$$\tilde{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{\Omega^{;\mu}}{\Omega}\tilde{T}. \quad (1.59)$$

From (1.59) we can easily see that the conformally transformed energy-momentum tensor is conserved only if its trace vanishes ( $\tilde{T} = 0$ ). For a barotropic fluid with

$$p = (\gamma - 1)\varrho, \quad (1.60)$$

it vanishes only for radiation  $p = (1/3)\varrho$ .

## 2. Relation to Brans–Dicke and Low-Energy Effective Superstring Theories

The Brans–Dicke theory (BD) [13], based on ideas of Jordan [22], was developed in the early sixties of the last century and is supposed to realize the ideas of Mach [23]. These ideas can be summarized in the statement that the inertial masses of the elementary particles are not fundamental constants, but that they rather represent the particles' interaction with some cosmic field [24].

However, the absolute scale of the masses can be determined only by measuring gravitational acceleration. This can be equivalently reformulated, therefore the gravitational constant  $G$  is related to the average value of a scalar field  $\Phi_{\text{BD}}$ . Due to some estimations concerning a simple form of a covariant field equation, the radius and mean mass density of the universe, the expectation value of the scalar field  $\Phi_{\text{BD}}$  is normalized, such as  $\langle\Phi_{\text{BD}}\rangle \simeq 1/G$ . These assumptions were the line of thought to replace  $G$  by the inverse of the scalar field  $1/\Phi_{\text{BD}}$  and to include an extra energy-momentum tensor for the scalar field.

The Brans–Dicke action reads as [6]

$$S_{\text{BD}} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \Phi_{\text{BD}} R - \frac{\omega}{\Phi_{\text{BD}}} \partial_\mu \Phi_{\text{BD}} \partial^\mu \Phi_{\text{BD}} \right], \quad (2.1)$$

where  $\omega$  is the Brans–Dicke parameter.

Varying the action (2.1) (with matter Lagrangian included), one gets the field equations of the Brans–Dicke theory in the form

$$\square\Phi_{\text{BD}} = \frac{8\pi T}{3+2\omega}, \quad (2.2)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{\Phi_{\text{BD}}}T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\Phi_{\text{BD}}^2} \left( \Phi_{\text{BD},\mu}\Phi_{\text{BD},\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Phi_{\text{BD},\rho}\Phi^{\text{BD},\rho} \right) + \frac{1}{\Phi_{\text{BD}}} (\Phi_{\text{BD};\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square\Phi_{\text{BD}}). \quad (2.3)$$

It can be shown [24] that for  $\omega \gg 1$  from (2.2) one has

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad (2.4)$$

which shows one of the possible transitions of the Brans–Dicke theory to the Einstein theory for  $\omega \rightarrow \infty$ .

In order to relate conformal relativity with Brans–Dicke theory we refer to the conformally invariant actions (1.35) and (1.36) and define

$$\frac{1}{12}\Phi^2 = e^{-\phi}, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{12}\tilde{\Phi}^2 = e^{-\tilde{\phi}}, \quad (2.6)$$

which gives these actions in the form

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[ R + \frac{3}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right], \quad (2.7)$$

$$\tilde{S} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} e^{-\tilde{\phi}} \left[ \frac{1}{6} \tilde{R} + \frac{3}{2} \tilde{\partial}_\mu \tilde{\phi} \tilde{\partial}^\mu \tilde{\phi} \right]. \quad (2.8)$$

These actions, however, are special cases of the Brans–Dicke action which can be realized once one defines

$$\Phi_{\text{BD}} = e^{-\phi} \quad (2.9)$$

in (2.1) together with putting that  $16\pi = 1$ , which gives (2.1) in the form

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} [R - \omega \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi], \quad (2.10)$$

so that one can immediately see that (2.7) and (2.10) are the same provided that the Brans–Dicke parameter

$$\omega = -\frac{3}{2}. \quad (2.11)$$

On the other hand, if one takes

$$\omega = -1 \quad (2.12)$$

in (2.10), then one obtains the low-energy effective superstring action for only graviton and dilaton in the spectrum [15, 16, 27]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} [R + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi]. \quad (2.13)$$

Now we come to an important remark. Namely, the limit  $\omega = -3/2$  in Brans–Dicke field equations (2.2) is singular unless we assume that the trace of the energy-momentum tensor of matter *vanishes*. The point is that, in fact, the conformal relativity field equation (1.49) is not an independent equation from (1.48), as it is the case in Brans–Dicke theory, but that it is exactly a contraction of (1.48)! Then, it may be suggested that in order to get the proper limit of Brans–Dicke theory from conformal relativity one should also assume that in Brans–Dicke theory the trace of the energy-momentum of matter should vanish. As we have mentioned, vanishing of the energy-momentum for the perfect fluid requires its equation of state for radiation.

Now let us move to the problem of frames. The different frames are defined by the *coupling properties* of the scalar field (dilaton) to gravity in the theory. In all three cases we have discussed so far (conformal relativity, Brans–Dicke, superstrings) we deal with *non-minimal* coupling of the scalar field to gravity. For Brans–Dicke we call it *Jordan frame* and for superstrings we call it *string frame*. For conformal relativity we will also call it *Jordan frame* although we deal with non-minimal coupling in both conformally related frames (conformal invariance).

However, for all three theories one is usually interested in the question of what is going on in the *Einstein frame* which is defined as the frame in which the scalar field is *minimally* coupled to gravity.

Let us now begin with the action (2.10) which admits an arbitrary value of the parameter  $\omega$ . It is easy to show [25–27] that under a choice of a conformal factor

$$\Omega = e^{-\frac{\phi}{2}}, \quad (2.14)$$

the action (2.10) transforms into

$$\tilde{S} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \tilde{R} - \left( \omega + \frac{3}{2} \right) \tilde{\partial}_\mu \phi \tilde{\partial}^\mu \phi \right], \quad (2.15)$$

which for  $\omega = 3/2$  gives exactly the Einstein–Hilbert action

$$\tilde{S} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R}. \quad (2.16)$$

However, for low-energy effective theory with  $\omega = -1$  this is not Einstein–Hilbert action, but the Einstein gravity coupled minimally to a non-vanishing scalar field  $\phi$ . Notice that in terms of the  $\Phi$  field defined in conformal relativity according to (2.5) the relation (2.14) reads as

$$\Omega = e^{-\frac{\phi}{2}} = \frac{\Phi}{\sqrt{12}}, \quad (2.17)$$

or, basically,  $\tilde{\Phi} = \text{const}$  in (1.26), which has already been mentioned, gives the Einstein limit of conformal relativity. This means that the choice of the Einstein frame is *unique* in conformal relativity and requires  $\tilde{\Phi} = \text{const}$ .

Obviously, a more general choice of the conformal factor which leaves the action (2.10) invariant reads as a generalization of the choice (1.26)

$$\Omega = \frac{e^{-\frac{\phi}{2}}}{e^{-\frac{\tilde{\phi}}{2}}} = \frac{\Phi}{\tilde{\Phi}}, \quad (2.18)$$

and this is exactly the conformally invariant transformation (1.26) of the scalar field in conformal relativity. Having applied (2.18) to (2.10) shows its conformal invariance, i.e.,

$$\tilde{S} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} e^{-\tilde{\phi}} \left[ \tilde{R} + \frac{3}{2} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} \right]. \quad (2.19)$$

In fact it works for any value of  $\omega$ ! Notice that conformal invariance leads to a *duality transformation* [27] known from superstring theory between the scalar fields which leaves the action invariant and reads as

$$\tilde{\Phi} \rightarrow \Phi, \quad (2.20)$$

or

$$\tilde{\phi} \rightarrow \phi. \quad (2.21)$$

A slightly different way of getting conformal invariance of the action (2.7) is the following conformal transformation [27, 28]:

$$\Omega = e^{-\phi}, \quad (2.22)$$

which brings it to the form

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} e^{\phi} \left[ \tilde{R} + \frac{3}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right]. \quad (2.23)$$

This transformation remains conformally invariant provided we replace

$$\phi \rightarrow -\tilde{\phi}, \quad (2.24)$$

which gives

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} e^{-\tilde{\phi}} \left[ \tilde{R} + \frac{3}{2} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} \right], \quad (2.25)$$

and this is another example of duality symmetry known from superstring theory and may relate weak coupling regime with a strong coupling regime of various superstring actions [28].

