

УДК 53.01

Нелинейное спинорное поле в пространстве-времени LRS Бианки-Ic геометрией Лиры

Саха Биджан^{1,2}bijan@jinr.ru
SPIN-код: 9803-5325¹ ЛИТ, ОИЯИ, Дубна, Россия² ИФИТ, РУДН, Москва, Россия

Аннотация. В данной работе мы исследуем роль нелинейного спинорного поля в эволюции Вселенной в рамках локально-вращательно-симметричной космологической модели Бьянки I типа (LRSBI) с геометрией Лиры. Предыдущие исследования, в которых изучалось нелинейное спинорное поле в различных анизотропных и изотропно космологических моделях, показали, что наличие нетривиальных, недиагональных компонентов тензора энергии-импульса спинорного поля накладывает серьезные ограничения как на геометрию пространства-времени, так и на само спинорное поле. В нашем текущем исследовании мы обнаружили, что, хотя эти ограничения все еще действуют, введение геометрии Лиры существенно влияет на эволюцию Вселенной. Это влияние обусловлено тем фактом, что инварианты спинорного поля зависят от параметра геометрии Лиры.

Ключевые слова: спинорное поле, геометрия Лиры, тензор энергии-импульса, модели Бианки

Введение. История науки отмечена постоянными изменениями и совершенствованием. Даже теория гравитации Эйнштейна развивалась с течением времени. Одной из многих модификаций теории гравитации было введение космологической постоянной. Эта эволюция отражает продолжающийся поиск более совершенных теорий, которые могут углубить наше понимание естественного порядка вещей. Вскоре после новаторской работы Эйнштейна Вейль попытался объединить гравитацию и электромагнитное поле, обобщив риманову геометрию [1]. Однако теория Вейля не получила широкого признания, поскольку противоречила нескольким хорошо зарекомендовавшим себя результатам наблюдений.

В 1951 году Лира предложил модификацию римановой геометрии, которая очень напоминает теорию Вейля [2]. Однако, в отличие от геометрии Вейля, подход Лиры поддерживает связь, сохраняющую метрику, аналогичную римановой геометрии. При этом он ввел калибровочную функцию в бесструктурное многообразие. Эта теория получила дальнейшее развитие в работах [3–6]. В последние годы геометрия Лиры нашла широкое применение в космологии [7–10].

В последние годы спинорное поле привлекло значительное внимание в космологии благодаря своей способности моделировать различные исход-

ные поля, такие как идеальные жидкости и темная энергия [11–16]. Несколько исследований показали, что спинорное поле очень чувствительно к гравитационным эффектам, при этом нетривиальные, недиагональные компоненты его тензора энергии-импульса (ТЭИ) накладывают серьезные ограничения как на геометрию пространства-времени, так и на нелинейность самого спинорного поля [17]. Спинорное поле в геометрии Лиры также изучалось в работе [18]. Основная цель этого исследования — выяснить, может ли введение геометрии Лиры в систему облегчить ограничения, обычно возникающие при стандартной обработке спинорных полей.

Методы и материалы; результаты. Основными методами, использованными в данной работе, являются методы дифференциальной геометрии, тензорного анализа, аналитические и численные решения нелинейных дифференциальных уравнений. При этом для численного анализа используется Maple.

Введение геометрии Лиры изменяет спинорно-аффинные связности. На основе этой структуры получены соответствующие спинорно-аффинные связности. Обнаружено, что, хотя компоненты тензора энергии-импульса спинорного поля остаются внешне неизменными, инварианты спинорного поля претерпевают значительные изменения. Соответствующие уравнения Эйнштейна решены, а метрические функции выражены в терминах масштаба объема. Результаты представлены в графическом виде.

