

С324.1

М-36



ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

В.Г.Маханьков, Ю.П.Рыбаков, В.И.Санюк

МОДЕЛЬ СКИРМА
И СОЛИТОНЫ
В ФИЗИКЕ АДРОНОВ

ДУБНА

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

P4-89-568

В.Г.Маханьков, Ю.П.Рыбаков*, В.И.Санюк*

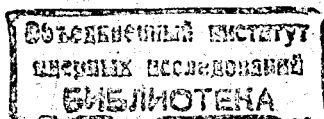
МОДЕЛЬ СКИРМА
И СОЛИТОНЫ В ФИЗИКЕ АДРОНОВ

С324.1
М-36

134023

* Университет дружбы народов имени П.Лумумбы, Москва

Дубна 1989



ПРЕДИСЛОВИЕ

Английский физик Тони Хилтон Роял Скирм (1923–1987) оставил чрезвычайно яркий след в современной физике ядра и элементарных частиц. Получив математическое образование в Кембридже, он много лет работал в области теоретической ядерной физики в атомном центре Харуэлла. Специалистам-ядерщикам хорошо известны эффективный нуклон-нуклонный потенциал Скирма /1/, а также вошедшая в учебники теорема Бете-Роуза-Элиотта-Скирма /2/, относящаяся к оболочечной осцилляторной модели ядра. В конце 50-х годов Скирмом был разработан оригинальный подход к физике частиц, опирающийся на глубокие топологические идеи. Своеобразие этого подхода было настолько разительным, что более двух десятилетий он развивался лишь самим Скирмом и немногочисленными его последователями. Только в 80-е годы было установлено, что модель Скирма может рассматриваться как предельный случай квантовой хромодинамики, что инициировало повышенный интерес к модели. Обиходным стал термин "скирмион", символизирующий образ протяженного бариона, рассматриваемого как фермион, построенный из бозонов, и описываемого как солитон, наделенный некоторыми топологическими характеристиками. Соответствующий топологический заряд интерпретировался Скирмом как барионный.

Исследования по модели Скирма, выполненные в последние годы, показали чрезвычайную плодотворность топологических методов в физике частиц и правильность физических идей, выдвинутых Скирмом. Модель Скирма относится к так называемым нелинейным сигма-моделям со спонтанно нарушенной киральной симметрией. Как было показано в ряде работ, квантовая хромодинамика в пределе большого числа цветов оказывается эквивалентной мезонной теории, которая в низкоэнергетическом пределе эффективно аппроксимируется нелинейной сигма-моделью.

Кратко можно сказать, что модель Скирма оказалась очень удачным образом низкоэнергетической физики сильных взаимодействий, правильно схватывающим ее основные черты. В рамках этой модели удается сравнительно простыми средствами удовлетворительно описать взаимодействие нуклонов, основные статистические свойства барионов. Что же касается мезон-барионных взаимодействий, то здесь согласие лишь качественное, что еще раз подчеркивает модельный характер этой схемы. Однако интерес к модели Скирма исключительно велик и объясняется тем, что это первая реалистическая модель, которая, будучи относительно простой, в целом верно схватывает симметричные и структурные свойства ядерной физики.

Цель, которую преследуют настоящие лекции, состоит в том, чтобы простыми математическими средствами донести до слушателей-физиков глу-

бокое содержание идей Скирма, выявить их внутреннее единство и показать богатые возможности их развития. Все тонкие математические доказательства и выкладки, а также некоторые вспомогательные сведения из курсов, не входящих в программу подготовки физиков, вынесены нами в Дополнения, чтобы не перегружать основной текст лекций. Прежде чем переходить к описанию самой модели Скирма и ее свойств, нам представляется небезынтесным проследить за историческим развитием идей, приведших к окончательной формулировке модели, т.е. провести краткий ретроспективный обзор работы Скирма/3-12/.

§ I. МОДЕЛЬ СКИРМА: ИСТОКИ И ЭВОЛЮЦИЯ

Попытаемся выяснить те исходные физические идеи, которые привели Т.Х.Р.Скирма к итоговой формулировке его модели барионов /3,4/. Для этого обратимся к сравнительно редко цитируемым ранним работам Скирма /5-II/, по которым проследим последовательную эволюцию представлений автора модели о строении ядерной материи. В этих работах содержатся оригинальные гипотезы и догадки (гипотеза "ядерной демократии", идея солитонного механизма и др.), играющие существенную роль в современной теории сильных взаимодействий.

Первую попытку построения модели ядерной материи Скирм предпринял в начале 50-х годов, поставив перед собой задачу дать хотя бы качественное объяснение известных к тому времени экспериментальных фактов о строении ядра. В частности, он пытался найти ответ на вопрос: почему экспериментальные измерения радиуса ядра различными методами приводят к существенно разным результатам. В экспериментах по α -распаду и по рассеянию тяжелых ядер было установлено, что радиус ядра может быть выражен формулой $R = 1.5 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ см, где A - число нуклонов в ядре. В то же время эксперименты по рассеянию быстрых электронов на ядрах и спектроскопические исследования мезоатомов приводили к существенно меньшему значению для радиусов ядер - $R' = 1.2 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ см. В работе 1954 года /5/ Скирм показывает, каким образом можно обосновать наблюдаемое различие в рамках модели "пионной жидкости", к рассмотрению которой мы и переходим.

I.1. Модель "пионной жидкости"

Скирм предложил рассматривать ядро как некоторую несжимаемую электрически нейтральную "пионную жидкость"*) , заполняющую шарооб-

*) По-видимому, Скирм понимал под ней конденсированную фазу π^0 и π^+ , π^- , в которой плотности π^+ и π^- равны в каждой точке.

разную область радиуса R . В каждой точке пространства эту жидкость можно характеризовать некоторой скалярной плотностью и некоторым вектором в пространстве изоспина. В жидкость погружены нуклонные источники, сильно взаимодействующие с пионами и занимающие область меньшего радиуса R' . Поэтому в экспериментах первого типа, где существенным является взаимодействие с пионами, мы получаем значение R , а в экспериментах с электрически заряженными частицами, где фактически проявляется распределение электрического заряда в ядре, - R' , т.е. среднеквадратичный зарядовый радиус.

Опираясь на эти представления, в работах /5/ и /6/ Скирм убедительно продемонстрировал качественное согласие модели "пионной жидкости" с известными экспериментальными данными об оболочечной структуре ядра, о коллективных движениях в ядрах, а также с явлением насыщения ядерных сил. В работе /6/ он предложил математическую формулировку модели "пионной жидкости", выбрав в качестве исходной стандартную плотность лангранжиана для описания взаимодействий полей нуклонов с псевдоскалярными пионными полями /13/:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi)^2 + K^2 \phi^2] - \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + i g \gamma_5 \underline{\xi} \cdot \phi)\psi \quad (I.1)$$

Здесь подчеркивание снизу указывает на принадлежность вектора ϕ , описывающего пионное поле, изотопическому пространству; $\underline{\xi}$ - изоспиновые матрицы Паули, спинор-изоспинор ψ описывает поле нуклонов. Отметим, что в выражении (I.1) отсутствует массовый член "голых" нуклонов, т.к. Скирм предположил, что масса нуклонов имеет нуклонное происхождение и возникает за счет флуктуаций пионных полей (флуктуаций плотности "пионной жидкости"). Похоже, что это одна из первых формулировок идеи "солитонного механизма", суть которого наиболее отчетливо сформулирована Фаддеевым /36/ и заключается в том, что сильно взаимодействующие частицы в рамках нелинейной теории поля можно описывать как коллективные возбуждения в системе слабо связанных фундаментальных полей. При этом лагранжиан такой теории должен содержать лишь несколько фундаментальных полей и допускать существование частицеподобных (солитонных) решений, которые и будут описывать всю спектроскопию наблюдаемых частиц и иерархию их взаимодействий. Для реализации своей идеи Скирм использовал преобразование нуклонного поля вида:

$$\psi' = \exp(-i \frac{g}{4} \gamma_5 \underline{\xi} \cdot \underline{n}) \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - i \gamma_5 \underline{\xi} \cdot \underline{n}) \psi, \quad (I.2)$$

где $\underline{n} = \underline{z}/|\phi|$ - единичный псевдовектор в изоспиновом пространстве. В результате нуклонная часть лагранжевой плотности (I.1) приобретает "массовую" добавку $i g \bar{\psi} \underline{n} \psi$ пионного происхождения

$$i \bar{\psi} [\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + g \phi + \frac{1}{2} (\underline{z} \cdot \underline{n} + \gamma_5) \gamma^{\mu} \partial_{\mu} (\underline{z} \cdot \underline{n})] \psi, \quad (I.3)$$

где $|\phi| = \phi$ - скалярная "плотность пионной жидкости", g - константа связи пионов. Преобразование (I.2), которое Скимр называет безмассовым преобразованием Фолди, по сути, является киральным преобразованием. Именно с осознанием важности киральной симметрии в физике адронов связана последующая модификация модели "пионной жидкости".

I.2. Киральная модификация модели

Идея расширения изоспиновой симметрии нуклонов до киральной впервые, по-видимому, обсуждалась в неопубликованных исследованиях В.Паули и Ч.Янга, а затем была развита в работах А.Пайса, М.Гелл-Манна, Р.Фейнмана, Ю.Швингера и др. (подробное изложение дано в книге /14/, краткий очерк идей киральной симметрии приведен в Дополнении А.). Скимр уже в 1958 году в работе /8/ приходит к кирально-инвариантной модификации модели "пионной жидкости" и фактически строит одну из первых нелинейных реализаций киральной группы $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -нелинейную σ -модель. В дополнение к триплету пионных полей он вводит поле ϕ_0 и накладывает на поля $\phi_p = (\phi_0, \underline{\phi})$ связь

$$\sum_p \phi_p^2 = \phi_0^2 + \underline{\phi}^2 = c^2, \quad (I.4)$$

где c - константа размерности массы или обратной длины в системе единиц $c = \hbar = 1$. При этом теряет смысл естественное обобщение пионного массового члена $\frac{1}{2} \kappa^2 \sum \phi^2 \rightarrow \frac{1}{2} \kappa^2 \sum \phi_p^2$ в лагранжиане (I.1) и Скимр рассматривает дилемму: либо вводить в лагранжиан член четвертого порядка по пионным полям $\frac{1}{4} \gamma^2 \sum \phi_p^4$, либо считать, что масса пионов генерируется за счет взаимодействия с нуклонами. Впоследствии эта последняя возможность вместе с ранее высказанным предположением о пионном происхождении массы нуклонов была понята как одно из проявлений так называемой "ядерной демократии", согласно которой, в частности, флуктуации пионных полей порождают массы нуклонов, а пионы приобретают массу в результате взаимодействия с нуклоном.

В /8/ Скимр останавливается на введении в лагранжиан члена 4-го

порядка по полям ϕ_p и выписывает кирально-инвариантный лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_p [(\partial_{\mu} \phi_p)^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \phi_p^4] - \bar{\psi} [i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} + g(\phi_0 + i \gamma_5 \underline{z} \cdot \underline{\phi})] \psi. \quad (I.5)$$

Подробный анализ возможных следствий теории с лагранжианом (I.5), проведенный в работе /8/ и продолженный в работе /9/, показал, каким образом в рамках модели можно получить качественное описание пионов и нуклонов, а также странных частиц - каонов и гиперонов. Мы не станем воспроизводить результаты этого анализа, а интересующихся читателей отошлем к работам /8/ и /9/. Для нашего рассмотрения более существенно то, что, осознав степень сложности дальнейшего изучения модели, Скимр перешел к исследованию возможных упрощений и остановился на двумерном варианте лагранжиана (I.5), ограничившись двумя компонентами изовектора ϕ_0 и ϕ_1 .

Отметим все же интересную интерпретацию, предложенную в работе /9/ и позволяющую включить в схему модели "пионной жидкости" каоны. Скимр предлагает интерпретировать каоны как волны, соответствующие флуктуациям плотности ϕ "пионной жидкости", пионы - как осцилляции направлений изовектора $\underline{\phi}$, а нуклоны - как некоторые сингулярности с детерминированными законами движения, взаимодействующие с пионным полем.

I.3. Двумеризованная модель (синус-Гордон)

В случае двух изоспиновых компонент условию (I.4) можно удовлетворить, полагая

$$\phi_0 = c \cos \theta(x, t); \quad \phi_1 = c \sin \theta(x, t). \quad (I.6)$$

Тогда мезонная часть лагранжевой плотности (I.5) приобретает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} c^2 [(\partial_t \theta)^2 - (\partial_x \theta)^2 - \frac{\kappa^2}{8} (1 - \cos 4\theta)], \quad (I.7)$$

и соответствующее уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\partial_x^2 \theta - \partial_t^2 \theta - \kappa^2 \sin \theta = 0 \quad (I.8)$$

есть синус-Гордон уравнение, возникшее первоначально в геометрии как уравнение вложения плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространство. В физику это уравнение было введено Я.Френкелем и Т.Конторовой /15/ как уравнение распространения дислокаций в од-

номерном кристалле. Позднее был обнаружен универсальный характер этого уравнения. С его помощью описываются и распространение магнитного потока в джозефсоновских контактах и движение блоховских стенок в магнитных кристаллах, и ряд других физических явлений /16, 17/.

В работах /8, 10, 11/ Скирм нашел три типа решений синус-Гордон уравнения (в современной терминологии они называются 2π -кинком, бионом и бризером), фактически в конце 50-х - начале 60-х годов построив первую интегрируемую модель теории поля. В этих же работах Скирм предлагает схему для квантования предложенных классических моделей. При этом в работе /8/ он высказывает еще одну гипотезу, согласно которой при значениях константы связи $\mathcal{E} = \hbar c/l$ квантовые солитоны синус-Гордона, возникающие в существенно бозонной полевой теории, могут быть эквивалентны фермионам, участвующим в четырехфермионном взаимодействии. Скирм пытался подтвердить выкладками эту гипотезу в работе /10/, однако ее подтверждением следует, по-видимому, считать результат С.Коулмена, полученный в 1975 году /18/. В рамках теории возмущений Коулмен доказал эквивалентность квантовой синус-Гордон модели сектору с нулевым зарядом массивной модели Тирринга в (1+1) измерениях, описываемых лагранжианом

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m_F\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}g(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi), \quad (I.9)$$

где ψ - фермионное поле.

В работе /11/ совместно с Дж.Перрингом Скирм численно исследовал рассеяние кинков и показал, что они сохраняют свою форму и скорость после столкновения, т.е. обнаруживают характерные черты поведения солитонов в свете современных представлений. Однако наиболее существенную роль в дальнейшей модификации первоначальной (3+1)-мерной модели Скирма сыграло то обстоятельство, что в двумеризованной версии своей модели Скирм обнаружил наличие сохраняющегося тока j^{μ} ($\mu = 0, 1$) с компонентами

$$j^0 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad j^1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \theta}{\partial t}; \quad \partial_{\mu} j^{\mu} = 0, \quad (I.10)$$

соответствующий закон сохранения выполняется независимо от уравнения (I.8), а только в силу непрерывности угловой переменной $\theta(x, t)$.

Интегральную сохраняющую величину

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} j^0 dx = \frac{1}{2\pi} [\theta(\infty, t) - \theta(-\infty, t)] \quad (I.11)$$

*) При этом он и не подозревал, что соответствующие этим решениям псевдосферические поверхности (поверхности Эннепера с постоянной кривизной) были описаны еще в 1936 году геометром Штойрвальдом.

Скирм предложил интерпретировать как "число частиц" по аналогии с классической механикой, где закон сохранения числа частиц можно связать с непрерывностью траектории частиц. Таким образом, параллельно с Д.Финкельштейном и Ч.Мизнером /19/ Скирм ввел в физику топологическую классификацию решений уравнений поля и новый тип законов сохранения, получивших название "гомотопические" или "топологические" законы сохранения. Более подробно эти законы будут обсуждаться в следующем параграфе, необходимые краткие сведения из алгебраической топологии излагаются в Дополнении Б.

I.4. Модель Скирма: итоговая формулировка

Появление в двумеризованной модели величины (I.11), которая сохраняется независимо от динамики модели и может быть интерпретирована как разность числа "частиц" и "античастиц", побудило Скирма к поискам модификации (3+1)-мерной модели (I.5), допускающей аналогичный закон сохранения. Дело в том, что уже в своих первых работах /5-7/ Скирм допускал, что модель "пионной жидкости" пригодна для описания не только ядра, но и отдельно взятого бариона. К тому времени выяснилось, что во всех процессах, обусловленных сильными, слабыми и электромагнитными взаимодействиями, сохраняется разность чисел барионов и антибарионов. При этом закон сохранения барионного числа, введенный Е.Вигнером и Е.Штюкельбергом формально для ограничения возможных типов реакций между барионами, традиционно связывали с симметрией соответствующих лагранжианов относительно калибровочных преобразований (по аналогии с законом сохранения электрического заряда). Формальность такого подхода подчеркивается уже тем, что между электрическим зарядом и барионным числом имеются существенные физические различия. В то время как электрический заряд входит в определение константы электромагнитных взаимодействий, константа сильных взаимодействий не зависит от значения барионного числа, т.е. барионное число не определяет динамику барионов. Поэтому крайне искусственным выглядит связывание закона сохранения этого формально-го числа (индекса) с лагранжианом теории и его симметриями.

При конструировании аналога величины (I.11) в (3+1)-мерном случае Скирм заметил, что выражение для сохраняющейся величины Q в двумеризованной модели можно переписать в виде

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \theta dx, \quad (I.12)$$

где $\partial_x \theta$ - якобиан перехода от декартовой координаты x к угловой переменной θ на сфере S^1 , определяемой (I.6). Поскольку поле $\phi = (\phi_0, \phi)$ в силу условия (I.4) принимает значения на многообразии трехмерной сферы S^3 , изоморфной группе

$SU(2)$, то для перехода к угловым переменным в трехмерном случае удобно воспользоваться кватернионным представлением группы $SU(2)$. Пусть U - единичный кватернион с параметризацией

$$U = \phi_0 + i \underline{\tau} \cdot \underline{\phi} \quad (I.13)$$

Тогда условие (I.4) эквивалентно равенству $UU^+ = 1$, если $C = 1$. Трехмерным аналогом угловой переменной $\theta(x, t)$ в этом случае будут величины B_M^a , определяемые соотношениями

$$\partial_M U = i \tau_a B_M^a U, \quad a = 1, 2, 3; \quad (I.14)$$

$$B_M^a = \frac{1}{2i} \text{Sp}(U^+ \tau^a \partial_M U) = \phi_0 \partial_M \phi^a - \phi^a \partial_M \phi_0 - \varepsilon^{abc} \phi_b \partial_M \phi_c. \quad (I.15)$$

Условие интегрируемости уравнения (I.14) записывается как тождественное равенство нулю ковариантного ротора

$$\partial_\nu B_M^a - \partial_M B_\nu^a - 2\varepsilon^{abc} B_M^b B_\nu^c = 0, \quad (I.16)$$

что следует из $\partial_M \partial_\nu U = \partial_\nu \partial_M U$ и (I.14).

Через введенные угловые переменные B_M^a можно выразить сохраняющийся ток

$$\begin{aligned} Y^M &= -\frac{1}{12\pi^2} \varepsilon^{M\nu\lambda\rho} \varepsilon_{abc} B_\nu^a B_\lambda^b B_\rho^c = \\ &= -\frac{1}{12\pi^2} \varepsilon^{M\nu\lambda\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \phi^\alpha \partial_\nu \phi^\beta \partial_\lambda \phi^\gamma \partial_\rho \phi^\delta, \end{aligned} \quad (I.17)$$

переменная компонента которого задает плотность сохраняющегося топологического заряда

$$\begin{aligned} Q &= \int Y^0 d^3x = -\frac{1}{2\pi^2} \int \det(B_i^a) d^3x \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \int \sin \psi_2 \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial(x, y, z)} d^3x, \end{aligned} \quad (I.18)$$

который Скирм предложил интерпретировать как барийное число.

Углы ψ_1, ψ_2, ψ_3 в выражении (I.18) возникают в силу естественной параметризации единичного кватерниона углами Эйлера:

$$U(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \exp\left(\frac{i}{2} \tau_3 \psi_1\right) \exp\left(\frac{i}{2} \tau_1 \psi_2\right) \exp\left(\frac{i}{2} \tau_3 \psi_3\right),$$

где τ_i - изоспиновые матрицы Паули $\psi_1 \in [0, 4\pi]; \psi_2 \in [0, \pi]; \psi_3 \in [0, 2\pi]$. Лагранжеву плотность модернизированной модели Скирм записал в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{\varepsilon}{4\pi^2} \left(\frac{1}{2} C_{M\nu}^a C_{M\nu}^a + K^2 B_M^a B_M^a \right), \quad (I.19)$$

где ε - константа, задающая энергетический масштаб, а K - обратная длина. Величина $C_{M\nu}^a$ определена соотношением

$$C_{M\nu}^a = \frac{1}{2} (\partial_\nu B_M^a - \partial_M B_\nu^a) = \varepsilon^{abc} B_M^b B_\nu^c, \quad (I.20)$$

т.е., если рассматривать B_M^a как векторное изовекторное поле, то $C_{M\nu}^a$ - антисимметричный тензор этого поля. Можно было бы по аналогии с гидродинамикой интерпретировать B_M^a как вектор обобщенной скорости "пионной жидкости" в изоспиновом пространстве, тогда как член $C_{M\nu}^a$ - как "обобщенную завихренность" в пионной гидродинамике.

Гидродинамические аналогии традиционно используются в моделях ядерного вещества. В качестве иллюстрации рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера в модели $\psi^4 - \psi^6$:

$$i \partial_t \psi + \partial_x^2 \psi + \alpha \psi + \psi (|\psi|^2 - |\psi|^4) = 0 \quad (I.21)$$

и покажем его эквивалентность ядерной гидродинамике с силами типа Скирм. Для этого воспользуемся обычным представлением комплексных чисел

$$\psi(x, t) = \sqrt{\varrho} \exp\{i\vartheta(x, t)\}$$

и определим гидродинамические величины - плотность и скорость - через

$$\rho = |\psi|^2, \quad v = \partial_x \vartheta. \quad (I.22)$$

После несложных, но довольно громоздких вычислений можно показать /20, 21/, что уравнение (I.21) сводится к системе уравнений ядерной гидродинамики

$$\partial_t \rho + 2 \partial_x (\rho v) = 0$$

$$\partial_t v + 2 v \partial_x v = \partial_x \left[\frac{1}{2\rho} \partial_{xx} \rho - \frac{1}{4\rho^2} (\partial_x \rho)^2 \right] + \partial_x [(\rho - \rho_0)(\rho - \rho_0 + 2A)] \quad (1.23)$$

$$\rho_0 > 0; 2\rho_0 + A > 0; A = \frac{\rho_0}{2} \left[-\left(\frac{4}{\alpha} + \frac{3}{2\alpha}\right) \pm \frac{3}{2|\alpha|} \sqrt{1+4\alpha} \right]; \alpha \geq -\frac{1}{4}$$

Такова итоговая версия модели Скирма, которая и будет предметом изучения на протяжении данного цикла лекций. Она была сформулирована в работах /3, 4/, и там же Скирм получил целый ряд пионерских результатов, которые затем неоднократно повторялись. Перечислим эти результаты, прежде чем подходить к подробному изучению свойств модели.

1. Предложен "ежовый анзац", называемый в современной литературе "скирмионом":

$$\phi_0 = \cos \theta(r); \phi_i = \frac{x_i}{r} \sin \theta(r); i = 1, 2, 3, (1.24)$$

где r - радиальная переменная. Как будет установлено ниже, такие решения реализуют минимум энергии в классе полей с единичным топологическим зарядом: $Q = \pm 1$.

2. Показано, что на решениях вида (1.21) функционал энергии модели ограничен снизу через топологический заряд Q и, таким образом, скирмион является устойчивым состоянием^{*}. Вопрос о существовании такого рода решений Скирм не рассматривал, но нашел их численно, оценив энергию состояния с единичным зарядом.

3. В работе /4/ Скирм рассмотрел вопрос о взаимодействии скирмионов и предложил для описания двухчастичных состояний так называемый "продукт-анзац".

Обратим внимание читателей на работу 1971 года /12/, в которой Скирм предлагает способ введения коллективных координат для описания движения скирмионов в рамках квазиклассического подхода. Эта работа является заключительной работой автора модели и посвящена проблеме введения понятия спина для скирмиона, полученный им результат, по-видимому, нельзя считать решением поставленного вопроса, но тем не менее Скирму удается показать, что в нижних порядках теории возмущений движение скирмиона описывается уравнениями типа Дирака. Проблемой введения спина за прошедшее время занималось значительное число исследователей, но удовлетворительное решение этой проблемы было предложено только в 1983 году Е.Виттенем /22, 23/.

^{*} В действительности, этого ограничения еще не достаточно для устойчивости скирмиона, необходимо также, чтобы он доставлял минимум функционалу энергии, см. § 6.

Появление этих работ в значительной мере стимулировало возросший интерес к модели Скирма в начале 80-х годов. Мы обсудим эти результаты в одной из последующих лекций.

§ 2. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Наряду с неабелевыми калибровочными теориями модель Скирма являлась своеобразным катализатором применения аппарата теории гомотопий и других методов алгебраической топологии к задачам нелинейной теории поля. Пионерская идея исследования модели Скирма в этом направлении принадлежит Д.Финкельштейну и Ч.Мизнеру /19/, предложившим трактовку законов сохранения нового типа (см. 1.10) на языке теории гомотопий. Теория гомотопий излагается в стандартных руководствах /24, 25/, однако для физиков более пригодно изложение основ этой теории в современных учебниках /26/ и /27/. Укажем также несколько обзоров /28-32/, написанных на основе циклов лекций, прочитанных по данному предмету специально для физиков. Кроме того, все необходимые для понимания материала параграфа факты из теории гомотопий и других разделов алгебраической топологии приведены в Дополнении В, где излагается и ряд технических деталей.

2.1. Теория поля с точки зрения теории гомотопий

Сформулируем некоторые привычные в теории поля понятия на языке теории гомотопий, занимающейся изучением связности топологических пространств и отображений между многообразиями.

Классические поля $\phi(x)$, принимающие значения в некотором многообразии Φ , которое будем называть полевым многообразием, можно рассматривать как гладкие отображения пространства-времени $X = \{\bar{x}, t\}$ на многообразие Φ :

$$\phi(x) : X \rightarrow \Phi. \quad (2.1)$$

Если $\Phi = R^1$ - вещественная ось, то $\phi(x)$ - скалярное поле; если $\Phi = R^n$, то $\phi(x)$ - векторное поле и т.д.

В рамках стандартной схемы классической теории поля полагаем, что динамика полей задается некоторым функционалом действия S , а эволюция поля $\phi(x)$ во времени подчиняется соответствующему уравнению Эйлера-Лагранжа, получаемому на основе принципа наименьшего действия. Пусть в момент времени t_1 состояние системы описывается функцией $\phi_1(\bar{x}) \equiv \phi(\bar{x}, t_1)$, а в последующий момент времени t_2 - функцией $\phi_2(\bar{x}) \equiv \phi(\bar{x}, t_2)$. Тогда функции

состояния рассматриваемой системы можно задать как отображение пространства $R^3 = \{x | t = \text{const}\}$ в полевое многообразие Φ :

$$\Phi_{1,2}(\bar{x}) : R^3 \rightarrow \Phi. \quad (2.2)$$

Непрерывное решение $\phi(\bar{x}, t)$ уравнения поля связывает между собой состояния $\Phi_1(\bar{x})$ и $\Phi_2(\bar{x})$:

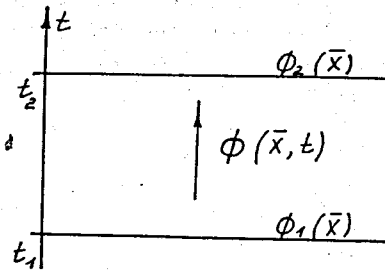


Рис. I

$$\phi(\bar{x}, t) = \begin{cases} \phi(\bar{x}, t_1) \equiv \Phi_1(\bar{x}); \\ \phi(\bar{x}, t_2) \equiv \Phi_2(\bar{x}); \end{cases} \quad (2.3)$$

т.е. действительно описывает временную эволюцию системы.

На языке теории гомотопий те же факты звучат следующим образом: два непрерывных отображения (2.2) $\Phi_1(\bar{x})$ и $\Phi_2(\bar{x})$ гомотопны между собой ($\Phi_1 \sim \Phi_2$) в том случае, если существует некоторая непрерывная функция $\phi(\bar{x}, t)$ — гомотопия, переводящая отображение $\Phi_1(\bar{x})$ в отображение $\Phi_2(\bar{x})$. Другими словами, существует непрерывная деформация, переводящая точку $\Phi_1(\bar{x})$ в $\Phi_2(\bar{x})$ и задаваемая как отображение

$$\phi(\bar{x}, t) : R^3 \otimes T \rightarrow \Phi. \quad (2.4)$$

(где $T = [t_1, t_2]$ — отрезок временной оси) такое, что

$$\phi(\bar{x}, t_1) = \Phi_1(\bar{x}); \quad \phi(\bar{x}, t_2) = \Phi_2(\bar{x}). \quad (2.5)$$

В математических руководствах [21, 22] доказываются рефлексивность, симметричность и транзитивность гомотопий (2.4) и на этом основании делается заключение о том, что на множестве отображений (2.2) задание гомотопии равносильно заданию отношения эквивалентности. Это означает, что все пространство отображений $\text{Map}(R^3, \Phi)$, получаемое из множества отображений (2.2) после задания на нем компактно-открытой топологии, можно разбить на классы эквивалентности, называемые в этом случае гомотопическими классами или классами Черна-Понтрягина:

$$\text{Map}(R^3, \Phi) = \cup [R^3, \Phi]_i, \quad (2.6)$$

где для i -го гомотопического класса принято стандартное обозначение $[R^3, \Phi]_i$. Наличие разбиения (2.6) означает, что если начальная функция состояния некоторой системы принадлежит одному из гомотопических классов и временная эволюция системы непрерывна, то во все последующие моменты времени функция состояния будет принадлежать тому же классу, и непрерывную деформацию системы из одного состояния в другое (гомотопию) будет осуществлять непрерывное решение уравнения динамики системы.

Из приведенных рассуждений следует эквивалентность задачи об отыскании гомотопии задаче поиска решений уравнения поля. Теория гомотопий не дает ответа на вопрос, как искать решения уравнений, но отвечает на вопрос о том, какие решения следует искать. Каждому из гомотопических классов разбиения (2.6) соответствует непрерывное решение уравнения поля, и не существует непрерывных решений, связывающих между собой функции состояния системы из разных гомотопических классов. В дальнейшем мы увидим, как чисто топологическими методами решается вопрос о возможности существования разбиения типа (2.6) для заданного пространства отображений (полей).

Отметим еще одно обстоятельство. Для физических приложений интересны не все возможные отображения типа (2.2), а лишь некоторое их подпространство $\text{Map}^0(R^3, \Phi)$, элементы которого удовлетворяют граничным условиям, выбор которых диктуется требованиями конечности энергии, локализации физических полей в пространстве и др. Наиболее часто встречаются граничные условия вида

$$\phi(\bar{x}) = \phi_0, \text{ при } |\bar{x}| \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

где ϕ_0 — заданная точка на многообразии Φ .

Граничное условие типа (2.7) приводит к эффективной компактификации области определения — евклидова пространства R^3 , т.к. бесконечно удаленные точки этого пространства $\{\infty\}$ переводятся отображениями из $\text{Map}^0(R^3, \Phi)$ в фиксированную (отмеченную) точку $\phi_0 \in \Phi$. Прообраз $R^3 \cup \{\infty\}$ отображений (2.2) в таком случае топологически эквивалентен 3-мерной сфере S^3 . Эквивалентность легко установить при помощи стереографической проекции:

$$u_i = \frac{2x_i}{r^2+1}; \quad u_4 = \frac{r^2-1}{r^2+1}; \quad i=1,2,3$$

$$S^3 = \{(\bar{u}, u_4) : \bar{u}^2 + u_4^2 = 1\}; \quad R^3 = \{x_1, x_2, x_3\}; \quad r = |\bar{x}|.$$

Поэтому вместо отображений (2.2) с условием (2.7) можно рассматри-

вать эквивалентные отображения

$$\tilde{\varphi} : S^1 \rightarrow \varphi. \quad (2.8)$$

Поля из разных гомотопических классов можно различать, если поставить в соответствие каждому классу значение некоторой характеристики Q , которая будет оставаться постоянной при любой непрерывной деформации, т.е. будет сохраняться во времени независимо от динамики полей, лишь в силу непрерывности их эволюции. Таким образом, мы приходим к понятию "топологического заряда", сохраняющегося тождественно.

На естественный вопрос о том, в каких случаях работает изложенная схема, можно получить ответ на основе вычисления гомотопических групп полевых многообразий $\varphi : \mathcal{F}_3(\varphi)$. Но прежде мы проиллюстрируем указанную схему на наглядном примере двумеризованной модели.

2.2. Гомотопические классы синус-Гордон модели

Как отмечалось в разделе 1.3, условие (1.4) эквивалентно выбору в качестве полевого многообразия φ в двумеризованной модели окружности S^1 . Классическим полем модели является функция $\varphi(x, t) = \exp\{i\theta(x, t)\}$, осуществляющая в каждый фиксированный момент времени отображение

$$\varphi(x) : R^1 \rightarrow S^1. \quad (2.9)$$

Из требования конечности энергии, отвечающей лагранжиану (1.7),

$$E[\theta] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{1}{2} (\partial_t \theta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \theta)^2 + \kappa^2 (1 - \cos \theta) \right\}, \quad (2.10)$$

приходим к граничному условию типа (2.7):

$$\theta(x) \rightarrow 0 \pmod{2\pi}, \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \quad (2.11)$$

в записи которого отражена неоднозначность в определении угловой переменной $\theta(x)$. Для устранения последней следует отождествить углы, отличающиеся на $2\pi n$, где n - целое число. Условие (2.11) приводит к компактификации вещественной оси R^1 , т.к. точки $x = \pm \infty$ отображаются в "северный полюс" окружности S^1 . Поэтому $R^1 \cup \{\infty\} = S^1$ и отображение (2.9), (2.11) можно заменить на изображение $S^1 \rightarrow S^1$.