## Discussion

We have shown that there is a simple relation between conformal relativity (Hoyle–Narlikar theory) and a reduced (graviton-dilaton) low-energy-effective superstring theory to Brans–Dicke theory. This relation shows that the former is recovered from Brans–Dicke theory if one takes  $\omega = -3/2$ , while the latter if one takes  $\omega = -1$ . This may allow one to study the exact cosmological solutions of conformal relativity and its properties appealing to the well-studied properties of the Brans–Dicke theory and, in particular, to low-energy-effective superstring theory.

Despite its restricted generality, conformally invariant theory of gravity still seems to be very attractive, for instance, with respect to the problem of a unique choice of vacuum in quantum field theory in curved spaces [29]. Interesting proposals of conformally invariant theories can appear in superstring theory [28] and in M-theory [30].

## Acknowledgments

M.P.D. acknowledges partial support from DAAD and from the Polish Research Committee grant No 2PO3B 090 23. D.B. has been supported in part by the DFG Graduiertenkolleg 567 “Strongly correlated many-particle systems”.

## References

- [1] D. Behnke, D. Blaschke, V.N. Pervushin, D.V. Proskurin, Phys. Lett. B, 530 (2002) 20.
- [2] D. Blaschke et al., in: *On the nature of dark energy*, eds. P. Brax, J. Martin, and J.-P. Uzan, IAP Paris (2002).
- [3] F. Hoyle and J.V. Narlikar, Proc. Roy. Soc. A, 282 (1964) 191; *ibid* A, 294 (1966) 138; *ibid* A, 270 (1962) 334.
- [4] N. Chernikov and E. Tagirov, Ann. Inst. Henri Poincarè 9 (1968) 109.
- [5] J.D. Bekenstein, Ann. Phys. (NY), 82 (1974) 535.
- [6] J.V. Narlikar, *Introduction to Cosmology*, Jones and Bartlett Publishers, Inc. Portola Valley (1983).
- [7] R. Penrose, *Relativity, Groups and Topology*, Gordon and Breach, London (1964).
- [8] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys., 61 (1989) 23.
- [9] S. Perlmutter et al., ApJ, 517 (1999) 565.
- [10] A.G. Riess et al., AJ, 116 (1998) 1009.
- [11] A.G. Riess et al., ApJ, 560 (2001) 49.
- [12] S. Perlmutter, M.S. Turner, and M. White, Phys. Rev. Lett., 83 (1999) 670.
- [13] C. Brans and R.H. Dicke, Phys. Rev., 124 (1961) 925.
- [14] J. Polchinski, *String Theory*, Cambridge University Press (1998).

- [15] M.P. Dąbrowski, *Ann. Phys. (Leipzig)*, 10 (2001) 195.
- [16] M.P. Dąbrowski, *String Cosmologies*, University of Szczecin Press (2002).
- [17] Y. Fujii and K.-I. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*, Cambridge University Press (2003).
- [18] B. Boisseau, G. Esposito-Farese, D. Polarski, and A.A. Starobinsky, *Phys. Rev. Lett.*, 85 (2000) 2236.
- [19] G. Esposito-Farese and D. Polarski, *Phys. Rev. D*, 63 (2001) 063504.
- [20] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, New York (1995).
- [21] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large-scale structure of space-time*, Cambridge Univ. Press (1999).
- [22] P. Jordan, *Z. Physik*, 157 (1959) 112.
- [23] R. d'Inverno, *Einführung in die Relativitätstheorie*, VCH Weinheim (1995).
- [24] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York (1972).
- [25] E.J. Copeland, A. Lahiri, and D. Wands, *Phys. Rev. D*, 51 (1995) 1569.
- [26] J.D. Barrow and M.P. Dąbrowski, *Phys. Rev. D*, 55 (1997) 630.
- [27] J. Lidsey, D.W. Wands, and E. Copeland, *Phys. Rep.*, 337 (2000) 343.
- [28] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, 443 (1995) 85.
- [29] N.D. Birell and P.C.W. Davies, *Quantum field theory in curved space*, Cambridge University Press (1982).
- [30] E.I. Guendelman and E. Spallucci, *Conformally invariant brane universe and the cosmological constant*, gr-qc/0402100.



# Kinetic Description of Vacuum Creation of Massive Vector Bosons

D.B. Blaschke<sup>a,b</sup>, A.V. Prozorkevich<sup>c</sup>, A.V. Reichel<sup>a</sup>,  
S.A. Smolyansky<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Fachbereich Physik, Universität Rostock, Rostock, Germany

<sup>b</sup> Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

<sup>c</sup> Saratov State University, Saratov, Russia

We derive a kinetic equation of non-Markovian type, describing the vacuum pair creation of massive vector bosons in a flat space-time under the influence of external fields of different kind. We use for this aim the strict methods of kinetic theory in combination with a new important element of theory when the transition of the instantaneous quasiparticle representation is realized with the help of the oscillator (holomorphic) representation. We study in detail the process of vacuum creation of vector bosons generated by a time-dependent boson mass. Such a scenario is in accordance with the equation of state obtained in the framework of a conformal cosmological model recently developed by Pervushin et al. It is indicated that the choice of the equation of state allows one to obtain a number density of vector bosons that is sufficient for explanation of the temperature of the cosmic microwave background radiation.

## Introduction

Vacuum creation of the massive vector bosons in intensive fields of different nature is widely discussed in literature. This is caused by its two-fold role. On the one hand, massive vector bosons play an important role in different physical problems and particularly in cosmology (e.g., [1, 2]). On the other hand, the massive vector field is the simplest example of the quantum field theory with higher spin and attracts close attention nowadays.

In this contribution we give a kinetic description of the vacuum creation of charged massive vector bosons under the influence of a time-dependent space uniform electric field of arbitrary polarization. We consider also the possibility of a time dependence of the mass which represents a new independent mechanism of vacuum particle production.

The construction of a kinetic theory of vacuum particle creation on a dynamical basis requires the time-dependent quasi-particle representation (QPR) [3, 4]. We use the oscillator representation for this aim [4] as the most effective instrument for the derivation of the dynamical equations in QPR in Sect. 1. Further in Sect. 2 we use these results in deriving kinetic equations (KE). The feature of the obtained system of KE is the presence of a tensor distribution function in a rotating coordinate system with the orientation defined by time-dependent kinematic momentum which results in a new mechanism of non-Markovian processes. A significant simplification is achieved when the non-Markovian effects are neglected. The case of the absence of an electric field is considered in detail when the vacuum pair creation is caused entirely by the time dependence of the mass. The KE split into separate equations for the transverse and the longitudinal components which can be investigated numerically. As an application we reinvestigate in Sect. 3 the creation of massive vector bosons in the early Universe within a conformal invariant scalar-tensor theory of gravitation, as suggested earlier by Pervushin and collaborators [1, 5]. In this approach the time dependence of the scalar field entails a cosmological evolution of all particle masses which, according to Hoyle and Narlikar, may serve as an explanation for the cosmological redshift alternative to the Hubble expansion. In the present approach, we are able to remove the singularity in the density of the produced longitudinal vector bosons, which has been reported previously [1]. We present the solution of the KE for a toy model where the time dependence of the scalar field is given and show that the density of vector bosons created in the early Universe corresponds to the number density of cosmic microwave background (CMB) photons.

