

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ им. Н.Н. БОГОЛЮБОВА

На правах рукописи



КОЛГАНОВА  
Елена Александровна

ТРЕХАТОМНЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ УЛЬТРАНИЗКИХ  
ЭНЕРГИЯХ В ФАДДЕЕВСКОМ ПОДХОДЕ

01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Дубна – 2021

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова  
Объединенного института ядерных исследований.

С электронной версией диссертации можно ознакомиться на официальном сайте Объединенного института ядерных исследований в информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» по адресу: <https://dissertations.jinr.ru/>.

С печатной версией диссертации можно ознакомиться в Научно-технической библиотеке Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна Московской области, ул. Жолио-Кюри, д. 6).

Ученый секретарь диссертационного совета,  
кандидат физико-математических наук

Ю. М. Быстрицкий

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы исследования

Квантово-механическая проблема трех тел имеет фундаментальное значение для многих областей атомной, молекулярной и ядерной физики. При переходе от квантовой задачи двух тел к задаче трех тел возможно радикальное изменение свойств системы. Например, оказывается, что три частицы могут образовывать бесконечное число связанных состояний, даже если ни одна из парных подсистем не имеет связанных состояний, но хотя бы две из них обладают бесконечными длинами рассеяния. В этом состоит эффект Ефимова (1970) для трехчастичных систем с быстро убывающими парными взаимодействиями, причем его проявление не зависит от конкретной природы взаимодействующих частиц.

В настоящее время интенсивно развивается экспериментальная физика ультрахолодных газов в электромагнитных, оптических и комбинированных ловушках. Экспериментаторам удается не только создавать ловушки различных конфигураций, но и удерживать в них наперед заданное число атомов, а также детектировать и контролировать образование слабосвязанных вандер-ваальсовских кластеров. Более того, путем варьирования параметров ловушки можно изменять межатомное взаимодействие и получать сколь угодно большую длину атом-атомного рассеяния. Таким образом возникают новые возможности для экспериментальной реализации и практического исследования эффекта Ефимова.

Дальнейшие экспериментальные исследования эффекта Ефимова и других универсальных закономерностей в малочастичных системах не представляются возможными без достоверных теоретических предсказаний, полученных в рамках математически корректной квантовой теории рассеяния. В свете недавних достижений в области экспериментального исследования слабосвязанных кластеров теоретические работы по выявлению новых квантовых систем, демонстрирующих универсальные закономерности, подобные эффекту Ефимова, представляются исключительно актуальными.

## Цели и задачи

Целью диссертации являются:

- создание экономичных методов и алгоритмов, основанных на теории дифференциальных уравнений Фаддеева и предназначенных как для решения задач на связанные состояния, так и для численных расчетов процессов упругого рассеяния, развала и резонансов в системе трех атомов;
- исследование слабосвязанных ван-дер-ваальсовских трехатомных кластеров вида  ${}^4\text{He}_2\text{X}$ , где  $\text{X} = {}^4\text{He}, {}^3\text{He}, {}^6\text{Li}, {}^7\text{Li}$ , и процессов рассеяния атома  ${}^4\text{He}$  на димере  ${}^4\text{HeX}$  на основе предложенных подходов;
- поиск возможности проявления эффекта Ефимова в исследуемых трехатомных системах.

Для достижения указанных целей были решены следующие задачи:

- разработан метод решения интегро-дифференциальных уравнений Фаддеева в модели твердого кора, позволяющий существенно уменьшить вычислительные погрешности;
- реализовано вычисление аналитического продолжения на физический лист энергии амплитуд процессов ( $2 \rightarrow 2$ ) в системе трех тождественных бозонов, парная подсистема которой имеет только одно связанное состояние;
- программно реализованы алгоритмы вычисления трехчастичных резонансов, основанные на аналитическом продолжении амплитуды упругого рассеяния и на комплексном скейлинге уравнений Фаддеева;
- выявлен внутренний механизм возникновения новых ефимовских состояний;
- выполнены расчеты энергий связанных состояний ван-дер-ваальсовских трехатомных кластеров вида  ${}^4\text{He}_2\text{X}$ , где  $\text{X} = {}^4\text{He}, {}^3\text{He}, {}^6\text{Li}, {}^7\text{Li}$ ;
- исследована зависимость энергии связи возбужденного состояния трехатомной системы от константы связи межатомного потенциала;