В этом случае можно получить наглядную картину разбиения пространства отображений $\text{Map}^0(R^1, S^1)$ на гомотопические классы. Если функция $\theta(x)$ принимает в точках $x = \pm \infty$ нулевое значение, что соответствует решению синус-Гордон уравнения типа бегущих волн или бризеров, то образом оси R^1 на полево многообразии S^1 при отображении (2.9) будет замкнутая петля, не охватывающая полностью окружности S^1 (см. рис.2а). Такая петля может быть непрерывным образом стянута в точку на S^1 . Если $\theta(-\infty) = 0$, а $\theta(+\infty) = 2\pi$, то образом R^1 на S^1 будет петля, охватывающая S^1 полностью, и ее уже нельзя непрерывным способом стянуть в точку. Такие отображения соответствуют

2π -кинковому решению синус-Гордон уравнения (см. рис.2б). При выборе граничных условий в виде: $\theta(-\infty) = 0$, $\theta(+\infty) = 4\pi$, образ оси R^1 дважды "наматывается" на полево многообразие S^1 , и такое отображение не может быть сведено ни к первому, ни ко второму случаю. Соответствующая ситуация отражена на рис.2в, она отвечает бинковому решению, т.е. совокупности двух кинков.

Все рассмотренные отображения принадлежат к разным гомотопическим классам, и в качестве характеристики Q (гомотопической переменной) следует выбрать число "наматываний" образа R^1 на многообразии S^1 при отображении (2.9) (наматывание "нити" R^1 на "катушку" S^1). При этом к одному и тому же классу следует относить намотки с различной длиной и формой петель (без узлов).

К аналогичному выводу можно прийти, рассматривая вместо отображений (2.9) эквивалентные в силу граничных условий (2.11) отображения окружностей $S^1 \rightarrow S^1$:

$$\varphi[\alpha(x)] = \exp\{i\theta[\alpha(x)]\} : S^1 \rightarrow S^1. \quad (2.12)$$

Здесь $\alpha(x)$ - обратная стереографическая проекция $R^1 \rightarrow S^1$, параметризирующая окружность S^1 . Отображение (2.12) непрерывно при условии

$$\theta(2\pi) = \theta(0) + 2\pi n, \quad (2.13)$$

где n - целое число, указывающее на число "наматываний" на S^1 при отображении θ , называемое степенью отображения (2.12). Степень отображения определяется для непрерывных отображений связанных компактных многообразий и в случае $\varphi = S^1$ является полным гомотопическим инвариантом (определение степени приведено в Дополнении Б). Отображения с одинаковой степенью гомотопны между собой, с

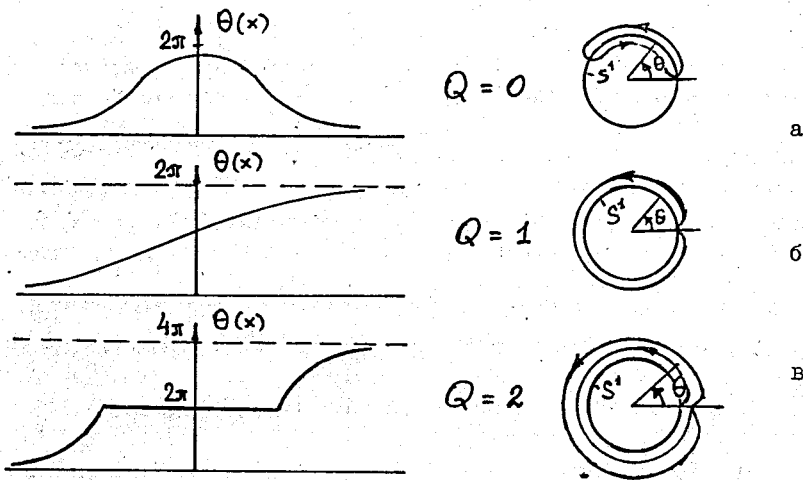


Рис.2

разной степенью - принадлежат к разным гомотопическим классам. Так, естественным образом возникает в простейшей ситуации гомотопическая переменная Q - степень отображения, принимающая определенные целочисленные значения на каждом из гомотопических классов. Фактически мы пришли к идее алгебраизации топологических задач, приведшей А. Пуанкаре к созданию основ алгебраической топологии. Действительно, приведенные факты могут быть рассмотрены с несколько иной точки зрения. На множестве, элементами которого будут считать гомотопические классы $[S^1, \varphi]_i$, можно задать алгебраический закон композиции, превращающий указанное множество в группу с точки зрения алгебры: так называемую фундаментальную группу Пуанкаре $\pi_1(\varphi)$. Задача вычисления этой группы сводится к установлению изоморфизма с группой (или подгруппой) целых чисел \mathbb{Z} . В Дополнении Б приводится один из способов задания закона композиции на множестве классов $\{[S^1, S^1]\}$, обладающего свойством ассоциативности, а также единичным и обратным элементами. Гомотопическая переменная Q задает в явном виде изоморфизм

$$Q: \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$$

и может быть представлена в явном виде:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} d\alpha, \quad (2.14)$$

что совпадает с выражением (1.12). В следующем разделе мы рассмотрим гомотопические группы высших размерностей и выясним вопрос о задании в явном виде изоморфизмов этих групп с группами целых чисел \mathbb{Z} , что позволит нам находить явные выражения для топологических зарядов.

2.3. Гомотопические группы и топологические заряды

В основном нас будут интересовать множества гомотопических классов $\{[S^3, \varphi]\}$ отображений типа (2.8), которые после задания соответствующего закона композиции обладают структурой группы $\pi_3(\varphi)$ третьей гомотопической группы многообразия φ . Существуют методы вычисления гомотопических групп высших размерностей [33], однако применение этих методов для конкретных многообразий сопряжено со значительными трудностями. Тем не менее для большинства физически интересных многообразий φ : сфер S^n , классических групп Ли G , проективных пространств RP^n и CP^n эти группы вычислены и результаты вычислений приводятся в Дополнении Б. Фактически вычисление гомотопической группы $\pi_n(\varphi)$ дает ответ на вопрос о том, по какой арифметике следует складывать соответствующие гомотопические классы. Если $\pi_n(\varphi) = \mathbb{Z}$, то гомотопические классы складываются как обычные целые числа, если $\pi_n(\varphi) = \mathbb{Z}_2$, то как целые числа по модулю 2 и т.д.

При построении моделей классической теории поля с топологическими зарядами, как правило, результатами вычислений гомотопических групп пользуются при выборе полевого многообразия модели φ таким образом, чтобы $\pi_3(\varphi) = \mathbb{Z}$. Гомотопическая переменная Q , осуществляющая этот изоморфизм, играет в таких случаях роль топологического заряда, и поэтому важной задачей является установление явного вида этого изоморфизма, что эквивалентно заданию явного выражения для топологического заряда. Для решения этой задачи можно воспользоваться алгоритмом Айшема [34] (см. также [35]), где эксплуатируется существующая связь между гомотопическими группами $\pi_n(\varphi)$ и соответствующими группами когомологий $H^n(\varphi; \mathbb{R})$. Последние можно определить как фактор-пространство замкнутых дифференциальных форм по подпространству точных форм, т.е. элементами групп когомологий являются классы эквивалентности (когомологичности) замкнутых форм. Изложение теории когомологий и когомологий, рассчитанное на физиков, можно найти в лекциях И.С. Шапиро и М.А. Ольшанецкого [36], а также во второй части курса "Современная геометрия" Б.А. Дубровина, С.П. Новикова, А.Т. Фоменко [37].

Как уже отмечалось, поля φ в модели Скирма принимают зна-

чения на полевом многообразии $\phi = S^3$ и подчиняются граничному условию

$$(\phi_0, \phi)(\bar{x}) \rightarrow (1, 0), \text{ при } |\bar{x}| \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

что обеспечивает конечность функционала энергии и позволяет компактифицировать область определения R^3 в $S^3 = R^3 \cup \{\infty\}$. Для дальнейших рассмотрений нам будет удобно вместо полей (отображений) $\phi: S^3 \rightarrow S^3$ использовать главные киральные поля $U(\bar{x}) \in SU(2)$ осуществляющие отображения

$$U(\phi(\bar{x})): S^3 \rightarrow SU(2), \quad (2.16)$$

а поля $\phi(\bar{x})$ рассматривать в качестве параметров элемента U группы $SU(2)$ в соответствии с выражением (1.13). Тогда $\phi = SU(2)$ — группа Ли, а в таком случае информация о связности функционального пространства отображений, приносимая группами когомологий $H^n(G; R)$, в точности совпадает с теми сведениями о связности, которая содержится в гомотопических группах /37/. Поскольку при вычислении групп когомологий мы можем воспользоваться аппаратом внешних дифференциальных форм, то работать с этими группами проще, чем с $\mathcal{T}_n(G)$. Суть алгоритма Айшема состоит в переходе от (2.16) к индуцируемому этим отображением гомоморфизму групп когомологий с вещественными коэффициентами

$$U^*: H^3(SU(2); R) \rightarrow H^3(S^3; R). \quad (2.17)$$

Затем строится генератор группы $H^3(SU(2); R)$ как $SU(2)$ — инвариантная 3-форма на $SU(2)$:

$$\Omega = \varepsilon_{abc} W^a \wedge W^b \wedge W^c = \varepsilon_{abc} \int_i^a \int_j^b \int_k^c d\phi^i \wedge d\phi^j \wedge d\phi^k, \quad (2.18)$$

где W^a — базисные левоинвариантные 1-формы

$$W^a = \int_i^a d\phi^i = \left[(\delta_i^a + \frac{\phi^a \phi_i}{\phi_0^2}) \phi_0 + \varepsilon^{abc} \phi_b \phi_c \right] d\phi^i. \quad (2.19)$$

Более подробно эти выкладки приведены в Дополнении Б (см. также /38/). С помощью отображения (2.17) полученный генератор (2.18) увлекается в группу $H^3(S^3; R)$, так что соответствующая увлеченная форма $U^*\Omega$ становится генератором группы. В терминах левых киральных токов

$$L_M = U^{-1} \partial_\mu U = \varepsilon_{\alpha} L_M^\alpha = \varepsilon_{\alpha} \int_i^\alpha \partial_\mu \phi^i \quad (2.20)$$

генератор группы $H^3(S^3; R)$ принимает вид

$$U^*\Omega = \varepsilon_{abc} L_e^a L_n^b L_m^c dx^e \wedge dx^n \wedge dx^m = \varepsilon_{abc} \varepsilon^{lmn} L_e^a L_n^b L_m^c d^3x. \quad (2.21)$$

Из теории когомологий известно, что соответствующие двум отображениям (2.16) U и V 3-формы $U^*\Omega$ и $V^*\Omega$ когомологичны на S^3 тогда и только тогда, когда они отличаются на полную дивергенцию, т.е. когда совпадают их периоды

$$\int_{S^3} U^*\Omega = \int_{S^3} V^*\Omega. \quad (2.22)$$

Но в таком случае индуцированные отображения совпадают $U^* = V^*$, а поскольку группа $SU(2)$ компактна, то из совпадения $U^* = V^*$ следует гомотопность отображения U и V : $U \sim V$ (см. §4 работы /34/). Таким образом, мы показали, что интеграл (2.22) является гомотопическим инвариантом, и поскольку $H^3(S^3; R) \cong R$, инвариант

$$\hat{Q}[U] = \int d^3x (U^*\Omega) \quad (2.23)$$

принимает значения на вещественной оси R . Но нашей целью была реализация изоморфизма $\mathcal{T}_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$, т.е. отыскание инварианта с целочисленными значениями. Для этого воспользуемся теоремой о замене коэффициентов (см. /33/, стр.158), согласно которой имеет место изоморфизм

$$H^3(G; R) = R \otimes H^3(G; \mathbb{Z}) \quad (2.24)$$

и существует такое число $\rho_0 \in R$, что 3-форма $\rho_0 \Omega$ будет генератором группы $H^3(SU(2); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Модифицируя соответствующим образом выражение (2.23), получаем гомотопический инвариант — топологический заряд

$$Q[U] = \int d^3x [U^*(\rho_0 \Omega)], \quad (2.25)$$

реализующий искомый изоморфизм $\mathcal{T}_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$. Топологический заряд Q остается сохраняющейся величиной и при переходе к рассмотрению отображений (полей), зависящих от времени:

$$W = U(\phi(\bar{x}, t)): S^3 \otimes R^1 \rightarrow SU(2), \quad (2.26)$$

где R' - временная ось. В этом случае генератор группы $H^3(S^3; Z)$ имеет вид

$$W^*(\rho_0 \Omega) = \varepsilon_{abc} \rho_0 L_\nu^a L_\lambda^b L_\rho^c dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho, \quad (2.27)$$

и, применяя операцию дуализации $*$ (звездочку Ходжа), получаем дуальную 1-форму

$$\mathcal{J} = * W(\rho_0 \Omega) = \mathcal{J}^M dx^M, \quad (2.28)$$

где

$$\mathcal{J}^M = \rho_0 \varepsilon^{M\nu\lambda\rho} \varepsilon_{abc} L_\nu^a L_\lambda^b L_\rho^c \quad (2.29)$$

- топологический ток, закон сохранения которого

$$\partial_M \mathcal{J}^M = 0 \quad (2.30)$$

следует из факта замкнутости 3-формы $\rho_0 \Omega$, а его временная компонента \mathcal{J}^0 есть плотность топологического заряда

$$Q = \int d^3x \mathcal{J}^0. \quad (2.31)$$

Конкретные рабочие формулы для топологического заряда будут приведены в следующем параграфе.

§ 3. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ЗАРЯДАМИ

При построении явного вида топологического заряда в предыдущем параграфе мы ни в коей мере не использовали динамику модели, существенным моментом для нас был выбор полевого многообразия Φ . Однако если мы хотим описывать в рамках модели протяженные частицы, то должны позаботиться о таком выборе лагранжиана модели, чтобы соответствующие уравнения поля допускали регулярные частицеподобные решения с конечными динамическими характеристиками. В современной литературе такие решения называют солитонами, и мы будем интересоваться принципами построения моделей, допускающих многомерные солитонные решения с нетривиальными топологическими зарядами. Модель Скирма явилась исторически первым примером моделей подобного рода, и поэтому мы попытаемся понять, в чем заключается выделенность этой модели.

Впервые эти вопросы обсуждались в работах Л.Д.Фаддеева /39,40/,

где были заложены основные принципы поиска многомерных солитонов. В нашем изложении мы будем следовать этим работам. Основные требования, накладываемые на искомый лагранжиан, могут быть выбраны следующим образом:

- 1^o. Лоренц-инвариантность и киральная инвариантность лагранжиана.
- 2^o. Допустимость масштабных преобразований (условие Хобарта-Деррика).
- 3^o. Наличие оценки функционала энергии снизу через топологический заряд (топологическая устойчивость).

3.1. Кирально-инвариантные лагранжианы

Требование киральной инвариантности отвечает современным представлениям о симметрии основных состояний сильновзаимодействующих частиц. Поэтому и лагранжиан модели должен строиться из инвариантов относительно преобразований киральной группы $SU(N)_L \otimes SU(N)_R$. Проблема построения таких инвариантов активно обсуждалась в литературе в связи с изучением нелинейных реализаций киральной симметрии, начиная с работы С.Вайнберга /41/, построившего эффективный лагранжиан взаимодействия мягких пионов таким образом, что в низших порядках теории возмущений в точности воспроизводились результаты алгебры токов при низких энергиях. В последовавшей за этим серии физических /42-48/ и математических /39-51/ работ было создано новое направление в физике сильных взаимодействий, получившее название метода эффективных или феноменологических лагранжианов. В работах А.А.Славнова и Л.Д.Фаддеева /52, 53/ была развита последовательная схема квантования таких лагранжианов. Нам эти работы будут полезны по той причине, что в рамках этого подхода были вычислены интересующие нас киральные инварианты и разработан весьма удобный для дальнейшего изложения язык (см., например, /52/).

В качестве основного объекта будем рассматривать главное киральное поле, принимающее значение на многообразии группы $SU(2)$. Его удобно параметризовать следующим образом:

$$U(\vec{x}, t) = \exp\{i n^a \tau_a \theta(\vec{x}, t)\}, \quad a=1,2,3; \quad (3.1)$$

где $\theta = \theta(\vec{x}, t)$ - киральный угол, n^a - единичный вектор в изопространстве, τ^a - матрицы Паули. Связь с предыдущей параметризацией (I.13) через пионные поля ϕ^a задается соотношениями

$$n^a = \phi^a / |\phi|; \quad \sin \theta = \pm |\phi|. \quad (3.2)$$

Кроме того, введем еще векторное поле L_M - левый киральный ток

$$L_M = U^{-1} \partial_M U = i \epsilon_{\alpha} L_M^{\alpha} \quad (3.3)$$

со значениями в алгебре Ли, который является полным аналогом угловых переменных B_M^{α} (I.15) в работах Скирма. Условие согласованности определения (3.3) требует равенства смешанных производных

$$\partial_M \partial_\nu U = \partial_\nu \partial_M U, \quad \text{откуда} \\ \partial_M L_\nu - \partial_\nu L_M + [L_M, L_\nu] = 0. \quad (3.4)$$

В терминах кирального угла θ и вектора n^a компоненты тока приобретают вид

$$L_M^{\alpha} = n^a \partial_M \theta + \sin \theta \cos \theta \partial_M n^a + \epsilon^{abc} \sin \theta n^b \partial_M n_c. \quad (3.5)$$

Из токов L_M могут быть построены киральные инварианты. Один из методов их построения, основанный на использовании матрицы Гурши /42/, предложен в работе /54/, где выписаны явные выражения инвариантов киральной группы $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ 2-го и 4-го порядков по токам L_M . Единственный инвариант 2-го порядка записывается в виде

$$\mathcal{L}_{(2)} = Sp(L_M L_M^{\alpha}) = -2(L_M^{\alpha})^2 = -2\{(\partial_M \theta)^2 + \sin^2 \theta (\partial_M n^a)^2\}, \quad (3.6)$$

т.е. представляет собой линейный элемент поверхности сферы в изотопическом пространстве. Здесь Sp - след в присоединенном представлении алгебры Ли. Соответствующий инварианту (3.6) простейший киральный лагранжиан

$$L_{(2)} = -\frac{1}{4} \int d^4x Sp(L_M L_M^{\alpha}) \quad (3.7)$$

известен в математике как функционал Дирихле и достаточно подробно изучен. В физике такой лагранжиан предлагался Ф.Гурши /55, 56/ для описания сильного взаимодействия пионов, а выражение (3.7) соответствует записи в так называемой токовой форме Сугавары. Такая модель обладает статическими решениями с конечной энергией только в случае двух пространственных измерений. На доказательстве этого утверждения мы продемонстрируем применение теоремы Хобарта-Деррика в следующем пункте. Там же будет показано, что в трехмерном случае лагранжиан (3.7) приводит к энергетически неустойчивым состояниям. С точ-

ки зрения С.Вайнберга /57/ лагранжиан (3.7), воспроизводящий в "древесном" приближении результаты киральной алгебры токов при низких энергиях, можно рассматривать в качестве первого члена разложения (разложения Вайнберга) по степеням киральных инвариантов. Поэтому для получения энергетически устойчивых состояний в трехмерном случае естественно рассмотреть следующие члены разложения, т.е. киральные инварианты более высокого порядка.

Линейно независимых инвариантов 4-го порядка насчитывается уже три:

$$\mathcal{L}_{(4)} = \alpha Sp(L_M L_M^{\alpha})(L_\nu L_\nu^{\alpha}) + \beta Sp(L_M L_\nu L_M^{\alpha} L_\nu^{\alpha}) + \gamma Sp(\partial_M L_\nu)^2, \quad (3.8)$$

где α , β и γ - некоторые константы. Встречающиеся в литературе другие выражения для этих инвариантов могут быть получены с использованием соотношения (3.4). Все три инварианта удовлетворяют требованиям лоренц-инвариантности, четности и G-четности, т.е. с точки зрения свойств симметрии нельзя отдать предпочтение ни одному из них. Однако, если потребовать, чтобы модель была релятивистски-инвариантной, то для положительной определенности энергии мы должны позаботиться о том, чтобы временные производные полей (временные компоненты киральных токов L_M) входили в лагранжиан модели квадратичным образом. Данному требованию удовлетворяет единственная из возможных комбинаций (3.8):

$$\mathcal{L}_{(4)} = Sp L_M^2 L_\nu^2 - Sp(L_M L_\nu)^2 = -\frac{1}{2} Sp[L_M, L_\nu]^2, \quad (3.9)$$

в точности совпадающая с членом, добавленным Скирмом /3/ к стандартному пионному лагранжиану (3.7). Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно представить инварианты в явном виде, используя, например, параметризацию (3.1). В этом смысле можно говорить о выделенности члена Скирма среди всех возможных поправок 4-го порядка в разложении Вайнберга. В следующем разделе мы убедимся в том, что "подправленный" таким образом киральный лагранжиан обеспечивает стабилизацию энергии статических конфигураций относительно масштабных преобразований.

3.2. Теорема Хобарта-Деррика

Полученное в работах /59, 60/ условие неустойчивости статических решений нелинейных полевых уравнений относится к числу необходимых критериев и является частным случаем теоремы вириала (см., например, /61, 62/.

Пусть $\phi = \phi(\bar{x})$ - статическое решение уравнения поля, по-

лучаемого из некоторого вариационного принципа

$$\delta I[\phi] = 0. \quad (3.10)$$

Произведем преобразование масштаба $\bar{x} \rightarrow \lambda \bar{x}$, при котором $\phi \rightarrow \phi_\lambda = \phi(\lambda \bar{x})$. Тогда из (3.10) следует соотношение

$$\delta I[\phi_\lambda] = \frac{\partial I[\phi(\lambda \bar{x})]}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} \cdot \delta \lambda = 0. \quad (3.11)$$

Рассматривая функционал $I[\phi(\lambda \bar{x})]$ как функцию $I(\lambda)$ масштабного параметра λ и полагая ее кусочно-однородной, запишем

$$I(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n_1} I^{(\nu)}(\lambda), \quad (3.12)$$

где $I^{(\nu)}(\lambda)$ - однородная функция от λ степени ν . Подстановка (3.12) в (3.11) приводит к тождеству вириального типа

$$\frac{\partial I(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = \sum_{\nu=1}^{n_1} \nu I^{(\nu)}(1) = 0. \quad (3.13)$$

Из соотношения (3.13) видно, что условие Хобарта-Деррика является следствием уравнений движения модели, если ограничиться возмущениями полей типа масштабных растяжений.

Покажем, что лагранжиан (3.7) приводит к статическим конфигурациям только в случае двумерной теории. Для этого перепишем его для произвольной размерности D , используя выражение (3.20) для киральных токов:

$$L_{(2)} = \int d^D x \xi_i^a \xi_j^a \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j = \int d^D x g_{ij} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j, \quad (3.14)$$

где $g_{ij} = \xi_i^a \xi_j^a$ - метрический тензор на многообразии группы $SU(2)$. Соответствующий статический функционал энергии

$$E_{(2)}[\phi] = \int d^D x g_{ij} \partial_k \phi^i \partial_k \phi^j \quad (3.15)$$

при масштабном преобразовании $\phi^i(\bar{x}) \rightarrow \phi_\lambda^i = \phi^i(\lambda \bar{x})$ переходит в

$$E_{(2)}[\phi_\lambda] = \int \frac{d^D(\lambda \bar{x})}{\lambda^D} g_{ij} \lambda^2 \frac{\partial \phi^i(\lambda \bar{x})}{\partial(\lambda x^\kappa)} \frac{\partial \phi^j(\lambda \bar{x})}{\partial(\lambda x^\kappa)} = \lambda^{2-D} E_{(2)}[\phi] \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует, что при $D=2$ теория масштабно инвариантна

и допускает существование статических решений (безразличное равновесие). При $D \geq 3$ мы всегда имеем возможность с помощью масштабного преобразования понизить значение функционала энергии, т.е. минимум отсутствует. Минимальная энергия достигается при стремлении масштабного параметра λ к бесконечности, когда частица коллапсирует до нулевого радиуса.

Ситуация не улучшается при добавлении к (3.15) стандартной потенциальной энергии вида

$$V[\phi] = \int d^D x F(\phi(\bar{x})), \quad (3.17)$$

т.к. в этом случае при масштабном преобразовании

$$V[\phi] \rightarrow V[\phi_\lambda] = \lambda^{-D} \int d^D(\lambda x) F(\phi_\lambda) = \lambda^{-D} V[\phi] \quad (3.18)$$

и суммарная энергия как функция масштабного параметра λ имеет вид

$$E(\lambda) = \lambda^{2-D} E_{(2)} + \lambda^{-D} V. \quad (3.19)$$

Применяя теорему вириала (3.13), получаем

$$\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = (2-D) E_{(2)} - DV, \quad (3.20)$$

откуда следует соотношение между $E_{(2)}$ и V :

$$V = \frac{(2-D)}{D} E_{(2)}. \quad (3.21)$$

При $D=2$ из соотношения (3.21) следует $V=0$. При $D \geq 3$ условие (3.21) не выполняется для положительно определенных $V \geq 0$, т.е. в этом случае солитонные решения отсутствуют. При знакопеременных V солитонные решения могут существовать, но все они будут неустойчивы. Для анализа устойчивости следует проверить положительность второй вариации функционала энергии $\delta^2 E \geq 0$, или второй производной $(\partial^2 E / \partial \lambda^2)_{\lambda=1}$ при рассмотрении функционала $E[\phi]$ как функции $E(\lambda)$ от масштабного параметра:

$$\frac{\partial^2 E(\lambda)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=1} = (2-D)(1-D) E_{(2)} + D(D+1)V. \quad (3.22)$$

С учетом соотношения (3.21) и (3.22) получаем

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=1} = 2(2-D) \mathcal{E}_{(2)} < 0, \text{ при } D \geq 3; \quad (3.23)$$

и поэтому все возможные солитонные решения в таких моделях будут энергетически неустойчивыми. Другие примеры анализа киральных моделей на основе метода Хобарта-Деррика можно найти в /63/.

Как указано в работах /59, 64/, одним из возможных путей преодоления данной трудности является добавление членов более высокого порядка по производным от полей. Такая возможность реализуется в моделях с лагранжианами типа Скирма

$$L = \int d^3x \{ \mathcal{L}_{(2)} + \mathcal{L}_{(4)} \}, \quad (3.24)$$

которым соответствует функция $\mathcal{E}(\lambda)$ вида

$$\mathcal{E}(\lambda) = \lambda^{2-D} \mathcal{E}_{(2)} + \lambda^{4-D} \mathcal{E}_{(4)}. \quad (3.25)$$

Действительно, прямые вычисления

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = (2-D) \mathcal{E}_{(2)} + (4-D) \mathcal{E}_{(4)} = 0; \quad \mathcal{E}_{(4)} = \frac{D-2}{4-D} \mathcal{E}_{(2)}; \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=1} = (2-D)(1-D) \mathcal{E}_{(2)} + (4-D)(3-D) \mathcal{E}_{(4)} = 2(D-2) \mathcal{E}_{(2)}, \quad (3.27)$$

где последнее соотношение получено с учетом (3.26), показывают, что при $D \geq 3$: $(\partial^2 \mathcal{E} / \partial \lambda^2)_{\lambda=1} > 0$, т.е. такие модели допускают энергетически устойчивые солитонные решения.

Следует отметить, что всем условиям, накладываемым на киральные инварианты, удовлетворяет инвариант 6-го порядка по токам $L_{\mu\nu}$, записываемый как квадрат топологического тока $J^{\mu\nu}$ (см. 2.29):

$$\mathcal{L}_{(6)} = SP(J_{\mu\nu} J^{\mu\nu}). \quad (3.28)$$

Добавление (3.28) к (3.29) приводит к модели, удовлетворяющей критерию "масштабной устойчивости", и при этом временные производные полей входят в соответствующий гамильтониан во второй степени. Такая возможность модификации модели Скирма рассматривалась в работе А.Джексона с сотрудниками /65/. Помимо лагранжианов типа (3.24) устойчивые солитонные решения допускают и так называемые "экзотичес-

кие" лагранжианы с плотностями вида

$$\mathcal{L}_{3/2} = \{ SP(L_{\mu\nu} L^{\mu\nu}) \}^{3/2}. \quad (3.29)$$

С помощью выкладки типа (3.16) легко убедиться, что лагранжиан (3.29) приводит к масштабно-нейтральной теории (степень 3/2 выбирается здесь именно из этих соображений). Такие лагранжианы изучались в работах /66, 67/.

3.3. Топологическая устойчивость

Киральные модели, лагранжианы которых содержат как минимум инварианты 2-го и 4-го порядка, обладают еще одним весьма важным свойством. Энергия статических решений в таких моделях может быть оценена снизу через топологический заряд. Поэтому в каждом гомотопическом классе энергия имеет нижнюю грань. Если эта нижняя грань достигается на некотором решении уравнений поля, то данное решение устойчиво в смысле Ляпунова. Как было отмечено Л.Д.Фаддеевым /40/, такого рода оценки для нелинейных функционалов, заданных на пространстве функций, допускающих гомотопическую классификацию, давно и успешно используются в математике при описании гармонических отображений между римановыми многообразиями /68, 69/. Известно, что решение этих задач стандартным аппаратом теории устойчивости сопряжено с большими трудностями, поэтому становление таких оценок из топологических соображений весьма важно в исследовании моделей.

В физических задачах метод использования топологических оценок для понижения порядка полевых уравнений был предложен Е.Богомольным /20/, однако для многомерных киральных моделей прием Богомольного не всегда приводит к успеху, т.к. задаваемая топологическим зарядом нижняя оценка для функционала энергии не всегда достижима. Отметим, что прием Богомольного приводит к редукции полевых уравнений в уравнения самодуальности, а решения последних согласуются с граничными условиями чаще всего в случае масштабно-нейтральных моделей. К сожалению, нам неизвестны строгие теоремы подобного рода.

Для лагранжианов типа Скирма (3.24) оценка статической энергии снизу через топологический заряд может быть получена из следующих простых соображений (см., например, /34/, /38/). Поскольку киральные инварианты (3.6) и (3.9) группы $SU(2)$ могут быть представлены в виде алгебраических функций от компонент кирального тока $L^{\mu\nu}$ (3.3) с помощью символа Кронекера (тензора Картана-Киллинга для группы $SU(2)$) и символа Леви-Чевита (структурных констант $SU(2)$):

$$\chi_{(2)} = \delta_{ab} L_M^a L_M^b; \quad \chi_{(4)} = \varepsilon^{abcd} \varepsilon^{abce} L_M^b L_d^c L_{e\nu}^d L_e^e, \quad (3.30)$$

то из неравенства

$$(L_{a\nu}^a - M \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} L_j^b L_k^c)^2 \geq 0, \quad (3.31)$$

где M - произвольный множитель, после раскрытия скобок получим

$$[(L_{a\nu}^a)^2 - 2M \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} L_j^b L_j^c L_k^c + 2M^2 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ade} L_i^b L_i^d L_k^c L_k^e] \geq 0. \quad (3.32)$$

Используя выражение (2.29) для плотности топологического тока, перепишем (3.32) в виде

$$(L_{a\nu}^a)^2 + 2M^2 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ade} L_i^b L_i^d L_k^c L_k^e \geq 2M \rho_0^{-1} \gamma^0. \quad (3.33)$$

Интегрирование выражения (3.33) по всему пространству дает искомую оценку

$$\mathcal{E}[\phi] = \mathcal{E}_{(2)}[\phi] + \mathcal{E}_{(4)}[\phi] \geq c|Q|. \quad (3.34)$$

В работе /34/ приведены и другие варианты исходных неравенств (3.31). Заметим, однако, что поскольку в γ^0 компоненты L_j^a входят в третьей степени, то для получения оценки (3.34) на основании неравенства $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2|\alpha\beta|$, как минимум, необходимы инварианты 2-го и 4-го порядка. Прием Богомольного в таких моделях не работает, т.к. получающееся уравнение самодуальности несовместно с условием (3.4) /26/.

§ 4. МЕТОДЫ ПОИСКА МНОГОМЕРНЫХ СОЛИТОНОВ МОДЕЛИ СКИРМА

Тема, обозначенная в заглавии, настолько многогранна, что в рамках одного параграфа мы сможем только обсудить основные направления поиска многомерных солитонов. Конкретное изложение методов и результатов будет дано в трех последующих параграфах. Следует отметить, что помимо результата Скирма, предложившего решение типа "эж" /3/, которое реализует минимум функционала энергии в первом топологическом классе, позже удалось установить, что в высших гомотопических классах минимум достигается на аксиально-симметричном анзаце. Более подробно об этом результате будет сообщено в § 7, отметим только, что если решение Скирма, называемое сейчас в честь автора "скирмионом", позволяет вычислять массы и другие динамические

характеристики барионов, то аксиально-симметричное решение используется пока только на уровне пробных функций.

Такое отсутствие успехов нельзя объяснить невниманием к модели со стороны исследователей. Правда, до начала 80-х годов изучению модели Скирма было посвящено не более 20 работ, и только после работ Э.Виттена /22, 23/ в этой области начался настоящий бум и число опубликованных статей исчисляется уже сотнями. Тем не менее задача поиска решений в модели Скирма еще очень далека от завершения, и причина этого кроется в сложности вариационных проблем, возникающих в этой модели. Рассматриваемые функционалы, помимо того, что они заданы на полях с некомпактной областью определения, оказываются еще и невыпуклыми по производным. В таких случаях, как известно, не работают прямые методы вариационного исчисления и математический аппарат для изучения таких задач находится в начальной стадии разработки. Можно было бы перечислить и ряд других трудностей, связанных с нахождением критических точек (многомерных солитонов) функционала Скирма, некоторые из них указываются в работе О.А.Ладыженской и Л.В.Капитанского /71/, однако мы сконцентрируем свое внимание на том, что удастся сделать в этой модели, и для начала приведем некоторую сводку основных формул, которые будем использовать в дальнейшем.