## 1. The Quasi-Particle Representation

We consider here the vacuum creation of charged massive vector bosons in the flat Minkowski space-time for two possible mechanisms: (i) a time

variation of the boson mass term  $m(t)$  and (ii) a time-dependent homogeneous electric field with the vector potential (in Hamiltonian gauge)  $A^\mu(t) = (0, A^1(t), A^2(t), A^3(t))$ . We will restrict ourselves to the simplest variant of the theory with the Lagrange density<sup>1</sup>:

$$\mathcal{L}(x) = -D_\mu^* u_\nu^* D^\mu u^\nu + m^2 u_\nu^* u^\nu \quad (1)$$

(where  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ ,  $e$  is particle charge with its sign) leading to the equation of motion

$$(D_\mu D^\mu + m^2)u_\nu = 0 \quad (2)$$

with the additional condition  $D_\mu u^\mu = 0$ .

The transition to the QPR can be realized in different ways, e.g., by means of the time-dependent Bogoliubov transformation, or with the help of the holomorphic (oscillator) representation (OR) [4]. We choose the OR in which the dispersion law of the free particle is given by  $\omega(\mathbf{p}, t) = \sqrt{m^2(t) + \mathbf{P}^2}$  with the standard replacement of the canonical momentum by the kinetic one  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ . The standard decomposition of the free field operators and momenta in the discrete momentum space is used:

$$u_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}, t)}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \{a_\mu^{(-)}(\mathbf{p}, t) + b_\mu^{(+)}(-\mathbf{p}, t)\}, \quad (3)$$

$$\pi_\mu(x) = -\frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{p}, t)}{2}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \{a_\mu^{(+)}(\mathbf{p}, t) - b_\mu^{(-)}(-\mathbf{p}, t)\},$$

where  $V = L^3$  and  $p_i = 2\pi n_i/L$ ,  $n_i$  is an integer ( $i = 1, 2, 3$ ). The substitution into the Hamiltonian

$$H = - \sum_{\mathbf{p}} (\pi_\mu^* \pi^\mu + \mathbf{D}^* u_\mu^* \mathbf{D} u^\mu + m^2 u_\mu^* u^\mu) \quad (4)$$

brings it to the diagonal form in the Fock space which corresponds to the QPR

$$H = - \int d\mathbf{p} \omega(\mathbf{p}, t) \left[ a_\mu^{(+)}(\mathbf{p}, t) a^{(-)\mu}(\mathbf{p}, t) + b_\mu^{(-)}(-\mathbf{p}, t) b^{(+)\mu}(-\mathbf{p}, t) \right]. \quad (5)$$

---

<sup>1</sup>We use the metric  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  and natural units  $\hbar = c = 1$ .

However, this quadratic form is not positively defined. In order to exclude the  $\mu = 0$  component with the help of additional condition, it is necessary to derive the equations for the amplitudes  $a_\mu^\pm$ ,  $b_\mu^\pm$ .

Substituting Eqs.(3) in the Hamilton equations

$$\dot{u}_\mu = \frac{\delta H}{\delta \pi^\mu} = -\pi_\mu^*, \quad \dot{\pi}_\mu = -\frac{\delta H}{\delta u^\mu} = m^2 u_\mu^* - \mathbf{D}^* \mathbf{D}^* u_\mu^*, \quad (6)$$

we find the Heisenberg-type equation of motion for the time-dependent creation and annihilation operators

$$\dot{a}_\mu^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \Delta(\mathbf{p}, t) b_\mu^{(\mp)}(-\mathbf{p}, t) \pm i\omega(\mathbf{p}, t) a_\mu^{(\pm)}(\mathbf{p}, t), \quad (7)$$

$$\dot{b}_\mu^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \Delta(\mathbf{p}, t) a_\mu^{(\mp)}(\mathbf{p}, t) \pm i\omega(\mathbf{p}, t) b_\mu^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t),$$

where  $\Delta(\mathbf{p}, t) = \dot{\omega}(\mathbf{p}, t)/\omega(\mathbf{p}, t)$ . Analogous equations were obtained in the work [4] for the case of scalar QED on the basis of the principle of least action.

Thus, the Hamiltonian formalism in the OR leads to the exact equations of motion (7) for the creation and annihilation operators of quasi-particles, depending on the “natural” representation of the quasi-particle energy  $\omega(\mathbf{p}, t)$  in the external field.

The additional conditions may be transformed with the help of Eqs. (7) to the following form ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\omega(\mathbf{p}, t) a_0^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) = P_i a_i^{(\pm)}(\mathbf{p}, t), \quad \omega(\mathbf{p}, t) b_0^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t) = -P_i b_i^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t). \quad (8)$$

These equations allow one to exclude the  $\mu = 0$  component in the Hamiltonian (5), what gives

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\mathbf{p}} \omega(\mathbf{p}, t) \left\{ a_i^{(+)}(\mathbf{p}, t) a_i^{(-)}(\mathbf{p}, t) + b_i^{(-)}(-\mathbf{p}, t) b_i^{(+)}(-\mathbf{p}, t) - \right. \\ & - \frac{1}{\omega^2(\mathbf{p}, t)} \left[ \left( P_i a_i^{(+)}(\mathbf{p}, t) \right) \left( P_k a_k^{(-)}(\mathbf{p}, t) \right) + \right. \\ & \left. \left. + \left( P_i b_i^{(-)}(-\mathbf{p}, t) \right) \left( P_k b_k^{(+)}(-\mathbf{p}, t) \right) \right] \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

The next step is the additional diagonalization of the quadratic form (9) by means of the linear transformations

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) &= E\boldsymbol{\alpha}^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) \equiv \\ &\equiv \mathbf{e}_1\alpha_1^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{e}_2\alpha_2^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{e}_3\frac{\omega}{m}\alpha_3^{(\pm)}(\mathbf{p}, t),\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t) &= E\boldsymbol{\beta}^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t) \equiv \\ &\equiv \mathbf{e}_1\beta_1^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t) + \mathbf{e}_2\beta_2^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t) + \mathbf{e}_3\frac{\omega}{m}\beta_3^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t),\end{aligned}$$

where  $[\mathbf{e}_1(\mathbf{p}, t), \mathbf{e}_2(\mathbf{p}, t), \mathbf{e}_3(\mathbf{p}, t)]$  determine the local rotating basis built on the vector  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{P}/|P|$ . These real unit vectors form a triad,  $e_{ik}e_{jk} = e_{ki}e_{kj} = \delta_{ij}$ ,  $e_{ik} = (\mathbf{e}_i)_k$ . The presence of the factor  $\omega/m$  in the non-unitary matrix  $E$ , Eq.(10), leads to a violation of the unitary equivalence between the  $(a, b)$  and  $(\alpha, \beta)$  representations.

The transformation (10) leads to a positively defined diagonal Hamiltonian. However, the spin operator has a non-diagonal form in spin space in terms of the operators  $\alpha_i^{(\pm)}$ ,  $\beta_i^{(\pm)}$ . It can be diagonalized with a linear transformation to the circular polarized waves basis

$$c_i^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) = R_{ik}^{(\pm)}\alpha_k^{(\pm)}(\mathbf{p}, t), \quad d_i^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t) = R_{ik}^{(\pm)*}\beta_k^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t),\tag{11}$$

with the unitary matrix

$$R^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \mp i & 0 \\ \pm i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.\tag{12}$$

As a result, the new operators  $c_i^{(\pm)}$ ,  $d_i^{(\pm)}$  in the QPR correspond to charged vector quasi-particles with the operators of total energy and spin projection on the chosen direction:

$$\begin{aligned}H(t) &= \sum_{\mathbf{p}} \omega(\mathbf{p}, t) \times \\ &\times \left[ c_i^{(+)}(\mathbf{p}, t)c_i^{(-)}(\mathbf{p}, t) + d_i^{(-)}(-\mathbf{p}, t)d_i^{(+)}(-\mathbf{p}, t) \right],\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}S_3(t) &= \sum_{\mathbf{p}} \left[ c_1^{(+)}(\mathbf{p}, t)c_1^{(-)}(\mathbf{p}, t) - d_1^{(-)}(-\mathbf{p}, t)d_1^{(+)}(-\mathbf{p}, t) + \right. \\ &\left. + d_2^{(-)}(-\mathbf{p}, t)d_2^{(+)}(-\mathbf{p}, t) - c_2^{(+)}(\mathbf{p}, t)c_2^{(-)}(\mathbf{p}, t) \right].\end{aligned}\tag{14}$$