- исследована амплитуда рассеяния частицы на связанной паре частиц при энергиях выше и ниже трехчастичного порога в бозонной системе трех атомов  ${}^4\text{He}$  и в фермионной ядерной системе  $npp$ ;
- вычислены длины и фазы упругого рассеяния атомов  ${}^3\text{He}$  и  ${}^4\text{He}$  на димере  ${}^4\text{He}_2$  при энергиях выше и ниже трехчастичного порога развала;
- проведен численный анализ зависимости длин рассеяния атома  ${}^4\text{He}$  на димерах  ${}^4\text{He}{}^6\text{Li}$  и  ${}^4\text{He}{}^7\text{Li}$  от моделей межатомных взаимодействий.

### **Научная новизна и практическая ценность диссертации**

Все положения, выносимые на защиту являются оригинальными и основаны на результатах, полученных впервые. Разработанные методы и алгоритмы могут быть применимы к широкому кругу трехчастичных квантовых задач. Результаты исследования существования уровней ефимовского типа в трехатомных системах важны для планирования экспериментов по получению трехатомных кластеров и изучению их физических свойств. Часть полученных в работе предсказаний нашла свое экспериментальное подтверждение. Полученные в диссертации результаты имеют высокую научную ценность и могут быть использованы для исследований широкого класса трехчастичных систем в ядерной, атомной и молекулярной физике.

### **Основные результаты, выносимые на защиту**

- На основании разработанного в диссертации метода решения дифференциальных уравнений Фаддеева выполнены одни из первых расчетов энергий основного и возбужденного состояний тримера  ${}^4\text{He}$ . При этом применена модель твердого кора, что позволило использовать математически строгий метод решения задачи трех тел в модели граничных условий и радикально уменьшить вычислительные погрешности.
- Реализовано вычисление аналитического продолжения на физический лист энергии амплитуд процессов ( $2 \rightarrow 2$ ) для системы трех тождественных

бозонов, парная подсистема которой имеет одно связанное состояние. Исследованы и, в ряде случаев, определены границы областей на комплексной плоскости энергии, в которые возможно аналитическое продолжение компонент Фаддеева, амплитуд упругого рассеяния и развала в случае парных потенциалов, убывающих не медленнее чем экспоненциально. Проведено сравнение алгоритмов вычисления, основанных на аналитическом продолжении амплитуд рассеяния и на комплексном скейлинге уравнений Фаддеева. Показано, что оба алгоритма приводят к одинаковым результатам.

- Исследован внутренний механизм возникновения новых ефимовских состояний из виртуальных состояний в системе  ${}^4\text{He}_3$ . Показано, что при ослаблении межатомного потенциала длина рассеяния атома гелия на димере гелия изменяет знак и проходит через полюс, а виртуальное состояние превращается в связанное. Для различных потенциальных моделей установлена независимость разности между энергией возбужденного состояния тримера  ${}^4\text{He}_3$  и энергией связи димера  ${}^4\text{He}_2$ . Исследовано рассеяние частицы на связанной паре частиц при энергиях выше и ниже трехчастичного порога в бозонной системе трех атомов  ${}^4\text{He}$  и в фермионной ядерной системе  $nnp$ . Выявлена качественная схожесть структуры  $S$ -матриц этих трехчастичных систем.
- На основе развитого в диссертации вычислительного подхода выполнен один из первых расчетов энергии связи системы  ${}^3\text{He}{}^4\text{He}_2$  и впервые вычислены фазы упругого рассеяния атомов  ${}^3\text{He}$  и  ${}^4\text{He}$  на димере  ${}^4\text{He}_2$  при энергиях выше и ниже трехчастичного порога развала. Показано, что трехатомная молекула  ${}^3\text{He}{}^4\text{He}_2$  существует, но ее энергия связи на порядок меньше энергии связи основного состояния тримера  ${}^4\text{He}_3$ . Установлено также, что у системы  ${}^3\text{He}{}^4\text{He}_2$  нет возбужденного состояния. Полученные результаты продемонстрировали важность точного учета асимптотического поведения компонент Фаддеева и выбора достаточно большого количества узлов сеток для передачи всех важных особенностей волновой

функции.