4.1. Модель Скирма: основные формулы

Лангражева плотность модели записывается в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\lambda^2} \text{Sp} L_M^2 + \frac{\varepsilon^2}{16} \text{Sp} [L_M, L_\nu]^2, \quad (4.1)$$

где L_M - киральные токи, ε и λ - масштабные параметры. Топологический сохраняющийся ток (2.29) представим в виде

$$\begin{aligned} \gamma_M &= -\frac{1}{48\pi^2} \varepsilon^{M\nu\lambda\rho} \text{Sp} (L_\nu [L_\lambda, L_\rho]) \\ &= -\frac{1}{12\pi^2} \varepsilon^{M\nu\lambda\rho} \varepsilon_{abc} L_\nu^a L_\lambda^b L_\rho^c; \end{aligned} \quad (4.2)$$

где множитель $\rho_0 = -(12\pi^2)^{-1}$ выбран из условия целочисленности заряда Q , задаваемого формулой (2.31). Если воспользоваться выражением (3.5) для компонент кирального тока L_M^a через киральный угол $\theta(\vec{x}, t)$ и единичный вектор \vec{n} , то ток (4.2) переписется в виде

$$\mathcal{M} = -\frac{1}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{abc} \sin^2 \theta \partial_\nu \theta n^a \partial_\lambda n^b \partial_\rho n^c, \quad (4.3)$$

и ему соответствует выражение для топологического заряда

$$Q = \int d^3x \mathcal{J}^0 = -\frac{\epsilon^{\lambda\mu\nu}}{48\pi^2} \int d^3x \text{Sp}([L_\lambda, [L_\mu, L_\nu]]) \\ = -\frac{\epsilon^{\lambda\mu\nu} \epsilon_{abc}}{48\pi^2} \int d^3x \sin^2 \theta \partial_\lambda \theta n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c. \quad (4.4)$$

Гамильтониан модели

$$H = -\int d^3x \left\{ \frac{1}{4\lambda^2} \text{Sp}(L_0^2 + L_i^2) + \frac{\epsilon^2}{8} \text{Sp}([L_0, L_i]^2) + \frac{1}{2} [L_i, L_k]^2 \right\} \quad (4.5)$$

оценивается снизу через топологический заряд в силу неравенства

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 \geq 2|(\vec{a} \cdot \vec{b})|: \\ H \geq -\int d^3x \left\{ \frac{1}{4\lambda^2} \text{Sp} L_i^2 + \frac{\epsilon^2}{16} \text{Sp} [L_i, L_j]^2 \right\} = -\int d^3x \left\{ \frac{1}{4\lambda^2} \text{Sp} L_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^2}{32} \text{Sp} (\epsilon_{ijk} [L_j, L_k])^2 \right\} > \frac{\epsilon}{4\sqrt{2}\lambda} \int d^3x |\text{Sp} (\epsilon_{ijk} L_i [L_j, L_k])| \geq \frac{\epsilon}{4\sqrt{2}\lambda} 48\pi^2 |Q|$$

и поэтому справедлива оценка

$$H > 6\sqrt{2} \pi^2 \frac{\epsilon}{\lambda} |Q| \quad (4.6)$$

Для системы с лагранжианом (4.1) легко выписать уравнение Эйлера - Лагранжа. Учитывая определение (3.3) для киральных токов L_μ , а также соотношение $\delta U^{-1} = -U^{-1} \delta U U^{-1}$ для киральных полей, найдем

$$\delta \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \text{Sp} \left\{ U^{-1} \delta U \left[\frac{1}{2\lambda^2} \partial_\mu L^\mu - \frac{\epsilon}{4} \partial_\mu [L_\nu, [L^\mu, L^\nu]] \right] \right\} = 0.$$

В итоге приходим к уравнению

$$\partial_\mu (L^\mu - \frac{\epsilon^2 \lambda^2}{2} [L_\nu, [L^\mu, L^\nu]]) = 0, \quad (4.7)$$

имеющему вид локального закона сохранения (это закон сохранения изоспина).

Выражение в скобках (4.7) в статическом случае можно прирав-

нять ротору некоторого векторного поля, т.е. пользуясь терминологией §1, трактовать как вихрь в "пионной жидкости", описываемой в терминах "обобщенных скоростей" L_μ . На интуитивном уровне вопрос о существовании таких вихрей в нетривиальных гомотопических классах можно пояснить на основе простых топологических соображений. Поскольку токи L_μ суть векторное поле, заданное на сфере S^3 в изотопическом пространстве, выделенной условием (1.4), то согласно "теореме о волосатом шаре" такое поле должно содержать хотя бы одну особенность (в смысле неопределенности направления). На простом языке это означает, что "волосатый шар" нельзя "причесать" таким образом, чтобы в "прическе" не образовалась хотя бы одна "макушка". С помощью этой теоремы довольно просто объясняется, почему в атмосфере Земли обязательно должен существовать хотя бы один циклон. В случае модели Скирма роль "макушки" на сфере в изотопическом пространстве следует отнести вихрю в "пионной жидкости", который и будет некоторым образом нуклона, согласно гипотезе Скирма.

В дальнейшем мы можем ограничиться рассмотрением статических полей в силу справедливости следующего утверждения:

Утверждение 4.1. $\inf H$ (4.5) реализуется в классе статических полей.

Доказательство этого утверждения тривиально, однако для полноты изложения оно будет приведено в Дополнении В.

Если воспользоваться параметризацией единичного вектора

$$\vec{n} = (\sin \beta(\vec{x}) \cos \gamma(\vec{x}), \sin \beta(\vec{x}) \sin \gamma(\vec{x}), \cos \beta(\vec{x})), \quad (4.8)$$

то выражение для статического гамильтониана приобретает вид

$$\mathcal{E} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2\lambda^2} [(\vec{\nabla} \theta)^2 + \sin^2 \theta ((\vec{\nabla} \beta)^2 + \sin^2 \beta (\vec{\nabla} \gamma)^2) + \right. \\ \left. + \epsilon^2 \sin^2 \theta [(\vec{\nabla} \theta \cdot \vec{\nabla} \beta)^2 + \sin^2 \beta (\vec{\nabla} \theta \cdot \vec{\nabla} \gamma)^2 + \sin^2 \beta \sin^2 \theta (\vec{\nabla} \beta \cdot \vec{\nabla} \gamma)^2] \right\}. \quad (4.9)$$

Приведем также выражение для топологического заряда Q в параметризации (4.8):

$$Q = -\frac{1}{2\pi^2} \int d^3x \sin \theta \sin \beta (\vec{\nabla} \theta \cdot [\vec{\nabla} \beta \cdot \vec{\nabla} \gamma]). \quad (4.10)$$

Поскольку уравнение Эйлера-Лагранжа (4.7) не поддается решению, то разумно поставить вопрос о существовании его решений. Речь идет, таким образом, о существовании стационарных точек невыпуклого функционала (4.9), заданного на полях $\theta(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(\vec{x})$ с

некомпактной областью определения при некотором фиксированном значении топологического заряда Q . Перечислим известные в литературе методы решения такого рода задач. Существуют методы расширения исходной вариационной задачи, связанные с "овыпуклением" исходного функционала /72, 73/. Вопрос о применимости этих методов к функционалу Скирма пока открыт. Другим направлением в изучении такого рода функционалов можно считать модификацию прямых методов вариационного исчисления, основанную на методе концентрированной компактности П.Лионса /74, 75/. На основе этого метода в работе М.Эстебана /76/ проводится доказательство существования минимума функционала (4.9), правда, при весьма ограничительных предположениях. Третье направление исследований возникло из физических работ С.Коулмена /77/ и Л.Фаддеева /40/ и связано с использованием свойств инвариантности минимизируемого функционала. В математических работах /71, 78/ этот подход получил строгое обоснование и будет изложен в следующем разделе. Наконец, существует метод, основанный на симметризации Штейнера и ее разновидностях, позволяющий указывать класс функций, на которых реализуется абсолютный минимум функционала (4.9). В применении к другим вариационным задачам этот метод использовался в работах /79, 80/. В третьем разделе данного параграфа и в § 5 мы применим этот метод для доказательства того, что абсолютный минимум гамильтониана Скирма (4.9) в первом гомотопическом классе реализуется на "ежом" анзаце.

4.2. Теорема Коулмена-Пале и группа инвариантности гамильтониана Скирма

В приложении 4 к своим лекциям (/77/, стр.396-398) С.Коулмен предложил практический метод поиска подстановок для решения нелинейных задач, основанный на следующем простом замечании. Если G - некоторая подгруппа полной группы инвариантности функционала, то любое поле можно разбить на инвариантную, (точнее, эквивариантную), и невариантную части в отношении преобразований из данной подгруппы. Если подставить такое разложение в функционал энергии, то можно установить, что он не будет содержать членов, линейных по инвариантной части. Поэтому функционал энергии, вычисленный для симметричной полевой конфигурации, будет автоматически стационарен в отношении вариаций по инвариантным полям. Для поиска симметричных статических решений достаточно подставить в функционал инвариантное поле и решать редуцированную вариационную задачу, не заботясь о неинвариантных возмущениях.

Л.Д.Фаддеев /37/ переформулировал приведенные выше замечания в "принцип Коулмена", полезный для поиска подстановок в случае инва-

риантных функционалов: если функционал энергии $\mathcal{E}[\phi]$ инвариантен относительно преобразований из непрерывной группы $G: \phi_g(\vec{x}) \equiv T_g \phi(\vec{x})$ (где $g \in G$, а T_g - соответствующий оператор представления группы G), то экстремум функционала $\mathcal{E}[\phi^0]$, реализуемый на инвариантных полях $\phi_g^0 = \phi^0$, будет экстремумом и по отношению к неинвариантным возмущениям. В работах /73/ и /40/ не приводилось доказательств этих утверждений, а были даны только иллюстративные примеры. Первое строгое доказательство содержится в работе Р.Пале /78/, который указал также ряд ограничений на применимость этого метода в общем случае. Некоторое обобщение теоремы Коулмена-Пале дано в работе Л.В.Капитанского и О.А.Ладьженской /73/. Мы воспользуемся формулировкой теоремы в лекциях /61/:

Теорема 4.2. (Коулмен-Пале). Пусть $F[\phi]$ - функционал, инвариантный относительно действия непрерывной группы $G_1: F[g\phi] = F[\phi]$; $\mathcal{P}_0 = \{\phi^0\}$ - множество инвариантных полей, \mathcal{P}_0^* - сопряженное ему множество, т.е. множество инвариантных векторных полей. Тогда, если поле $\phi^0 \in \mathcal{P}_0$ является экстремалью функционала $F[\phi]$ на инвариантном многообразии \mathcal{P}_0 , то одновременно он является истинной экстремалью, т.е. экстремалью по отношению к неинвариантным возмущениям, при условии, что многообразие \mathcal{P}_0 и его аннулятор \mathcal{P}_0^* имеют пустое пересечение (по поводу доказательства см. Дополнение В).

Как показал Р.Пале /77/, непересекаемость множеств \mathcal{P}_0 и \mathcal{P}_0^* имеет место не для всех групп G . Но в случае компактных групп, унитарных представлений некомпактных групп, полупростых групп, а также в случае римановых многообразий условие непересекаемости выполнено, т.е. принцип Коулмена справедлив для большинства физически интересных случаев.

Продемонстрируем применение теоремы на примере модели Скирма - для статистического гамильтониана (4.5):

$$\mathcal{G} = H^{st} = - \int d^3x \left\{ \frac{1}{4\lambda^2} S_p L_i^2 + \frac{\epsilon^2}{16} S_p [L_i, L_j]^2 \right\}. \quad (4.11)$$

По построению лагранжиан (4.1) и соответственно функционал (4.11) инвариантны относительно преобразований киральной группы $SU(2)_L \oplus SU(2)_R$ вида

$$U(\vec{x}) = V \cdot U(\vec{x}) W^{-1}, \quad (4.12)$$

где $U(\vec{x})$ - киральное поле, V и W - произвольные $SU(2)$ -матрицы. Однако вакуумное состояние $U = I$ не является инвариантным, как видно из (4.12), если $V \neq W$. Таким образом, максимальной внутренней группой симметрии конфигурационного пространства

модели является группа^{*})

$$G = \text{diag}(SU(2)_L \otimes SU(2)_R) \approx SU(2)_I = SO(3)_I, \quad (4.13)$$

т.е. группа изотопических вращений. Поскольку векторных полей, инвариантных относительно $SO(3)_I$, не существует, то объединим изотопические вращения с пространственными, из группы $SO(3)_S$, и рассмотрим группу

$$G' = \text{diag}[SO(3)_I \otimes SO(3)_S]. \quad (4.14)$$

Запишем условие инвариантности относительно группы (4.14):

$$\phi_g(x) = Tg\phi(g^{-1}x) = \phi(x), \quad g \in G'; \quad (4.15)$$

с учетом явного вида генераторов пространственного и изотопического поворотов:

$$-i[\vec{x} \cdot \vec{\nabla}] U(\vec{x}) + [\vec{\Sigma}/2 \cdot U(\vec{x})] = 0. \quad (4.16)$$

Подставим в (4.16) киральное поле U в параметризации $U = \phi_0 + i\vec{\Sigma}_a \phi^a$ и распишем полученное выражение по компонентам:

$$-i \varepsilon^{ijk} x_j d_k \phi_0 + \vec{\Sigma}_a (\varepsilon^{ijk} x_j \partial_k \phi^a - \varepsilon^{ila} \phi_l) = 0, \quad (4.17)$$

откуда следует

$$\varepsilon^{ijk} x_j \partial_k \phi_0 = 0; \quad (4.18a)$$

$$\varepsilon^{ijk} x_j d_k \phi^a - \varepsilon^{ila} \phi_l = 0. \quad (4.18b)$$

Сворачивая (4.18b) с ϕ_a , находим $\phi_a \partial_k \phi^a \varepsilon^{ijk} x_j = 0$, откуда выводим $\phi_a \partial_k \phi^a = x_k \psi(r)$ или $\phi^a = e^a f(r)$, где e^a - единичный вектор. Затем сворачиваем (4.18b) с x_i и приходим к $\varepsilon^{ila} \phi_l x_i = 0$, откуда

$$\phi_a = x_a k(r) = e_a f(r). \quad (4.19)$$

из которого следует

^{*}) Мы пользуемся стандартным обозначением $\text{diag}[G_1 \otimes G_2]$ для подгруппы $G_1 \otimes G_2$, которая получается отождествлением параметров преобразований G_1 и G_2 .

Из (4.19) следует, что $e^a = x_a/r$, т.е.

$$\phi^a = \frac{x^a}{r} f(r), \quad r = |\vec{x}|. \quad (4.20)$$

Аналогичным образом из (4.18a) получаем: $\phi_0 = \varphi(r)$. В параметризации (3.1) это соответствует киральному полю

$$U(r) = \exp(i \frac{\vec{\Sigma}_a x_a}{r} \theta(r)), \quad (4.21)$$

т.е. инвариантные поля имеют вид "ежового" анзаца Скирма /3/.

Заметим, что поскольку функционал (4.11) зависит только от компонента разложения киральных токов L_i^a по базису $SU(2)$ -алгебры, то из условия инвариантности (4.16), записанного для компонента тока L_i^a , следует инвариантное выражение

$$L_i^a = (\delta_i^a - \frac{x^a x_i}{r^2}) f_1 + \frac{x^a x_i}{r^2} f_2 + \varepsilon^{aik} \frac{x_k}{r} f_3, \quad (4.22)$$

где $f_i = f_i(r)$ - сферически-симметричные функции. Ниже мы убедимся, что на полях вида (4.20) - (4.22) реализуется абсолютный минимум функционала (4.11) при заданном значении топологического заряда Q . Для доказательства этого можно воспользоваться методами прямой минимизации, рассматриваемыми в следующем разделе.

4.3. Метод прямой минимизации

В качестве исходного возьмем функционал энергии в виде (4.9) и возьмем в качестве обобщенных координат угловые координаты $\{\omega\} = \{\theta(\vec{x}), \beta(\vec{x}), \gamma(\vec{x})\}$ на сфере S^3 . Перейдем в расширенное фазовое пространство, вводя избыточные фазовые переменные $\{\sigma\}$ - углы между градиентами $\vec{\nabla}\theta, \vec{\nabla}\beta, \vec{\nabla}\gamma - \{\varphi, \psi, \chi\}$, которые на искомом решении будут некоторыми функциями первоначальных фазовых переменных: $\sigma = \sigma(\{\omega\}, \{\vec{\nabla}\omega\})$. Явные выражения для этих функций можно получить с помощью формул сферической тригонометрии и рис.3, как это сделано в работе /38/.

Дополнительные переменные будем рассматривать как независимые, тогда, обозначив через \mathcal{E} плотность функционала энергии, можно записать очевидное неравенство

$$\min_{\{\omega\}} \int d^3x \mathcal{E}(\{\omega\}) \geq \min_{\{\omega\}} \int d^3x \min_{\{\sigma\}} \mathcal{E}(\{\omega\}, \{\sigma\}), \quad (4.23)$$

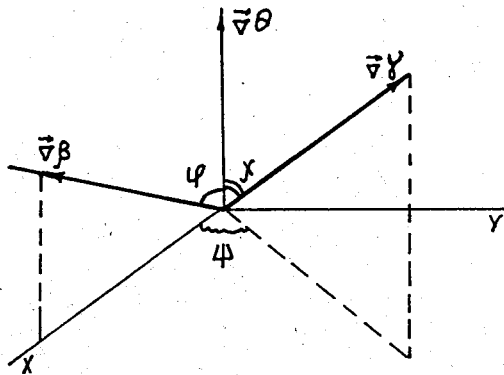


Рис.3

Теорема 4.3. Если существует единственный минимум функционала в правой части неравенства (4.23), т.е. единственный минимум функционала, интегрант которого $E(\{\omega\}, \{\sigma\})$ предварительно проминимизирован по переменным $\{\sigma\}$, и если этот минимум совпадает с минимумом первоначального функционала $\int d^3x E(\{\omega\})$, то такой минимум является абсолютным.

Иллюстративный пример: минимизация сложной функции по "методу оврагов" И.М. Гельфанда.

Рассмотрим сложную функцию $F(x) = f(x, y(x))$, где $y(x)$ — заданная гладкая функция. Вместо непосредственной минимизации $F(x)$ как функции одной переменной x мы предпочитаем минимизировать её как функцию двух переменных x и y . Тогда можно считать, что мы расширили число переменных в задаче, а совокупность $\{x, y\}$ назвать "расширенными переменными". Ситуация, обсуждаемая в теореме I, отвечает следующей картинке (см. рис.4) профиль функции

$f(x, y)$ как поверхности в трехмерном пространстве должен содержать "овраг". В противном случае $f(x, y)$ не имеет минимума по расширенной переменной "y".

Для непосредственного отыскания минимума необходимо двигаться вдоль кривой $y = y(x)$ и найти минимальную точку на профиле CMD , отвечающем движению вдоль пути $y = y(x)$. Однако можно избрать и другую стратегию: спуститься на "дно оврага" (профиль AMB на рис.4) и отыскать минимальную точку, продвигаясь по "дну оврага", т.е. вдоль линии $y = y(x)$. Функция $y = y(x)$ находится как решение уравнения

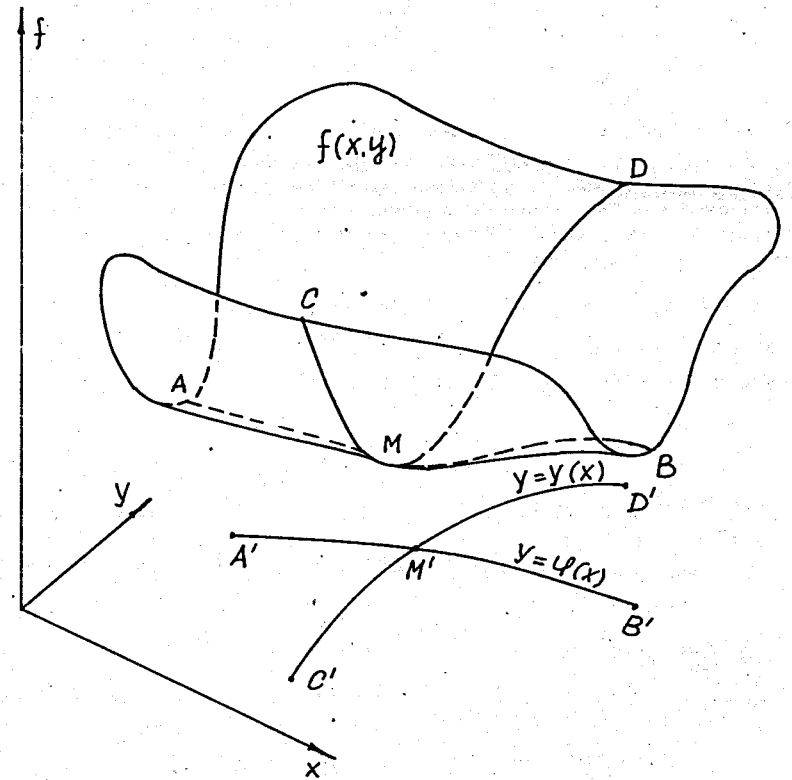


Рис.4

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \tag{4.24}$$

и мы требуем единственности этого решения, отвечающего минимизации $f(x, y)$ по избыточной переменной "y". При этом возможны две ситуации:

- 1°. Кривые $y = y(x)$ и $y = y(x)$ пересекаются до того, как мы достигаем минимальной точки M , двигаясь вдоль линии AMB , и $\min F(x)$ будет располагаться на "склоне оврага".
- 2°. Кривые $y = y(x)$ и $y = y(x)$ пересекаются в точке минимума M . Ситуация, когда кривые не пересекаются вообще, нас не интересует. Чтобы исключить нежелательную ситуацию 1°, мы должны, вначале двигаясь вдоль AMB , найти минимальную точку M , а затем проверить, будет ли эта точка реализовывать минимум функции $F(x) = f(x, y(x))$.

В ситуации, описываемой теоремой 4.3, роль "х" выполняют фазовые переменные $\{\omega\}$, а роль "у" - избыточные переменные $\sigma(\{\omega\}, \{\bar{\nu}\omega\})$. Интегрант $\mathcal{E}(\{\omega\}, \{\sigma\})$ можно рассматривать как аналог $f(x, y)$. Минимизацию интегранта $\mathcal{E}(\{\omega\}, \{\bar{\nu}\omega\})$ можно осуществить обычным путем [35], учитывая то, что он не содержит производных от углов (φ, χ, ψ) , т.е. по этим переменным $\mathcal{E}(\{\omega\}, \{\sigma\})$ минимизируется как обычная функция многих переменных. Аналогом уравнения (4.24) будут уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \chi} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi} = 0; \quad (4.25)$$

и непосредственным расчетом убеждаемся в единственности решения, совместного с граничным условием $\theta(\infty) = 0$:

$$\varphi = \chi = \psi = \pi/2, \quad (4.26)$$

что равносильно условию

$$(\bar{\nu}\theta \cdot \bar{\nu}\beta) = (\bar{\nu}\theta, \bar{\nu}\gamma) = (\bar{\nu}\beta \cdot \bar{\nu}\gamma) = 0. \quad (4.27)$$

В справедливости решения (4.27) можно убедиться и без долгих вычислений, если в (4.II) произвести сдвиг на постоянную, пропорциональную $|Q|$, ввести обозначения

$$\vec{X} = \bar{\nu}\theta; \quad \vec{Y} = \sin\theta \bar{\nu}\beta; \quad \vec{Z} = \sin\theta \sin\beta \bar{\nu}\gamma; \quad \mathcal{E}' = \mathcal{E} \operatorname{sgn} Q \quad (4.28)$$

и записать соответствующий функционал как сумму квадратов:

$$H^{SE} - \frac{12\pi^2 \mathcal{E}}{\lambda \sqrt{2}} |Q| = \int d^3x \left\{ \left(\frac{1}{\lambda \sqrt{2}} \vec{X} + \mathcal{E}'[\vec{Y}, \vec{Z}] \right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda \sqrt{2}} \vec{Y} + \mathcal{E}'[\vec{Z}, \vec{X}] \right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda \sqrt{2}} \vec{Z} + \mathcal{E}'[\vec{X}, \vec{Y}] \right)^2 \right\}. \quad (4.29)$$

Из структуры выражения (4.29) видно, что минимум такого функционала реализуется в случае антипараллельности пар векторов \vec{X} и $[\vec{Y}, \vec{Z}]$, \vec{Y} и $[\vec{Z}, \vec{X}]$, \vec{Z} и $[\vec{X}, \vec{Y}]$, что эквивалентно условию (4.27). Учитывая его, перепишем (4.II) в виде

$$H^{SE} = \int d^3x \left\{ (\bar{\nu}\theta)^2 \left[\frac{1}{2\lambda^2} + \mathcal{E}^2 \sin^2\theta ((\bar{\nu}\beta)^2 + \sin^2\beta (\bar{\nu}\gamma)^2) \right] + \frac{\sin^2\theta}{2\lambda^2} [(\bar{\nu}\beta)^2 + \sin^2\beta (\bar{\nu}\gamma)^2] + \mathcal{E}^2 \sin^4\theta \sin^2\beta (\bar{\nu}\beta)^2 (\bar{\nu}\gamma)^2 \right\} + \quad (4.30)$$

$$\equiv \int d^3x \left\{ (\bar{\nu}\theta)^2 F(|\bar{\nu}\beta|, |\bar{\nu}\gamma|, \theta, \beta) + G(|\bar{\nu}\beta|, |\bar{\nu}\gamma|, \theta, \beta) \right\}.$$

По терминологии иллюстративного примера мы пока только "спустились на дно оврага" и теперь должны продвигаться по нему и искать минимальную точку. Для осуществления этого удобно использовать так называемую сферическую перестройку, что мы и сделаем в следующем параграфе.

§ 5. АБСОЛЮТНЫЙ МИНИМУМ ЭНЕРГИИ МОДЕЛИ СКИРМА

Вначале поясним важность вопроса об абсолютном минимуме энергии модели в свете возможной интерпретации скирмиона как бариона. Если модель допускает существование основного состояния с наименьшей массой для изовекторных полей, принадлежащих первому гомотопическому классу, то это является прямым подтверждением гипотезы Скирма. Напомним хорошо известный факт, что протон - наиболее долгоживущая сильновзаимодействующая частица - имеет наименьшую массу среди всех частиц с нетривиальным барионным числом. Ниже будет показано, что скирмион действительно реализует абсолютный минимум энергии в первом гомотопическом классе. Другой важный для интерпретации вопрос о возможности фермионного описания скирмиона будет рассмотрен ниже - в § 8.

5.1. Метод сферической перестройки.

Одним из методов решения экстремальных задач в геометрической теории функций является метод симметризации, восходящий к Я.Штейнеру [81, 82]. Частным случаем общего метода симметризации Штейнера является метод сферической перестройки, заключающийся в переходе от функции $f(\vec{x})$ к сферически-симметричной монотонной функции $f_R(r)$, где $r = |\vec{x}|$, при условии, что для любого наперед заданного числа $M > 0$

$$\operatorname{mes}\{\vec{x} : f(\vec{x}) \geq M\} = \operatorname{mes}\{r : f_R(r) \geq M\}, \quad (5.1)$$

где mes - мера Лебега. При этом, если исходная функция $f(\bar{x})$ - неотрицательная, монотонно стремящаяся к нулю на пространственной бесконечности, то соответствующая сферическая перестройка $f_R(r)$ называется убывающей. Аналогичным образом, если $f(\bar{x})$ - монотонно возрастающая функция при $|\bar{x}| \rightarrow \infty$, то соответствующая $f_R(r)$ будет называться возрастающей сферической перестройкой. Условие (5.1) есть условие эквивалентности и может быть записано через ступенчатую функцию

$$\Theta(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$$

следующим образом:

$$\int d^3x \Theta(f(\bar{x}) - M) = \int d^3x \Theta(f_R(r) - M). \quad (5.2)$$

Продифференцируем (5.2) по M :

$$\int d^3x \delta(M - f(\bar{x})) = \int d^3x \delta(M - f_R(r)), \quad (5.3)$$

а затем домножим на произвольную функцию $F(M)$ и проинтегрируем по M . В результате придем к полезному соотношению

$$\int d^3x F(f(\bar{x})) = \int d^3x F(f_R(r)), \quad (5.4)$$

выражающему принцип Кавальери. В Дополнении В дана иллюстрация метода сферической перестройки на примере доказательства неравенства

$$\int d^3x |\bar{\nabla} f(\bar{x})|^2 \geq \int d^3x |\nabla_r f_R(r)|^2, \quad (5.5)$$

где ∇_r - радиальная часть оператора $\bar{\nabla}$.

Теперь мы готовы приступить к проверке требований теоремы 4.3. Напомним, что в предыдущем параграфе минимизацией по избыточным переменным $\{r\}$ - углам (φ, χ, ψ) между градиентами $\bar{\nabla}\theta$, $\bar{\nabla}\beta$, $\bar{\nabla}\gamma$ - мы опустили на "дно оврага", описываемое функционалом (4.30).

Введем следующие вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} u(\bar{x}) &= \theta(\bar{x}); \quad w_1(\bar{x}) = \cos^2 \frac{\theta(\bar{x})}{2}; \quad w_2(\bar{x}) = \cos^4 \frac{\theta(\bar{x})}{2}; \\ U_1(\bar{x}) &= \left(\frac{2}{\lambda^2} + 4\varepsilon^2 (\bar{\nabla}\theta)^2 \right) \sin^2 \frac{\theta(\bar{x})}{2} [(\bar{\nabla}\beta)^2 + \sin^2 \beta (\bar{\nabla}\gamma)^2]; \\ U_2(\bar{x}) &= 16\varepsilon^2 \sin^4 \frac{\theta(\bar{x})}{2} \sin^2 \beta (\bar{\nabla}\beta)^2 (\bar{\nabla}\gamma)^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Как показывает анализ поведения решений уравнения движения $\theta(\bar{x})$, все функции $w_i(\bar{x})$ оказываются монотонно возрастающими на интервале $\theta \in [0, \pi]$, а функции $w_i(x)$ - монотонно убывающими.

Теорема 5.1. (Полиа-Сегё) /79, 81/. Рассмотрим три скалярные неотрицательные функции $u(\bar{x}) \geq 0$; $v(\bar{x}) \geq 0$; $w(\bar{x}) \geq 0$, сферические перестройки которых $u_R(r), v_R(r)$ выбираем монотонно убывающими, а $w_R(r)$ - монотонно возрастающей функцией от аргумента $r = |\bar{x}|$. Тогда имеют место следующие неравенства:

$$\int d^3x |\bar{\nabla} u|^2 \geq \int d^3x |\nabla_r u_R|^2, \quad (5.7)$$

$$\int d^3x v(\bar{x}) w(\bar{x}) \geq \int d^3x v_R(r) w_R(r). \quad (5.8)$$

Для применения теоремы 5.1 к функционалу (4.30) воспользуемся функциями (5.6), в терминах которых функционал (4.30) приобретает

$$\begin{aligned} \text{вид } H^{st} &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2\lambda^2} |\bar{\nabla} u|^2 + U_1(\bar{x}) w_1(\bar{x}) + U_2(\bar{x}) w_2(\bar{x}) \right\} \geq \\ &\geq \int d^3x \left\{ \frac{1}{2\lambda^2} |\nabla_r u_R|^2 + U_{1R}(r) w_{1R}(r) + U_{2R}(r) w_{2R}(r) \right\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Таким образом, осуществляя убывающую сферическую перестройку, мы понижаем значение функционала энергии модели Скирма. Справедливость неравенства (5.9) вытекает из вида функций (5.6) и неравенств (5.7), (5.8), так как условия теоремы 5.1 выполнены при $\theta \in [0, \pi]$.

Из вида функций $U_1(\bar{x})$ и $U_2(\bar{x})$ следует, что достаточными условиями для осуществления сферической перестройки $U_1(\bar{x}) \rightarrow U_{1R}(r)$ будут

$$\{ (\bar{\nabla}\beta)^2 = \beta_1^2(r); \quad (5.10)$$

$$\{ \sin^2 \beta (\bar{\nabla}\gamma)^2 = \beta_2^2(r). \quad (5.11)$$

Суммируя все сказанное выше, мы можем утверждать, что при совместной разрешимости условий (5.10), (5.11) и (4.27) функционал в правой части неравенства (4.23) обладает единственным минимумом. Таким образом, для решения вопроса о существовании абсолютного минимума энергии в модели Скирма достаточно установить разрешимость этих условий и проверить совпадение полученного минимума с минимумом левой части (4.23). Этим мы и займемся в следующем разделе.

5.2. Скирмион как абсолютный минимум функционала энергии

Записываем градиенты $\vec{\nabla}\theta$, $\vec{\nabla}\beta$ и $\vec{\nabla}\chi$ в сферических координатах и подставляем их в условия ортогональности (4.27). В результате получим, что фазовые переменные β и χ должны быть функциями только от углов φ и α , т.е.

$$\beta = \beta(\varphi, \alpha); \quad \chi = \chi(\varphi, \alpha). \quad (5.12)$$

Подстановка этих функций в (5.11) и (5.10) приводит к уравнениям

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi} \left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)^2 = \rho_1^2(r)r^2 = \text{const} = C_0; \quad (5.13)$$

$$\sin^2\beta \left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi} \left(\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\right)^2 \right] = \rho_2^2(r)r^2 = \text{const} = C_1. \quad (5.14)$$

Из (5.13) следует, что $\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right) = \text{const} = C_2$, т.е.