This representation can be called the complete QPR. The equations of motion for these operators follow from Eqs. (7) and (11):

$$\begin{aligned}
\dot{c}_i^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) &= \frac{1}{2}\Delta(\mathbf{p}, t)d_i^{(\mp)}(-\mathbf{p}, t) \pm \\
&\quad \pm i\omega(\mathbf{p}, t)c_i^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) + g_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{p}, t)c_j^{(\pm)}(\mathbf{p}, t), \\
\dot{d}_i^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t) &= \frac{1}{2}\Delta(\mathbf{p}, t)c_i^{(\mp)}(\mathbf{p}, t) \pm \\
&\quad \pm i\omega(\mathbf{p}, t)d_i^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t) + \overset{*}{g}_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{p}, t)d_j^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t).
\end{aligned} \tag{15}$$

The matrix  $g_{ij}$  is defined as

$$g^{(\pm)} = \begin{bmatrix} \pm i\dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_2 & 0 & \frac{\omega}{m}\dot{\mathbf{e}}^{(\mp)} \mathbf{e}_3 \\ 0 & \mp i\dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_2 & \frac{\omega}{m}\dot{\mathbf{e}}^{(\pm)} \mathbf{e}_3 \\ -\frac{m}{\omega}\dot{\mathbf{e}}^{(\mp)} \mathbf{e}_3 & -\frac{m}{\omega}\dot{\mathbf{e}}^{(\pm)} \mathbf{e}_3 & \dot{m}/m - \Delta \end{bmatrix}, \tag{16}$$

where  $\mathbf{e}^{(\pm)} = (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$ .

The transition to this representation from the initial  $(a, b)$  one is defined by the combination of the transformations (10) and (11),

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) &= U^{(\pm)}(\mathbf{p}, t)\mathbf{a}^{(\pm)}(\mathbf{p}, t), \\
\mathbf{d}^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t) &= \overset{*}{U}^{(\pm)}(\mathbf{p}, t)\mathbf{b}^{(\pm)}(-\mathbf{p}, t),
\end{aligned} \tag{17}$$

with the non-unitary operator

$$U^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) = R^{(\pm)} \cdot E^{-1}(\mathbf{p}, t) = \begin{bmatrix} e_1^{(\mp)} & e_2^{(\mp)} & e_3^{(\mp)} \\ e_1^{(\pm)} & e_2^{(\pm)} & e_3^{(\pm)} \\ \frac{m}{\omega}e_{31} & \frac{m}{\omega}e_{32} & \frac{m}{\omega}e_{33} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

The quantization problem is to be solved while taking into account the equations of motion (15). It leads to the following non-canonical commutation relations:

$$\begin{aligned}
[c_i^{(-)}(\mathbf{p}, t), c_j^{(+)}(\mathbf{p}', t)] &= [d_j^{(-)}(\mathbf{p}, t), d_i^{(+)}(\mathbf{p}', t)] = \\
&= Q_{ik}^{(-)}(\mathbf{p}, t)Q_{jk}^{(+)}(\mathbf{p}, t)\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'},
\end{aligned} \tag{19}$$

where the matrices  $Q_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{p}, t)$  are defined by the equations

$$\dot{Q}_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) = g_{ik}^{(\pm)}(\mathbf{p}, t)Q_{kj}^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) \quad (20)$$

with the initial conditions

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} Q_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) = \delta_{ij}, \quad (21)$$

i.e. the commutation relations (19) transform to the canonical form only in the asymptotic limit  $t \rightarrow -\infty$ .

## 2. Kinetic Equation

The standard KE derivation procedure [3] is based on the Heisenberg-type equations of motion (7) or (15). Let us introduce the one-particle correlation functions of vector particles and antiparticles

$$f_{ik}(\mathbf{p}, t) = \langle 0_{in} | c_i^{(+)}(\mathbf{p}, t) c_k^{(-)}(\mathbf{p}, t) | 0_{in} \rangle, \quad (22)$$

$$\tilde{f}_{ik}(\mathbf{p}, t) = \langle 0_{in} | d_i^{(-)}(-\mathbf{p}, t) d_k^{(+)}(-\mathbf{p}, t) | 0_{in} \rangle.$$

We obtain the resulting KE in the following form:

$$\begin{aligned} \dot{f}_{ik}(t) &= \dot{U}_{ij}^{(+)}(t)U_{km}^{(+)-1}(t)f_{jm}(t) + \dot{U}_{kj}^{(-)}(t)U_{jm}^{(-)-1}(t)f_{im}(t) + \\ &+ \frac{1}{2}U_{ij}^{(+)}(t)U_{kl}^{(-)}(t)\Delta(t) \int_{t_0}^t dt' \Delta(t')U_{jm}^{(+)-1}(t')U_{ln}^{(-)-1}(t') \times \\ &\times [f_{mn}(t') + \tilde{f}_{mn}(t')] \cos 2\theta(\mathbf{p}; t, t'), \end{aligned} \quad (23)$$

where

$$\theta(\mathbf{p}; t, t_0) = \int_{t_0}^t dt' \omega(\mathbf{p}, t'). \quad (24)$$

In the following, we will consider the vacuum creation of vector bosons due to an arbitrary time-dependent mass term,  $m = m(t)$  and  $A^k(t) = 0$ . This example has an application within a conformal cosmology with time-dependent masses [5] as well as in the chiral symmetry breaking phase

transition during the hadronization stage of an ultra-relativistic heavy-ion collision. Then the general KE (23) can be simplified in the isotropic case with  $P_k = p_k$  and  $\dot{\mathbf{e}}_i = 0$ . Let us write out the KEs for the diagonal components of the correlation functions (22) having direct physical sense as the distribution functions of the transversal ( $k = 1, 2$ ) and longitudinal components:

$$\dot{f}_k(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2}\Delta(\mathbf{p}, t) \int_{t_0}^t dt' \Delta(\mathbf{p}, t') [2f_k(\mathbf{p}, t') + 1] \cos 2\theta(\mathbf{p}; t, t'), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_3(\mathbf{p}, t) &= -2\Delta_m(\mathbf{p}, t)f_3(\mathbf{p}, t) + \frac{1}{2}\Delta(\mathbf{p}, t) \frac{m^2(t)}{\omega^2(t)} \int_{t_0}^t dt' \times \\ &\times \Delta(\mathbf{p}, t') \frac{\omega^2(t')}{m^2(t')} \{2f_3(\mathbf{p}, t') + Q(\mathbf{p}, t')\} \cos 2\theta(\mathbf{p}; t, t'), \quad (26) \end{aligned}$$

where the shorthand notation  $f_{ii} = f_i$  with  $i = 1, 2, 3$  for the diagonal elements of the distribution function matrix has been used. In Eq.(26) it was taken into account that due to the electric neutrality condition  $\tilde{f}_i = f_i + 1$  holds. In the considered case, we have

$$\Delta = \frac{m\dot{m}}{\omega^2}, \quad \Delta_m = -\Delta \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}. \quad (27)$$

It is assumed that the thermodynamic transition to the limit  $V \rightarrow \infty$  under the condition of a fixed pair number density is fulfilled in the KEs (25) and (26) according to the rule  $\lim_{L \rightarrow \infty} (L/2\pi)^{3/2} \times \times c_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(t) = c^{(\pm)}(\mathbf{p}, t)$ .