- С помощью решения уравнений Фаддеева показано, что каждая из систем  ${}^4\text{He}_2{}^6\text{Li}$  и  ${}^4\text{He}_2{}^7\text{Li}$  имеет только два связанных состояния. Энергии возбужденных состояний этих систем очень близки к энергии соответствующего нижайшего парного порога. Впервые выполнены расчеты длин рассеяния атома  ${}^4\text{He}$  на димерах  ${}^4\text{He}{}^6\text{Li}$  и  ${}^4\text{He}{}^7\text{Li}$ . Эти длины оказались равными нескольким сотням ангстрем.

### Апробация работы

Результаты, включенные в диссертацию, докладывались на семинарах в ЛТФ, в Санкт-Петербургском государственном университете, Римском университете Сапиенца (Рим, Италия), Институте Макса Планка физики сложных систем (Дрезден, Германия), Карловом университете (Прага, Чехия), Институте атомных и молекулярных наук Академии Синика (Тайбэй, Тайвань), Университете Южной Африки (Претория, ЮАР), а также были представлены в более пятидесяти докладах на международных конференциях и совещаниях, включая: International Conference on Few-Body Problems in Physics (Groningen, the Netherlands, 1997; Taipei, Taiwan, 2000; Bonn, Germany, 2009; Caen, France, 2018), European Conference on Few-Body Problems in Physics (Groningen, The Netherlands, 2004; Pisa, Italy, 2007; Krakow, Poland, 2013; Aarhus, Denmark, 2016), Workshop on Computational Physics dedicated to the memory of S.P.Merkuriev (St. Petersburg, Russia, 2003), International Workshop on Critical Stability of Few-Body Quantum Systems (Dresden, Germany, 2005; Erice, Italy, 2008; Santos, Brazil, 2014; Dresden, Germany, 2017), Международное рабочее совещание по физике малочастичных систем (Дубна, ОИЯИ, 2012; 2016), Международная сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН “Физика фундаментальных взаимодействий” (Дубна, РФ, 2016; Нальчик, РФ, 2017), International Workshop on Few-Body Systems (Dubna, JINR, 2012; Dubna, JINR, 2016), International Bogolyubov Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics” (Dubna, Russia, 2009; Moscow-Dubna,

Russia, 2019), LXIX International Conference on Nuclear Spectroscopy and Nuclear Structure (Dubna, Russia, 2019), LXX International Conference “Nuclear physics and elementary particle physics. Nuclear physics technologies” (St.Petersburg, Russia, 2020).

### Публикации

В диссертации представлены результаты, опубликованные в 23 работах, список которых приводится в конце автореферата. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

### Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и двух приложений. Общий объем диссертации — 153 страниц. Она содержит 16 таблиц, 25 рисунков и список литературы из 237 наименований.

## **СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

Во **Введении** дается краткий обзор современного состояния исследований в области ультрахолодных трехатомных систем, очерчивается круг вопросов, рассматриваемых в диссертации, и обосновывается их актуальность. Заключительная часть Введения содержит сжатое описание структуры работы. Там же приводится перечень конференций и совещаний, на которых докладывались результаты, включенные в диссертацию.

**Глава 1** посвящена описанию формализма дифференциальных уравнений Фаддеева для системы трех частиц. В первых двух разделах приводятся исходные шестимерные дифференциальные уравнения Фаддеева и формулируется их вариант для модели твердого тела. Разделы 1.3 и 1.4 посвящены редукции исходных шестимерных дифференциальных уравнений Фадде-