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\right)^2 = C_0 - \frac{C_2^2}{\sin^2\varphi}. \quad (5.15)$$

Но постоянную C_2 следует положить равной нулю, т.к. в противном случае при $\sin\varphi=0$ возникает сингулярность в последнем члене. В итоге приходим к функции $\beta = C_3\varphi + C_4$, удовлетворяющей всем соотношениям. Из условия $(\vec{\nabla}\beta, \vec{\nabla}\chi) = 0$ следует равенство

$$\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\chi}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{\partial\beta}{\partial\alpha} \cdot \frac{\partial\chi}{\partial\alpha} = 0.$$

Второй член в этом выражении равен нулю, т.е. $\beta = \beta(\varphi)$, и поэтому $\chi = \chi(\alpha)$. В результате (5.14) сводится к соотношениям:

$$\left\{ \frac{\partial\chi}{\partial\alpha} = \text{const} = C_5; \right. \quad (5.16a)$$

$$\left. \sin^2\beta = C_6 \sin^2\varphi. \right. \quad (5.16b)$$

Поскольку $\beta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$, то из (5.16b) следует $C_6 = 1$ и $\beta = \varphi$. Кроме того, из соотношения (5.16a) видим, что с точностью до постоянного поворота $\chi = m\alpha$, где m — целые числа. Суммируя, заключаем, что (5.10), (5.11) и (4.27) совместны на функциях вида

$$\theta = \theta(r), \quad \beta = \varphi, \quad \chi = m\alpha. \quad (5.17)$$

Подставим функции (5.17), полагая $r = \epsilon\lambda x$, в выражение для энергии (4.9):

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi\epsilon}{\lambda} \int_0^\infty dx \left\{ (\theta')^2 \left(\frac{x^2}{2} + (m^2+1)\sin^2\theta \right) + \frac{m^2+1}{2} \sin^2\theta + \frac{m^2 \sin^4\theta}{x^2} \right\} \quad (5.18)$$

и топологического заряда (4.10):

$$Q = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\theta(0)}^{\theta(\infty)} d\theta \sin^2\theta \int_0^\pi d\varphi \sin\varphi \int_0^{2\pi m} d\alpha. \quad (5.19)$$

Из условия существования сферической перестройки $\theta(\vec{x}) \rightarrow \theta_r(r)$ в теореме 5.1 следует, что $\theta(\vec{x})$ — монотонно убывающая функция, а из требования регулярности члена $\sin^4\theta/x^2$ в (5.18) следует, что $\theta_{\max} = n\pi$, где n — целое число. При этом топологический заряд $Q = mn$.

Получается, что θ может принимать любые целочисленные значения. Но функции W_{1R} и W_{2R} будут монотонно возрастающими только при условии $\theta \in [0, \pi]$, следовательно, для того, чтобы удовлетворить условиям теоремы 5.1, следует полагать $n=1$, т.е. выбирать граничные условия на функцию $\theta(x)$ в виде

$$\theta(0) = \pi, \quad \theta(\infty) = 0. \quad (5.20)$$

Легко видеть, что искомый минимум будет единственным только при $Q = m = 1$. Если, например, $Q = 2$, то есть конфигурация с $m = 2$ и одним максимумом функции $\theta(x)$, равным π , но также и конфигурация с двумя максимумами $\theta = \pi$ и $m = 1$ (два бесконечно разделенных скирмиона с $Q = 1$).

С помощью теоремы 4.2. Коулмена-Пале можно также показать, что $\min \mathcal{E}$ будет инвариантным только при $m = 1$. Для этого в условии инвариантности (4.16) подставим киральное поле в параметризации (3.1), где в выражение для вектора \vec{n} (4.8) внесены функции (5.17). При этом оказывается, что условие инвариантности выполняется только при $m = 1$. Таким образом, все требования теоремы 4.3 можно считать выполненными [38, 83/].

Вывод: На сферически-симметричных функциях

$$\theta = \theta(r), \quad \vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}, \quad r = |\vec{x}|, \quad (5.21)$$

удовлетворяющих граничным условиям (5.20) и в точности совпадающих с "ежовым" анзацем Скирма (скирмион), реализуется абсолютный минимум функционала энергии модели Скирма, соответствующий единичному топологическому заряду $Q = 1$.

В следующем разделе мы выпишем уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала (5.18) и обсудим свойства его решений. Вопрос о существовании решений будет выяснен в § 6.

5.3. Уравнение поля для скирмиона

Из функционала (5.18) при $m=1$ выводим уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\theta''(x^2 + 4\sin^2\theta) = \sin 2\theta \left[1 - 2\theta'^2 + \frac{2\sin^2\theta}{x^2} \right] - 2x\theta'. \quad (5.22)$$

Решение этого уравнения с граничным условием (5.20) может быть получено только численным путем. Структура его была установлена еще Скирмом /4/ и затем неоднократно воспроизводилась разными авторами (см. рис.5).

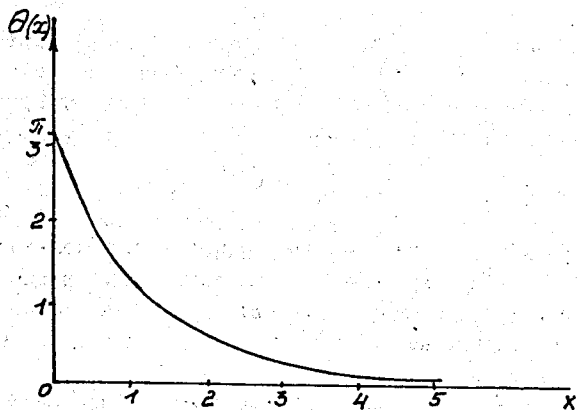


Рис.5

Асимптотическое поведение функции $\theta(x)$ при $x \rightarrow \infty$ легко находится из предельного при $\theta \rightarrow 0$ уравнения

$$x^2\theta'' + 2x\theta' - 2\theta = 0, \quad (5.23)$$

имеющего решение $\theta(x) \sim x^{-2}$. Аналогичным образом при $x \rightarrow 0$ получаем $\theta(x) \sim \pi - 8x$. В численных исследованиях В.П.Нисиченко /84/ была обнаружена интересная зависимость спектра энергии для решений уравнения (5.22) с граничным условием $\theta(0) = N\pi$, $\theta(\infty) = 0$, от величины топологического заряда $Q = N$, выполняющаяся с высокой

точностью (1%) при небольших значениях $N < 10$:

$$E_N \approx \frac{N(N+1)}{2} E_1, \quad (5.24)$$

где E_N - значение энергии на сферически-симметричной подстановке в случае $Q=N$, E_1 - энергия основного состояния с $Q=1$. Зависимость $E(Q)$ подробно изучалась в работе Е.Б.Богомольного и В.А.Фатеева /85/, которые показали, что соотношение (5.24) при $N \rightarrow \infty$ должно быть заменено на следующее:

$$E_N = a_0 N^2 + a_1 N + a_2 + O(1/N). \quad (5.25)$$

Для вычисления первых коэффициентов разложения (5.25) ими был предложен оригинальный метод определения главного члена асимптотики, основанный на выделении "быстрых" и "медленных" переменных в функционале энергии. В итоге было получено: $a_0 = 4,155$, $a_1 = 3,626$.

§ 6. СУЩЕСТВОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ СКИРМИОНОВ

В данном параграфе будут рассмотрены некоторые тонкие вопросы физики скирмионов, связанные с изучением знакоопределенности второй вариации энергии в окрестности солитонного решения. Эта задача тесно связана с проблемой устойчивости солитонов, имеющей первостепенное значение при их квантовании. В самом деле, наиболее разработанным методом квантования солитонов является квазиклассический метод (см. § 10), в основе которого лежит рассмотрение малых квантовых флуктуаций вблизи заданного классического солитонного решения, а также коллективных возбуждений типа вращательных мод. Проблема устойчивости возникает также и при описании взаимодействия скирмионов (солитонов).

6.1. Структура второй вариации стационарных функционалов (обобщение теоремы Хобарта-Деррика)

В данном разделе мы рассмотрим более общие, чем статические, солитонные решения, так называемого стационарного типа. Эти решения будут включать в себя как частный случай решения, зависящие от времени по гармоническому закону. При этом поле φ считается n -компонентным.

Определение 6.1. Солитонное решение $\varphi_0(t, \vec{x})$ называется стационарным, если оно удовлетворяет вариационным уравнениям

$$\delta\mathcal{P}/\delta\dot{\varphi} = 0, \quad \delta\mathcal{P}/\delta\varphi = 0, \quad (6.1)$$

где $\Phi[\psi]$ - аддитивный трансляционно-инвариантный функционал вида

$$\Phi = \int d^3x F(\psi, \dot{\psi}, \partial_i \psi), \quad i=1,2,3. \quad (6.2)$$

Поскольку первое уравнение в (6.1) устанавливает некоторую связь между ψ и $\dot{\psi}$, характерную для гармонических по времени полей, то стационарные решения включают в себя гармонические, как частный случай.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим комплексное скалярное поле $\psi(t, \vec{x})$, удовлетворяющее уравнению

$$\square \psi = f'(|\psi|^2) \psi \quad (6.3)$$

и имеющее структуру

$$\psi_0(t, \vec{x}) = \psi(\vec{x}) e^{-i\omega t}. \quad (6.4)$$

Нетрудно видеть, что эта функция является критической стационарной точкой функционала $\Phi = E - \omega Q$, где E и Q , соответственно, энергия и заряд поля. Выписывая этот функционал в явном виде

$$\Phi = \int d^3x \{ |\dot{\psi}|^2 + |\nabla \psi|^2 + f(|\psi|^2) - i\omega(\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) \}, \quad (6.5)$$

убеждаемся, что он относится к типу (6.2) и соответствующие уравнения (6.1)

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \psi^*} = \dot{\psi} + i\omega \psi = 0 \quad (6.6)$$

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \psi} = -\Delta \psi - i\omega \dot{\psi} + f'(|\psi|^2) \psi = 0 \quad (6.7)$$

действительно устанавливают связь между ψ и $\dot{\psi}$, характерную для полей с гармонической зависимостью от времени.

Нашей целью будет обобщение на случай стационарных солитонов теоремы Хобарта-Деррика, которая, как известно, устанавливает энергетическую неустойчивость статических солитонных решений $\psi_0 = \psi(\vec{x})$ уравнения $\square \psi = f(\psi)$. Напомним, что в этой теореме говорится об отрицательности второй вариации энергии в окрестности статических солитонных решений относительно масштабных возмущений $\delta \psi = x^i \partial_i \psi$.

Мы примем, что существует стационарное солитонное решение $\psi_0 = \psi(t, \vec{x})$, являющееся критической точкой функционала (6.2)

и имеющее достаточно быстро спадающие при $r \rightarrow \infty$ производные:

$$|\nabla^k \psi| = O(r^{-(\frac{k}{2} + \alpha)}), \quad \alpha > 0. \quad (6.8)$$

Тогда справедлива следующая теорема, доказательство которой приведено в Дополнении Г.

Теорема 6.1. /86, 87/. Если стационарное солитонное решение $\psi_0 = \psi$ является критической точкой функционала (6.2), то вторая вариация последнего в точке ψ_0 знакопеременна.

Из теоремы 6.1 вытекает, что если ограничиться аддитивными функционалами Ляпунова вида (6.2) (а функционал Ляпунова с необходимостью должен быть положительно определен в окрестности устойчивого решения), то могут существовать только условно-устойчивые многомерные стационарные солитоны. Это означает, что устойчивость солитонов возможна лишь при некоторых дополнительных ограничениях на начальные возмущения.

Заметим, что в том важном случае, когда солитон наделен топологическим зарядом, подобное ограничение на начальные условия возникает само собой. В результате, для моделей, энергия в которых оценивается снизу некоторой положительной функцией от топологического заряда (см. (4.6)), солитоны, реализующие нижнюю грань энергии, будут устойчивы. На первый взгляд это представляется противоречащим теореме 6.1, поскольку топологический заряд не меняется при непрерывных деформациях поля, и его фиксация, казалось бы, не приводит к каким-либо ограничениям на возмущения. Однако это верно лишь для бесконечно малых возмущений, которые не выводят из заданного гомотопического класса и могут быть непрерывным образом деформированы в нуль. В то же время конечными возмущениями топологический заряд может быть изменен, и такие возмущения не запрещены в условиях теоремы 6.1, поскольку в ней изучается структура второй вариации $\delta^2 \Phi$, являющейся однородным функционалом. Таким образом, фиксация топологического заряда существенно влияет на знакоопределенность второй вариации функционала Ляпунова, чем и разрешается указанное выше кажущееся противоречие.

Попробуем теперь ответить на вопрос о том, достижима ли в заданном гомотопическом классе нижняя грань гамильтониана в модели Скирма. Наличие оценки (4.6) позволяет применить для ответа на него прямые методы вариационного исчисления.

6.2. Прямые методы вариационного исчисления

Поскольку данный раздел содержит некоторые сведения из курсов математического анализа, то мы пользуемся привычными для анализа

обозначениями, Рассмотрим некоторый функционал $f(x)$, заданный в банаховом пространстве $X \ni x$. Будем искать минимум этого функционала. В основе предлагаемого прямого метода лежит обобщение классической теоремы Вейерштрасса о том, что непрерывная функция достигает своего минимума на компактном множестве. Задача заключается в нахождении условий, при которых эта теорема оказывается применимой к функционалам. Если функционал $f(x)$ ограничен снизу, т.е. найдется постоянная a , такая, что $f(x) > a$, то это означает, что существует нижняя грань функционала

$$\inf_{x \in X} f(x) = f_0, \quad (6.9)$$

отсюда же следует, что существует минимизирующая последовательность $\{x_n\}, x_n \in X$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f_0. \quad (6.10)$$

Поэтому первая задача, которая встает перед нами, заключается в построении минимизирующей последовательности $\{x_n\}$, т.е. в нахождении некоторого множества $M \subset X$ с тем свойством, что $x_n \in M$ и последовательность $\{x_n\}$ сходится в M в некотором смысле. Коротко говоря, следует установить существование предельной точки (функции) $x_0 \in M$ у последовательности $\{x_n\}$.

И, наконец, остается выяснить последний вопрос, выполняется ли равенство

$$f(x_0) = f_0. \quad (6.11)$$

Для непрерывных функций равенство (6.11) всегда верно. Однако для функционалов требование непрерывности является слишком ограничительным. Как заметил Лебег, для выполнения (6.11) вполне достаточно более слабого требования - полунепрерывности $f(x)$ снизу в точке x_0 . Напомним, что непрерывность $f(x)$ эквивалентна неравенству

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \epsilon, |h| < \delta(\epsilon). \quad (6.12)$$

В свою очередь, (6.12) эквивалентно двум неравенствам

$$-\epsilon < f(x_0 + h) - f(x_0) < \epsilon \quad (6.13)$$

Определение 6.2. Функция $f(x)$ называется полунепрерывной снизу в точке x_0 , если выполняется лишь первое из неравенств (6.13), или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_0). \quad (6.14)$$

Покажем, что из (6.14) вытекает (6.11). В самом деле, из определения (6.10) минимизирующей последовательности следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f_0 \leq f(x_0), \quad (6.15)$$

поскольку f_0 - нижняя грань $f(x)$. Одновременно из (6.14) выводим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f_0 \geq f(x_0). \quad (6.16)$$

Сравнение (6.15) и (6.16) показывает, что $f(x_0) = f_0$, т.е. (6.11).

Итак, прямой метод состоит из:

- 1) построения минимизирующей последовательности $\{x_n\}, x_n \in M$;
- 2) доказательства сходимости последовательности $\{x_n\}$ к некоторой предельной точке $x_0 \in M$;
- 3) доказательства полунепрерывности функционала $f(x)$ в предельной точке.

Важным частным случаем является рассмотрение функционалов $f(x)$, определенных на гильбертовом пространстве, скажем L_2 . Если выбрать в качестве $M \subset L_2$ шар $\|x\| \leq 1$, то, как известно, множество M слабо компактно (теорема Банаха-Алаоглу /89/), т.е. существует последовательность $\{x_n\}, x_n \in M$, слабо сходящаяся к некоторому вектору $x_0 \in M$. Напомним, что последовательность $\{x_n\}$ называется слабо сходящейся (обозначается $x_n \rightharpoonup x_0$), если для любого $h \in L_2, \lim_{n \rightarrow \infty} (h, x_n) = (h, x_0)$. В связи с этим при поиске минимума функционала $f(x)$ необходимо проверять не просто его полунепрерывность, а более тонкое свойство - слабую полунепрерывность, т.е. неравенство (6.14) для слабо сходящихся последовательностей. При этом оказывается полезной следующая

Теорема 6.2. Положительное скалярное произведение (x, y) двух векторов из L_2 слабо полунепрерывно снизу.

Доказательство. Рассмотрим две положительные слабо сходящиеся последовательности из $L_2: x_n \rightharpoonup x_0, y_n \rightharpoonup y_0$. Нам нужно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) \geq (x_0, y_0). \quad (6.17)$$

Заметим, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ всегда можно считать монотонно возрастающими, так как их можно переопределить сле-

дующим образом:

$$X_n^* = \inf_m \{x_m | m \geq n\}, Y_n^* = \inf_m \{y_m | m \geq n\}.$$

Воспользуемся тождеством

$$(X_n, Y_n) = (X_0, Y_0) + (X_n - X_0, Y_n - Y_0) + (X_n - X_0, Y_0) + (X_0, Y_n - Y_0)$$

и заметим, что в силу слабой сходимости $X_n \rightarrow X_0, Y_n \rightarrow Y_0$

$$(X_n - X_0, Y_0) \rightarrow 0, (X_0, Y_n - Y_0) \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n, Y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (X_n - X_0, Y_n - Y_0) + (X_0, Y_0). \quad (6.18)$$

Так как в силу монотонности $X_n \leq X_0, Y_n \leq Y_0$, то из (6.18) вытекает (6.17). Теорема доказана.

В дальнейшем, применяя теорему (6.2), мы будем стараться представлять функционалы в виде суммы положительных скалярных произведений.

6.3. Доказательство существования сферически-симметричных скирмионов

Рассмотрим гамильтониан (4.9) модели Скирма на ежовой подстановке (4.21), отвечающей топологическому заряду $Q = n$. Для этого сделаем замену переменной $x \in \lambda = r$ и приведем статический гамильтониан к виду $H^{st} = 4\pi(E/\lambda)I[\theta]$, где положено

$$I[\theta] = \int_0^\infty dx \left\{ \theta'^2 \left(\frac{x^2}{2} + 2 \sin^2 \theta \right) + \sin^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{x^2} \right\}. \quad (6.19)$$

При этом киральный угол $\theta(x)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\theta(0) = n\pi, \theta(\infty) = 0. \quad (6.20)$$

Воспользуемся прямым вариационным методом и докажем достижимость $\inf I[\theta]$ в классе функций, удовлетворяющих граничным условиям (6.20). Предварительно установим некоторые априорные оценки на функцию $\theta(x)$. Покажем, в частности, что

$$|\theta'(0)| < C < \infty. \quad (6.21)$$

Для этого предположим противное, что $|\theta'(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$. Полагая $\xi = \int_0^x \theta' dx \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, из уравнения Эйлера-Лагранжа находим

$$\xi \xi'' + \xi'^2 = \xi^2/x^2. \quad (6.22)$$

Решение уравнения (6.22), исчезающее при $x=0$, есть $\xi = Cx$. Это противоречит первоначальному допущению о том, что $\xi'(0) = \infty$. Таким образом, априорная оценка (6.21) доказана.

Установим еще ограничения на поведение $\theta(x)$ и $\theta'(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Для этого сначала заметим, что функционал $I[\theta]$ ограничен сверху, так как, строя минимизирующую последовательность, можно взять, например, $\theta_1(x) = n\pi e^{-x}$, что дает $I[\theta_1] < \infty$. Поэтому имеет место неравенство

$$\int_0^\infty x^2 \theta'^2 dx \leq C_0^2 < \infty \quad (6.23)$$

Отсюда при $\theta > 0$ в силу неравенства Шварца имеем

$$|\theta(b)| \leq \int_0^b |\theta'| dx \leq \left(\int_0^b \frac{dx}{x^2} \right)^{1/2} \left(\int_0^b x^2 \theta'^2 dx \right)^{1/2} < C_0 b^{-1/2}.$$

Таким образом, при $x \geq b > 0$ выполняется неравенство

$$|\theta(x)| < C_0 x^{-1/2}. \quad (6.24)$$

Далее заметим, что уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала (6.19) можно переписать в виде

$$\left[\frac{x}{2} \theta'^2 (x^2 + 4 \sin^2 \theta) - x \sin^2 \theta \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{x^2} \right) \right]' = -\frac{1}{2} x^2 \theta'^2 + \sin^2 \theta (2\theta'^2 + \frac{\sin^2 \theta}{x^2} - 1). \quad (6.25)$$

Проинтегрируем соотношение (6.25) в пределах от a до b :

$$\left[\frac{x}{2} \theta'^2 (x^2 + 4 \sin^2 \theta) - x \sin^2 \theta \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{x^2} \right) \right] = \int_a^b dx \left[-\frac{1}{2} x^2 \theta'^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \theta}{x^2} + 2\theta'^2 - 1 \right) \right] \quad (6.26)$$

Полагая в (6.26) $a \rightarrow 0, b \gg 1$, найдем с учетом (6.21) и (6.24)

$$|\theta'(b)| = O(b^{-3/2}). \quad (6.27)$$

Более тонкое поведение $\theta(x)$ при $x \rightarrow \infty$ восстанавливается при помощи интегральной формы уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\theta(x) = \int_0^{\infty} ds G(x,s) (s^2 + 4 \sin^2 \theta)^{-1} [8 \sin^2 \theta (\theta/s)' - 2 \sin 2\theta (\theta'^2 - \frac{\sin^2 \theta}{s^2}) + \sin 2\theta - 2\theta], \quad (6.28)$$

где использована функция Грина линеаризованной задачи

$$G(x,s) = -\frac{s^3}{3} \begin{cases} s/x^2, & x > s; \\ x/s^2, & x < s. \end{cases}$$

Пользуясь оценкой (6.27), из (6.28) выводим, что $\theta = O(\theta^{-3/2})$, а после повторного применения

$$\theta(\theta) = O(\theta^{-2}), \quad |\theta'(\theta)| = O(\theta^{-3}). \quad (6.29)$$

Теперь мы имеем возможность применить прямой вариационный метод, записав функционал H в виде

$$H = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b \mathcal{H} dx = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty}} H_{ab}.$$

Сначала рассмотрим вариационную задачу на конечном интервале $[a, b]$ с функционалом H_{ab} и граничными условиями

$$\theta(a) = n\pi, \quad \theta(b) = 0. \quad (6.30)$$

В этом случае из оценок (6.21), (6.23) и (6.29) получаем, что можно строить минимизирующую последовательность $\{\theta_k\}$ гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям (6.30) и принадлежащих пространству Соболева $H_1(a, b)$ с нормой

$$\|\theta\| = \left(\int_a^b dx x^2 \theta'^2 + \theta^2(1) \right)^{1/2}, \quad a < 1 < b,$$

что позволяет провести доказательство существования регулярного решения прямым вариационным методом (детали доказательства см. в Дополнении Г, а также в /90/).

§ 7. МУЛЬТИБАРИОННЫЕ СОСТОЯНИЯ

В этом параграфе мы займемся изучением состояний с высшими топологическими зарядами. Имеющаяся здесь информация о структуре скирмионов гораздо более бедная, чем для первого гомотопического класса, так как угловые переменные в общем случае не отделяются. Однако удается установить, что состояния с наименьшей энергией являются аксиально-симметричными. Дается общее обоснование этого результата на при-

мере минимизации некоторого инвариантного функционала (гамильтониана). Заканчивается параграф описанием структуры вращающегося скирмиона.

7.1. Минимум гамильтониана Скирма в высших гомотопических классах

Вновь воспользуемся методом расширения фазового пространства, выбрав в качестве расширенных переменных углы φ, χ, ψ (см. рис. 3).

Фиксируем топологический заряд $Q = N$ и, учитывая оценку (4.6), составим статический функционал $H - \mu |Q|$ согласно (4.9) и (4.10), где $\mu = 6\pi^2 \sqrt{2} \epsilon / \lambda$. Выделим в нем ту часть интегранта, которая зависит от углов:

$$f = -c (\cos \varphi \cos \chi + \sin \varphi \sin \chi \cos \psi)^2 + a \sin^2 \varphi + b \sin^2 \chi - 2d \sin \varphi \sin \chi \sin \psi, \quad (7.1)$$

где обозначено

$$a = \epsilon^2 \sin^2 \theta (\bar{\nabla} \theta)^2 (\bar{\nabla} \beta)^2; \quad b = \epsilon^2 \sin^2 \theta \sin^2 \beta (\bar{\nabla} \theta)^2 (\bar{\nabla} \chi)^2; \\ c = \epsilon^2 \sin^4 \theta \sin^2 \beta (\bar{\nabla} \beta)^2 (\bar{\nabla} \chi)^2; \quad d = \frac{\mu}{4\pi^2} \sin^2 \theta \sin \beta |\bar{\nabla} \theta| |\bar{\nabla} \beta| |\bar{\nabla} \chi|.$$

Заметим теперь, что из интерпретации топологического заряда $Q = N \neq 0$ как степени отображения $R^3 \rightarrow S^3$ вытекает следующее важное свойство угловых переменных на сфере S^3 . Именно: если воспользоваться сферическими координатами r, φ, α , то θ и β должны быть периодическими функциями от α , а χ должно удовлетворять граничному условию

$$\chi(\alpha + 2\pi) = \chi(\alpha) + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (7.2)$$

означающему, что сфера S^3 обходится, по крайней мере, m раз. Из (7.2) вытекает, что $\chi = \chi_1 + \chi_2$, где $\chi_1 = m\alpha$, а χ_2 — периодическая по α функция, не дающая вклада в Q .

Найдем сначала критические точки функции (7.1) по χ и ψ . Так как одновременно это должны быть и критические точки гамильтониана, то в (7.1) достаточно положить $\alpha = 0$, что приводит к уравнениям

$$b \sin 2\chi - 2c \cos \psi (\sin \varphi \cos \chi \cos \psi - \cos \varphi \sin \chi) = 0 \\ \cos \psi \sin \varphi \sin \chi \sin \psi = 0; \quad \cos \psi \equiv \cos \varphi \cos \chi + \sin \varphi \sin \chi \cos \psi.$$

Поскольку $Q \neq 0$, то $\sin \varphi \sin \chi \sin \psi \neq 0$, и единственное
нужное решение этих уравнений есть

$$\cos \chi = \cos \psi = 0 \quad (7.3)$$

или

$$(\vec{\nabla} \theta, \vec{\nabla} \chi) = (\vec{\nabla} \beta, \vec{\nabla} \gamma) = 0. \quad (7.4)$$

С учетом (7.4) функционал $H - M|Q|$ принимает вид

$$H - M|Q| = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2\lambda^2} [(\vec{\nabla} \theta)^2 + \sin^2 \theta (\vec{\nabla} \beta)^2] + \right. \\ \left. + (\vec{\nabla} \chi_1 + \vec{\nabla} \chi_2)^2 \sin^2 \theta \sin^2 \beta \left[\frac{1}{2\lambda^2} + \epsilon^2 ((\vec{\nabla} \theta)^2 + \sin^2 \theta (\vec{\nabla} \beta)^2) \right] + \right. \\ \left. + \epsilon^2 \sin^2 \theta [(\vec{\nabla} \theta, \vec{\nabla} \beta)]^2 + \frac{M}{2\pi^2} \sin^2 \theta \sin \beta [(\vec{\nabla} \theta \cdot \vec{\nabla} \beta) \vec{\nabla} \chi] \right\}. \quad (7.5)$$

Рассуждениями, аналогичными проведенным в разделе 5.3, убеждаемся,
что минимум функционала (7.5) относительно $\vec{\nabla} \chi_2$ достигается, если
векторы $\vec{\nabla} \chi_1$ и $\vec{\nabla} \chi_2$ антипараллельны, т.е., если

$$\chi = \chi(\alpha). \quad (7.6)$$

Из (7.4) и (7.6) выводим, что $\partial_\alpha \beta = \partial_\alpha \theta = 0$, и поэтому уравне-
ние Эйлера-Лагранжа для $\chi(\alpha)$ есть $\partial_\alpha^2 \chi = 0$, что приводит к
аксиально-симметричной конфигурации

$$\theta = \theta(r, \vartheta), \quad \beta = \beta(r, \vartheta), \quad \chi = m\alpha. \quad (7.7)$$

В этом случае $Q = mn$, где $n = \max(\theta/\pi)$.

Нам остается только проверить, что функция (7.1) действительно
имеет минимум в точке (7.3). Для этого составим вторую вариацию f
относительно χ и ψ :

$$\frac{1}{2} \delta^2 f = (\delta \chi)^2 (d \sin \varphi - b - 2c \cos^2 \varphi) + \\ + (\delta \psi)^2 (d \sin \varphi - c \sin^2 \varphi) - \delta \chi \delta \psi c \sin 2\varphi.$$

Условие положительности данной квадратичной формы имеет вид

$$2d \sin \varphi > b + c + (b^2 + c^2 + 2bc \cos 2\varphi)^{1/2}.$$

Его необходимо проверять локально, подставив искомое солитонное ре-
шение.

Посмотрим теперь, какое место среди конфигураций (7.7) занимает
ежевый анзац (4.21). В этом случае, как мы видели раньше (см. § 5),

$$\theta = \theta(r); \quad \beta = -\varphi; \quad \chi = \alpha, \quad (7.8)$$

а топологический заряд равен

$$Q = n = \max(\theta/\pi) = \theta(0)/\pi.$$

Конфигурация (7.8) отвечает критической точке $\varphi = \pi/2$ функции (7.1),
суженной на область (7.3):

$$f(\varphi) = a \sin^2 \varphi + b - 2d \sin \varphi.$$

Соответствующая вторая вариация равна

$$\delta^2 f = 2(\delta \varphi)^2 (d - a)$$

и условие ее положительности сводится к неравенству

$$d > a. \quad (7.9)$$

Как показывают численные данные по профилю функции $\theta(r)$, неравен-
ство (7.9) выполняется только для скирмионов с зарядом $|Q| = 1$.
Это означает, что абсолютный минимум энергии реализуется для высших
гомотопических классов только на аксиально-симметричных полях (7.7)
с $m > 1$ /91/. Для $Q = 2$ (дибарионы) этот факт был проверен
численно, и было получено значение энергии $I,92$ в единицах ϵ_1
("еж", $Q = 1$) /92, 93/.

7.2. 0 критических точках инвариантных функционалов

Обнаруженное нами свойство аксиально-симметричных конфигураций
(7.7) быть состояниями с минимальной энергией не является случайным,
а, скорее, подтверждает довольно общую закономерность, которую мы и
постараемся сформулировать /91/. Дело в том, что во многих задачах
теоретической физики приходится разыскивать критические точки функ-
ционалов $H[\varphi]$ типа энергии, обладающих достаточно высокой сте-
пенью симметрии. Такие функционалы обычно инвариантны относительно
действия некоторой компактной группы G , включающей в себя либо
группу пространственных вращений $SO(3)_S$, либо ее подгруппу
 $SO(2)_S$, а также некоторую внутреннюю группу, в частности $SO(3)_I$
или $SO(2)_I$. Тогда оказывается, что среди полей, реализующих $\inf H$,
выделяются инвариантные поля $\varphi_0(\vec{x})$ со свойством (см. (4.16)):

$$\varphi_0(\vec{x}) = T_g \varphi_0(g^{-1} \vec{x}), \quad g \in G,$$

где T_g - оператор представления группы G .

Особую роль при поиске инвариантных критических точек играют две группы:

$$G_1 = \text{diag}[SO(3)_I \otimes SO(3)_S]; G_2 = \text{diag}[SO(2)_I \otimes SO(2)_S],$$

определяющие соответственно сферически-симметричные и аксиально-симметричные поля. Оказывается, что группы G_1 и G_2 являются максимальными компактными группами, инвариантные поля которых обладают нетривиальными топологическими зарядами /94, 95/. В первом случае поле S^3 , а заряд есть степень отображения. Во втором случае имеется еще одно минимальное многообразие S^2 , и соответствующий заряд - индекс Хопфа отображения $S^3 \rightarrow S^2$ /95/.

Теорема 7.1. /91/ Пусть G - инвариантное поле φ_0 реализует $\min H$ в инвариантном классе. Тогда, если функционал H - выпуклый по производным в точке φ_0 , то поле φ_0 реализует истинный минимум H , т.е. минимум и по отношению к неинвариантным возмущениям.

Доказательство. Составим вторую вариацию H в точке φ_0 :

$$\delta^2 H = (\xi, \hat{K}(\bar{x})\xi), \quad \xi = \delta\varphi = \varphi - \varphi_0,$$

представив ее в виде скалярного произведения в L_2 , где \hat{K} - оператор Якоби функционала H . Из выпуклости H по производным вытекает, что \hat{K} - эллиптический оператор. Из G - инвариантности H следует соотношение: $\hat{K}(\bar{x}) = Tg\hat{K}(g^{-1}\bar{x})Tg^{-1}$,

выражающее G_1 - инвариантность оператора \hat{K} . Последнее означает, что \hat{K} выражается через операторы Казимира \hat{C}_α группы G . Так, для группы G_1 генераторы представления имеют вид $M_i = \hat{J}_i + \hat{I}_i$, где \hat{J}_i - генераторы группы вращений, а \hat{I}_i - внутренние генераторы. Поэтому для G_1 оператор Казимира есть $\hat{C}_\alpha = M_\alpha^2$.