At last, the function  $Q(\mathbf{p}, t)$  in the statistical factor in r.h.s. of the KE (26) is a consequence of the commutation relations (19), which have the following form for the longitudinal components of vector field:

$$[c_3^{(-)}(\mathbf{p}, t), c_3^{(+)}(\mathbf{p}', t)] = [d_3^{(-)}(\mathbf{p}, t), d_3^{(+)}(\mathbf{p}', t)] = Q(\mathbf{p}, t) \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}. \quad (28)$$

It can be found from Eq. (20) that

$$Q(\mathbf{p}, t) = \exp \left\{ -2 \int_{t_0}^t \Delta_m(t') dt' \right\} =$$



$$= \left[ \frac{m(t)}{m_0} \frac{\omega_0}{\omega(t)} \right]^2 = \frac{m^2(t)}{m^2(t) + \mathbf{p}^2} \cdot \frac{m_0^2 + \mathbf{p}^2}{m_0^2}, \quad (29)$$

where  $\omega_0 = \omega(t_0)$  and  $m_0 = m(t_0)$ .

Let us introduce the new auxiliary distribution function  $f(\mathbf{p}, t)$ , which is connected with the “old” one  $f_3(\mathbf{p}, t)$  by the relation

$$f_3(\mathbf{p}, t) = Q(\mathbf{p}, t)f(\mathbf{p}, t). \quad (30)$$

The substitution into the KE (26) leads to the “standard” form of the KE for the function  $f(\mathbf{p}, t)$ , which is identical to the equation (23) for the transversal component of the distribution function.

We use now the well-known procedure of the reduction of the KE from the integro-differential form to the corresponding system of ordinary differential equations [6] in order to study the KE (26) numerically and to investigate the asymptotic behavior of its solutions for large momenta

$$\dot{f}_k = \frac{1}{2}\Delta u_k, \quad \dot{u}_k = \Delta(1 + 2f_k) - 2\omega u_k, \quad \dot{v}_k = 2\omega u_k. \quad (31)$$

The main characteristic of the vacuum creation process is the total number density of vector bosons,

$$n_{tot}(t) = 2 \sum_{i=1}^3 n_i(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty p^2 dp [2f_1(p, t) + f_3(p, t)], \quad (32)$$

where isotropy of the system was taken into account,  $p = |\mathbf{p}|$ .

### 3. Vector Boson Production in the Early Universe

In order to estimate the vector boson creation in the early Universe, we consider a conformal invariant cosmological model [5], thus assuming that the space-time is conformally flat and that the scenario of an expanding Universe can be replaced by that of changing masses for all particles due to a time-dependent scalar field.

For our numerical studies we use a generic form of the conformal time dependence of the scalar field (mass) in the early Universe

$$m(t) = \left( \frac{t}{t_H} \right)^\alpha m_W,$$

where  $t_H = (\alpha H)^{-1}$  is the age of the Universe,  $H$  is the Hubble constant,  $m_W = 80$  GeV is the present-day  $W$ -boson mass. The parameter  $\alpha$  depends on the choice of the cosmic EOS where, e.g.,  $\alpha = 1/2$  would correspond to a stiff fluid. Such an EOS shall be adopted for the dominance of a massless scalar field in the Universe. Due to back reactions and dynamical mass generation during the cosmic evolution the detailed mass history remains to be worked out. The central question, however, is whether the number density of produced  $W$ -bosons could be of the same order as that of the CMB photons,  $n_{\text{CMB}} \sim 430 \text{ cm}^{-3}$ . If this question could be answered positively, the vacuum pair creation of  $W$ -bosons from a time-dependent scalar field (mass term) could be suggested as a mechanism for the generation of matter and radiation in the early Universe. The non-Abelian nature of the  $W$ -bosons could even imply consequences for the generation of the baryon (and lepton) asymmetry due to topological effects [1].

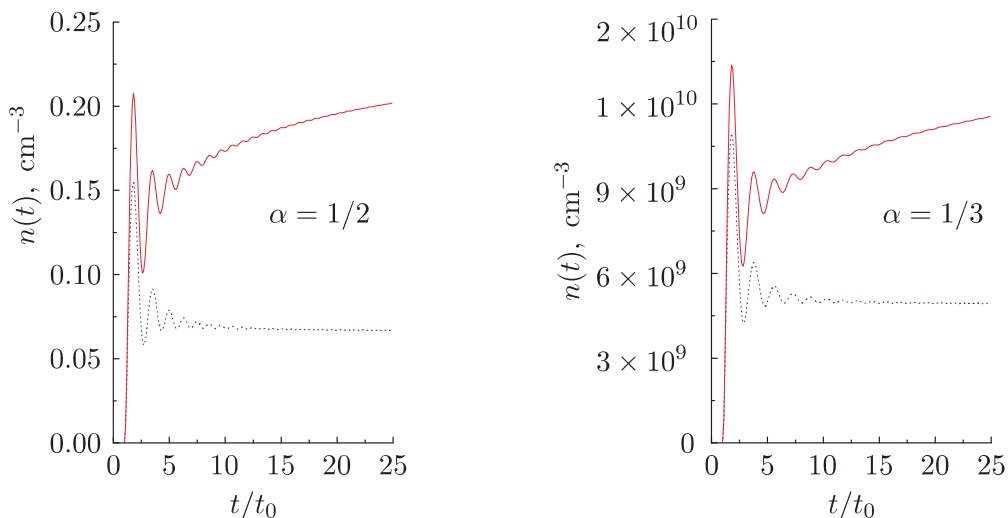


Fig. 1. Time evolution of the particle number densities  $n_1$  (dotted line) and  $n_3$  (solid line) with initial condition  $m_i \cdot t_i = 1$ :  $\alpha = 1/2$  (left),  $\alpha = 1/3$  (right).

As one can see from Fig. 1, the estimated particle number densities for the transversal components saturate very fast in comparison to longitudi-

nal ones. The choice of the EOS changes drastically the number density of the created particles, ranging from values which are too small ( $\alpha = 1/2$ ) or too large ( $\alpha = 1/3$ ) for the explanation of the CMB photon density. In order to improve the correspondence to cosmological data we should, e.g., improve the EOS, consider the back-reaction problem, and embed the mechanism into a more detailed cosmological scenario. The main achievement relative to the earlier work [1] is that in the present approach, there is no divergence in the distribution function, thus we do not need to introduce some ambiguous regularization procedure.

## Summary

The present work was devoted to a kinetic description of vacuum pair creation of massive vector bosons caused by time dependence of either the mass gap or a non-stationary electric field. The statement of problem is stipulated by some cosmological problems having the aim to explain the modern experimental information (the accelerating expansion of the Recent Universe and some feature of CMBR). The resulting KE (23) of non-Markovian type was obtained within the non-perturbative framework of the OR which provides a short way to the QPR as the prerequisite to the construction of a source term for pair creation in the KE. We have applied this KE to the analysis of the important particular case of vector boson pair creation in a time-dependent scalar field which can be justified on the basis of a Brans–Dicke type scalar-tensor theory of gravitation. We show that the kinetic theory leads to densities of vector bosons created in the early Universe evolution that is comparable to the present CMB photon density. More detailed studies are in progress [7].

## Acknowledgements

This work was partly supported by the Russian Federation’s State Committee for Higher Education (grant E02-3.3-210) and RFBR (grant 03-02-16877). S.S. acknowledges support by DFG grant No. 436 RUS 117/78/04 and by the Graduiertenkolleg 567 “Strongly correlated many-particle systems” at the University of Rostock. A.R. acknowledges support of his research visit at the University of Rostock by DAAD grant A/03/01292.

## References

- [1] D. Blaschke, S.I. Vinitzky, A.A. Gusev, V.N. Pervushin, and D.V. Proskurin, *Phys. At. Nucl.*, 67 (2004) 1050, hep-th/0206246.
- [2] A.A. Grib and A.V. Nesteruk, *Yad. Fiz.*, 35 (1982) 216.
- [3] S.M. Schmidt, D. Blaschke, G. Röpke, S.A. Smolyansky, A.V. Prozorkevich, and V.D. Toneev, *Int. J. Mod. Phys. E*, 7 (1998) 709.
- [4] V.N. Pervushin, V.V. Skokov, A.V. Reichel, S.A. Smolyansky, and A.V. Prozorkevich, *Int J. Mod. Phys.* (in press), hep-ph/0307200.
- [5] V.N. Pervushin, D.V. Proskurin, and A.A. Gusev, *Grav. Cosmology*, 8 (2002) 181.
- [6] D.V. Vinnik, V.A. Mizerny, V.A. Prozorkevich, S.A. Smolyansky, and V.D. Toneev, *Yad. Fiz.*, 64 (2001) 836.
- [7] D.B. Blaschke, A.V. Reichel, A.V. Prozorkevich, and S.A. Smolyansky, in preparation.