ева к трехмерным дифференциальным уравнениям и к двумерным интегро-дифференциальным уравнениям. В разделе 1.5 дано описание конечно-разностного алгоритма численного решения интегро-дифференциальных уравнений Фаддеева и модификации этого алгоритма для модели твердого кора. В разделе 1.6 приведены два метода вычисления энергий резонансов на основании дифференциальных уравнений Фаддеева. Первый из них основан на аналитическом продолжении амплитуды упругого рассеяния в область комплексной энергии  $z$ , ограниченную в случае трех тождественных частиц неравенством:

$$\text{Im}\sqrt{z - \varepsilon} < \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{|\varepsilon|}, \frac{\sqrt{3}}{2} \mu \right\},$$

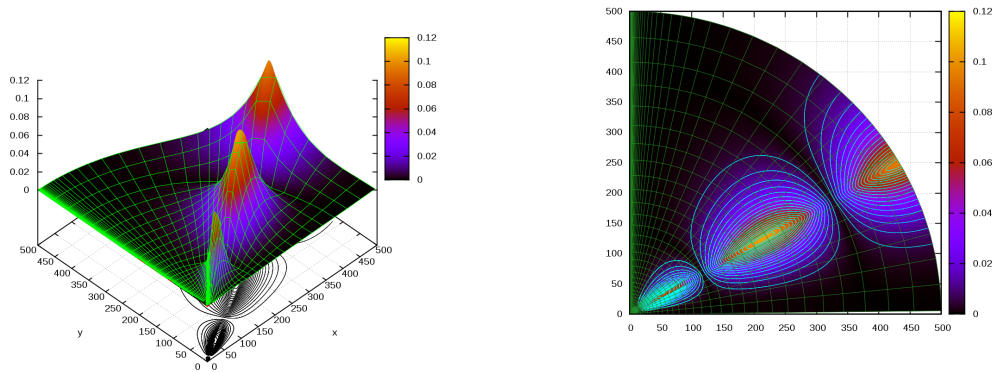
где  $\varepsilon$  - энергия связи пары частиц, а  $\mu$  - положительная константа, характеризующая скорость убывания потенциального фактора  $\exp(-\mu|x_\alpha|)$  в асимптотике потенциала. Второй метод – это метод комплексного скейлинга, в котором соответствующие масштабированные уравнения Фаддеева имеют вид

$$[-e^{-2\vartheta} \Delta_X + v_\alpha(e^\vartheta|x_\alpha|) - z] \Phi^{(\alpha)}(X) + v_\alpha(e^\vartheta|x_\alpha|) \sum_{\beta \neq \alpha} \Phi^{(\beta)}(X) = f_\alpha(X),$$

$$\alpha = 1, 2, 3,$$

где  $x_\alpha, y_\alpha$  - координаты Якоби,  $X \equiv (x_\alpha, y_\alpha)$ ,  $\Phi^{(\alpha)}$  - компонента Фаддеева волновой функции, а  $v_\alpha$  - потенциал взаимодействия. Здесь  $\vartheta = i\theta$  параметр скейлинга, а  $f_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$  – произвольные функции из  $L_2(\mathbb{R}^6)$  от выбора которых энергия резонансного состояния не зависит. На примере вычисления резонанса в модельной системе трех бозонов с массами нуклона показано, что оба метода дают одинаковый результат.

**Глава 2** посвящена численному исследованию связанных состояний и процессов рассеяния в системе трех атомов гелия  ${}^4\text{He}$  в рамках дифференциальных уравнений Фаддеева. В этой главе дан исчерпывающий сравнительный анализ известных экспериментальных данных и значений энергий связи, длин и фаз рассеяния, вычисленных разными, в том числе авторскими, способами с различными реалистическими силами.



а) б)

Рис. 1: Парциальная компонента  $\Psi_2(x,y)$  волновой функции, описывающая процесс рассеяния атома гелия на димере гелия при энергии  $E_{lab} = 2.5$  мК. а) поверхность графика  $|\Psi_2(x,y)|$ ; б) линии уровней  $|\Psi_2(x,y)|$ . Значения якобиевских переменных  $x$  и  $y$  приведены в  $\text{\AA}$ .