Далее, в силу эллиптичности оператора \hat{K} он должен монотонно зависеть от \hat{C}_α . Поэтому его собственные значения λ растут с ростом собственных значений α_α операторов Казимира \hat{C}_α или $d\lambda/d\alpha_\alpha > 0$, при $\alpha_\alpha > 0$. С другой стороны, для инвариантной собственной функции ξ_0 имеем $\hat{C}_\alpha \xi_0 = 0$, так как $M_\alpha \xi_0 = 0$, в то время как для неинвариантных собственных функций ξ_k будем иметь соотношение $\hat{C}_\alpha \xi_k = \alpha_\alpha \xi_k$ (в силу эллиптичности \hat{K} достаточно рассмотреть положительную ветвь спектра $\alpha_\alpha > 0$). Поскольку по условию теоремы в инвариантном классе спектр \hat{K} положителен, т.е. $\lambda_0 > 0$, то $\lambda > \lambda_0 > 0$. Теорема доказана.

Применяя теорему (7.1) к модели Скирма при $|Q|=1$, можно

видеть, что выпуклость функционала $H - M/Q$ по производным мы устанавливали либо методом расширения фазового пространства, либо прямой минимизацией (§5). Наличие же минимума в инвариантном классе мы доказывали вариационным методом (§6). Что касается состояний с $|Q| > 1$, т.е. G_2 - инвариантных полей, то все указанные пункты еще предстоит проверить. Однако все же можно утверждать, что если аксиально-симметричные решения (7.7) существуют, то они реализуют минимум гамильтониана.

Следует подчеркнуть, что при расширении внутренней группы модели (например, до $SU(3)$) возможности для построения инвариантных полей резко увеличиваются. Пусть, скажем, $U \in SU(3)$. Тогда условие G_1 - инвариантности (см. (4.16)) принимает вид

$$-i[\bar{x}, \bar{v}]U(\bar{x}) + [\bar{\Lambda}, \bar{U}] = 0, \quad (7.10)$$

где $\bar{\Lambda}$ - генераторы соответствующего представления $SO(3)_I$. Имеются два неэквивалентных набора таких генераторов:

$$\bar{\Lambda}_1 = (\lambda_1/2, \lambda_2/2, \lambda_3/2); \quad \bar{\Lambda}_2 = (\lambda_2, \lambda_5, \lambda_7);$$

где λ_α - матрицы Гелл-Манна. В первом случае решение уравнения (7.10) имеет вид

$$U_r = \exp(i\psi\varphi(r)) \exp[i(\bar{\Lambda}, \bar{r})r^{-1}\theta(r)], \quad (7.11)$$

где $3V = \text{diag}[1, 1, -2]$, и задается двумя сферически-симметричными функциями $\varphi(r)$ и $\theta(r)$. Здесь заряд $Q = n$, если $\theta(0) = n\pi$, $\theta(\infty) = 0$. Поэтому (7.11) есть прямое обобщение ежового анзаца (4.21). Во втором же случае решение уравнения (7.10) является более сложным, и было независимо найдено в работах /96, 97/. Оно имеет вид

$$U_2 = e^{i\psi} + i\Lambda e^{-i\psi/2} \cdot \sin\gamma + \Lambda^2 (e^{-i\psi/2} \cos\gamma - e^{i\psi}), \quad (7.12)$$

где $\Lambda = (\bar{\Lambda}_2, \bar{r})r^{-1}$, а ψ и γ суть радиальные функции. При этом топологический заряд равен

$$Q = 2[\gamma(0) - \gamma(\infty)]/\pi = 2K, \quad K \in \mathbb{Z}$$

Таким образом, минимальный заряд для конфигурации (7.12) равен двум (дибарион).

7.3. Вращающийся скирмион

Предваряя содержание § 10, отметим, что в основе работ, в кото-

рых делались попытки описать статические свойства барионов в рамках модели Скирма, лежит квазиклассический метод квантования /98, 99/, позволяющий добиться расхождения с опытом в среднем около 15%. Суть метода состоит в описании вращательных возбуждений скирмиона с помощью подстановки Виттена

$$U(t, \bar{x}) = A(t) U_0(\bar{x}) A^{-1}(t), \quad (7.13)$$

где $A(t) \in SU(2)$, $U_0(\bar{x})$ — ежовый анзац (4.23). Однако, подобная реализация вращения скирмиона обладает рядом существенных недостатков. Прежде всего, образ недеформированного тела, используемый в (7.13), плохо согласуется с моделью "пионной жидкости", лежащей в основе исходных рассуждений Скирма, и, наконец, подстановка (7.13) не является решением уравнений движения /100/.

В развитие этих замечаний мы попытаемся рассмотреть вращение скирмиона, согласованное с уравнениями движения и приводящее к деформации статической конфигурации. Конкретной реализацией такого движения может служить стационарное вращение вокруг оси Z , задаваемое подстановкой $\partial_z \rightarrow -\omega \partial_z$ или $d \rightarrow d - \omega t$. Эффективно это приводит к следующему преобразованию лагранжиана:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & - \left[\frac{1}{2\lambda^2} + \varepsilon^2 \sin^2 \theta \sin^2 \beta \left(\frac{1}{z^2 \sin^2 \varphi} - \omega^2 \right) \right] + \\ & \times \left[(\partial_z \theta)^2 + \frac{1}{z^2} (\partial_\varphi \theta)^2 + \sin^2 \theta \left((\partial_z \beta)^2 + \frac{1}{z^2} (\partial_\varphi \beta)^2 \right) \right] - \\ & - \frac{1}{2\lambda^2} \sin^2 \theta \sin^2 \beta \left(\frac{1}{z^2 \sin^2 \varphi} - \omega^2 \right) - \frac{m_\pi^2}{\lambda^2} (1 - \cos \theta) - \\ & - \varepsilon^2 z^2 \sin^2 \theta (\partial_z \theta \partial_z \theta - \partial_z \beta \partial_\varphi \theta)^2, \end{aligned} \quad (7.14)$$

где θ и β — функция от z, φ . Кроме того, к лагранжиану добавлен массивный пионный член, пропорциональный $(1 - \cos \theta)$. Его необходимость будет видна из дальнейшего.

Из структуры лагранжиана (7.14) видно, что после перехода к безразмерным переменным

$$z \rightarrow z \varepsilon \lambda; \quad \omega \rightarrow \omega / \varepsilon \lambda; \quad m_\pi \rightarrow m / \varepsilon \lambda,$$

возникает типичная комбинация $1 - \omega^2 z^2 \sin^2 \varphi$, содержащая ω^2 . Это означает, что для $z \ll \omega^{-1}$ можно воспользоваться разложением по ω^2 как по малому параметру, выбрав в качестве нулевого приближения сферически-симметричный солитон:

$$\theta \approx \theta_0(z) + \omega^2 \theta_1(z, \varphi), \quad \beta \approx \varphi + \omega^2 \beta_1(z, \varphi). \quad (7.15)$$

При этом возмущении θ_1 и β_1 можно представить в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\theta_1 = \sum_0^\infty a_n(z) P_{2n}(\varphi); \quad \beta_1 = \sum_1^\infty b_n(z) P'_{2n}(\varphi).$$

Если ограничиться лишь квадратичными по a_n, b_n членами в лагранжиане, то оказывается, что единственными нетривиальными амплитудами являются a_0, a_1, b_1 . Таким образом, в этом приближении эффективно отделяются угловые переменные.

Наконец, отметим, что для $z \gg \omega^{-1}$ уравнения движения близки к линейным. Поэтому выполним замену переменных

$$X = \sin \theta \cos \beta; \quad Y = \sin \theta \sin \beta$$

и ограничимся в лагранжиане членами четвертой степени по X, Y . При этом решение (7.15) согласуется с асимптотическим поведением вида

$$X = \cos \varphi (a + b \cos^2 \varphi), \quad Y = \sin \varphi (c + d \cos^2 \varphi), \quad (7.16)$$

где a, b, c, d — радиальные функции, такие, что при $z \rightarrow \infty$

$$X \sim \exp(-mz)/z; \quad Y \sim \exp(-m'z)/z; \quad m' = (m^2 - \omega^2)^{1/2}.$$

Сшивая поля (7.15) и (7.16) на некотором радиусе $z = z_0$, можно добиться хорошей аппроксимации истинной полевой конфигурации.

Следует подчеркнуть, что скирмион должен вращаться достаточно медленно, чтобы было $\omega < m$, так как в противном случае конфигурация становится нестабильной (начинается излучение). Действительно, при $\omega > m$ возникает типичная радиационная асимптотика

$$Y \sim (m''z)^{-1} \exp(im''z), \quad m'' = (\omega^2 - m^2)^{1/2}.$$

Так как поля с такой асимптотикой не являются квадратично интегрируемыми, то при $\omega > m$ солитонная конфигурация невозможна (энергия поля бесконечна). Это означает, что в таком критическом режиме скирмион нестабилен и начинает излучать пионы. Следует подчеркнуть, что в энергию вращательного возбуждения значительный вклад дает область больших расстояний. Критичность этого вклада особенно заметна при $\omega \rightarrow m$, когда $m'' \rightarrow 0$, и скирмион имеет наименьшую убываю-

тую асимптотику для компоненты Y . По-видимому, для нуклона можно считать $\omega \ll m$, так как асимптотика $\theta \sim \exp(-mz)/z$ согласуется с потенциалом однопионного обмена. Что же касается более высоких возбуждений (Δ - резонанс), то здесь уже $\omega \lesssim m$ и условие излучения становится существенным ограничивающим фактором. Можно высказать надежду, что использование во вращающемся анзаце Виттена (7.13) вместо $U_0(\vec{x})$ описанной выше аксиально-симметричной структуры деформированного скирмиона улучшит согласие предсказаний модели Скирма с опытом.

§ 8. СКИРМИОН КАК ФЕРМИОН

Вопрос о спине скирмиона является ключевым в плане возможных физических интерпретаций модели. Действительно, для того, чтобы в рамках модели Скирма получить разумное описание основных характеристик барионов, мы должны понять, в каком смысле солитон, возникающий как коллективное возбуждение бозонных полей, можно рассматривать как фермион.

Осознавая важность этого вопроса, Скирм обращается к нему уже в двумеризованной модели и, предвосхищая результат С.Коулмена /18/, устанавливает соответствие между бозонными полями синус-Гордон модели и фермионными полями массивной модели Тирринга /10/. После появления топологической трактовки спина - "спинорных структур" на полево-многообразии по Д.Финкельштейну /101, 108/, Скирм возвращается к вопросу о спине скирмиона. Он консультирует по этой проблеме Дж.Ульямса, выполняя дипломную работу /103/ по строгому доказательству существования спинорной структуры в трехмерной модели, а затем в работе /12/ указывает способ задания коллективных координат, позволяющий в низших порядках теории возмущений получить в качестве квазиклассического уравнения движения скирмиона уравнение типа Дирака.

Конструктивный ответ на вопрос о спине скирмиона был дан в работах Е.Виттена /22, 23/ (см. также работу /104/), который построил в явном виде двузначные функционалы Д.Финкельштейна на основе члена Весса-Зумино. Это построение и будет основным предметом данного параграфа, но вначале обсудим трактовку спина по Д.Финкельштейну.

8.1. Двузначные функционалы Финкельштейна

Классические поля, рассматриваемые как отображения (2.1), должны быть однозначными относительно преобразований из группы Пуанкаре и, в частности, относительно пространственных $SO(3)$ -вращений. В то же время спиноры характеризуются двузначностью относительно

поворотов на угол 2π . С точки зрения теории гомотопий наличие спинорных волновых функций связано с фактом двусвязности группы $SO(3)$, т.е.

$$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2, \quad (8.1)$$

где $\pi_1(SO(3))$ - фундаментальная группа петель (замкнутых путей) на многообразии $SO(3)$, \mathbb{Z}_2 - абелева группа целых чисел по модулю 2, состоящая из элементов $\{1, -1\}$, что соответствует двум возможным квантования по Ферми-Дираку и Бозе-Эйнштейну.

Переходя к квантовой теории, мы говорим, что амплитуда вероятности получить в результате измерения в момент времени t значение поля $\phi(\vec{x})$ выражается комплекснозначным функционалом $\Psi[\phi(\vec{x}, t)]$, непрерывным по ϕ . Эволюцию квантовой системы можно определить по Фейнману:

$$\Psi[\phi(\vec{x}, t)] = \int \mathcal{D}[\phi] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int dt \mathcal{L}[\phi]\right\} \Psi[\phi(\vec{x}, 0)], \quad (8.2)$$

где $\mathcal{L}[\phi]$ - классический лагранжиан; $\mathcal{D}[\phi]$ - функциональная квазимера, и интегрирование ведется по всем предсториям, которые начинаются на конфигурации $\phi(\vec{x}, 0)$ и заканчиваются конфигурацией $\phi(\vec{x}, t)$. Вспоминая определение гомотопии из § 2, легко понять, что вклад в выражение (8.2) будут давать лишь поля, гомотопные полю $\phi(\vec{x}, 0)$, т.е. принадлежащие одному из гомотопических классов $[\chi, \phi]$.

Д.Финкельштейн /101/ предложил считать функционалы $\Psi[\phi(\vec{x}, t)]$ двузначными в следующем смысле: пусть $\phi_1 \in [\chi, \phi]_i$, тогда в этом гомотопическом классе должен существовать путь ρ , начинающийся и заканчивающийся на отображении ϕ_1 , такой, что значение функционала $\Psi[\phi]$ вдоль ρ меняется непрерывным образом и не возвращается к своему первоначальному значению в конечной точке пути. Однако, если вычислить значение $\Psi[\phi]$ при обходе этого пути дважды, т.е. при прохождении пути ρ^2 , мы должны получить первоначальное значение $\Psi[\phi]$. Другими словами, в $[\chi, \phi]_i$ должен существовать нетривиальный (не стягиваемый в точку) путь ρ , такой, что путь ρ^2 - тривиален. Это напоминает стандартную ситуацию, когда фермионное поле изменяет свой знак при повороте на 2π , а бозонное поле, составленное из двух фермионных, знака не изменяет.

На первый взгляд, понятие о двузначных, а в общем случае многозначных функциях и функционалах противоречит нашим традиционным представлениям. Однако, как выяснилось, необходимость введения таких

понятий возникает во многих физических задачах, когда полевые уравнения теории калибровочно-инвариантны, а соответствующий им лагранжиан - нет. В этих случаях действие S является многозначным функционалом и открытие этого эффекта принадлежит С.П.Новикову /105/, построившему для таких функционалов аналог теории Морса. Ряд физических примеров такого рода приводится в его обзоре /106/. Требования калибровочной инвариантности экспоненты от многозначного действия S приводит к эффекту квантования параметров, задающих калибровочное преобразование /107/. Мы подробно остановимся на одном из таких примеров в следующем разделе. Отметим еще, что многозначные функционалы превращаются в однозначные при переходе от гомотопических классов $[X, \varphi]_L$ к их универсальным накрытиям $q([X, \varphi]_L)$, элементами которых являются классы эквивалентных путей (см. определение накрывающего пространства в Дополнении Б).

Как уже говорилось в §2 (см. также Дополнение Б), структура путей в гомотопическом классе $[X, \varphi]_L$, характеризуется фундаментальной группой $\pi_1([X, \varphi]_L)$. При этом в силу теоремы Уайтхеда между фундаментальными группами разных гомотопических классов имеет место изоморфизм

$$\pi_1([X, \varphi]_L) = \pi_1([X, \varphi]_J), \quad i \neq j. \quad (8.3)$$

Поэтому нам достаточно выяснить ситуацию в одном из классов, например, в $[X, \varphi]_1 = \Sigma_1$.

Как показал Д.Финкельштейн /95/, необходимым и достаточным условием существования двузначных функционалов на Σ_1 является наличие изоморфизма

$$\pi_1(\Sigma_1) \simeq \mathbb{Z}_2. \quad (8.4)$$

Однако этого еще недостаточно для наличия "спинорной структуры". Вторым условием является нетривиальность путей, начинающихся и заканчивающихся в точке $\phi_0 \in \Sigma_1$, которые соответствуют вращению на угол 2π . При этом из второго условия следует наличие изоморфизма (8.4), однако условие (8.4) легко проверяется непосредственно.

В силу теоремы Уайтхеда (8.3) вычисление группы $\pi_1(\Sigma_1)$ может быть сведено к вычислению группы $\pi_1(\Sigma_0)$, где Σ_0 - гомотопический класс отображений с тривиальным зарядом. К классу Σ_0 принадлежат, в частности, постоянные отображения в фиксированную точку $\phi_0 \in \Phi$:

$$\phi(\bar{x}) = \phi_0, \quad \forall \bar{x} \in R^3. \quad (8.5)$$

С другой стороны, вычисление $\pi_1(\Sigma_0)$ можно свести к вычислению

группы $\pi_4(\Phi)$, т.е. к табличному результату (см. Дополнение Д). В случае модели Скирма $\Phi = S^3$, $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$, следовательно, $\pi_1(\Sigma_1) = \mathbb{Z}_2$, т.е. модель допускает существование двузначных функционалов.

Выкладки, необходимые для проверки второго условия, воспроизводятся согласно работе Уильямса /103/ в Дополнении Д. При этом замкнутый путь в Σ_1 определяется как непрерывная последовательность отображений типа (2.8):

$$\phi(\lambda) = \phi_0(\lambda) + i \tau \cdot \phi(\lambda), \quad (8.6)$$

где λ - параметр, а $\phi_0(\lambda)$ и $\phi^a(\lambda)$ определяются через стереографическую проекцию:

$$\phi_0(\lambda) = \frac{\vec{r}^2 - r_0^2}{\vec{r}^2 + r_0^2}; \quad \phi^a(\lambda) = \frac{2r\lambda^b}{\vec{r}^2 + r_0^2} R^{ab}(\lambda). \quad (8.7)$$

Здесь R^{ab} - матрица 3-мерных вращений. Оказалось, что так описанный путь, соответствующий вращению на угол 2π , будет нетривиальным лишь при $\lambda = 1/2$.

В этом состоит топологическое доказательство того, что скирмион обладает "полуцелым спином", т.е. его можно трактовать как фермион. Отметим, что построения Д.Финкельштейна и Уильямса в равной мере можно считать доказательством существования "полуцелого спина" в любых σ -моделях с полевым многообразием $\Phi = S^3 = SU(2)$, т.к. явный вид лагранжиана Скирма нигде не использовался. Не было дано и явного вида двузначных функционалов. Виттен /22/ показал, как эта задача может быть решена по аналогии с задачей о нахождении действия для электрона в поле монополя Дирака. Этот пример мы и обсудим в следующем разделе.

8.2. Многозначное действие для электрона в поле монополя Дирака

Задача о движении электрона с зарядом e в поле монополя Дирака с магнитным "зарядом" μ породила в физике целый ряд новых понятий и идей. Прежде всего, упомянем результат И.Е.Тамма /108/, который, исходя из уравнения Шредингера, показал, что система "электрон-монополь" обнаруживает уже в нерелятивистском случае фермионное поведение (обладает полуцелым угловым моментом) при условии, что $e\mu = \frac{1}{2}$. Исследования Т.Ву и Ч.Янга /109/ привели к понятию неинтегрируемого фазового множителя, а также продемонстрировали успешное применение в физике теории расслоенных пространств. Для нас эта задача представляет интерес тем, что в ней впервые были введены в физику многозначные функционалы.

Пусть электрон движется по единичной сфере $\vec{r}^2 = 1$ в отсутствие магнитного поля ($\vec{B} = 0$). Тогда классический лагранжиан такой системы

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \eta(\vec{r}^2 - 1),$$

где η — множитель Лагранжа. Соответствующие уравнения движения (после исключения η) принимают вид

$$m \ddot{x}_i + m x_i \left(\sum_{l=1}^3 \dot{x}_l^2 \right) = 0. \quad (8.8)$$

Уравнение (8.8) инвариантно относительно отражений пространственных координат и времени по отдельности:

$$P: t \rightarrow -t; \quad x_i \rightarrow -x_i. \quad (8.9)$$

Магнитный монополяр создает на сфере $\vec{r}^2 = 1$ магнитное поле $\vec{B} = \mu \vec{r} / r^3 = \mu \vec{r}_0$, где $\vec{r}_0 = \vec{r} / r$, что приводит к добавлению силы Лоренца в правую часть (8.8):

$$m \ddot{x}_i + m x_i (\dot{\vec{r}}^2) = e [\dot{\vec{r}} \cdot \vec{B}]_i = e \mu \epsilon_{ijk} \dot{x}_j x_k. \quad (8.10)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (8.10) инвариантно уже только относительно комбинированной четности, т.е. одновременных преобразований (8.9).

Многозначный функционал действия возникает здесь при попытке восстановить лагранжиан по уравнению (8.10). Добавка простейшей комбинации вида $\epsilon_{ijk} \dot{x}_j x_k$ не приводит к успеху, т.к. она попросту тривиальна. Поэтому обычно вводят векторный потенциал \vec{A} по правилу

$$\vec{B} = [\vec{v}, \vec{A}] \quad (8.11)$$

и тогда соответствующее (8.10) действие может быть записано в виде

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \eta(\vec{r}^2 - 1) + e (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) \right\}. \quad (8.12)$$

Поскольку мы рассматриваем поля монополя, то $\vec{v} \cdot \vec{B} \neq 0$. Но тогда в силу (8.11) потенциал \vec{A} сингулярен на R^3 (нить Дирака). При этом оказывается, что уравнение (8.10), как содержащее \vec{B} , нечувствительно к градиентным преобразованиям

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{v} \phi, \quad (8.13)$$

хотя соответствующее действие S не является калибровочно-инвариантным и при преобразованиях (8.13) изменяется:

$$S' = S + e \int (\vec{v} \phi \cdot d\vec{r}) = S + e \int d\phi. \quad (8.14)$$

Если в классической физике такая неинвариантность не существенна, т.к. вся информация о системе содержится в уравнении движения, то в квантовом случае амплитуда перехода (по Фейнману) выражается функциональным интегралом

$$Z(t_2 - t_1) = \int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} \mathcal{D}[\vec{r}(t)] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[\vec{r}(t)] \right\} \quad (8.15)$$

и ответ существенно зависит от выбора калибровки.

Для оценки неоднозначности действия (8.12) рассмотрим замкнутый путь электрона на сфере, положив $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$, и вычислим вклад взаимодействия Лоренца в действие в двух различных калибровках. Имеем

$$e \int_{\mathcal{C}} dt (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r})) = e \oint_{\mathcal{C}} (\vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}), \quad (8.16)$$

где \mathcal{C} — замкнутый контур, лежащий на замкнутой поверхности (см. рис. 6). Контур \mathcal{C} ограничивает область $D^+ \in S^2$, а при выборе противоположной ориентации ограничивает область $D^-: S^2 = D^+ \cup D^-$.

Для вычисления интеграла в (8.16) применим теорему Стокса и сведем контурный интеграл к поверхностному. Однако это возможно, если подынтегральное выражение не содержит особенностей. Это обстоятельство и определяет требуемый выбор калибровок: мы выбираем калибровку таким образом, что все особенности \vec{A} лежали в D^- , а интегрируем по D^+ или же поступаем наоборот. Тогда мы имеем право записать

$$\begin{aligned} e \oint_{\mathcal{C}} (\vec{A}_1 \cdot d\vec{r}) &= e \int_{D^+} (d\vec{S} \cdot \text{rot} \vec{A}_1) = e \int_{D^+} (d\vec{S} \cdot \vec{B}_1), \\ e \oint_{\mathcal{C}} (\vec{A}_2 \cdot d\vec{r}) &= e \int_{D^-} (d\vec{S} \cdot \text{rot} \vec{A}_2) = -e \int_{D^-} (d\vec{S} \cdot \vec{B}_2), \end{aligned} \quad (8.17)$$

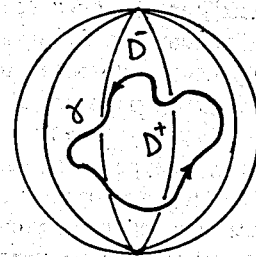


Рис. 6

где знак минус во втором соотношении (8.17) связан с выбором противоположной ориентации. На основании (8.17) находим изменение действия S при переходе от одной калибровки к другой:

$$\Delta S = e \int_{D^+ D^-} (d\vec{S} \cdot \vec{B}) = e \int_V d^3r \operatorname{div} \vec{B} = 4\pi e \mu, \quad (8.18)$$

где V - объем, ограниченный поверхностью S^2 . Соответственно, подставляя (8.17) в (8.15) и считая, что в обеих калибровках мы должны получить непротиворечивые ответы, имеем очевидное условие

$$\exp\left\{\frac{ie}{\hbar} \int_{D^+} (d\vec{S} \cdot \vec{B})\right\} = \exp\left\{-\frac{ie}{\hbar} \int_{D^-} (d\vec{S} \cdot \vec{B})\right\} \quad (8.19)$$

или

$$\exp\left\{\frac{ie}{\hbar} \int_{D^+ D^-} (d\vec{S} \cdot \vec{B})\right\} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta S\right) = 1.$$

Отсюда и из (8.18) следует условие квантования Дирака

$$\frac{1}{\hbar} \Delta S = 2\pi n; \quad e\mu = \frac{n}{2} \hbar. \quad (8.20)$$

Таким образом, мы действительно убедились в том, что многозначные функционалы типа (8.12) могут возникать в простейших физических ситуациях, если действие не обладает калибровочной симметрией соответствующих классических уравнений. При этом естественным образом возникает условие квантования физических параметров ($e\mu$), задающих калибровочное преобразование.

В следующем разделе мы, следуя Виттену /22/, распространим изложенную схему на случай модели Скирма.

Сделаем еще ряд замечаний топологического характера.

1. Для корректного определения векторного потенциала монополя A нам понадобилось рассматривать области D^+ и D^- с двумя различными калибровками. Это отражение известного факта, что атлас на многообразии сферы S^2 должен состоять как минимум из двух карт. Условие калибровочной инвариантности выражает требование гладкой согласованности этих карт в атласе.

2. Замкнутый путь γ на многообразии сферы S^2 можно рассматривать как образ окружности S^1 . Калибровочные преобразования $U(t) = \exp\{i\psi(F(t))\}$ образуют группу $U(1) \simeq SO(2)$, элементы которой, зависящие от t , можно рассматривать как отображения S^1 (компактифицированной временной оси R^1) в группу $SO(2)$. Связность пространства таких отображений (см. Дополнение В) определяется фундаментальной группой $\pi_1(SO(2)) \simeq \mathbb{Z}$, т.е. каждому гомотопическому классу таких отображений мы можем сопоставить

целое число $Q=n$ (степень отображения Понтрягина-Черна). Именно эти целые числа и присутствуют в условии квантования Дирака (8.20), и соответствующее замкнутым путям многозначное действие (8.14) можно записать в виде

$$S' = S + e \int d\phi = S + 2\pi n e Q. \quad (8.21)$$

8.3. Член Весса-Зумино и реализация двузначных функционалов Финкельштейна по Виттену

Несколько забежав вперед и вторгаясь в материал следующего параграфа, расскажем о том, как Виттен обнаружил в квантовой хромодинамике проблему, аналогичную изученной в предыдущем разделе.

В 1974 году т'Хофт /110/ показал, что безразмерным параметром для теории возмущений в низкоэнергетической области KXD может служить $1/N_c$, где N_c - число цветов, и что в пределе большого числа цветов ($N_c \rightarrow \infty$) KXD может рассматриваться как некоторая полевая мезонная теория, эквивалентная в низкоэнергетической области нелинейной сигма-модели со спонтанно нарушенной симметрией. Это побудило Виттена /22/ к изучению симметрий σ^- -модели, и он обнаружил, что простейшая из них, с лагранжианом типа (см. (3.7))

$$L = \int \mathcal{L}_{(2)} d^3x = -\frac{F_\pi^2}{4} \int Sp L^2 \mu d^3x, \quad (8.22)$$

допускает избыточную симметрию, которой не было в исходном лагранжиане KXD . В KXD пионы трактуются как псевдоскаляры, т.е. при преобразовании четности

$$P: \pi^a(\vec{x}, t) \rightarrow -\pi^a(-\vec{x}, t). \quad (8.23)$$

Будем рассматривать стандартную KXD с тремя ароматами. В этом случае лагранжиан (8.22) инвариантен относительно глобальной группы $U(3)_L \otimes U(3)_R$.

Киральное поле $U(\vec{x}, t)$ принимает теперь значения в $SU(3)$

$$U(\vec{x}, t) = \exp\left\{\frac{i}{F_\pi} \lambda^a \pi^a(\vec{x}, t)\right\}; \quad a = 1, 2, \dots, 8, \quad (8.24)$$

где λ^a - матрицы Гелл-Манна, F_π - константа пионного распада, $\{\pi^a(\vec{x}, t)\}$ - псевдоскалярный октет мезонов ($\pi^+, \pi^-, \eta, K^+, K^-, \bar{K}^0, K^0$).

Из (8.23) и определения (8.24) следует

$$PU(\vec{x}, t)P^{-1} = U^+(\vec{x}, t). \quad (8.25)$$

Можно рассматривать операцию P как комбинированную четность:

$$P: \vec{x} \rightarrow -\vec{x}; t \rightarrow t; U \rightarrow U^+ = U^{-1}; \quad (8.26)$$

в том смысле, что она состоит из двух операций:

$$P = P_0(-1)^{N_B}; P_0: \vec{x} \rightarrow -\vec{x}, t \rightarrow t; (-1)^{N_B}: U \rightarrow U^+ \quad (8.27)$$

Обозначение $(-1)^{N_B}$ для второй операции четности связано с тем, что из разложения (8.24) в ряд

$$U(\vec{x}, t) = 1 + \frac{2i}{F\mathcal{F}} \sum_{a=1}^{\infty} \lambda^a \mathcal{F}^a + \dots$$

следует, что операция $U \rightarrow U^+$ эквивалентна $\mathcal{F}^a \rightarrow -\mathcal{F}^a$, т.е. это операция, подсчитывающая число бозонов по модулю 2, откуда и обозначение $(-1)^{N_B}$, где N_B - число бозонов.

Так же, как и в задаче о заряде в поле монополя, лагранжиан (8.22) инвариантен относительно каждого из преобразований четности P_0 и $(-1)^{N_B}$. Исходный же лагранжиан KXD инвариантен только относительно комбинированной четности P . Для исключения избыточных симметрий Виттен /22/ предложил воспользоваться тем же приемом, т.е. добавить в уравнение движения $\tilde{\sigma}$ -модели

$$\frac{1}{8} F_{\mathcal{F}}^2 (\partial_{\mu} L^{\mu}) = 0 \quad (8.28)$$

такой $U(3) \otimes U(3)_R$ - инвариант, чтобы нарушились избыточные P_0 и $(-1)^{N_B}$ симметрии, но сохранилась симметрия относительно P . Для этого естественно воспользоваться тензорной плотностью Леви-Чевиты $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$, т.е. вместо (8.28) выбрать уравнение вида

$$\frac{1}{8} F_{\mathcal{F}}^2 \partial_{\mu} L^{\mu} + \eta \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} L^{\mu} L^{\nu} L^{\lambda} L^{\rho} = 0. \quad (8.29a)$$

Действительно, при этом P_0 -симметрия нарушается, т.к.

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x}; \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \rightarrow -\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}; \partial_{\mu} \rightarrow \partial^{\mu}, L^{\mu} \rightarrow L_{\mu}$$

и уравнение (8.29) преобразуется в

$$\frac{1}{8} F_{\mathcal{F}}^2 \partial^{\mu} L_{\mu} - \eta \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} L_{\mu} L_{\nu} L_{\lambda} L_{\rho} = 0. \quad (8.29b)$$

В то же время, применяя операцию $(-1)^{N_B}$:

$$\mathcal{F}^a \rightarrow -\mathcal{F}^a: U(\vec{x}, t) \rightarrow U^+(\vec{x}, t); L_{\mu} \rightarrow R_{\mu} \equiv -U L_{\mu} U^+;$$

с учетом соотношения

$$\partial^{\mu} R_{\mu} + U \partial^{\mu} L_{\mu} U^+ = 0$$

из (8.29b) приходим к (8.29a). Таким образом, избыточные симметрии действительно нарушаются, а требуемая комбинированная четность сохраняется. Так же, как и в задаче предыдущего раздела, здесь возникает проблема восстановления по уравнению (8.29a) соответствующего действия, т.к. простейший член, который можно было бы добавить к (8.22)

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} Sp[L_{\mu} L_{\nu} L_{\lambda} L_{\rho}], \quad (8.30)$$

тривиален в $(3+1)$ - измерении. В самом деле в выражении под знаком Sp допустима циклическая перестановка токов, а тензор $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ полностью антисимметричен.

Для построения нетривиального действия, отвечающего добавочному члену в (8.29), следуя Виттену /22/, введем фиктивное 5-е измерение и будем считать, что наша $\tilde{\sigma}$ -модель вложена в 5-мерное пространство.

Тогда аналогом пути S^1 на S^2 в задаче "заряд-монополь" будет сфера S^4 на многообразии S^5 . На самом деле следовало бы рассматривать квазисферу $S^3 \otimes S^1$, которая получается компактификацией пространства Минковского $R^3 \otimes R^1$: т.к. $U(\vec{x}, t) \rightarrow 0$, при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, то $R^3 U\{\infty\} = S^3$, а т.к. $U(\vec{x}, \infty) = U(\vec{x}, -\infty)$, то $R^1 U\{\infty\} = S^1$. Однако наш упрощенный вариант изложения потребует меньшего привлечения фактов из топологии, но приведет к тем же результатам. Мы считаем, что киральные поля заданы на $S^3 \otimes S^1 \approx S^4$ и рассматриваем их как отображения

$$U(x): S^4 \rightarrow SU(3). \quad (8.31)$$

При расширении на 5-е измерение областью их определения будет сфера S^5 , т.е.

$$U(x, s): S^5 \rightarrow SU(3). \quad (8.32)$$

Для того, чтобы такое расширение можно было осуществить, оказывается нужно потребовать, чтобы поля (3.31) были гомотопны постоянному отображению в некоторую точку на $SU(3)$. Это условие возникает по следующим соображениям. Сфера S^4 разбивает S^5 на две области, этими областями являются 5-мерные диски D_5^+ и D_5^- , т.е. возникает картинка, аналогичная рис.6.