# Cosmological Creation of $W$ -, $Z$ -Bosons and the Large-Scale Structure of the Universe

A. Gusev, V. Pervushin<sup>1</sup>, S. Vinitzky, V. Zinchuk, A. Zorin

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

In conformal cosmological model (with relative units) the visible matter can be considered as the product of the decay of the primordial  $W$ -,  $Z$ -bosons created from vacuum. We show that the number of oscillations of the  $W$ -,  $Z$ -boson density during their life-time coincides with the number of oscillations of the visible baryon matter density recently discovered in researches of large-scale periodicity in red shift distribution  $[H_0 \times 128 \text{ Mpc}]^{-1} = 23 \div 25$ .

В конформной космологической модели (с относительными единицами) видимое барионное вещество может рассматриваться как продукт распада рождённых из вакуума первичных  $W$ -,  $Z$ -бозонов. Мы показываем, что число колебаний плотности  $W$ -,  $Z$ -бозонов в течение их жизни совпадает с числом колебаний плотности видимой барионной материи, обнаруженной в исследованиях периодичности крупномасштабной структуры и распределения красного смещения  $[H_0 \times 128 \text{ Мпк}]^{-1} = 23 \div 25$ .

Recently, an alternative interpretation of the cosmic evolution as the running particle masses [1] without the introduction of the  $\Lambda$ -term has been elaborated [2–4]. This means using a relative standard of measuring lengths in General Relativity when all measurable quantities are identified with conformal variables and coordinates (conformal time, conformal energy density, conformal temperature, conformal mass depending on time, etc.). In this case, a spectrum of photons emitted two billion years ago by atoms in remote cosmic objects memorizes their atom size,

---

<sup>1</sup>E-mail: pervush@thsun1.jinr.ru

which is determined by its mass. As the result, the red shift of the spectral lines of atoms on the cosmic objects is observed. In the conformal cosmological model [2] the Supernova red shift data [5] and nucleosynthesis data correspond to the stiff equation of a state when a pressure is equal to the energy density. In [3, 4], it was shown that in the Standard Model there are initial data of the Hubble parameter and masses explaining an origin of the visible matter by a quantum cosmological creation of the massive vector  $W^-$ ,  $Z$ -bosons from vacuum in the regime of the equation of the same stiff state. A visible matter, including the Cosmic Microwave Background radiation, occurs as a product of decays of the primordial vector  $W^-$ ,  $Z$ -bosons like Dirac's scenario [6].

It is interesting to connect the oscillations of density of these bosons during their life-time with large-scale periodicity of the structure of the Universe. Such a periodicity has been recently discovered in the pencil-beam observations that revealed 128 (1/h) Mpc period [7–9].

In this Letter we give our treatment of a formation mechanism of the large-scale structure of the Universe. As has been shown in [3, 4], when the Universe horizon coincides with the Compton length of the vector bosons  $H_I = M_I$ , there is the intensive cosmological creation of the primordial vector bosons from the vacuum. This creation leads to a temperature  $(M_0^2 H_0)^{1/3} \sim 3$  K of the microwave background radiation [3] as the integral of motion of the Universe in a stiff state

$$a^2(\eta) = 1 + 2H_I\eta = 1 + \tau,$$

compatible with the observational data on Supernovae [5] and nucleosynthesis in the conformal cosmological model [2]. These theoretical results are in satisfactory agreement with the corresponding observed values of the baryon-antibaryon asymmetry of the Universe with the superweak-interaction coupling constant  $X_{CP} = n_b/n_\gamma$  and the visible baryon density  $\Omega_b \sim \alpha_g = \alpha_{QED}/\sin^2 \theta_W \sim 0.03$  [3].

The baryon density of the primordial bosons with momentum  $q$  and energy  $\omega = (M^2(\eta) + q^2)^{1/2}$  oscillates as

$$\cos[2 \int_1^{\eta_{Z,W}} \omega d\eta] = \cos[\int_1^{\tau_{Z,W}} d\tau ((1 + \tau) + (q/M_I)^2)^{1/2}],$$

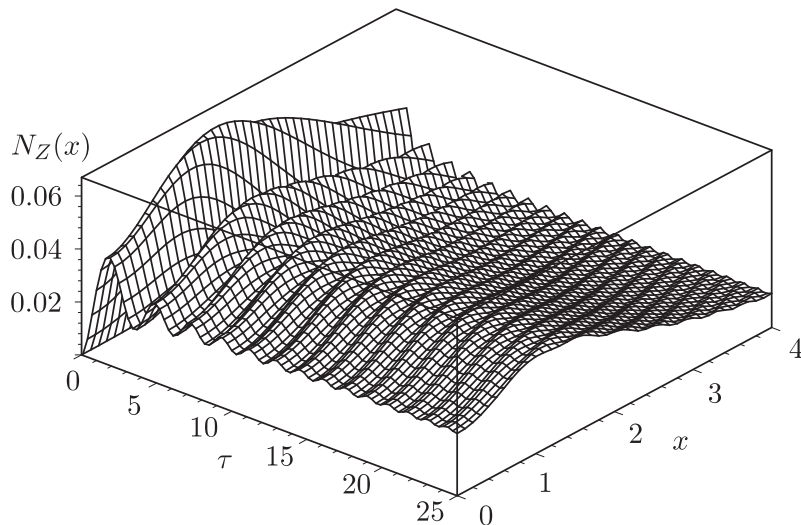


Fig. 1. Longitudinal ( $N_Z(x)$ ) components of the boson distribution versus the dimensionless time  $\tau = 2\eta H_I$  and the dimensionless momentum  $x = q/M_I$  at the initial data  $M_I = H_I$  ( $\gamma_v = 1$ ).

where the life-time is expressed in terms of the coupling constant  $\alpha_g$  in the Standard Model [3]

$$\begin{aligned}\tau_W &\simeq \left(\frac{2}{\alpha_g}\right)^{2/3} \simeq 16, \\ \tau_Z &\simeq \left(\frac{2}{\alpha_g f(\sin^2 \theta_W)}\right)^{2/3} \simeq 25, \\ f(\gamma) &= \frac{3 - 6\gamma + 8\gamma^2}{6(1 - \gamma)^{3/2}}.\end{aligned}$$

The number of density oscillations for the momentum  $x = q/M_I$  takes the form

$$N_Z(x) = \frac{1}{2\pi} \int_1^{\tau_Z} d\tau (1 + \tau + x^2)^{1/2}.$$

One can see that the number of oscillations  $x \sim 4 \div 5$  is of order of  $20 \div 25$ , which coincides with a number of oscillations of the visible baryon matter recently discovered in researches of large-scale periodicity in red shift distribution  $[H_0 \times 128 \text{ Mpc}]^{-1} = 23 \div 25$ . We note that, in other models, the above oscillations of the product-particle density are related to primary fluctuations of the cosmic-microwave-background radiation [10].

## Acknowledgements

The authors are grateful to B.M. Barbashov, D. Blaschke, and P. Flin for fruitful discussions.