В первом разделе описаны потенциалы межатомного He-He взаимодействия и сложности, возникающие при использовании этих потенциалов в расчетах. Во втором разделе приведены результаты вычислений энергии связи димера  ${}^4\text{He}_2$  и длин  ${}^4\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  рассеяния. Здесь же проведено их сравнение с экспериментальными значениями (см. Табл. 1). В третьем разделе содержатся результаты расчетов энергий основного и возбужденного состояний тримера гелия  ${}^4\text{He}_3$ , полученные на основе разработанного метода решения уравнений Фаддеева с различными потенциалами. Показано, что у тримера  ${}^4\text{He}_3$  имеется два связанных состояния, причем энергия возбужденного состояния близка к порогу непрерывного спектра. В четвертом разделе приведены результаты вычислений фаз упругого рассеяния атома  ${}^4\text{He}$  на димере  ${}^4\text{He}_2$  при энергиях как ниже, так и выше трехчастичного порога развала. Эти результаты являются пионерскими. Кроме того, была вычислена длина рассеяния атома  ${}^4\text{He}$  на димере  ${}^4\text{He}_2$ , которая оказалась весьма велика ( $\sim 100$   $\text{\AA}$ ). Продемонстрирована важность учета асимптотического поведе-

ния компонент Фаддеева при расчете связанных состояний. Проиллюстрированы уникальные возможности разработанного численного метода, исследованы особенности поведения парциальных компонент Фаддеева и волновых функций тримера  ${}^4\text{He}_3$  (см. Рис. 1).

В **третьей главе** обсуждается эффект Ефимова и исследуются его проявления в системе трех атомов гелия  ${}^4\text{He}$ . Первый раздел является вводным. В нем описывается суть эффекта Ефимова и кратко излагаются причины его возникновения. Второй раздел посвящен исследованию возбужденного состояния тримера гелия  ${}^4\text{He}_3$ . В Табл.1 приведены результаты расчетов энергии связи этого состояния для различных реалистических потенциалов.

Таблица 1: Абсолютное значение энергии связи  $\varepsilon_d$  димера гелия  ${}^4\text{He}_2$ ,  ${}^4\text{He}-{}^4\text{He}$  длина рассеяния  $\ell_{\text{sc}}^{(1+1)}$ ; абсолютные значения энергий связи основного  $E$  и возбужденного  $E^*$  состояний тримера  ${}^4\text{He}_3$ ; разность  $|E^* - \varepsilon_d|$  для различных He-He потенциалов в сравнении с экспериментальными данными.

потенциал	$\varepsilon_d$ (мК)	$\ell_{\text{sc}}^{(1+1)}$ (Å)	$E$ (мК)	$E^*$ (мК)	$ E^* - \varepsilon_d $ (мК)
HFDHE2	0.830	124.65	116.7	1.67	0.84
LM2M2	1.303	100.23	125.9	2.27	0.97
TTY	1.309	100.01	125.8	2.28	0.97
PRZ2010	1.614	90.42	131.1	2.65	1.03
HFD-B	1.685	88.50	133.0	2.74	1.05
Jeziorska	1.728	87.53	133.4	2.78	1.06
Exp.	$1.1^{+0.3}_{-0.2}$	$104^{+8}_{-18}$			
	$1.76^{+0.15}_{-0.15}$				$0.98 \pm 0.2$

Показано, что возбужденное состояние тримера  ${}^4\text{He}_3$  имеет ефимовскую природу. Продемонстрировано, что при ослаблении потенциала взаимодей-

ствия возникает второе возбужденное состояние, которое появляется из виртуального состояния трехчастичной системы. В третьем разделе обсуждается вычисленная модифицированная линия Филлипса, иллюстрирующая зависимость энергий возбужденного и виртуального состояний от длины рассеяния. Выявлена качественная схожесть структуры  $S$ -матриц атомной системы  ${}^4\text{He}_3$  и ядерной системы  $npr$ .