В любом из этих дисков нужно построить непрерывную последовательность сфер, начиная с границы S^4 , которые можно расщлнить на сферы S^3 , последующие - на сферы S^2 и т.д. до сферы S^0 (точки). Значения $U(x)$ на каждой из сфер этой последовательности обеспечат непрерывную деформацию (гомотопию) поля $U(x)$, заданного на S^4 , в постоянное поле U_0 на S^0 . Другими словами, группа $\pi_4(\mathcal{Q})$ должна быть тривиальна, что и достигается выбором $\mathcal{Q} = SU(3)$, т.к.

$$\pi_4(SU(3)) = 0. \quad (3.33)$$

Переходя к расширенным отображениям (3.32), обнаруживаем в силу изоморфизма

$$\pi_5(SU(3)) = \mathbb{Z}, \quad (3.34)$$

что на этих полях можно построить гомотопический инвариант, реализующий изоморфизм (3.34), по аналогии с построением явного вида топологического заряда (см. § 2, раздел 2.3 и Дополнение Б). В результате приходим к выражению

$$Q_5 = \int_{S^5} d^5x \gamma_5^0 = -\frac{i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}}{240\pi^2} \int_{S^5} d^5x \text{Sp}[L_\mu L_\nu L_\lambda L_\rho L_\sigma], \quad (3.35)$$

где интегрирование ведется по сфере S^5 . Стоящая под знаком интеграла 5-форма

$$\omega_5 = \frac{i}{240\pi^2} \text{Sp}[e^5], \quad (3.36)$$

где $e = L_\mu dx^\mu$ - замкнута и точна. Для построения действия мы должны перейти в выражении (3.35) к интегрированию по одному из дисков D_5^\pm по аналогии с (8.17). Обозначая

$$\Gamma_{WZ} = \mu \int_{D_5^+} \omega_5 = -\mu \int_{D_5^-} \omega_5, \quad (3.37)$$

где μ - некоторый числовой множитель, мы приходим к выражению для действия Весса-Зумино [112], которое является $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ -

- инвариантом по построению. Учитывая соотношение

$$\delta \{ \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} \text{Sp}(L_\mu L_\nu L_\lambda L_\rho L_\sigma) \} = 5 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} \partial_\mu \text{Sp}(U^\dagger \delta U L_\nu L_\lambda L_\rho L_\sigma)$$

и применяя теорему Стокса, для вариации действия Весса-Зумино (8.37) имеем

$$\delta \Gamma_{WZ} = -\frac{i\mu}{48\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{Sp}(U^\dagger \delta U L_\mu L_\nu L_\lambda L_\rho). \quad (8.38)$$

На основании этого мы можем утверждать, что искомый функционал действия σ -модели с симметриями KXD можно записать в виде

$$S_\pm = -\frac{F_\pi^2}{16} \int d^4x \text{Sp} L_\mu^2 \pm \frac{(-i)\mu}{240\pi^2} \int_{D_5^\pm} d^5x \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} \text{Sp}(L_\mu L_\nu L_\lambda L_\rho L_\sigma). \quad (8.39)$$

Из вариационного принципа $\delta S = 0$ для действия (8.39) с учетом (8.38) следует уравнение (8.29). При этом параметры η и μ связаны соотношением $\eta = i\mu/48\pi^2$. Для того, чтобы выражение для S не зависело от выбора конкретного диска D_5^+ или D_5^- , накладываем условие, аналогичное (8.19): $\exp(iS^+) = \exp(iS^-)$, сводящееся к

$$\mu \left(\int_{D_5^+} \omega_5 + \int_{D_5^-} \omega_5 \right) = \mu \int_{D_5^+ \cup D_5^-} \omega_5 = 2\pi\mu = 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.40)$$

Отсюда следует, что μ должно принимать целочисленные значения, т.е. опять встречаемся с квантованием параметра.

В следующем параграфе показано, каким образом член Весса-Зумино возникает из наличия в KXD аксиальной аномалии Адлера-Бардина. Как показал Виттен [22], при выборе $n = N_c$ (N_c - число цветов в KXD) действие Весса-Зумино в точности воспроизводит все аномальные эффекты KXD в низкоэнергетической области.

Основываясь на члене Весса-Зумино, Виттен показал [23] как можно реализовать идеи Финкельштейна. Для иллюстрации этого рассмотрим амплитуду вероятности вакуум-вакуумного перехода для покоящегося

скирмиона:

$$\langle SK(T) | SK(0) \rangle = \exp\left(-\frac{L}{\hbar} MT\right) (1 + O(\hbar)), \quad (8.41)$$

где M - гамильтониан системы, T - отрезок времени. Затем адиабатически повернем скирмион на угол 2π . Из квантовой механики мы знаем, что при этом возникает фазовый множитель вида $\exp(-i2\pi \mathcal{Y}/\hbar)$, где \mathcal{Y} - спин скирмиона:

$$\langle SK(T) | SK(0) \rangle_{2\pi} = \exp\left(-\frac{L}{\hbar} HT\right) \exp\left(-\frac{L}{\hbar} 2\pi \mathcal{Y}\right) (1 + O(\hbar)), \quad (8.42)$$

Фазовый множитель определяется классическим действием адиабатически повернутого солитона и для его вычисления, в силу тривиальности Γ_{WZ} для $SU(2)$ (см. (8.30)), вложим $SU(2)$ - скирмион (4.23) в $SU(3)$, т.е. рассмотрим $SU(3)$ - поле вида

$$U(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \exp\left(i \frac{\sum_a x_a}{r} \theta(r)\right) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.43)$$

Для повернутого солитона запишем

$$U(\vec{x}, t) = A^+(t) U(\vec{x}) A(t), \quad (8.44)$$

где $A(t) - SU(3)$ - матрица поворота вокруг некоторой оси. Соответствующая амплитуда вычисляется с помощью фейнмановского интеграла

$$\langle SK(T) | SK(0) \rangle_{2\pi} = \int_{\substack{t=T, A^+UA \\ t=0, U(\vec{x})}} \mathcal{D}[U(\vec{x}, t)] \exp\left\{\frac{L}{\hbar} S\right\}, \quad (8.45)$$

где

$$S = -MT + \frac{(-i) N_c}{240\pi^2} \int_{D_3^+} Sp(e^5), \quad (8.46)$$

M - масса скирмиона, а L вычисляется на полях (8.44). В результате вычислений, приведенных в Дополнении Б, получаем

$$\frac{L}{240\pi^2} \int_{D_3^+} Sp(e^5) = \mathcal{Y},$$

откуда следует

$$\langle SK(T) | SK(0) \rangle_{2\pi} = \exp\left[-\frac{L}{\hbar} MT\right] \exp\{i N_c \mathcal{Y}\} (1 + O(\hbar)). \quad (8.47)$$

Сравнивая с (8.42), находим для спина скирмиона ($Q=1$)

$$\mathcal{Y} = \frac{\hbar}{2} N_c, \quad (8.48)$$

т.е. для четного числа цветов спин скирмиона целый, а для нечетного - полуцелый. Однако это не относится к случаю $N_c=2$, т.к. в последнем член Весса-Зумино тривиален.

§ 9. МОДЕЛЬ СКИРМА И КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА

В двух последних параграфах сосредоточим наше внимание на вопросах практического использования модели Скирма в физике адронов. Несмотря на настоящий бум, возникший в этой области после пионерских работ Виттена /22, 23/, следует отметить, что излагаемые результаты носят пока предварительный характер. Здесь много неясных вопросов и очень мало строгих результатов. Мы сознательно оставляем в стороне еще одну область возможных применений модели Скирма: физику конденсированных сред, поскольку это направление только зарождается /II3, II4/. Читателям, интересующимся описанием пион-нуклонных реакций на основе представлений о барионе как скирмионе, можно порекомендовать недавно вышедшие обзоры /II5-II7, I60/. Мы не будем рассматривать эти вопросы ввиду ограниченности объема лекций.

9.1. Экспресс-обзор современного статуса КХД

Возникшая в начале 70-х годов квантовая хромодинамика (КХД) - $SU(3)$ -калибровочная теория кварков и глюонов, рассматривается в настоящее время как наиболее реальный кандидат на роль теории сильных взаимодействий. Предполагается, что в ее рамках должно получаться описание всего многообразия явлений в ядерной физике. Поэтому трудно себе представить, чтобы столь сложная наука была точно решаемой.

мой, а следовательно, для получения количественных ответов из КХД требуется некоторая расчетная схема типа теории возмущений. В области высоких энергий, когда кварки и глюоны находятся на малых расстояниях друг от друга, КХД, являясь неабелевой калибровочной теорией, обладает свойством асимптотической свободы. Это позволяет считать кварки почти свободными (между ними действует цветовой потенциал типа кулоновского α_s/r), а бегущая константа связи α_s , логарифмически убывающая с уменьшением расстояния r между кварками, оказывается естественным параметром разложения. В данной области — пертурбативной КХД — существует регулярная вычислительная схема, позволяющая методами ренормгруппового анализа и теории возмущений по α_s рассчитать процессы глубокоэластичного лептон-нуклонного рассеяния. Правда, совпадение с экспериментальными данными скорее количественное, в отличие от расчетов в квантовой электродинамике, где совпадение достигает десятка знаков после запятой. Но большего от теории, какой является КХД, ожидать не приходится (см. подробности в /II8, II9/).

Значительно хуже положение дел в непертурбативной области КХД, где цветное взаимодействие кварков является по-настоящему сильным и поэтому становится несостоятельной теория возмущений по α_s . Именно эта область КХД, где кварки находятся в фазе конфайнмента, должна содержать информацию об основных свойствах адронов: спектре масс, константах взаимодействия, магнитных моментах, зарядовых радиусах и др. Как извлечь всю эту информацию из фундаментального лагранжиана КХД, пока не ясно. Правда, еще до появления КХД был развит метод эффективных киральных лагранжианов /46/, который удовлетворительно описывал низкоэнергетическую физику мезонов и адронов, т.е. позволял получать разумные ответы в этой области.

Таким образом, возникает ситуация, с которой физики уже встречались в начале века, например, при описании излучения абсолютно черного тела или теплоемкости твердого тела: существуют методы, хорошо работающие каждый в своей области, но не стыкующиеся между собой. Для того, чтобы сшить область асимптотической свободы с низкоэнергетической динамикой на основе фундаментального лагранжиана КХД, Виттен /III/ предложил использовать идею т'Хофта /II0/ об обобщении КХД на случай большого числа цветов N_c . Оказалось, что при стремлении $N_c \rightarrow \infty$ КХД существенно упрощается и становится эквивалентной эффективной теории мезонов и глоболов. т'Хофт пришел к идее обобщения КХД на случай большого числа N_c , пытаясь найти неявный параметр разложения в низкоэнергетической области по аналогии с атомной физикой. Как будет показано в следующем разделе, в ряде задач атомной

физики также отсутствует явный параметр разложения, но переход от 3 пространственных измерений к N измерениям и, соответственно, от $O(3)$ — симметрии к $O(N)$ — симметрии, позволяет в качестве неявного параметра разложения рассматривать величину $1/N$. При этом требуется, чтобы теория при больших N была качественно и количественно близка к 3-мерной теории, т.е. должен существовать непрерывный переход от больших N к 3-мерному случаю. Кроме того, при больших N теория должна упрощаться, т.е. становиться разрешимой. Оказалось, что в янг-миллсовской теории при переходе к большому числу цветных степеней свободы ($N_c \rightarrow \infty$) картина аналогична: мезоны и глоболы становятся свободными и стабильными. В силу этого при вычислении состояний суммирование требуется проводить не по всем возможным диаграммам, а по более узкому их классу — по так называемым "планарным диаграммам". Тем не менее окончательных ответов в этом направлении не получено до сих пор, поскольку суммирование планарных диаграмм удалось провести только в нульмерном и одномерном случаях или в моделях, где планарные диаграммы сводятся к "радужным" (2-мерная хромодинамика). В случае матричных моделей, к которым относятся все киральные модели, эта задача до сих пор не решена /120/; и поэтому отсутствует последовательная схема $1/N$ — разложения, которая позволила бы получить из КХД явный вид эффективного мезонного лагранжиана. К этим проблемам мы вернемся в третьем разделе, а пока обсудим более детально идею $1/N$ — разложения, следуя работе /121/.

9.2. $1/N$ — разложение

Представления о том, что теория возмущений может строиться не только по константе связи или заряду, но и по ряду других физических параметров, возникли в физике еще в 50-х годах /122/ и широко использовались при решении задач статистической физики /123/. В некоторых случаях теория возмущений по константе связи попросту лишена смысла. Действительно, если в гамильтониане атома водорода

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \quad (9.1)$$

считать потенциальную энергию $-e^2/r$ малым возмущением ввиду малости e^2 , то, во-первых, e^2 не является безразмерной величиной и по этой причине не может служить параметром разложения, а, во-вторых, с помощью масштабного преобразования: $r \rightarrow r/me^2$;

$$p \rightarrow p \cdot me^2 \quad \text{выражение (9.1) преобразуется к виду}$$

$$H = me^4 \left(\frac{p^2}{2} - \frac{1}{r} \right), \quad (9.2)$$

где константа связи e^2 входит в виде общего множителя и может служить только для задания энергетической шкалы. В ситуациях, аналогичных (9.2), отсутствует свободный параметр, пригодный для построения теории возмущений и его приходится придумывать, если задача не столь проста, как в случае атома водорода (9.1), и мы не можем надеяться на построение точного решения.

Идея $1/N$ - разложения как раз и состоит в возможности построения теории возмущений по неявному параметру, такому как размерность физического пространства, например. Рецепт построения достаточно прост: вместо атома водорода в 3 измерениях рассматриваем задачу в N измерениях с группой симметрии $O(N)$. Из соображений простоты запишем уравнение Шредингера для S - состояния, т.е. без учета орбитального углового момента и зависимости ψ от углов:

$$\left[-\frac{1}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(N-1)}{r} \frac{d}{dr} \right) - \frac{e^2}{r} \right] \psi(r) = E \psi(r). \quad (9.3)$$

Член с первой производной в гамильтониане (9.3) можно исключить преобразованием

$$H \rightarrow r \frac{N-1}{2} H r - \frac{N-1}{2}$$

или эквивалентным переопределением волновой функции $\psi \rightarrow r \frac{N-1}{2} \psi$. В результате имеем

$$\left[-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{(N-1)^2}{8mr^2} - \frac{e^2}{r} \right] \psi(r) = E \psi(r). \quad (9.4)$$

С помощью масштабного преобразования $r = (N-1)^2 R$ (9.4) преобразуется в уравнение

$$\frac{1}{(N-1)^2} \left[-\frac{1}{2m(N-1)^2} \frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{8mR^2} - \frac{e^2}{R} \right] \psi(R) = E \psi(R), \quad (9.5)$$

которое можно рассматривать как уравнение движения частицы с эффективной массой $M = m(N-1)^2$ в поле с эффективным потенциалом

$$V_{eff} = \frac{1}{8mR^2} - \frac{e^2}{R}. \quad (9.6)$$

Из (9.5) легко видеть, что задача существенно упрощается при больших значениях N , т.к. частица будет обладать большей эффективной массой M , и мы не совершим существенной ошибки, полагая, что она будет покоиться на дне потенциальной ямы (9.6). При этом ос-

новой энергетический уровень будет совпадать с абсолютным минимумом потенциала V_{eff} , а возбужденные уровни могут быть получены путем разложения по $1/N$ вблизи минимума V_{eff} . В частности, для вычисления энергии связи атома водорода можно ограничиться квадратичным приближением

$$E = \frac{1}{2} m e^4 \cdot 4(N-1)^{-2} \approx \frac{m e^4}{2} \cdot \frac{4}{N^2} \left(1 + \frac{2}{N} + \frac{3}{N^2} + \dots \right),$$

из которого при $N=3$ получаем значение $E = \frac{4}{9} m e^4$, мало отличающееся от значения $E = \frac{1}{2} m e^4$ из точной теории. Будем надеяться, что из этого простого примера нам удалось уяснить основные черты

$1/N$ - разложения и посмотрим, к чему приводит такой подход в КХД.

Во-первых, отметим, что в непертурбативной КХД константа связи может быть вынесена в виде общего множителя, т.е. так же, как и в задаче об атоме водорода, разложение по заряду (в случае КХД - цветному) лишено смысла. Этот результат следует из ренормгруппового анализа и, поскольку он приводится в любом стандартном изложении основ КХД, мы не будем останавливаться на его воспроизведении.

Во-вторых, теория существенно упрощается при переходе к большому числу цветов ($N_c \rightarrow \infty$). Причина такого упрощения заключается в следующем (см. /110/, /111/, /121/). Переход к случаю N_c цветов формально состоит в рассмотрении $SU(N)$ - калибровочной теории, где кварковые q^i и антикварковые \bar{q}_i поля обладают N компонентами, а глюонные поля описываются $N \times N$ - матрицей A_{ij}^k с $(N^2 - 1)$ компонентами, т.к. матрицы из алгебры группы $SU(N)$ должны быть бесследовыми. Поэтому при описании любых процессов в КХД даже после фиксации цветных квантовых чисел начального и конечного состояния имеется большой выбор (как минимум N) возможных значений для квантовых чисел промежуточных глюонных полей. В результате суммирования по всем возможным промежуточным состояниям фейнмановские диаграммы приобретают комбинаторные множители. Конкретные значения этих множителей зависят, как будет показано на простом примере ниже, от числа замкнутых глюонных петель, содержащихся в диаграмме.

Рассмотрим диаграмму однопетлевого вклада глюонных полей в поллизацию вакуума (рис. 7) в стандартных (а) и двулинейных (б) обозначениях т'Хофта-Виттена.

Введенные в /105/ двулинейные обозначения делают более наглядным вычисление комбинаторных множителей. Возникают они из следующих соображений: поскольку глюонные поля A_{ij}^k содержат один верхний индекс (как и кварковое поле q^i) и один нижний индекс (как и антикварк \bar{q}_j), то в комбинаторике (и только в ней) можно считать

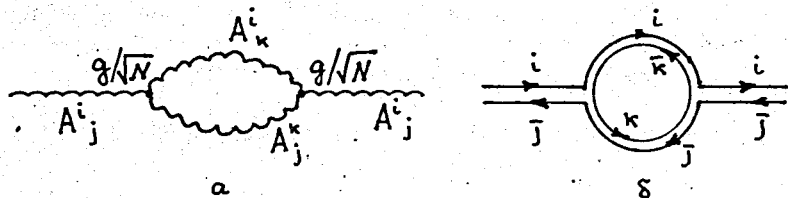
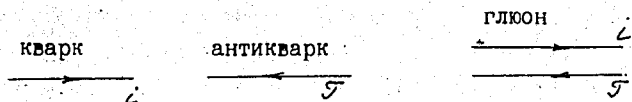


Рис.7

глюон кварк-антикварковым образованием: $A_{ij}^k \sim g^i g^j$. Изображая кварковый пропагатор прямой со стрелкой (у антикварка стрелка будет смотреть в противоположную сторону), для глюонных пропагаторов удобно ввести двулинейные обозначения.



В диаграмме на рис.7 мы имеем две трехглюонные вершины с вкладом $SP A_{\mu\nu} \partial_{\mu} A_{\nu}$ или в матричных обозначениях: $A_{ij}^k A_{jk}^i A_{ki}^j$, т.е. нижний индекс у первой глюонной матрицы сворачивается с верхним индексом следующей матрицы и т.д. На двулинейной диаграмме это изображается тем, что каждый выходящий (антикварковый) индекс связан с входящим индексом следующего глюонного поля. Считая начальное и конечное состояния на диаграмме заданными, мы можем фиксировать значения индексов i и j . При этом в центре диаграммы образуется замкнутая линия с индексом k , пробегающим все возможные N значений. Суммирование по всем этим состояниям и порождает комбинаторный множитель диаграммы, равный N .

Для существования непрерывного перехода при больших N мы должны компенсировать этот множитель, так как в противном случае все такие диаграммы будут расходиться $\sim N$, и мы не сумеем построить КХД с большим числом цветов. Поскольку вклад каждой вершины диаграммы содержит в виде множителя цветной заряд g , то для исключения множителя N мы можем переопределить эту константу взаимодействия: $g \rightarrow g/\sqrt{N}$ (при $N \rightarrow \infty$, значение g считаем фиксированным). В результате получаем множитель $(g/\sqrt{N}) \cdot N = g^2$, не зависящий от N , что обеспечивает наличие непрерывного перехода да при $N \rightarrow \infty$.

Весьма важное наблюдение принадлежит т'Хофту [110]. Заключается оно в том, что при таком подходе "выживает" только часть из возмож-

ных диаграмм, обладающих достаточно большими комбинаторными множителями. Так, например, из двух трехпетлевых диаграмм (рис.8)

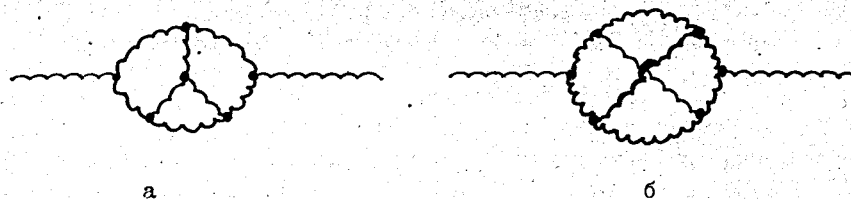


Рис.8

обладающих 6 вершинами и, соответственно, множителем $(g/\sqrt{N})^6$ выживает только левая диаграмма (а) с комбинаторным множителем $\cdot N^3$, т.к. $(g/\sqrt{N})^6 N^3 = g^6$ не зависит от N . Здесь 3 степень в комбинаторном множителе связана с суммированием по трем петлям, что отчетливо видно в двулинейном изображении этой диаграммы (рис.9а).

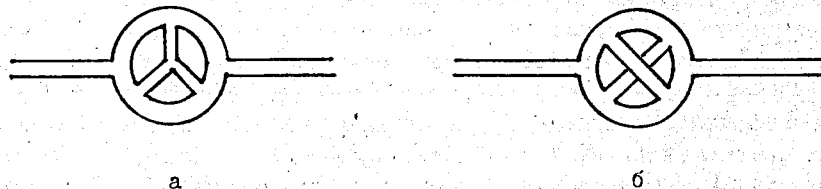


Рис.9

Напротив, вклад от диаграммы (б) исчезающе мал при $N \rightarrow \infty$, поскольку при наличии 6 вершин, она имеет только одну замкнутую петлю (правда, весьма замысловатую). Диаграмма имеет порядок $(g/\sqrt{N})^6 N = g^6/N^2$ и ее вклад убывает как $1/N^2$ при $N \rightarrow \infty$. Исходяще малый вклад дают и кварковые петли типа рис.10,

не содержащие ни одной замкнутой цветной петли и в силу этого $(g/\sqrt{N})^2 = g^2/N$ убывающие как $1/N$.

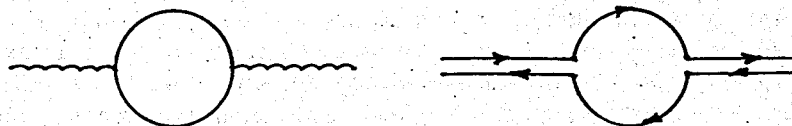


Рис.10

Основываясь на анализе всех возможных видов диаграмм, т'Хофт выделил класс так называемых планарных диаграмм, которые не исчезают при $N \rightarrow \infty$. Такие диаграммы изображаются на плоскости линиями без выхода в третье измерение (см. рис. 8а, 9а). Все непланарные диаграммы (см. рис. 8б, 9б), содержащие такой выход, убывают как $1/N^2$, а диаграммы с внутренними кварковыми петлями убывают как $1/N$. Поэтому в пределе большого числа цветов ($N_c \rightarrow \infty$) КХД упрощается, т.к. нам нет необходимости учитывать вклад всех возможных диаграмм, а можно ограничиться анализом более узкого класса планарных диаграмм. Однако это еще не все преимущества, достигаемые в таком подходе. Следующее упрощение вытекает из предположения, что в пределе больших значений N_c , так же как и в случае $N_c = 3$, КХД обладает свойством конфайнмента, т.е. что наблюдаемыми будут только бесцветные состояния. Анализ доминирующих планарных диаграмм, детали которого изложены в /III/, приводит к следующим утверждениям: а) при больших $N_c \rightarrow \infty$ мезоны можно рассматривать как стабильные и не взаимодействующие частицы. Число мезонных состояний конечно; б) амплитуды распада мезонов имеют порядок $1/\sqrt{N_c}$; амплитуды упругого рассеяния мезона на мезоне имеют порядок $1/N_c$ и определяются суммой вкладов только древесных диаграмм (содержащих обмена не кварками и глюонами, а только мезонами). Другими словами, физика мезонов в пределе больших N_c описывается древесными диаграммами эффективного мезонного лагранжиана. Однако массы мезонов и их константы взаимодействия при этом остаются неопределенными. Аналогичные утверждения имеют место и для глоболов. Все это позволило т'Хофту сделать предположение о том, что в пределе больших N_c КХД будет эквивалентна теории мезонных полей и глоболов с эффективным взаимодействием порядка $1/N_c$.

Следующий шаг в выяснении физики низкоэнергетического сектора КХД был сделан Виттеном /III/. Основываясь на аналогии с монополем т'Хофта-Полякова, который возникает в теории полей с малой константой связи как состояние с массой порядка обратной константы взаимодействия, Виттен показал, что барион может возникать в теории мезонных полей как солитонное состояние с массой порядка $1/N_c$. Таким образом, была возрождена идея Скирма о барионе как о солитонном состоянии, возникающем как коллективное возбуждение мезонных полей. Дальнейшее продвижение в этом направлении требует вывода явного вида эффективного мезонного лагранжиана из фундаментального лагранжиана КХД. Но для этого нужно просуммировать вклады всех планарных диаграмм, что, как уже отмечалось выше, является до сих пор не решенной проблемой в случае матричных моделей. В следующем разделе мы обсудим некоторые из возможных подходов к решению этой весьма актуальной задачи.

9.3. Эффективный киральный лагранжиан из КХД

Фундаментальный лагранжиан КХД записывается в виде

$$\mathcal{L}_{\text{KХД}} = -\frac{1}{4} \text{SP} (G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) + \bar{q} (i D_M \gamma^M - m) q, \quad (9.7)$$

где кварковые поля q_i преобразуются по фундаментальному представлению цветной группы $SU(3)_c$ и, одновременно, флейворной группы $SU(N_f)$; $\alpha = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, \dots, N_f$. Глюонные векторные поля $A_M = A_M^c \lambda^c$, (λ^c , $c = 1, \dots, 8$ - генераторы цветной группы $SU(3)_c$) принимают значения в алгебре группы $SU(3)_c$; $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ - тензор напряженности глюонных полей. $D_M = \partial_M + i g A_M$ - ковариантная производная, g - константа цветового взаимодействия, m - массовая матрица токовых кварков.

Кварковые и глюонные степени свободы, в терминах которых выписан лагранжиан (9.7), проявляются лишь на очень малых расстояниях порядка 0,3 фм, т.е. в пертурбативной области КХД. На расстояниях 1-2 фм, характерных для мира адронов, становятся существенными непертурбативные эффекты - конфайнмент цвета и спонтанное нарушение киральной симметрии, поэтому описание в терминах кварков и глюонов перестает быть эффективным. Здесь уместна аналогия с описанием "низкоэнергетической" физики твердого тела /I24/, где фундаментальными объектами являются электроны и ядра в узлах решетки, взаимодействующие по закону Кулона, а адекватное описание явлений дается в терминах электронов с эффективной массой и фононов. Примечательно, что эти эффективные степени свободы возникают вследствие спонтанного нарушения трансляционной инвариантности системы.

В предыдущем разделе мы уже выяснили с помощью $1/N_c$ - разложения, что в пределе больших N_c КХД адекватно описывается мезонными степенями свободы. Однако остался открытым вопрос о явном виде эффективного мезонного лагранжиана. В низкоэнергетической области КХД можно рассмотреть киральный предел, считая кварки безмассовыми. Основанием для этого служит то, что массы токовых u - и d -кварков ($m_u \sim 4$ МэВ, $m_d \sim 7$ МэВ) и, в меньшей степени, масса s -кварка ($m_s \sim 130$ МэВ) малы по сравнению с характерным для данной области КХД масштабным параметром $\Lambda \sim 300$ МэВ. Поэтому безмассовый предел оказывается достаточно хорошим приближением к реальности и, как показывают расчеты, массы барионов и почти всех мезонов при этом практически не изменяются. Исключение составляют лишь π -мезоны, которые становятся в киральном пределе безмассовыми в силу соот-

ношения $m_{\pi} \sim \sqrt{m_u + m_d}$. Лагранжиан (9.7) в этом случае будет обладать глобальной $U(3)_L \otimes U(3)_R$ - симметрией относительно отдельно левых и отдельно правых вращений в флейворном пространстве или, более точно, относительно преобразований из группы

$$U(3)_L \otimes U(3)_R = SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_L \otimes U(1)_R = \\ = SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A, \quad (9.8)$$

где $U(1)_V$ и $U(1)_A$ - однопараметрические подгруппы векторных и аксиально-векторных преобразований соответственно, с генераторами, равными полусумме и полуразности генераторов подгрупп $U(1)_L$ и $U(1)_R$ (см. подробности в Дополнении А). На квантовом уровне $U(1)_A$ - симметрия оказывается нарушенной, т.е. соответствующий ток не сохраняется в силу аномалии Адлера-Белла-Джакива [118-120]

$$\partial^\mu (\bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q) = \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{Sp}(G_{\mu\nu} G_{\lambda\rho}). \quad (9.9)$$

Оставшаяся симметрия

$$U(3)_L \otimes U(3)_R / U(1)_A = SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V \quad (9.10)$$

определяется преобразованием типа

$$q \rightarrow \exp(i\gamma_5 \frac{\pi^a \Sigma^a}{2}) q, \quad (9.11)$$

перепутывающими состояния с разной четностью, где Σ^a - генераторы $SU(3)$; π^a - киральные фазы.

Для левых и правых кварковых полей

$$q = q_L + q_R; \quad q_{L,R} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) q \quad (9.12)$$

преобразование (9.11) можно представить в виде

$$q \rightarrow U^{1/2} q_L + U^{-1/2} q_R; \quad U = \exp(i\pi^a \Sigma^a). \quad (9.13)$$

Спонтанное нарушение глобальной $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ - симметрии означает, что происходит локальная фиксация относительных киральных фаз левых и правых кварков, и фазовые функции $\pi^a(x)$ можно свя-

зать с голдстоуновскими бозонами - октетом псевдоскалярных мезонов $(\pi^0, \pi^\pm, \eta, K^0, K^\pm, \bar{K}^0)$. Действительно, на пространственной бесконечности $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ пионные поля $\pi^a(x) \rightarrow 0$, что эквивалентно условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U = I, \quad (9.14)$$

здесь I - единичная 3 x 3 - матрица. Относительно киральной группы $G = SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ киральное поле $U(x)$ преобразуется по закону $U \rightarrow VUW^{-1}$, где $V \in SU(3)_R$, $W \in SU(3)_L$, вытекающему из преобразований кварковых полей: $q_L \rightarrow Wq_L$; $q_R \rightarrow Vq_R$. Однако, как следует из (9.14), вакуумное состояние $U=I$ инвариантно относительно таких преобразований лишь при условии $V=W$, т.е. относительно преобразований из векторной подгруппы

$$G_V = \text{diag}[SU(3)_L \otimes SU(3)_R] = SU(3)_V. \quad (9.15)$$

К аналогичному выводу можно прийти, если рассмотреть образование вакуумного (кваркового) конденсата $\langle \bar{q}_i q_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij} \langle \bar{q} q \rangle$, который неинвариантен относительно преобразований (9.11) и в силу этого также возникает спонтанное нарушение киральной симметрии:

$SU(3)_L \otimes SU(3)_R \rightarrow SU(3)_V$. При этом поле U задает орбиту группы G , проходящую через единицу I и тем самым принимает значения в однородном пространстве $G/G_V = SU(3)$. Другими словами, возникает взаимно однозначное соответствие между слабыми (фазовыми) возбуждениями вакуума, параметризующими поле $U(x)$ в силу (9.13), и элементами многообразия группы $SU(3)$. Поэтому низкоэнергетическую динамику КХД можно адекватным образом описывать в терминах главного кирального поля $U(x)$. И единственными существенными динамическими переменными в этой области КХД оказываются пионные поля $\pi^a(x)$, которые удобно рассматривать как параметризацию главного кирального поля $U(x)$. Напомним (см. §2), что именно такое поле, правда, со значениями в $SU(2)$ - многообразии, было основным объектом в модели Скирма. Поэтому не будет ничего удивительного, если в результате микроскопического вывода эффективного мезонного лагранжиана из (9.7) мы придем к нелинейной σ -модели со спонтанно нарушенной симметрией, к которой, как известно, относится и модель Скирма.

Дальнейший сценарий вывода эффективного лагранжиана формально можно свести к замене переменных в континуальном интеграле по кваркам и глюонам, в результате которой и после интегрирования по всем фермионным степеням свободы мы должны прийти к выражению, где будут фигурировать только поля $U(x)$ и их производные, т.е.

$$\int dA d\bar{q} dq \exp\{-\int dx \mathcal{L}_{KQD}(A, \bar{q}, q)\} = \int dV \exp\{-\int dx \mathcal{L}_{eff}(V)\}. \quad (9.16)$$

К настоящему времени в литературе [128-141] известны различные реализации такого сценария, причем даже в простейших предельных случаях это сопряжено с большим объемом вычислений. Поэтому мы остановимся лишь на ключевых моментах процедуры вывода эффективного лагранжиана, а за подробностями отошлем читателя к оригинальным работам.

Забегая несколько вперед, заметим, что в любом из известных подходов достаточно надежно воспроизводятся только члены низшего порядка по производным $\partial_M V$, т.е. эффективное действие (8.39), к которому пришли Балачандран [128] и Виттен [22] на основе учета симметричных свойств КХД (см. раздел 8.3 предыдущего параграфа).