## References

- [1] J.V. Narlikar, *Space Sci. Rev.*, 50 (1989) 523.
- [2] D. Behnke, D.B. Blaschke, V.N. Pervushin, and D.V. Proskurin, *Phys. Lett. B*, 530 (2002) 20, gr-qc/0102039.
- [3] D.B. Blaschke, S.I. Vinitsky, A.A. Gusev, V.N. Pervushin, and D.V. Proskurin, *Phys. At. Nucl.*, 67 (2004) 1050, gr-qc/0103114.
- [4] B.M. Barbashov, V.N. Pervushin, and D.V. Proskurin, *Phys. Part. Nucl.*, 34, Suppl. 1 (2003) S68.
- [5] A.G. Riess et al., *Astron. J.*, 116 (1998) 1009; S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.*, 517 (1999) 565; A.G. Riess et al., *Astrophys. J.*, 560 (2001) 49.
- [6] P.A.M. Dirac, *Proc. Royal Soc. Ed.*, 59 (1938-39) 122.
- [7] M. Biernacka, P. Flin, V. Pervushin, A. Zorin. *Part. Nucl., Lett.*, 2[119] (2004) 64, astro-ph/0206114.
- [8] W.J. Cocke, W.G. Tifft, *ApJ.*, 368 (1991) 383.
- [9] K. Bajan, P. Flin, W. Godłowski, V. Pervushin, A. Zorin, Large scale periodicity in redshift distribution, 2nd Gravitational Conference “Gravitation, and relativistic astrophysics”, 23–27 June 2003, Kharkov, Ukraine, pp. 211–215.
- [10] J.C. Niemeyer, *Phys. Rev. D*, 63 (2001) 12352.



# Kinetic Description of Fermion Production in Cosmology and QED

V.N. Pervushin<sup>1</sup>, V.V. Skokov

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

We study fermion production in strong electrical field of arbitrary polarization as well as fermion production in conformal flat metrics. To derive the kinetic equation (KE) we apply holomorphic (oscillator) representation approach. Obtained non-perturbative KE can be used to describe future free-electron laser experiments, cosmological creation of fermions and ultra-relativistic heavy ion collision in flux tube model.

Мы изучаем рождение фермионов в сильном электрическом поле произвольной поляризации и в конформно-плоской метрике. Чтобы вывести кинетические уравнения, мы принимаем подход голоморфного (осцилляторного) представления. Полученные кинетические уравнения могут быть использованы для описания будущих электрон-лазерных экспериментов, а также космологического рождения фермионов и ультрарелятивистского столкновения тяжелых полей в модели «flux-tube».

## Introduction

The problem of description of charged particle creation arises in enormous fields of research including both formation of quark-gluon plasma (QGP) and vacuum production of particles in cosmology [1]. Process of QGP formation has been studied in color-flux-tube model with decay through particle-antiparticle production in strong electric field (so-called Schwinger-like mechanism) [2–4]. A strong field in flux tube models is assumed to have only one fixed direction  $A_\mu = (0, 0, 0, A(t) = A_3(t))$  [4]. In this work we extend this model of fermion creation in arbitrary field

---

<sup>1</sup>E-mail: pervush@thsun1.jinr.ru

polarization. Taking into account arbitrary polarization in description of particle production effects in strong laser field is also essential [5, 6].

The problem of cosmological particle creation was considered in literature for scalar and vector particles [1, 7, 8]. In this paper, we give a more systematic dynamical description of fermion particle creation in the framework of holomorphic representation and obtain the kinetic equation to study production process.

## 1. Holomorphic Representation

The Lagrangian for electrodynamics is

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi}(\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1)$$

where  $D_\alpha$  is the covariant derivative

$$D_\alpha = \partial_\alpha + ieA_\alpha \quad (2)$$

and  $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ .

We assume electric field to be a classical and space-homogeneous one. The classical approximation may be derived in the leading order of the large  $N$  approximation, where  $N$  is number of charged fields [9]. For the further purpose we consider time-dependent fermion mass.

We introduce the representation of particles as holomorphic field variables [10]:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\exp(ik_i x_i)}{V_0^{3/2}} \psi_{\mathbf{k}}(t), \quad (3)$$

where  $\psi_{\mathbf{k}}$  will be defined later.

Action after this substitution is the following (in Hamiltonian gauge):

$$W = \int dt \sum_{\mathbf{k}} \{i\bar{\psi}_{\mathbf{k}}\gamma_0\partial_0\psi_{\mathbf{k}} - h_{\mathbf{k}}\}, \quad (4)$$

where  $h_{\mathbf{k}} = \bar{\psi}_{\mathbf{k}}(P_i\gamma_i + m)\psi_{\mathbf{k}}$  and canonical momentum  $P_i = k_i - eA_i$ .

Following the idea of the oscillator representation [7, 10] we expand  $\psi_{\mathbf{k}}$  and  $\bar{\psi}_{\mathbf{k}}$  using general spinor field decomposition with formal substitution  $k_i \rightarrow P_i$ :

$$\psi_{\mathbf{k}} = (a_{s\mathbf{k}}^{(-)} u_s(\mathbf{P}) + b_{s\mathbf{k}}^{(+)} v_s(\mathbf{P})), \quad \bar{\psi}_{\mathbf{k}} = (a_{s\mathbf{k}}^{(+)} \bar{u}_s(\mathbf{P}) + b_{s\mathbf{k}}^{(-)} \bar{v}_s(\mathbf{P})), \quad (5)$$

where

$$u_\alpha(\mathbf{P}) = S_u(\mathbf{P})u_\alpha(0), \quad v_\alpha(\mathbf{P}) = S_v(\mathbf{P})u_\alpha(0). \quad (6)$$

Here  $u_s$  and  $v_s$  ( $s = 1, 2$ ) are the solution of free Dirac equations for positive and negative energies in the particle rest frame:

$$(\gamma_0 - 1)u = 0, \quad (\gamma_0 + 1)v = 0. \quad (7)$$

$S_{\{u,v\}}(\mathbf{P})$  transforms solutions of (7) into the frame moving with the velocity  $\mathbf{v} = |\mathbf{P}|/\omega(\mathbf{k}, t)$ ,  $\omega(\mathbf{k}, t) = \sqrt{P_i P^i + m^2}$ :

$$S_u(k) = \frac{P_\mu \gamma^\mu + m}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k}, t)(m + \omega(\mathbf{k}, t))}}, \quad S_v(k) = \frac{m - P_\mu \gamma^\mu}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k}, t)(m + \omega(\mathbf{k}, t))}}. \quad (8)$$

Operators  $a$  and  $b$  satisfy the general simultaneous anticommutation relations:

$$\{a_{s\mathbf{k}}^{(+)}, a_{s'\mathbf{k}'}^{(-)}\} = \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (9)$$

$$\{b_{s\mathbf{k}}^{(+)}, b_{s'\mathbf{k}'}^{(-)}\} = \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (10)$$

$$\{a_{s\mathbf{k}}^{(\pm)}, b_{s'\mathbf{k}'}^{(\pm)}\} = 0. \quad (11)$$

The Hamiltonian density after the field decomposition has the diagonal form:

$$h = \omega(a_s^{(+)} a_s^{(-)} - b_s^{(-)} b_s^{(+)}). \quad (12)$$

Thus decomposition (5) can be called a quasiparticle one.

The action in holomorphic variables is the following:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \int dt \sum_k \left[ i(a_\alpha^{(+)} \dot{a}_\alpha^{(-)} + b_\alpha^{(-)} \dot{b}_\alpha^{(+)} - \right. \\ & - i(a_\alpha^{(+)} \Xi_{\alpha\alpha'} b_{\alpha'}^{(+)} - b_\alpha^{(-)} \Xi_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'}^{(-)}) - \\ & - (a_\alpha^{(+)} \Lambda_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'}^{(-)} + b_\alpha^{(-)} \Lambda_{\alpha\alpha'} b_{\alpha'}^{(+)} + \\ & \left. + \omega(a_\alpha^{(+)} a_\alpha^{(-)} - b_\alpha^{(-)} b_\alpha^{(+)} \right), \quad (13) \end{aligned}$$

where we have introduced matrices  $\Xi$  and  $\Lambda$ :

$$\Xi = \xi_i \sigma_i, \quad \Lambda = \lambda_i \sigma_i. \quad (14)$$

$\sigma_i$  are Pauli matrices and

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{P}}{2\omega} \right), \quad \lambda = \frac{1}{2\omega(\omega + m)} \mathbf{P} \times \dot{\mathbf{P}}. \quad (15)$$