**Четвертая глава** посвящена исследованию свойств трехчастичной системы  ${}^3\text{He}{}^4\text{He}_2$ . В первом разделе описываются особенности формализма, описанного в Главе 1, в случае нетождественных частиц. Во втором разделе приведены результаты вычислений энергии связи трехчастичной системы  ${}^3\text{He}{}^4\text{He}_2$  и длины рассеяния атома  ${}^3\text{He}$  на димере  ${}^4\text{He}_2$  с различными потенциалами. Показано, что энергия основного состояния этой системы на порядок меньше энергии основного состояния тримера  ${}^4\text{He}_3$ . В третьем разделе исследуется возможность появления ефимовских состояний в системе  ${}^3\text{He}{}^4\text{He}_2$ . Показано, что, в отличие от тримера  ${}^4\text{He}_3$ , в этой системе нет возбужденных состояний, и для их возникновения необходимо, чтобы масса атома  ${}^3\text{He}$  была очень близка к массе  ${}^4\text{He}$ . Четвертый раздел содержит пионерские результаты расчетов фаз и длин рассеяния атома  ${}^3\text{He}$  на димере  ${}^4\text{He}_2$  с различными реалистическими парными потенциалами. Установлено, что длина рассеяния атома  ${}^3\text{He}$  на димере  ${}^4\text{He}_2$  составляет около 20 Фм, что почти в пять раз меньше, чем аналогичная длина для атома  ${}^4\text{He}$ .

**Глава 5** посвящена обсуждению результатов численных расчетов связанных состояний и длин рассеяния в системах  ${}^4\text{He}_2{}^7\text{Li}$  и  ${}^4\text{He}_2{}^6\text{Li}$  на основе решения уравнений Фаддеева в представлении полного углового момента при  $L = 0$ . Анализ потенциалов взаимодействия показал, что все димеры, образованные атомом  ${}^4\text{He}$  и атомом щелочного металла, являются слабосвязанными системами, причем энергия связи молекул  ${}^4\text{He}{}^6\text{Li}$ ,  ${}^4\text{He}{}^7\text{Li}$  и  ${}^4\text{He}{}^{133}\text{Cs}$  имеет тот же порядок, что и энергия связи димера  ${}^4\text{He}_2$ . В итоге вычислений энергий связи трехатомных систем  ${}^4\text{He}_2{}^6\text{Li}$  и  ${}^4\text{He}_2{}^7\text{Li}$  установлено, что каждая из них обладает двумя связанными состояниями. При этом энергия возбужденного состояния очень близка к нижнему порогу непрерывного спектра.

Выбор варианта межатомного He-He-потенциала особенно важен для расчетов системы  ${}^4\text{He}_2{}^6\text{Li}$ , поскольку в зависимости от этого выбора энергия порога соответствует энергии связи или системы  ${}^4\text{He}_2$ , или  ${}^4\text{He}{}^6\text{Li}$ . Поэтому расчеты проводились для двух разных вариантов потенциала. Сравнение результатов вычислений с результатами, полученными другими авторами, показывает, что разные методы дают довольно близкие значения, несмотря на использование различных потенциальных моделей для взаимодействия между атомами гелия. Установлено, что наличие второго парного порога мешает проявлению эффекта Ефимова в системе  ${}^4\text{He}_2{}^7\text{Li}$ . Вычислены длины рассеяния атома  ${}^4\text{He}$  на димерах  ${}^4\text{He}{}^6\text{Li}$  и  ${}^4\text{He}{}^7\text{Li}$ , которые оказались равными нескольким сотням ангстрем.

В **Заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

В **Приложениях А и В** дается описание использованных реалистических межатомных потенциалов.

**Результаты, включенные в диссертацию, опубликованы  
в следующих работах:**

- [1] Е. А. Колганова, А. К. Мотовилов, *Использование дифференциальных уравнений Фаддеева для расчетов трехчастичных резонансов*, ЯФ **60** (1997), 235–244.
- [2] E. A. Kolganova, A. K. Motovilov, and S. A. Sofianos, *Ultralow energy scattering of a He atom off a He dimer*, Phys. Rev. A **56** (1997), R1686–R1689.
- [3] E. A. Kolganova, A. K. Motovilov, and S. A. Sofianos, *Three-body configuration space calculations with hard-core potentials*, J. Phys. B **31** (1998), 1279–1302.
- [4] A. K. Motovilov and E. A. Kolganova, *Structure of T- and S-matrices in unphysical sheets and resonances in three-body systems*, Few-Body Syst. Suppl. **10** (1999), 75–84.