Члены более высокого порядка воспроизводятся лишь на основе дополнительных модельных предположений. Здесь наибольшего продвижения удается достичь на основе метода киральной бозонизации Андрианова-Новожилова [129-132], с помощью которого были вычислены члены 4-го порядка по производным вида

$$\mathcal{L}_4(V) = \frac{N_c}{384\pi^2} Sp\{[L_M, L_V]^2 - 2(L_M L^M)^2 + 4(\partial_M^2 V \partial_V^2 V^{-1})\}, \quad L_M = V^{-1} \partial_M V; \quad (9.17)$$

где помимо скирмовского члена, необходимого для существования стабильных солитонов, содержатся тахионные добавки, приводящие к нарушению положительной определенности функционала энергии. В работах других авторов [136-139] ответ получается в несколько ином виде, что свидетельствует о том, что вопрос об эффективном лагранжиане для низкоэнергетической КХД остается до настоящего времени открытым и требует дополнительных исследований.

Наиболее последовательный, с нашей точки зрения, микроскопический вывод развит в работе Карчева и Славнова [141], где в качестве исходного выбирался $V(N_f) \otimes V(N_f)$ - инвариантный лагранжиан с $SU(N_c)$ группой цветной симметрии

$$\mathcal{L} = -\frac{N_c}{4g^2} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + i\bar{q} \gamma^M D_M q, \quad (9.18)$$

а явное выделение киральной фазы кварков осуществлялось на основе процедуры Задаева-Попова. Выполнив замену переменных

$$q \rightarrow q^U: \quad q^U = U^{-2} q_R + q_L; \quad \bar{q}^U = \bar{q}_L U^2 + \bar{q}_R \quad (9.19)$$

в производящем функционале типа (9.16) для лагранжиана (9.18), получаем выражение, содержащее якобиан \mathcal{J} преобразования (9.19). Вычисление якобиана [141] приводит к ответу

$$\ln \mathcal{J} = -\frac{iN_c}{48\pi^2} \int d\alpha \int dx \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} Sp\{L_5(\alpha)L_M(\alpha)L_V(\alpha)L_\lambda(\alpha)L_\rho(\alpha)\} + \frac{iV N_c}{8\pi^2} Sp \int dx G_{\mu\nu}(x) G_{\lambda\rho}(x) \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \mathcal{J}^0(x), \quad (9.20)$$

где

$$V(x, \alpha) = \exp(i2\alpha \mathcal{J}^0(x)); \quad L_M(x, \alpha) = V^{-1} \partial_M V; \\ L_5(x, \alpha) = V^{-1}(x, \alpha) \partial_\alpha V(x, \alpha).$$

Нетрудно видеть, что первый член в (9.20) есть в точности член Весса-Зумино (см. раздел 8.3 предыдущего параграфа) и коэффициент перед ним соответствует результату Виттена $n=N_c$, т.е. позволяет воспроизводить аномальные свойства лагранжиана КХД (9.18). Второй член в (9.20) обусловлен абелевой глюонной аномалией Адлера-Белла-Джакива и не существенен в главном порядке по N_c . Таким образом, на первом этапе за счет перехода от кварковых и глюонных к пионным степеням свободы мы фактически зарабатываем для конечного эффективного лагранжиана только член Весса-Зумино.

Следующий этап процедуры состоит в интегрировании (усреднении) по всем цветным переменным. При этом по глюонным полям интегрирование удается провести точно, а интегрирование по кварковым полям выполняется с помощью специальной техники, которая является по существу формализацией двулинейных диаграмм т'Хофта-Виттена [142, 143]. Для оставшегося интеграла по духовым и вспомогательным полям строится $1/N_c$ - разложение - квазиклассическое разложение по коллективному синглетному переменному в окрестности стационарной точки эффективного потенциала. Как и в случае атома водорода в предыдущем разделе, задача существенно упрощается, и в низкоэнергетическом приближении приходим к следующему выражению для эффективного кирального лагранжиана:

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{F_\pi^2}{16} Sp(L_M L^M) + V_0(\mathcal{J}^0) - \frac{N_c}{48\pi^2} \int d\alpha \int dx \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} Sp\{L_5 L_M L_V L_\lambda L_\rho\}, \quad (9.21)$$

где F_{π} - константа распада пионов ($F_{\pi} \approx 190 \text{ МэВ}$), \mathcal{L}^0 - компонента пионного мультиплетта, соответствующая генератору $\mathcal{L}^0 = \sqrt{2}/N_c I$.

Точное выражение для $V_0(\mathcal{L}^0)$ в (9.21) можно получить суммированием планарных глюонных диаграмм, однако, как уже говорилось ранее, эта задача до сих пор остается нерешенной. В случае успеха в рамках такого микроскопического подхода удалось бы вычислить в терминах кварк-глюонных параметров константу F_{π} , а также найти выражения для членов более высокого порядка и коэффициенты при этих членах.

Именно на этом пути можно надеяться получить окончательный ответ на вопрос о том, в какой мере модель Скирма может считаться имеющей отношение к низкоэнергетической динамике КХД. Тем не менее уже сейчас понятно, что эта модель является добротным полигоном для апробирования возможных методов квантования, описания процессов взаимодействия протяженных объектов и т.д. В следующем параграфе мы обсудим схему квазиклассического квантования скирмионов, а также вычисление основных динамических характеристик.

§ 10. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ И СТАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СКИРМИОНА

Как уже не раз упоминалось в предыдущих параграфах, наибольший практический интерес к модели Скирма возник после того, как в рамках квазиклассического квантования /98/ обнаружилось, что модель позволяет воспроизводить основные свойства барионов с точностью 30%. В целом ряде работ этот результат пытались улучшить как за счет учета дополнительных членов, так и за счет переосмысления процедуры квантования, но о существенном прогрессе в этом направлении говорить пока не приходится. Поэтому мы изложим процедуру квантования скирмионов в том виде, в котором она представляется нам наиболее последовательной, указывая по ходу изложения те аспекты, которые недостаточно глубоко изучены.

Поскольку эффективный лагранжиан (9.20) вычисляется из КХД на основе $1/N_c$ - разложения, то при больших N_c мы имеем дело по сути с барионом, состоящим из большого числа кварков. Следовательно, мы не сильно погрешим против истины, если будем рассматривать эту частицу очень массивной и применять схему квазиклассического квантования /144/. Поскольку вопрос о членах 4-го порядка по про-

изводным ($\partial \mu \nu$) в эффективном лагранжиане (9.20) не имеет пока строгого ответа, то вслед за большинством авторов мы ограничимся лишь учетом скирмионовского члена и в качестве исходного выберем действие

$$S' = S_{Sk} + S_{WZ}. \quad (10.1)$$

Для получения расщепления в спектре масс нам потребуется еще и некоторый массивный член. Его вид мы обсудим в соответствующем месте. В основном, мы будем следовать работам группы Балачандрана /145-147/, обращаясь по мере надобности к фактам из работ /98, 99, 148-151/.

10.1. Метод коллективных переменных Н.Н.Боголюбова

Заметим, что метод коллективных координат впервые был сформулирован Н.Н.Боголюбовым /152/ в применении к задаче о поляроне. Если продолжать аналогию с "низкоэнергетической" физикой твердого тела, о которой упоминалось в § 9, то аналогом нуклона в твердом теле будет полярон - локализованное состояние электрона с эффективной массой в самосогласованном поле колебаний решетки. Действительно, в кривом пределе нуклон можно рассматривать как локализованное связанное состояние трех кварков с динамической массой M в самосогласованном поле пионов /134/. С этой точки зрения применение метода коллективных переменных к квантованию скирмиона представляется вполне естественным.

Суть метода состоит в том, что квантовые флуктуации в окрестности классического решения можно разбить на два класса: моды, генерируемые симметриями действия или гамильтониана системы, и ортогональные к ним. Симметричные моды выделены тем обстоятельством, что для их возбуждения требуется сколь угодно малая энергия, вследствие чего они характеризуются значительными отклонениями (флуктуациями) от классического решения. Поэтому в будущем порядке только эти моды существенны в квантовом описании, и они выбираются в качестве коллективных координат. Преобразование Боголюбова состоит в выделении коллективных переменных, имеющих смысл параметров группы симметрии гамильтониана системы. Современное изложение метода и его обобщения в теории сильной связи можно найти в работах /153, 154/. В применении к модели Скирма наиболее отчетливо этот метод дан в работах /155, 156/.

Выпишем еще раз явный вид членов в исходном действии (10.1)

$$S_{SK} = \int d^4x \left\{ -\frac{F_\pi^2}{16} SP L_M^2 + \frac{1}{32\epsilon^2} SP [L_M, L_V]^2 \right\}; \quad (10.2)$$

$$S_{WZ} = -\frac{iN_0}{240\pi^2} \int d^5x \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} SP(L_\mu L_\nu L_\lambda L_\rho L_\sigma), \quad (10.3)$$

где $F_\pi = 186 \text{ МэВ}$ - константа распада пионов; ϵ - константа Скирма, значение которой будет определено позднее; D_5 - 5 - диск:

$\partial D_5 = X$ - пространство Минковского. Классическое решение $U_0(\bar{x})$ отвечает минимуму функционала энергии и удовлетворяет естественному граничному условию

$$U_0(\bar{x}) \rightarrow I, \text{ при } |\bar{x}| \rightarrow \infty. \quad (10.4)$$

Для отыскания коллективных переменных рассмотрим еще раз симметрии модели (10.1). Действие (10.1) - (10.3) инвариантно относительно преобразований из киральной группы $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$:

$U' = V U W^{-1}$, где $V, W \in SU(3)$. Поэтому в общем случае разложение кирального поля U по симметричным модам в окрестности классического решения $U_0(\bar{x})$ имеет вид $U(\bar{x}, t) = V(t) U_0(\bar{x}) W^{-1}(t)$. Однако в силу (10.4) нас должны интересовать лишь те флуктуации, для которых $U(\bar{x}, t) \rightarrow I$, при $|\bar{x}| \rightarrow \infty$, т.е. соответствующие диагональной подгруппе $SU(3)$, когда $V(t) = W(t) \equiv A(t)$. Таким образом, мы ограничиваемся флуктуациями вида

$$U(\bar{x}, t) = A(t) U_0(\bar{x}) A^{-1}(t), \quad (10.5)$$

и матрицы $A(t) \in SU(3)$ будут коллективными переменными в нашем случае. $SU(3)$ - классическое решение для скирмиона, как уже отмечалось в (8.43), можно представить в виде вложения $SU(2)$ - скирмиона в $SU(3)$ - матрицу

$$U_0(\bar{x}) = \left(\begin{array}{c|c} \exp(i \frac{\chi_0 T_3}{r} \theta(r)) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right). \quad (10.6)$$

Легко заметить, что $U_0(\bar{x})$ перестановочно с преобразованиями из однопараметрической подгруппы гиперзаряда $h(t) = \exp(i\alpha(t)Y)$, где $Y = \frac{1}{3} \text{diag}[1, 1, -2]$. В силу этого матрицы $A'(t) = A(t)h(t)$ и матрицы $A(t)$ приводят к одним и тем же флуктуациям:

$$\begin{aligned} A'(t) U_0(\bar{x}) A'^{-1}(t) &= A(t) h(t) U_0(\bar{x}) h^{-1}(t) A^{-1}(t) = \\ &= A(t) U_0(\bar{x}) A^{-1}(t) = U(\bar{x}, t), \end{aligned}$$

т.е. коллективные переменные $A'(t)$ и $A(t)$ эквивалентны. Поэтому конфигурационным пространством переменных для $SU(3)$ - модели Скирма будет не 8-параметрическое $SU(3)$ - многообразие, а 7-параметрическое $SU(3)/U(1)$ -многообразие.

Подстановка (10.5) в действие (10.1)-(10.3) приводит к эффективному действию в терминах коллективных координат:

$$\begin{aligned} S_{SK}(U) &= S_{SK}(U_0) + \int dt \mathcal{L}_{SK}(A, \dot{A}); \\ \mathcal{L}_{SK}(A, \dot{A}) &= I_{\alpha\beta}(U_0) (A^{-1} \dot{A})_\alpha (A^{-1} \dot{A})_\beta, \end{aligned} \quad (10.7)$$

$$(A^{-1} \dot{A})_\alpha = \frac{1}{2} SP(A(t)^{-1} dA(t)/dt \cdot \lambda_\alpha) -$$

где компонента "угловой скорости" скирмиона в терминах коллективных переменных, а $I_{\alpha\beta}(U_0)$ - тензор "момента инерции":

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{8} F_\pi^2 I_{\alpha\beta}^{(2)}(U_0) - \frac{1}{16\epsilon^2} I_{\alpha\beta}^{(4)}(U_0); \\ I_{\alpha\beta}^{(2)} &= \int d^3x \left\{ 2\delta_{\alpha\beta} - SP[\lambda_\alpha, (R_\beta^0 + L_\beta^0)] \right\}; \\ I_{\alpha\beta}^{(4)} &= \int d^3x SP \left\{ [\lambda_\alpha - U_0^{-1} \lambda_\alpha U_0, L_\alpha^0] [\lambda_\beta - U_0^{-1} \lambda_\beta U_0, L_\beta^0] \right\} \end{aligned} \quad (10.8)$$

где $L_\beta^0 = U_0^{-1} \partial_\beta U_0$; $R_\beta^0 = U_0 \partial_\beta U_0^{-1}$.

Здесь λ_α - матрица Гелл-Манна, нормированная условием

$$SP(\lambda_\alpha \lambda_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 8.$$

Использование терминологии вращательного движения объясняется тем, что преобразование (10.5) можно трактовать как некоторое "твердотельное" вращение скирмиона (сравните с разделом 7.3).

Для вычисления эффективного действия Весса-Зумино удобно ввести левоинвариантные формы Маурера-Картана

$$\alpha = A^{-1} dA; \quad u = U_0^{-1} dU_0,$$

где d - внешний дифференциал, и воспользоваться видом S_{WZ} из (8.46). Тогда

$$S_{WZ}(U) = S_{WZ}(U_0) - \frac{i N_c}{4B\pi^2} \int_{\mathcal{X}} SP U^3 (\alpha + U_0^{-1} dU_0), \quad (10.9)$$

соответственно

$$\mathcal{L}_{WZ}(A, \dot{A}) = -i N_c K_\alpha(U_0)(A^{-1} \dot{A})_\alpha, \quad (10.10)$$

где введено обозначение

$$K_\alpha(U_0) = \frac{E_{ijk}}{48\pi^2} \int d^3x SP [u_i u_j u_k, (\lambda_\alpha + U_0^{-1} \lambda_\alpha U_0)].$$

Дальнейшая конкретизация эффективного лагранжиана заключается в вычислении явного вида матричных элементов $I_{\alpha\beta}^{(2)}$, $I_{\alpha\beta}^{(4)}$ и K_α на классическом решении (10.6). В результате получим [146]:

$$I_{\alpha\beta}^{(2)}(U_0) = \begin{cases} \frac{32}{3} \pi \int_0^\infty dr r^2 \sin^2 \theta(r), & \alpha = \beta = 1, 2, 3; \\ 8\pi \int_0^\infty dr r^2 (1 - \cos \theta(r)), & \alpha = \beta = 4, 5, 6, 7; \\ 0, & \alpha = \beta = 8; \end{cases} \quad (10.11)$$

$$I_{\alpha\beta}^{(4)}(U_0) = \begin{cases} \frac{256}{3} \int_0^\infty dr r^2 \sin^2 \theta (\theta'^2 + \frac{\sin^2 \theta}{r^2}), & \alpha = \beta = 1, 2, 3; \\ 16\pi \int_0^\infty dr r^2 (\theta'^2 + \frac{2 \sin^2 \theta}{r^2}) 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, & \alpha = \beta = 4, \dots, 7; \\ 0, & \alpha = \beta = 8. \end{cases} \quad (10.12)$$

Для $K_\alpha(U_0)$, учитывая формулы (2.18), (2.25) для топологического заряда Q , приходим к выражению

$$K_\alpha(U_0) = \sqrt{\frac{1}{3}} Q(U_0) \delta_{\alpha 8}. \quad (10.13)$$

Численный расчет интегралов в правой части формул (10.11), (10.12) позволяет привести эффективный лагранжиан модели к виду

$$\mathcal{L}(A, \dot{A}) = -\frac{1}{2} \alpha(U_0)(A^{-1} \dot{A})_\alpha (A^{-1} \dot{A})_\alpha - \frac{1}{2} \beta(U_0)(A^{-1} \dot{A})_\alpha (A^{-1} \dot{A})_\alpha - \sqrt{\frac{1}{3}} i N_c Q(A^{-1} \dot{A})_8, \quad (10.14)$$

где $i = 1, 2, 3$; $\alpha = 4, 5, 6, 7$; $\alpha(U_0) \approx 439/F_{\pi}^2 \in^2$; $\beta(U_0) \approx 153/F_{\pi}^2 \in^2$.

Теперь мы можем переходить непосредственно к процедуре квантования, т.е. ввести канонические переменные и записать в этих переменных гамильтониан. При этом квантовые состояния частицы, соответствующей классическому решению (скирмиону), возникнут как собственные функции гамильтониана.

10.2. Каноническое квантование скирмиона

Поскольку коллективные переменные $A(t) \in SU(3)$, то локально мы можем параметризовать $A(t)$ набором из 8 параметров $\{\zeta_\alpha(t)\}$; $\alpha = 1, \dots, 8$. Несмотря на эквивалентность $A'(t) = A(t) h(t)$ и $A(t)$, где $h(t)$ - гиперзарядовое вращение, мы можем считать все параметры $\zeta_\alpha(t)$ независимыми, а отмеченную инвариантность учтем наложением связи. Лагранжиан (10.14) запишется в координатах ζ_α после подстановки

$$A(t) = A[\zeta_\alpha(t)]; \quad \dot{A}(t) = \frac{\partial A}{\partial \zeta_\alpha} \dot{\zeta}_\alpha(t) = \partial_\alpha A \cdot \dot{\zeta}_\alpha. \quad (10.15)$$

Канонические импульсы получаются стандартным образом:

$$P_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}_\alpha} = -\alpha(U_0)(A^{-1} \dot{A})_\alpha (A^{-1} \partial_\alpha A)_\alpha - \beta(U_0)(A^{-1} \dot{A})_\alpha (A^{-1} \partial_\alpha A)_\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} N_c Q(A^{-1} \partial_\alpha A)_8, \quad (10.16)$$

как и скобки Пуассона:

$$\{\zeta_\alpha, P_\beta\} = i \delta_{\alpha\beta}; \quad \{\zeta_\alpha, \zeta_\beta\} = \{P_\alpha, P_\beta\} = 0. \quad (10.17)$$

Поскольку мы рассматриваем вращающийся скирмион, то естественно полагать, что соответствующий гамильтониан диагонализуеться в "угловых" переменных, а от импульсов (10.16) следует перейти к моментам импульсов. Такой переход можно осуществить с помощью несингулярной матрицы $N_{\alpha\beta}(\zeta)$ (существование которой доказывается в Дополнении Ж), удовлетворяющей соотношению

$$\frac{\partial A}{\partial \zeta_\alpha} N_{\alpha\beta} = i A \lambda_\beta. \quad (10.18)$$

Аналогом момента импульса будут переменные

$$\mathcal{M}_\alpha = -P_B N_{\beta\alpha}, \quad (10.19)$$

для которых из (10.17) вычисляются следующие скобки Пуассона:

$$\begin{aligned} \{A_{\alpha\beta}, A_{\gamma\delta}\} &= 0; \{\mathcal{M}_\alpha, A_{\gamma\beta}\} = i(A\lambda_\alpha)_{\gamma\beta}; \\ \{\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta\} &= -2\int_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{M}_\gamma. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Из (10.16) и (10.19) для \mathcal{M}_α получается выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\alpha &= i\alpha(v_0)(A^{-1}\dot{A})_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha} + i\beta(v_0)(A^{-1}\dot{A})_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha} + \\ &+ \frac{N_c}{\sqrt{3}} Q \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Гамильтониан системы

$$H = P_\alpha \dot{z}_\alpha - \mathcal{L}$$

диагонализуется в переменных \mathcal{M}_α и принимает вид

$$H = \frac{\mathcal{M}_\alpha^2}{2\alpha(v_0)} + \frac{\mathcal{M}_\beta^2}{2\beta(v_0)}. \quad (10.22)$$

Однако мы должны еще учесть инвариантность переменных $A(t)$ относительно гиперзарядового вращения или, что эквивалентно, относительно преобразования $A'(t) = A(t) \exp(i\beta(t)\lambda_\beta)$. В силу соотношений

$$\begin{aligned} (A^{-1}\dot{A})'_\alpha &= (A^{-1}\dot{A})_\alpha + \frac{i}{2} SP(\lambda_\alpha \lambda_\beta) \dot{\beta}(t) = (A^{-1}\dot{A})_\alpha \quad (\alpha \neq \beta) \\ (A^{-1}\dot{A})'_\beta &= (A^{-1}\dot{A})_\beta + i\dot{\beta}(t) \end{aligned}$$

первые два члена в лагранжиане (10.14) инвариантны относительно такого преобразования, а последний член - неинвариантен:

$$-\frac{iN_c}{\sqrt{3}} Q (A^{-1}\dot{A})_\beta \rightarrow -\frac{iN_c}{\sqrt{3}} Q (A^{-1}\dot{A})_\beta + \frac{N_c}{\sqrt{3}} Q \dot{\beta}(t). \quad (10.23)$$

Из (10.21) следует, что коэффициент при $\dot{\beta}(t)$ в (10.23) есть в точности \mathcal{M}_β - инфинитезимальный генератор гиперзарядового поворота. $\mathcal{L}(A, \dot{A})$ будет инвариантом относительно таких преобразований при условии

$$\mathcal{P} \equiv \mathcal{M}_\beta + \frac{N_c}{\sqrt{3}} Q = 0. \quad (10.24)$$

Таким образом, наша система является системой со связями и, соответственно, будет описываться гамильтонианом

$$H = \frac{\mathcal{M}_\alpha^2}{2\alpha(v_0)} + \frac{\mathcal{M}_\beta^2}{2\beta(v_0)} + M \mathcal{P}, \quad (10.25)$$

где M - неопределенный множитель Лагранжа. Проверка показывает, что $\{H, \mathcal{P}\} = 0$, т.е. связь (10.24) является связью I-го рода по классификации Дирака.

Собственно процедура квантования состоит в том, что переменные $A_{\alpha\beta}$ и \mathcal{M}_α рассматриваются как операторы $\hat{A}_{\alpha\beta}$ и $\hat{\mathcal{M}}_\alpha$ в некотором гильбертовом пространстве \mathcal{H} , скобки Пуассона в (10.20) заменяются на коммутаторы

$$[\hat{A}_{\alpha\beta}, \hat{A}_{\gamma\delta}] = 0; [\hat{\mathcal{M}}_\alpha, \hat{A}_{\beta\gamma}] = -(\hat{A}\lambda_\alpha)_{\beta\gamma}; [\hat{\mathcal{M}}_\alpha, \hat{\mathcal{M}}_\beta] = 2i\int_{\alpha\beta\gamma} \hat{\mathcal{M}}_\gamma \quad (10.26)$$

и строится реализация алгебры (10.26) в \mathcal{H} .

Рассмотрим гильбертово пространство \mathcal{H} функций на $SU(3)$ -многообразии со скалярным произведением

$$(\Psi, \Phi) = \int_{SU(3)} \mathcal{D}(v) \Psi^*(v) \Phi(v), \quad (10.27)$$

где $\mathcal{D}(v)$ - инвариантная мера на $SU(3)$. Операторы "угловых" переменных реализуем как левое умножение

$$(\hat{A}_{\alpha\beta} \Psi)(v) = v_{\alpha\beta} \Psi(v), \quad (10.28)$$

а операторы "угловых моментов" - при помощи соотношения

$$[\exp(i\theta_\alpha \hat{\mathcal{M}}_\alpha) \Psi](v) = \Psi[v \exp(-i\theta_\alpha \lambda_\alpha)], \quad (10.29)$$

где θ_α - некоторые константы. Такой выбор реализации операторов можно обосновать исходя из реализации симметрий действия (10.1) - (10.3) в конфигурационном пространстве коллективных переменных /142/. Наличие связи (10.24) приводит к сужению гильбертова пространства \mathcal{H} на подпространство $\mathcal{H}_{SU(3)}$ функций, удовлетворяющих условию

$$\Psi[v \exp(-i\theta_\beta \lambda_\beta)] = \exp(-i\frac{N_c}{\sqrt{3}} Q \theta_\beta). \quad (10.30)$$

Поскольку из вида $\lambda_\beta = 1/\sqrt{3} \text{diag}[1, 1, -2]$ следует, что $\exp(-i2\pi/\sqrt{3} \lambda_\beta) = 1$, то условие (10.30) выполняется лишь при целых значениях N_c . Данное рассуждение можно рассматривать как альтернативный подход к получению результата Виттена /22/.

Более детальное изучение спектра состояний системы требует задания базиса в $\mathcal{H}_{SU(3)}$ и здесь можно воспользоваться аналогией с задачей о "симметричном волчке" /157/. Гамильтониан (10.25) обладает симметрией относительно преобразований вида $A \rightarrow VAV^{-1}$, где $V \in SU(3)$, а W - элемент одной из подгрупп $SU(3)$: $SU(2)$ или $U(1)$ /151/. Аналогичными симметриями обладает волчок, у которого совпадают два из трех главных моментов инерции. Роль коллективных координат волчка выполняют $SU(2)$ -матрицы, и гамильтониан симметричен относительно аналогичных преобразований, только $V \in SU(2)$, а $W \in U(1)$. Симметрия относительно умножения на W справа связана с формой волчка. Состояния волчка описываются матричными элементами $D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ матриц $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$, образующих $(2j+1)$ - мерное неприводимое представление группы вращений. Здесь α, β, γ - углы Эйлера, индекс m_j - собственное значение оператора $W = \exp(i\beta\epsilon_3)$. При этом $D_{mm'}^j$ - собственная функция как гамильтониана, так и квадрата углового момента J^2 , которые могут быть диагонализированы одновременно.

В нашем случае мы интересуемся неприводимыми представлениями $SU(3)$, реализуемыми в виде бесследовых тензоров с p ковариантными и q контравариантными индексами $D^{pq}(U)$.

Собственными функциями гамильтониана будут матричные элементы $D_{\alpha\beta}^{pq}(U)$. Индексы α и β имеют при этом собирательный смысл, т.к. в $SU(3)$ - случае независимо можно диагонализировать I^2 - оператор квадрата изоспина, I_3 - 3-компоненту изоспина и Y - оператор гиперзаряда. Поэтому базис в пространстве $\mathcal{H}_{SU(3)}$ будут образовывать матричные элементы вида

$$D^{pq}(\bar{I}, \bar{I}_3, Y)(\bar{I}', \bar{I}'_3, Y')(U), \quad (10.31)$$

где \bar{I}, \bar{I}_3, Y - собственные значения указанных выше операторов. Остается выяснить физический смысл этих индексов.

Рассмотрим преобразование флейворной симметрии вида $U(x) = VU(x)V^{-1}$, $V \in SU(3)$. В пространстве коллективных переменных, как легко видеть $U'(x) = V(AU_0A^{-1})V^{-1} = (VA)U_0(VA)^{-1}$, т.е. действие флейворной подгруппы в переменных A задается левым умножением $A' = VA$. Следовательно, левая тройка индексов в (10.31) является флейворной.

Действие (10.1)-(10.3) инвариантно относительно пространственных вращений $\bar{x}' = R\bar{x}$. В коллективных переменных это проявляется следующим образом: $U(R\bar{x}, t) = A(t)U_0(R\bar{x})A^{-1}(t)$. Но скирмион $U_0(\bar{x})$ - инвариант группы $\text{diag}[SO(3)_r \otimes SO(3)_s]$, где

повороты в пространстве и изопространстве отождествляются. Этот факт можно переписать в виде $U_0(R\bar{x}) = V_R U_0(\bar{x}) V_R^{-1}$, где

$$V_R = \begin{pmatrix} \exp(i\vec{\alpha}_R \cdot \vec{\epsilon}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{\alpha}_R = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \quad \sum \alpha_i^2 = \alpha^2.$$

Матрица поворотов записывается через α_i в виде

$$R_{ij} = \delta_{ij} \cos 2\alpha + \frac{2\alpha_i \alpha_j}{\alpha^2} \sin^2 \alpha - \epsilon_{ijk} \frac{\alpha_k}{\alpha} \sin 2\alpha.$$

Следовательно,

$$U(R\bar{x}, t) = A V_R U_0(\bar{x}) V_R^{-1} A^{-1} = (A V_R) U_0(\bar{x}) (A V_R)^{-1} = A' U_0(\bar{x}) A'^{-1},$$

т.е. эффект пространственного вращения проявляется в правом умножении $A' = A V_R$. Но $V_R - SU(2)$ -матрица, вложенная в $SU(3)$, т.е. генераторы правых $SU(2)$ -преобразований в пространстве коллективных переменных суть генераторы вращений. Поэтому два из трех правых индексов в (10.31) следует отождествить со спиновыми индексами и для удобства переобозначить $\bar{I}' = Y, \bar{I}'_3 = Y_3$.

Физический смысл последнего индекса в правой тройке следует из симметрии состояний относительно правого гиперзарядового поворота

$$D^{pq}(\bar{I}, \bar{I}_3, Y)(Y, Y_3, Y') (U e^{-i\theta_8 \lambda_8}) = D^{pq}(\bar{I}, \bar{I}_3, Y)(Y, Y_3, Y') e^{-i\theta_8 \sqrt{3} Y'} \quad (10.32)$$

Согласно (10.30) при сужении гильбертова пространства \mathcal{H} на $\mathcal{H}_{SU(3)}$ в силу наличия связи (10.24) должно быть выполнено равенство $3Y' = N_8$.

В интересующем нас случае число цветов $N_c = 3$, топологический заряд $Q = 1$, поэтому $Y = 1$. Это условие накладывает ограничение на выбор представлений $SU(3)$ для описания вращательных состояний скирмиона. Из теории представлений группы $SU(3)$ (см., например, /151/ гл.9, 10) следует, что из всех функций $D^{pq}(U)$ мы должны отобрать лишь те, для которых

$$p + 2q = 0 \pmod{3}. \quad (10.33)$$

Наименьшими из допустимых мультиплетов в таком случае будет октет $\underline{8} = D^{(1,1)}$ (1,1) и декуплет $\underline{10} = D^{(3,0)}$ (3,0). Условие $Y' = 1$ накладывает ограничение и на возможные значения спина Y : $Y = 1/2$ для октета $\underline{8}$ и $Y = 3/2$ для декуплета $\underline{10}$. При повороте на угол 2π вокруг третьей изотопической оси собственные

функции из $\mathcal{H}_{SU(3)}$ приобретают множитель $\exp(i\frac{1}{2}\lambda_3 \cdot 2\pi) = \exp(i\pi\sqrt{3}\lambda_3)$. В силу (10.32) это означает, что все волновые функции из $\mathcal{H}_{SU(3)}$ изменяют знак на противоположный, т.е. соответствуют фермионным состояниям.

Итак, мы убедились в том, что добавление действия Весса-Зумино (10.3) к действию Скирма (10.2) позволяет получить качественно правильную классификацию адронных состояний. Осталось выяснить, какие количественные результаты можно получить в рамках такого подхода. Этим мы и займемся в следующем разделе*).

10.3. Спектр масс барионов в модели Скирма

В основном, мы будем следовать работам Каназава /99/, /159/, наиболее отчетливым в методическом отношении.

Спектр масс определяется собственными значениями гамильтониана (10.22), который удобно представить в виде

$$H = M_{SK} + \frac{1}{2B(U)} \left(\sum_{k=1}^3 \hat{M}_k^2 - \hat{M}_8^2 \right) + \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{2B} \right) \sum_{i=1}^3 \hat{M}_i^2 \quad (10.34)$$

$$= M_{SK} + \frac{1}{2B} (\hat{C}_2 - 3Y^2) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{B} \right) \hat{J}^2,$$

где в выражение (10.22) добавлена масса классического скирмиона

M_{SK} , $\hat{C}_2 = \hat{C}_2(SU(3))$ - квадратичный оператор Казимира флейворной группы $SU(3)$; \hat{J}^2 - оператор Казимира $SU(2)$ - подгруппы, совпадающий с оператором квадрата полного углового момента $\hat{Y}' = 1/\sqrt{3} \hat{M}_8$ - оператор правой гиперзарядовой подгруппы $U(1)$. Подстановка в (10.34) собственных значений операторов для (P, q) - представления приводит к массовой формуле

$$M_{(P,q)Y,Y'} = M_{SK} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{B} \right) 2Y(Y+1) + \frac{1}{2B} \left[\frac{4}{3} \{ P^2 + q^2 + 3(P+q) + pq \} - 3Y^2 \right]. \quad (10.35)$$

* Изложенную схему квантования можно сформулировать в терминах универсального накрывающего пространства, т.е. в духе пионерских идей Финкельштейна. Интересующимся читателям можно порекомендовать работу Балачаандрана /147/.

Соответственно для средней массы октета $\underline{8} = (1, 1)$ имеем

$$M_{\underline{8}} = M_{SK} + \frac{3}{2a(U)} + \frac{3}{B(U)}, \quad (10.36)$$

а для средней массы декуплета $\underline{10} = (3, 0)$, $Y = 3/2$, $Y' = 1$ найдем

$$M_{\underline{10}} = M_{SK} + \frac{15}{2a(U)} + \frac{3}{B(U)}. \quad (10.37)$$

Поскольку мы исходили из эффективного действия (10.1) в киральном приближении (массы кварков и, соответственно, мезонов считались равными нулю), то мы не можем получить расщепления по массам в рамках мультиплетов. Для получения расщепления требуется ввести в лагранжиан массивный член, явным образом нарушающий киральную симметрию. В частности, такой член можно выбрать в виде /159/

$$\delta m = \frac{F_{\pi}^2}{16} m^2 S_P (U + U^{-1} - 2) - \frac{F_{\pi}^2}{8\sqrt{3}} \Delta m^2 S_P [\lambda_3 (U + U^{-1})], \quad (10.38)$$

где $m^2 = \frac{1}{8} (3m_{\pi}^2 + 4m_K^2 + m_{\eta}^2)$; $\Delta m^2 = m_K^2 - m_{\pi}^2$.