## 2. Distribution Function and Kinetic Equation

The local equations of motion for the operators  $a_s^{(-)}, b_s^{(+)}$  are derived from action (13):

$$\dot{a}_\alpha^{(-)} = i(\omega \delta_{\alpha\alpha'} - \Lambda_{\alpha\alpha'}) a_{\alpha'}^{(-)} + \Xi_{\alpha\alpha'} b_{\alpha'}^{(+)}, \quad (16)$$

$$\dot{b}_\alpha^{(+)} = -i(\omega \delta_{\alpha\alpha'} + \Lambda_{\alpha\alpha'}) b_{\alpha'}^{(+)} - \Xi_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'}^{(-)}. \quad (17)$$

We define the distribution function as a one-particle correlator:

$$f = {}_{sq} \langle 0 | a_s^{(+)} a_s^{(-)} | 0 \rangle_{sq}. \quad (18)$$

To obtain KE one can differentiate (18):

$$\begin{aligned} \dot{f} &= {}_{sq} \langle 0 | \partial_0 a^{(+)} a^{(-)} | 0 \rangle_{sq} + {}_{sq} \langle 0 | a^{(+)} \partial_0 a^{(-)} | 0 \rangle_{sq} \\ &= 2\xi_i \text{Re} (\langle 0 | b^{(-)} \sigma_i a^{(-)} | 0 \rangle_{sq}) = 2\xi_i \text{Re} \Phi_i. \end{aligned} \quad (19)$$

The equation of motion for unknown anomalous one-particle correlator  $\Phi_i = \langle 0 | b^{(-)} \sigma_i a^{(-)} | 0 \rangle_{sq}$  can be obtained after differentiating with respect to time. First derivative of  $\phi_i$  after substitution of equations of motion equals

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = 2i\omega \Phi_i + \xi_i (1 - 2f) + \epsilon_{ijk} \xi_j \phi_k + 2\epsilon_{ijk} A_j \Phi_k. \quad (20)$$

Similarly, we differentiate  $\phi_i = {}_{sq} \langle 0 | a^{(+)} \sigma_i a^{(-)} + b^{(-)} \sigma_i b^{(+)} | 0 \rangle_{sq}$  and substitute equations of motion:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = 4\epsilon_{ijk} \xi_j \text{Im} \Phi_k + 2\epsilon_{ijk} 2A_j \phi_k. \quad (21)$$

No new unknown functions appeared in (21), thus equations (19), (20) and (21) compose a closed system.

Let us consider the absence of particles in infinite past which results in zero initial conditions for  $f, \Phi, \phi$  and, as follows from (21),  $\phi = \text{Re } \Phi$ .

Introducing the notation

$$v_i = \text{Re } \Phi_i, \quad u_i = \text{Im } \Phi_i, \quad (22)$$

we get the final kinetic equation, describing fermion creation in strong electrical fields ( $\dot{\mathbf{P}} \neq 0$ ) as well as in conformal cosmology model [11–14] due to mass dependence on time ( $\dot{m} \neq 0$ ):

$$\frac{df}{dt} = 2(\boldsymbol{\xi} \mathbf{v}), \quad (23)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (1 - 2f)\boldsymbol{\xi} - 2\omega\mathbf{u} + \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\phi} + 2\mathbf{A} \times \mathbf{v}, \quad (24)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 2\omega\mathbf{v} + 2\mathbf{A} \times \mathbf{u}, \quad (25)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt} = 4\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{v} + 2\mathbf{A} \times \boldsymbol{\phi}. \quad (26)$$

## Summary

In the present work the kinetic equation for fermion creation is derived. The holomorphic representation is used. The kinetic equation can be applied to describe particle creation in laser field, quark-gluon plasma formation at early time of ultrarelativistic heavy ion collision and cosmological creation.

## References

- [1] A.A. Grib, S.G. Mamaev, V. M. Mostepanenko, *Quantum effects in intensive external fields*, Energoatomizdat, Moscow, 1988.
- [2] C.Y. Wong and G. Gatoff, Phys. Rept., 242 (1994) 489.
- [3] C.Y. Wong, R.C. Wang, and J.S. Wu, Phys. Rev. D, 51 (1995) 3940, hep-ph/9412357.
- [4] D.V. Vinnik, V.A. Mizerny, A.V. Prozorkevich, S.A. Smolyansky, and V.D. Toneev, Phys. Atom. Nucl., 64 (2001) 775 (Yad. Fiz., 64 (2001) 836).

- [5] A. Ringwald, hep-ph/0304139.
- [6] R. Alkofer, M.B. Hecht, C.D. Roberts, S.M. Schmidt, and D.V. Vinnik, Phys. Rev. Lett., 87 (2001) 193902, nucl-th/0108046.
- [7] V.N. Pervushin and V.I. Smirichinski, J. Phys. A: Math. Gen., 32 (1999) 6191.
- [8] D.B. Blaschke, S.I. Vinitisky, A.A. Gusev, V.N. Pervushin, and D.V. Proskurin, Phys. At. Nucl., 67 (2004) 1050.
- [9] Y. Kluger, J.M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper, and E. Mottola, Phys. Rev. Lett., 67 (1991) 2427.
- [10] V.N. Pervushin, V.V. Skokov, A.V. Reichel, S.A. Smolyansky, and A.V. Prozorkevich, hep-th/0307200.
- [11] M. Pawlowski, V.V. Papoyan, V.N. Pervushin, and V.I. Smirichinski, Phys. Lett. B, 444 (1998) 293.
- [12] D. Behnke, D.B. Blaschke, V.N. Pervushin, and D.V. Proskurin, Phys. Lett. B, 530 (2002) 20, gr-qc/0102039.
- [13] D. Blaschke, D. Behnke, V. Pervushin, and D. Proskurin, *Proceedings of the XVIIIth IAP Colloquium "On the Nature of Dark Energy"*, Paris, July 1-5, 2002; Report-no: MPG-VT-UR 240/03, astro-ph/0302001.
- [14] V.N. Pervushin, D.V. Proskurin, and A.A. Gusev, Grav. & Cosmology, 8 (2002) 181.

## Содержание

<i>Б.М. Барбашов</i> Слово о юбиляре ( <i>В качестве предисловия</i> )	3
<i>В.В. Нестеренко</i> Физика, философия, религия	5
<i>В.Н. Первушин</i> Научная автобиография	7
<i>Б.М. Барбашов, А.Г. Зорин, В.Н. Первушин, П. Флин</i> Космическая эволюция галактик в относительных единицах	31
<i>D. Ebert, V.N. Pervushin</i> Dynamical Breakdown of Chiral Symmetry and Abnormal Perturbation Expansions	62
<i>D. Antonov, D. Ebert</i> Field Correlators in the Dual Abelian Higgs Model	79
<i>M.P. Dąbrowski, D. Behnke, D. Blaschke</i> Relation between Conformal Relativity, Brans–Dicke and Low-Energy-Effective Superstring Theories	98
<i>D.B. Blaschke, A.V. Prozorkevich, A.V. Reichel, S.A. Smolyansky</i> Kinetic Description of Vacuum Creation of Massive Vector Bosons	115
<i>A. Gusev, V. Pervushin, S. Vinitsky, V. Zinchuk, A. Zorin</i> Cosmological Creation of $W$ -, $Z$ -Bozons and the Large-Scale Structure of the Universe	127
<i>V.N. Pervushin, V.V. Skokov</i> Kinetic Description of Fermion Production in Cosmology and QED	131

Научное издание

**Проблемы калибровочных теорий**  
**К 60-летию со дня рождения В. Н. Первушина**

Д2-2004-66

Ответственный за подготовку сборника к печати *А. Г. Зорин*

Редакторы *Е. И. Кравченко, А. Н. Шабашова*  
Компьютерная верстка фотоблока *И. Г. Андреевой*

Подписано в печать 22.07.2004.

Формат 70 × 100/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 13,22. Уч.-изд. л. 9,7. Тираж 340 экз. Заказ № 54530.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.  
E-mail: [publish@pds.jinr.ru](mailto:publish@pds.jinr.ru)  
[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)