- [5] Е. А. Колганова, А. К. Мотовилов, *О механизме возникновения ефимовских состояний в тримере гелия  $^4\text{He}$* , ЯФ **62** (1999), 1253–1267.
- [6] A. K. Motovilov, W. Sandhas, S. A. Sofianos, and E. A. Kolganova, *Binding energies and scattering observables in the  $^4\text{He}_3$  atomic system*, Eur. Phys. J. D **13** (2001), 33–41.
- [7] E. A. Kolganova, A. K. Motovilov, and Y. K. Ho, *Complex scaling of the Faddeev operator*, Nucl. Phys. A **684** (2001), 623c–625c.
- [8] E. A. Kolganova, Y. K. Ho, A. K. Motovilov, and W. Sandhas, *The  $^3\text{He}^4\text{He}_2$  trimer within the hard-core Faddeev approach*, Czech. J. Phys. **53** (2003), B301–B304.
- [9] E. A. Kolganova, Y. K. Ho, A. K. Motovilov, and W. Sandhas, *The  $^3\text{He}^4\text{He}_2$  three-atomic system within the hard-core Faddeev approach*, в кн.: Избранные вопросы теоретической физики и астрофизики. Сборник научных трудов, посвященный 70-летию В. Б. Беляева (ОИЯИ, Дубна, 2003), сс. 129–135.
- [10] W. Sandhas, E. A. Kolganova, Y. K. Ho, and A. K. Motovilov, *Binding energies and scattering observables in the  $^4\text{He}_3$  and  $^3\text{He}^4\text{He}_3$  systems*, Few-Body Syst. **34** (2004), 137–142.
- [11] E. A. Kolganova, A. K. Motovilov, and W. Sandhas, *Scattering length of the helium-atom–helium-dimer collision*, Phys. Rev. A **70** (2004), 052711(4).
- [12] E. A. Kolganova, A. K. Motovilov, and W. Sandhas, *Ultracold scattering processes in three-atomic helium systems*, Nucl. Phys. A **790** (2007), 752c–756c.
- [13] Е. А. Колганова, А. К. Мотовилов, В. Зандхас, *Ультрахолодные столкновения в системе трех атомов гелия*, ЭЧАЯ **40** (2009), 396–456.
- [14] E. A. Kolganova, *Helium trimer in the framework of Faddeev approach* Phys. Part. Nucl. **41** (2010), 1108–1110.
- [15] E. A. Kolganova, A. K. Motovilov, and W. Sandhas, *The  $^4\text{He}$  trimer as an Efimov system*, Few-Body Syst. **51** (2011), 249–257.

- [16] E. A. Kolganova, V. Roudnev, and M. Cavagnero, *Helium trimer calculations with a public quantum three-body code*, Phys. At. Nucl. **75** (2012), 1240–1244.
- [17] E. A. Kolganova, *Ultracold scattering and universal correlations*, Few-Body Syst. **55** (2014), 957–960.
- [18] E. A. Kolganova, A. K. Motovilov, and W. Sandhas, *The  $^4\text{He}$  trimer as an Efimov system: Latest developments*, Few-Body Syst. **58** (2017) 35(4).
- [19] E. A. Kolganova, *Weakly bound  $\text{LiHe}_2$  molecules*, Few-Body Syst. **58** (2017), 57(5).
- [20] E. A. Kolganova, *Scattering length calculations via Faddeev approach*, J. Phys. Conf. Ser. **915** (2017), 012003(6).
- [21] E. A. Kolganova, *Faddeev calculation of helium atom —  $\text{LiHe}$ -dimer scattering length*, Few-Body Syst. **59** (2018), 28(7).
- [22] E. A. Kolganova and V. Roudnev, *Weakly bound  $\text{LiHe}_2$  molecules in the framework of three-dimensional Faddeev equations*, Few-Body Syst. **60** (2019), 32(7).
- [23] E. A. Колганова, В. Руднев, *Слабосвязанные трехатомные  $\text{LiHe}_2$  молекулы*, Известия РАН. Сер. физ. **84** (2020), 590–593.