Заключение. В рамках космологической модели локально вращательно-симметричной Бианки-I мы исследуем роль геометрии Лиры в эволюции Вселенной, когда она наполняется темной энергией, моделируемой спинорным полем. Наш анализ показывает, что соответствующие уравнения Эйнштейна сохраняют ту же форму, что и при отсутствии геометрии Лиры. Однако, зависимость инвариантов спинорного поля от геометрических параметров Лиры влияет на конечные результаты. Соответствующие уравнения решаются численно, а решения представлены графически.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- [1] Weyl H. *Gravitation and Electricity*. Berlin, Preuss. Akad. Wiss., 1918, 465 p.
- [2] Lyra G. On a Modification of Riemannian Geometry. *Math. Z.*, 1951, vol. 54, 52 p.
- [3] Sen D.K. A static cosmological model. *Z. Physik.*, 1957, vol. 149, 311 p. <https://doi.org/10.1007/BF01333146>
- [4] Sen D.K., Dunn K.A. A scalar-tensor theory of gravitation in a modified Riemannian manifold. *J. Math. Phys.*, 1971, vol. 12, art. no. 578. <https://doi.org/10.1063/1.1665623>
- [5] Sen D.K., Vanstone J.R. On Weyl and Lyra Manifolds. *J. Math. Phys.*, 1972, vol. 13, art. no. 990. <https://doi.org/10.1063/1.1666099>
- [6] Halford W.D. Scalar-tensor theory of gravitation in a Lyra manifold. *J. Math. Phys.*, 1972, vol. 13, art. no. 1699. <https://doi.org/10.1063/1.1665894>
- [7] Beesham A. FLRW cosmological models in Lyra's manifold with time dependent displacement field. *Aust. J. Phys.*, 1988, vol. 41, art. no. 833. <https://doi.org/10.1071/PH880833>

- [8] Jahromi A.S., Moradpour H. Static traversable wormhole in Lyra geometry. *Int. J. Mod. Phys. D*, 2018, vol. 27, art. no. 1850024. <https://doi.org/10.1142/S0218271818500244>
- [9] Bakry M.A. Particle creation and Big Rip cosmological model in Lyra geometry. *Astrophys. Space Sci.*, 2022, vol. 367, art. no. 35. <https://doi.org/10.1007/s10509-022-04063-4>
- [10] Shchigolev V.K., Bezbatko D.N. Exact cosmological models with Yang-Mills fields on Lyra manifold. *Grav. & Cosmology*, 2018, vol. 24 (2), art. no. 161. <https://doi.org/10.1134/S0202289318020135>
- [11] Saha B., Shikin G.N. Interacting Spinor and Scalar Fields in Bianchi Type I Universe Filled with Perfect Fluid: Exact Self-consistent Solutions. *Gen. Relat. Grav.*, 1997, vol. 29, art. no. 1099. <https://doi.org/10.1023/A:1018887024268>
- [12] Saha B., Shikin G.N. Nonlinear Spinor Field in Bianchi type-I Universe filled with Perfect Fluid: Exact Self-consistent Solutions. *J. Math. Phys.*, 1997, vol. 38, art. no. 5305. <https://doi.org/10.1063/1.531944>
- [13] Saha B. Spinor field in Bianchi type-I Universe: regular Solutions. *Phys. Rev. D*, 2001, vol. 64, art. no. 123501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.123501>
- [14] Armendariz-Picon C., Greene P.B. Spinors, Inflation, and Non-Singular Cyclic Cosmologies. *Gen. Relat. Grav.*, 2003, vol. 35, art. no. 1637. <https://doi.org/10.1023/A:1025783118888>
- [15] Fabbri L. Conformal gravity with the most general ELKO matter. *Phys. Rev. D*, 2012, vol. 85, art. no. 047502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.047502>
- [16] Poplawski N.J. Nonsingular, big-bounce cosmology from spinor-torsion coupling. *J. Phys. Rev. D*, 2012, vol. 85, art. no. 107502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.107502>
- [17] Saha B. Spinor field nonlinearity and space-time geometry. *Phys. Part. Nucl.*, 2018, vol. 49 (2), art. no. 146. <https://doi.org/10.1134/S1063779618020065>
- [18] Casana R., de Melo C.A.M., Pimentel B.M. Spinorial field and Lyra geometry. *Astrophys. Space Sci.*, 2006, vol. 305, art. no. 125. <https://doi.org/10.1007/s10509-006-9048-5>

Nonlinear spinor field in LRS Bianchi type-I space-time with Lyra's Geometry

Saha Bijan¹

bijan@jinr.ru
SPIN-code: 9803-5325

¹Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

²Institute of Physical Research and Technologies, RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. In this study, we examine the role of a nonlinear spinor field in the evolution of the Universe within the framework of a Locally Rotationally Symmetric Bianchi type-I (LRSBI) cosmological model with Lyra's geometry. Previous research has explored the nonlinear spinor field in various anisotropic and isotropic cosmological models, revealing that the presence of nontrivial, non-diagonal components of the spinor field's energy-momentum tensor imposes severe restrictions on both the space-time geometry and the spinor field itself. In our current study, we find that while these restrictions still apply, the introduction of Lyra's geometry significantly influences the evolution of the Universe. This influence arises from the fact that the invariants of the spinor field are dependent on the Lyra geometry parameter.

Keywords: spinor field, Lyra's geometry, energy momentum tensor, Bianchi models

Introduction. The history of science is marked by constant change and refinement. Even Einstein's theory of gravity evolved over time. One of many modifications in theory of gravity was the introduction of the cosmological constant. This evolution reflects the ongoing search for better theories that can deepen our understanding of the natural order. Shortly after Einstein's groundbreaking work, Weyl sought to unify gravity and the electromagnetic field by generalizing Riemannian geometry [1]. However, Weyl's theory was not widely accepted, as it contradicted several well-established observational results.

In 1951, Lyra proposed a modification of Riemannian geometry that closely resembles Weyl's theory [2]. Unlike Weyl geometry, however, Lyra's approach maintains a metric-preserving connection, similar to that of Riemannian geometry. In doing so, he introduced a gauge function into the otherwise structureless manifold. This theory was further developed by many authors [3–6]. In recent years, Lyra's geometry has found extensive applications in cosmology [7–10].

In recent years, the spinor field has gained significant attention in cosmology due to its ability to model a variety of source fields, such as perfect fluids and dark energy [11–16]. Several studies have shown that the spinor field is highly sensitive to gravitational effects, with the nontrivial, non-diagonal components of its energy-momentum tensor (EMT) imposing severe constraints on both the space-time geometry and the nonlinearity of the spinor field itself [17]. The spinor field within Lyra's geometry has also been explored in [18]. The primary aim of this study is to investigate whether the introduction of Lyra's geometry into the system can alleviate the restrictions typically found in the standard treatment of spinor fields.

Methods and materials; results. The main methods used in this work are methods of differential geometry, tensor analysis, analytical and numerical solutions of nonlinear differential equations, as well as data analysis for comparing theoretical results and observational data. In this case, Maple is used for numerical analysis.

The introduction of Lyra's geometry modifies the spinor affine connections. Based on this framework, the corresponding spinor affine connections are derived. It is found that while the components of the spinor field's energy-momentum tensor remain externally unchanged, the spinor field invariants undergo significant modifications. The corresponding Einstein equations are solved, and the metric functions are expressed in terms of the volume scale. The results are presented in graphical form.

Conclusion. Within the framework of a LRS Bianchi type-I cosmological model, we investigate the role of Lyra's geometry in the evolution of the Universe when it is filled with dark energy modeled by a spinor field. Our analysis reveals that the corresponding Einstein equations retain the same form as in the absence of Lyra's geometry. However, the dependence of spinor field invariants on the Lyra geometry parameter influences the final results. The relevant equations are solved numerically, with the solutions presented graphically.

References

- [1] Weyl H. *Gravitation and Electricity*. Berlin, Preuss. Akad. Wiss., 1918, 465 p.
- [2] Lyra G. On a Modification of Riemannian Geometry. *Math. Z.*, 1951, vol. 54, 52 p.
- [3] Sen D.K. A static cosmological model. *Z. Physik.*, 1957, vol. 149, 311 p.
<https://doi.org/10.1007/BF01333146>
- [4] Sen D.K., Dunn K.A. A scalar-tensor theory of gravitation in a modified Riemannian manifold. *J. Math. Phys.*, 1971, vol. 12, art. no. 578. <https://doi.org/10.1063/1.1665623>
- [5] Sen D.K., Vanstone J.R. On Weyl and Lyra Manifolds. *J. Math. Phys.*, 1972, vol. 13, art. no. 990. <https://doi.org/10.1063/1.1666099>
- [6] Halford W.D. Scalar-tensor theory of gravitation in a Lyra manifold. *J. Math. Phys.*, 1972, vol. 13, art. no. 1699. <https://doi.org/10.1063/1.1665894>
- [7] Beesham A. FLRW cosmological models in Lyra's manifold with time dependent displacement field. *Aust. J. Phys.*, 1988, vol. 41, art. no. 833. <https://doi.org/10.1071/PH880833>
- [8] Jahromi A.S., Moradpour H. Static traversable wormhole in Lyra geometry. *Int. J. Mod. Phys. D*, 2018, vol. 27, art. no. 1850024. <https://doi.org/10.1142/S0218271818500244>
- [9] Bakry M.A. Particle creation and Big Rip cosmological model in Lyra geometry. *Astrophys. Space Sci.*, 2022, vol. 367, art. no. 35. <https://doi.org/10.1007/s10509-022-04063-4>
- [10] Shchigolev V.K., Bezbatko D.N. Exact cosmological models with Yang-Mills fields on Lyra manifold. *Grav. & Cosmology*, 2018, vol. 24 (2), art. no. 161.
<https://doi.org/10.1134/S0202289318020135>
- [11] Saha B., Shikin G.N. Interacting Spinor and Scalar Fields in Bianchi Type I Universe Filled with Perfect Fluid: Exact Self-consistent Solutions. *Gen. Relat. Gravit.*, 1997, vol. 29, art. no. 1099. <https://doi.org/10.1023/A:1018887024268>
- [12] Saha B., Shikin G.N. Nonlinear Spinor Field in Bianchi type-I Universe filled with Perfect Fluid: Exact Self-consistent Solutions. *J. Math. Phys.*, 1997, vol. 38, art. no. 5305.
<https://doi.org/10.1063/1.531944>
- [13] Saha B. Spinor field in Bianchi type-I Universe: regular Solutions. *Phys. Rev. D*, 2001, vol. 64, art. no. 123501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.123501>
- [14] Armendariz-Picon C., Greene P.B. Spinors, Inflation, and Non-Singular Cyclic Cosmologies. *Gen. Relat. Grav.*, 2003, vol. 35, art. no. 1637. <https://doi.org/10.1023/A:1025783118888>
- [15] Fabbri L. Conformal gravity with the most general ELKO matter. *Phys. Rev. D*, 2012, vol. 85, art. no. 047502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.047502>
- [16] Poplawski N.J. Nonsingular, big-bounce cosmology from spinor-torsion coupling. *J. Phys. Rev. D*, 2012, vol. 85, art. no. 107502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.107502>
- [17] Saha B. Spinor field nonlinearity and space-time geometry. *Phys. Part. Nucl.*, 2018, vol. 49 (2), art. no. 146. <https://doi.org/10.1134/S1063779618020065>
- [18] Casana R., de Melo C.A.M., Pimentel B.M. Spinorial field and Lyra geometry. *Astrophys. Space Sci.*, 2006, vol. 305, art. no. 125. <https://doi.org/10.1007/s10509-006-9048-5>