Второй член в (10.38) необходим для учета наблюдаемого расщепления масс по гиперзаряду (см. рис. II).

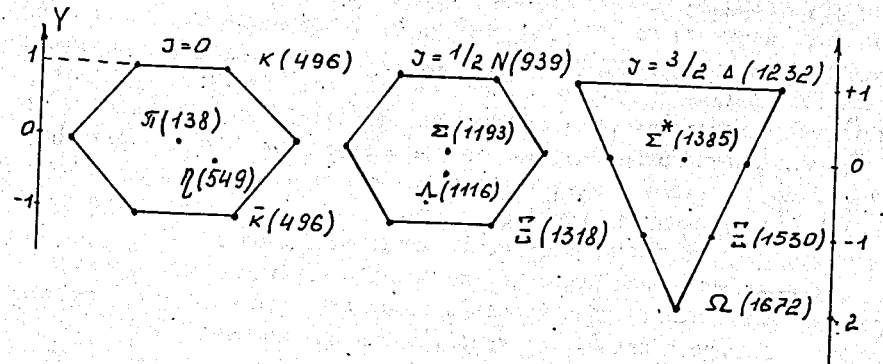


Рис. II

В результате такой модификации киральная симметрия $SU(3)_R$ нарушается до $diag(SU(3)_L \otimes SU(3)_R) \approx SU(3)$, и пионы становятся массивными, а в гамильтониане (10.34) появляется добавка

$$\frac{2\pi}{3} \frac{\Delta m^2}{F_\pi \epsilon^3} M(1 - D_{88}^{ad}(A)), \quad (10.39)$$

где

$$M = \int_0^\infty dx x^2 (1 - \cos \theta(x)); \quad x = \epsilon F_\pi r.$$

Функция $\theta(x)$ должна удовлетворять в этом случае соответствующей модификации уравнения (5.22). В (10.39) входит оператор $D_{88}^{ad}(A)$, возникающий от фактора $(\lambda_8 A \lambda_8 A^{-1})$, обусловленного вторым членом в (10.38). В результате приходим к следующему расщеплению

масс:

$$\begin{aligned} M_N &= M_8 - \frac{3}{10} m; & M_\Lambda &= M_8 - \frac{1}{10} m; \\ M_\Sigma &= M_8 + \frac{1}{10} m; & M_\Xi &= M_8 + \frac{1}{5} m; \\ M_\Delta &= M_{10} - \frac{1}{8} m; & M_{\Sigma^*} &= M_{10}; \\ M_{\Xi^*} &= M_{10} + \frac{1}{8} m; & M_{\Omega} &= M_{10} + \frac{1}{4} m; \end{aligned} \quad (10.40)$$

где $m = \frac{2}{3} \pi \Delta m^2 F_\pi M$. Отметим, что впервые такое расщепление получил Гуадагнини /141/, используя иной вид массивного члена. Для сравнения полученного спектра масс барионов с данными эксперимента мы должны конкретизировать значения $F_\pi, \epsilon, \Delta M = M_{10} - M_8$, а также найти с помощью ЭВМ числа $a(u_0), b(u_0)$ и M , определяемые выбором исходной модели. Понятно, что здесь возможны варианты, т.е. какие-то из этих значений можно фиксировать по данным экспериментов, а другие получить с помощью расчетов. Результаты различных расчетов сведены в таблице I Дополнения Е, где указано, при каких исходных предположениях они получены. Наиболее близкие к экспериментальным значения масс барионов получены в работах /159/, /148/. При этом в работе /159/ в гамильтониан (10.34) вводились дополнительные члены, существенные в квантовом случае и исчезающие в классическом пределе. За подробностями отсылаем читателя к работе /159/.

На основе модели Скирма с членом Весса-Зумино можно провести расчеты и других статических наблюдаемых для барионов: электрического и магнитного зарядовых радиусов, магнитных моментов, констант связи и т.д. По сути, это чисто вычислительная работа, не содержащая каких-то новых идей по сравнению со стандартными квантово-механическими расчетами. Поэтому мы укажем работы /99/, /156/, где содержится последовательная схема проведения таких расчетов, а в Дополнении Е приведем таблицу 2 с результатами расчетов. Последние свидетельствуют о том, что рассматриваемая модель, в основном, правильно воспроизводит экспериментальные данные, и при достаточной настойчивости можно

довести расхождения с экспериментом до 10-15%. Это позволяет надеяться на то, что модель Скирма может служить хорошим полигоном как для проверки применимости новых расчетных схем, пригодных для описания явлений в непертурбативной области КХД, так и для апробирования новых идей. Как известно, появление модели Ли в квантовой электродинамике во многом способствовало ее прогрессу. Вполне возможно, что модель Скирма сможет сыграть подобную роль для непертурбативной квантовой хромодинамики, в которой еще очень много нерешенных проблем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше мы столь долго и подробно описывали модель Скирма не только потому, что в ней проявились черты "полигона" для моделирования и изучения непертурбативных процессов в КХД. Внимательный читатель видимо уже заметил, что для получения согласия с экспериментальными данными авторы, развивавшие модели в прикладном направлении, прибегали к разного рода (оправданным и не очень) ухищрениям. В частности, выходили за рамки исходной модели, вводили дополнительные члены, параметры, ограничения и т.д. При достаточном умении и трудолюбии на этом пути удастся достичь вполне впечатляющих результатов, даже несмотря на то, что все возможности модели не только не используются, но еще до конца не изучены (мы надеемся, что смогли убедить читателя в этом).

Наиболее фундаментальный, на наш взгляд, итог исследований модели Скирма основан на том наблюдении, что все известные фермионы наделены некоторым зарядом нединамической природы - лептонным или барионным. Это позволяет высказать правдоподобную догадку о топологическом характере этих зарядов. В таком случае можно принять, в духе бритвы Оккама, что бог (природа) не нуждается в изобретении двух типов фундаментальных полей: бозонных и фермионных. Вполне можно обойтись одним из них, чтобы построить остальные. Действительно, из бозонного поля можно с помощью солитонного механизма и нетривиальной топологии построить фермионы, а из фермионов стандартным способом (спариванием) заработать бозоны. В результате приходим к расширению понятия ядерной демократии до "супердемократии". Этот вывод представляется нам весьма важным, хотя мы отдаем себе отчет, что он носит пока чисто умозрительный характер и может найти множество оппонентов.

Дополнение А. КИРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Исторически идеи киральной симметрии в физике адронов получили признание после открытия несохранения четности в слабых взаимодействиях. В 40-е годы в экспериментах с космическими лучами были обнаружены "странные" θ - и τ -мезоны, названные так потому, что рождались в результате сильного взаимодействия адронов при высоких энергиях, а распадались пионы слабым образом. При этом θ -мезон распадался, как правило, на два пиона, а мезон τ - на три пиона. Детальное изучение этих распадов показало, что времена жизни, массы и другие характеристики θ и τ -мезонов совпадают в пределах ошибок эксперимента. Возник естественный вопрос: являются ли эти процессы распадами двух разных частиц с близкими характеристиками или представляют собой два различных канала распада одной и той же частицы. Все говорило в пользу второго варианта за исключением одного обстоятельства: θ - и τ -мезоны различались пространственной четностью, что следует из характера их распадов.

Сейчас мы хорошо знаем, как был разрешен этот " θ - τ -парадокс". В 1956 г., проанализировав данные экспериментов, Т.Д.Ли и Ч.Янг пришли к заключению, что закон сохранения четности в слабых взаимодействиях никогда не проверялся экспериментально, и предложили способ такой проверки. Эксперименты 1957 г. группы Ц.С.Ву блестяще подтвердили гипотезу о несохранении четности в слабых распадах, и одновременно было снято последнее возражение против того, чтобы рассматривать θ - и τ -мезоны как одну частицу, получившую название К-мезон. В связи с этим возник вопрос о расширении изотопической группы внутренней симметрии адронов таким образом, чтобы помимо трех $SU(2)$ -генераторов изотопических вращений I_L , не приводящих к изменению четности состояний, эта группа включала в себя три генератора преобразований, перепутывающих состояния с различной четностью. Возможность такого расширения изотопической симметрии сильных взаимодействий впервые изучалась А.Пайсом /161, 162/ и получила название киральной симметрии адронов. Явный вид кирального преобразования, перепутывающего состояния с различной четностью (\mathcal{J} -преобразование), был предложен Б.Тушеком /163/, а в работе С.Ватанабе /164/ было показано, что \mathcal{J} -оператор является простейшим из операторов, антикоммутирующих с оператором четности.

Отметим, что термин "киральность" использовался в физике достаточно давно. Еще в 1869 году У.Томсон (Кельвин) использовал этот термин для описания ориентации вихрей ("овалов" Кельвина) в своей знаменитой работе "О вихревом движении". По сути, киральная симметрия связана с хорошо известным в геометрии фактом наличия только двух

возможных ориентаций в n -мерном евклидовом пространстве: правой и левой. По гречески "кира" - рука, отсюда и произошло название симметрии.

В современной литературе под киральной симметрией принято понимать инвариантность лево- и правоспиральных спинорных полей по отдельности относительно изотопических преобразований. В случае безмассовых частиц с киральной симметрией связана сохраняющаяся характеристика - спиральность, которая определяется как удвоенная проекция спина на направление импульса частицы - $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})/|p|$. Если спин направлен против импульса частицы, то спиральность считается левой (L), а если направление импульса и спина совпадают, то спиральность правая (R). Группу преобразований, действующих на правые и левые состояния независимо, обозначают $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ и называют киральной группой. В общем случае вместо изотопической группы $SU(2)$ возможен выбор иной группы внутренних симметрий G , тогда киральные преобразования будут элементами группы $G_L \otimes G_R$.

Интенсивное использование идей киральной симметрии в физике высоких энергий было стимулировано работой Р.Фейнмана и М.Гелл-Манна /165/, в которой высказана идея об универсальной $V-A$ - структуре заряженных токов в слабых взаимодействиях. На языке киральной симметрии это означает, что все лептоны входят в слабые токи своими левыми спиральными состояниями, а античастицы - правыми. Дальнейшее развитие этих идей привело к возникновению таких фундаментальных направлений в физике элементарных частиц, как алгебра токов Гелл-Манна, метод феноменологических лагранжианов, киральные σ -модели и др. Известно также, что расширение изотопической симметрии на случай странных частиц привело М.Гелл-Манна /166/ к унитарной $SU(3)$ -симметрии, идее кварков и, в конечном итоге, к созданию основ квантовой хромодинамики (КХД). Изложение этих вопросов читатель может найти в монографиях /14/, /167-169/, а также в не утратившем актуальность обзоре /46/. Мы приводим лишь начальные сведения из этой обширнейшей области, необходимые для понимания основного текста.

А.1. Алгебраические аспекты киральной симметрии

Поскольку простейшая киральная группа $SU(2) \otimes SU(2)$ является шестипараметрической, и не существует линейного представления этой группы в трехмерном изотопическом пространстве, то мы можем либо расширить изопространство до четырехмерного, либо строить нелинейную реализацию киральной группы в 3-изопространстве. В первом случае можно поступить по аналогии с тем, как группа вращений трехмерного пространства расширяется до однородной группы Лоренца: добавляется чет-

вертая координата X_0 и, помимо трех генераторов поворотов \mathcal{I}_i вокруг пространственных осей, в группу включаются три генератора лоренц-поворотов (бустов) \mathcal{L}_i в плоскостях (X_0, X_i) . Точно таким же образом 3-изовектор Φ дополняем четвертой компонентой ϕ_0 и рассматриваем как вектор в 4-изопространстве. Тогда генераторы изоповоротов \mathcal{I}_i будут перемешивать только компоненты Φ и оставлять без изменения ϕ_0 , в то время, как генераторы киральных бустов \mathcal{K}_i будут перемешивать ϕ_0 с компонентами Φ .

Генераторы \mathcal{I}_i и \mathcal{K}_i образуют алгебру вида

$$[\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j] = i \varepsilon_{ijk} \mathcal{I}_k; [\mathcal{I}_i, \mathcal{K}_j] = i \varepsilon_{ijk} \mathcal{K}_k; [\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j] = i \varepsilon_{ijk} \mathcal{I}_k, \quad (\text{A.1})$$

локально изоморфную алгебре Ли группы $O(4)$. Можно ввести левые и правые генераторы

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} (\mathcal{I}_i - \mathcal{K}_i); \quad \mathcal{R}_i = \frac{1}{2} (\mathcal{I}_i + \mathcal{K}_i), \quad (\text{A.2})$$

для которых коммутационные соотношения принимают вид

$$[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] = i \varepsilon_{ijk} \mathcal{L}_k; [\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_j] = i \varepsilon_{ijk} \mathcal{R}_k; [\mathcal{L}_i, \mathcal{R}_j] = 0, \quad (\text{A.3})$$

что свидетельствует о расщеплении алгебры (A.1) на две независимые подалгебры, каждая из которых изоморфна $SU(2)$ -алгебре. Отсюда и происходит обозначение $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ для киральной группы.

По построению генераторы \mathcal{I}_i вращений в изопространстве должны коммутировать с оператором четности ρ , а генераторы киральных поворотов - антикоммутировать:

$$[\rho, \mathcal{I}_i] = 0; [\rho, \mathcal{K}_i] = 0. \quad (\text{A.4})$$

В векторном представлении киральной группы $SU(2) \otimes SU(2) \approx O(4)$ всем перечисленным выше требованиям удовлетворяют следующие перестановочные соотношения генераторов с компонентами 4-изовектора

$$\Phi = (\phi_0, \Phi):$$

$$[\mathcal{I}_i, \Phi_j] = i \varepsilon_{ijk} \Phi_k; [\mathcal{I}_i, \phi_0] = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$[\mathcal{K}_i, \Phi_j] = -i \delta_{ij} \phi_0; [\mathcal{K}_i, \phi_0] = i \phi_i \quad (\text{A.6})$$

Здесь \mathcal{I}_i и \mathcal{K}_i представляют собой интегралы движения, т.е. функционалы от полей и канонических импульсов, структура которых определяется теоремой Нётер. При этом в классической теории скобка

$[,]$ понимается как скобка Пуассона, деленная на i , а в квантовой теории - как коммутатор.

Для примера приведем вычисление первого из соотношений (A.5) в классической теории безмассовых векторных полей с лагранжианом плотностью

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi. \quad (\text{A.7})$$

Выпишем канонический импульс

$$\mathcal{T} = \frac{\partial \mathcal{L}_\Phi}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi} \quad (\text{A.8})$$

и изоспин

$$\mathcal{I}_i = \int d^3x \mathcal{T}_k [\omega_i, \Phi]_k = \int d^3x \mathcal{T}_k \varepsilon_{klm} \delta_{il} \phi_m = \varepsilon_{kim} \int d^3x \mathcal{T}_k \phi_m \quad (\text{A.9})$$

и вычислим скобку Пуассона

$$[\mathcal{I}_i, \Phi_j] = \int d^3x \left(\frac{\delta \mathcal{I}_i}{\delta \Phi_s} \frac{\delta \Phi_j}{\delta \mathcal{T}_s} - \frac{\delta \mathcal{I}_i}{\delta \mathcal{T}_s} \frac{\delta \Phi_j}{\delta \Phi_s} \right) = \int d^3x \left(\varepsilon_{sim} \phi_m \delta_{js} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \right) = \varepsilon_{jim} \phi_m \quad (\text{A.10})$$

Аналогично вычисляются перестановочные соотношения компонент (ϕ_0, Φ) с левыми и правыми киральными генераторами (A.2):

$$[\mathcal{L}_i, \phi_0] = -\frac{i}{2} \phi_0; [\mathcal{L}_i, \Phi_j] = \frac{i}{2} (\delta_{ij} \phi_0 + \varepsilon_{ijk} \Phi_k) \quad (\text{A.11})$$

$$[\mathcal{R}_i, \phi_0] = \frac{i}{2} \phi_0; [\mathcal{R}_i, \Phi_j] = -\frac{i}{2} (\delta_{ij} \phi_0 - \varepsilon_{ijk} \Phi_k). \quad (\text{A.12})$$

Их можно переписать в компактном виде, если воспользоваться матричной записью 4-изовектора

$$U = \phi_0 + i \Phi \Sigma, \quad (\text{A.13})$$

где Σ - изоспиновые матрицы Паули. При этом формулы (A.11) и (A.12) принимают вид

$$[\mathcal{L}_i, U] = U \frac{\Sigma_i}{2}; [\mathcal{R}_i, U] = -\frac{\Sigma_i}{2} U. \quad (\text{A.14})$$

Изоспинорные поля Φ можно разделить на левые и правые компоненты

$$\Phi_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \Phi; \quad \Phi_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \Phi, \quad (\text{A.15})$$

преобразующиеся по фундаментальным представлениям (1/2, 0) и (0, 1/2) группы

$$[L_i, \psi_L] = -\frac{\varepsilon_i}{2} \psi_L; \quad [R_i, \psi_L] = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$[R_i, \psi_R] = -\frac{\varepsilon_i}{2} \psi_R; \quad [L_i, \psi_R] = 0. \quad (\text{A.17})$$

При выборе нелинейной реализации киральной симметрии $SU(2) \otimes SU(2)$ на компоненты 4-изовектора $\phi = (\phi_0, \underline{\phi})$ накладывается дополнительное условие

$$\phi_0^2 + \underline{\phi} \cdot \underline{\phi} = 1, \quad (\text{A.18})$$

т.е. линейно-независимыми остаются только 3 компоненты ϕ_i , которые согласно С.Вайнбергу [170] преобразуются нелинейным образом при преобразованиях, генерируемых киральными бустами:

$$[K_i, \phi_j] = -i \{ \delta_{ij} f(\phi^2) + \phi_i \phi_j g(\phi^2) \}. \quad (\text{A.19})$$

Здесь $f(\phi^2)$ - произвольная регулярная функция, а $g(\phi^2)$ выражается через $f(\phi^2)$ в соответствии с тождеством Якоби для коммутаторов:

$$g(\phi^2) = 1 + \frac{2f(\phi^2)f'(\phi^2)}{f(\phi^2) - 2\phi^2 f'(\phi^2)}. \quad (\text{A.20})$$

$f'(\phi^2)$ означает дифференцирование по ϕ^2 . Коммутационные соотношения (A.1) и (A.5) остаются без изменений, а спинорные поля коммутируют с K_i по правилу

$$[K_i, \psi] = \frac{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_j \phi_k}{f(\phi^2) + (f(\phi^2) + \phi^2)^{1/2}} \psi. \quad (\text{A.21})$$

Приведем еще несколько формул, которые могут быть полезны при чтении основного текста. Связь (A.18) автоматически учитывается при объединении полей $(\phi_0, \underline{\phi})$ в единичный кватернион в соответствии с (A.13):

$$U(\bar{x}, t) = \phi_0(\bar{x}, t) + i \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\phi}(\bar{x}, t); \quad UU^\dagger = 1. \quad (\text{A.22})$$

Будем считать, основываясь на соображениях, приведенных в разделе 1.4 о трехмерном аналоге угловой переменной, что кирально-инвариантная лагранжева плотность зависит от первых производных $\partial_\mu U$. В таком случае выпишем выражение для нетеровских токов, связанных с

симметриями лагранжиана:

$$J_K^\mu = SP \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U)} \delta_K U + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U^\dagger)} \delta_K U^\dagger \right), \quad (\text{A.23})$$

где $\delta_K U$ - изменение функции $U(\bar{x}, t)$ при преобразовании симметрии; соответственно $\delta_K U^\dagger = -U^\dagger \delta_K U$. Закон сохранения этих токов следует из уравнений Эйлера-Лагранжа и инвариантности лагранжиана относительно преобразований симметрии:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U)} + U^\dagger \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U^\dagger)} U^\dagger = 0. \quad (\text{A.24})$$

Наибольший интерес для нас будут представлять токи, связанные с внутренней киральной симметрией, т.е. с преобразованиями из группы $SU(2) \otimes SU(2)$, которые в общем случае действуют на поле U следующим образом:

$$U' = BU \cdot D^\dagger, \quad (\text{A.25})$$

где B и D - произвольные $SU(2)$ -матрицы. Напомним, что любую $SU(2)$ -матрицу можно параметризовать действительными параметрами $\vec{\beta}$ и записать в виде $\exp(i\vec{\beta} \cdot \vec{\tau}/2)$. Тогда генераторы изотопических вращений I_K индуцируют изменения поля U на

$$\delta_K^V U = i \left[\frac{\varepsilon_K}{2}, U \right], \quad (\text{A.26})$$

и им будет соответствовать сохраняющийся изовекторный ток

$$V_K^\mu = 2 SP \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U)} \delta_K^V U \right) \quad (\text{A.27})$$

и сохраняющийся заряд Q_K^V , который можно интерпретировать как изоспин:

$$Q_K^V = -i \int d^3x SP \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} [\varepsilon_K, U] \right). \quad (\text{A.28})$$

Аналогичным образом генераторам киральных бустов K_i будут отвечать изменения поля U на

$$\delta_K^A U = i \left[\frac{\varepsilon_K}{2}, U \right]_+, \quad (\text{A.29})$$

сохраняющийся аксиальный ток

$$A_K^\mu = 2 SP \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U)} \delta_K^A U \right) \quad (\text{A.30})$$

и аксиальный заряд

$$Q_K^A = -i \int d^3x \text{Sp} \left(\frac{\partial^2}{\partial U} [\tau_K, U]_+ \right). \quad (\text{A.31})$$

Здесь использовано обозначение $\partial_U U = \dot{U}$.

Свое изложение мы иллюстрировали на примере наиболее популярной $SU(2) \otimes SU(2)$ - киральной симметрии. Отметим, что выписанные формулы легко переписываются для случая $SU(N) \otimes SU(N)$ - симметрии и, в общем случае, для $G \otimes G$ - симметрии. Рецепт переписывания прост: вместо генераторов и структурных констант группы $SU(2) \otimes SU(2)$ следует подставить соответствующие генераторы и структурные константы интересующей нас киральной группы и соответствующим образом изменить число фундаментальных полей (см., например, /49-51/).

A.2. Геометрические аспекты киральной симметрии

Проблема построения нелинейных реализаций групп внутренней симметрии тесно связана с геометрией искривленных пространств. Впервые на эту связь обратил внимание Э.Картан /171/, предложивший метод подвижного репера, на основе которого нелинейные реализации симметрий строятся как представления групп в римановых пространствах. Из (A.18) следует, что поля (ϕ_0, ϕ) принимают значения на многообразии 3-сферы S^3 в четырехмерном евклидовом пространстве, которое называют полевым многообразием. С другой стороны, сферу S^3 можно рассматривать как многообразие изотопической группы $SU(2)$, каждый элемент которой параметризуется с помощью набора полей (ϕ_0, ϕ) в соответствии с формулой (A.22). В этом случае в качестве полевой переменной естественно рассматривать поле $U(x, t)$, принимающее значение на $SU(2)$ -многообразии, для которого принято название - главное киральное поле. В общем случае главными киральными полями называют поля, принимающие значения на многообразии компактной группы G или в однородном пространстве G/H , где H - стационарная подгруппа.

По-видимому, существует связь между топологическим свойством многообразия - ориентируемостью, что позволяет различать на многообразии левые и правые системы координат, левые и правые винты, спирали и т.д., и возможностью задания на нем действия киральной группы $G_L \otimes G_R$. Во всяком случае, на ориентируемом $SU(2)$ -многообразии действие киральной группы $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ осуществляется левыми и правыми сдвигами

$$\delta_L U = \delta \zeta \cdot U, \quad \delta_R U = U \cdot \delta \eta, \quad \delta_L U^{-1} = -U^{-1} \delta \zeta; \quad \delta_R U^{-1} = -\delta \eta U^{-1}. \quad (\text{A.32})$$

Здесь $U \in SU(2)$, $\delta \zeta$ и $\delta \eta$ - инфинитезимальные элементы из алгебры Ли $SU(2)$. На группе $SU(2)$ существуют единственные риманова метрика и риманова связность, инвариантные относительно преобразований из $SU(2) \otimes SU(2)_R$. Явный вид метрики получается из левоинвариантной формы на $SU(2)$:

$$e(U, dU) = U^{-1} dU, \quad (\text{A.33})$$

где dU - матрица, составленная из дифференциалов элементов матрицы U . Левоинвариантность (A.33) $\delta_L e = 0$ следует из (A.32), а относительно правых сдвигов имеем закон преобразования

$$\delta_R e = -\delta \eta \cdot U^{-1} \cdot dU + U^{-1} dU \delta \eta = [e, \delta \eta]. \quad (\text{A.34})$$

[К аналогичному результату можно прийти, исходя и из правоинвариантной формы на $SU(2)$:

$$\tau(U, dU) = dU \cdot U^{-1}; \quad \delta_L \tau = [\delta \zeta, \tau]; \quad \delta_R \tau = 0.]$$

В параметризации (A.22), учитывая связь (A.18) и известное правило умножения матриц Паули

$$\tau_a \tau_b = i \epsilon_{abc} \tau_c + \delta_{ab},$$

для формы (A.33) получаем выражение

$$e(U, dU) = U^{-1} dU = (\phi_0 - i \tau_a \phi^a) (d\phi_0 + i \tau_b d\phi^b) = i \tau^a \left[(\delta_{ai} + \frac{\phi_a \phi_i}{\phi_0^2}) \phi_0 + \epsilon_{0ab} \phi^b \right] d\phi^i = i \tau^a w^a, \quad (\text{A.35})$$

где $a, i = 1, 2, 3$; $w^a = \zeta^a_i d\phi^i$ - базисные левоинвариантные 1-формы, задающие левоинвариантный репер на $SU(2)$ -многообразии в соответствии с известной теоремой о наличии n линейно независимых лево-(право) инвариантных 1-форм на группе Ли ранга n (см. /172/ стр.41). Далее выписываем квадратичную форму дифференциалов Картана-Киллинга

$$ds^2 = g_{ij}(\phi) d\phi^i d\phi^j = \zeta^a_i \zeta^a_j d\phi^i d\phi^j = -\frac{1}{2} \text{Sp} e^2, \quad (\text{A.36})$$

инвариантную относительно как левых, так и правых сдвигов (A.32), откуда следует явное выражение для компонент метрического тензора на $SU(2)$ - многообразии:

$$g_{ij}(\phi) = \sum_a^3 i_a^i i_a^j = \delta_{ij} + \frac{\phi_i \phi_j}{\phi_0^2} = \delta_{ij} + \frac{\phi_i \phi_j}{1 - \phi_0^2}. \quad (A.37)$$

Выражения (A.35), (A.37) использовались в §§2.3, 3.2 и 3.3. Аналогичным образом (через форму $e(v, dv)$) определяется и риманова связность - ковариантная производная векторных полей на $SU(2)$:

$$D_A e(B) = A e(B) + \frac{1}{2} [e(A), e(B)], \quad (A.38)$$

где A - векторное поле, в направлении которого вычисляется производная, $e(B)$ - значение формы (A.33) на векторном поле B .
 Подробные выкладки см. в работах /52, 170, 173/. Отметим, что действие киральной группы $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ посредством левых и правых сдвигов (A.32) на многообразии $S^3 \approx SU(2) \otimes SU(2) / SU(2)$ отвечает факту существования двух видов абсолютного параллелизма на "замечательных" сферах S^0, S^1, S^3 и S^2 (лемма Адамса, см. /174/), параметризуемых, соответственно, действительными, комплексными числами, кватернионами и октонионами.

Итак, мы обладаем необходимым минимумом геометрических сведений для построения кирально-инвариантных лагранжианов. При этом вместо форм e и τ удобно пользоваться их аналогами - векторными полями

$$L_M = U^{-1}(x) \partial_M U(x); R_M = \partial_M U(x) \cdot U^{-1}(x), \quad (A.39)$$

значения которых при каждом M принадлежат алгебре Ли $SU(2)$.
 Левоинвариантное векторное поле L_M при левых $U(x) \rightarrow VU(x)$ и правых $U(x) \rightarrow U(x) \cdot V$ сдвигах, где $V \in SU(2)$ - глобальный изотопический поворот ($VV^{-1} = 1, \delta_M V = 0$), преобразуется по правилам

$$L_M \rightarrow (VU)^{-1} \partial_M (VU) = U^{-1} V^{-1} V \partial_M U = L_M; \quad (A.40)$$

$$L_M \rightarrow (UV)^{-1} \partial_M (UV) = V^{-1} U^{-1} \partial_M U \cdot V = V^{-1} L_M V.$$

Для восстановления по полю L_M (элементу алгебры) кирального поля $U(x)$ (элемента группы) необходимо и достаточно потребовать выполнения условия $(\partial_M \partial_\nu U = \partial_\nu \partial_M U)$

$$\partial_M L_\nu - \partial_\nu L_M + [L_M, L_\nu] = 0, \quad (A.41)$$

имеющего смысл структурного уравнения Маурера-Картана или условия нулевой кривизны. В параметризации (A.22) L_M представляется в виде разложения по базисным τ_a - матрицам

$$L_M = i \tau_a L_M^a, \quad L_M^a = \sum_i^3 i^a \frac{\partial \phi^i}{\partial x^M}; \quad a=1,2,3. \quad (A.42)$$

В параметризации (3.1) компоненты L_M^a приобретают вид (3.5).

В терминах полей L_M простейший киральный инвариант

$$\mathcal{L}(2) = -\frac{1}{4} SP(L_M L^M) \quad (A.43)$$

является естественным обобщением квадратичных лагранжианов для линейных полей, что отчетливо видно из эквивалентной в силу (A.37) и (A.42) записи

$$\mathcal{L}(2) = \frac{1}{2} g_{ij}(\phi) \partial_M \phi^i \partial^M \phi^j = \frac{1}{2} \sum_a^3 i_a^i i_a^j \partial_M \phi^i \partial^M \phi^j = \frac{1}{2} (L_M^a)^2 \quad (A.44)$$

Используя явный вид метрики $g_{ij}(\phi)$, из (A.37) получим еще одно выражение:

$$\mathcal{L}(2) = \frac{1}{2} \partial_M \phi^i \partial^M \phi^i + \frac{1}{2} \frac{\phi_i \phi_j \partial_M \phi^i \partial^M \phi^j}{(1 - \phi_0^2)}. \quad (A.45)$$

Заменяя поля ϕ_i полями π_i , осуществляющими стереографическую проекцию сферы S^3 на евклидово пространство E^3 (см. § 2.1) приходим к киральному лагранжиану Вайнберга /41/:

$$\mathcal{L}(2) = \frac{1}{2} \frac{\partial_M \pi^i \partial^M \pi^i}{(1 + \pi^2)^2}, \quad \pi^2 = \pi_i \pi^i. \quad (A.46)$$

Лагранжианы вида (A.43) изучались в модели Сугавары /175/, где L_M играют роль сохраняющихся токов в силу инвариантности относительно левых сдвигов. По этой причине в литературе за векторными полями L_M закрепилось название левые киральные токи.

Построение инвариантов более высокого порядка по токам L_M и соответствующих киральных лагранжианов для групп $SU(n) \otimes SU(n)$ оказалось достаточно непростой задачей, и были предложены различные пути ее решения /44, 45, 51, 54, 169, 170/. Наиболее простой алгоритм (надежно работающий в общем случае) основан на использовании матрицы Гурши /42/:

$$\tilde{U} = \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) U + \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) U^{-1}, \quad (A.47)$$

где для U выбрана параметризация (3.1), (3.2). Так, все $SU(2) \otimes SU(2)$ - инвариантные лагранжианы получаются комбинированием блоков $\partial_M \tilde{U}$ и их производных /51/, а для обеспечения $SU(2)$ - и лоренц-инвариантности достаточно взять штур от таких комбинаций и потребовать, чтобы по всем встречающимся в них

индексам μ, ν, \dots проводилось суммирование. В результате вычислений /54/ выяснилось, что линейно-независимых киральных инвариантов 4-го порядка по L_μ всего три (см.(3.8)). Другие способы построения киральных инвариантов изложены в работах /45, I68, I70/.

Дополнение Б. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Вначале поясним, каким образом в теории элементарных частиц возникла потребность в методах алгебраической топологии. В 50-х годах были получены экспериментальные данные о том, что адроны нельзя представлять как точечные объекты, поскольку они обладают конечными размерами и внутренней структурой. Понадобился математический аппарат описания протяженных объектов в рамках теории поля. Достаточно быстро выяснилось, что традиционные способы описания линейных теорий, основанные на методах теории возмущений, непригодны для этих целей (см., например, /I9/, /I76/ гл.4). Неэффективными оказались и привычные для физиков методы аналитической и дифференциальной геометрии евклидовых пространств. Возникла задача построения существенно-нелинейных теорий поля, исследования критических точек многомерных функционалов и, соответственно, потребность в многомерных обобщениях понятий линии и поверхности. Если в линейных теориях поля множеству значений полевых функций всегда можно сопоставить область числового пространства (\mathbb{R}^n) и, таким образом, ввести глобальную параметризацию поля, то в нелинейных теориях такое сопоставление оказалось возможным только локально. Другими словами, "пространство состояний" нелинейной полевой теории допускает лишь локальную параметризацию.

Для перевода всех приведенных выше фактов на формальный математический язык наиболее адекватным представляется аппарат алгебраической топологии. Его обширные возможности, как показано в целом ряде исследований, полностью отвечают возникающим при решении нелинейных проблем физики требованиям.

Б.1. Гладкие многообразия

Если строить теорию поля таким образом, что полевые функции принимают значения не в \mathbb{R}^n , а на полевом многообразии \mathcal{M} , то оказывается, что в такую схему укладываются как все линейные теории типа электродинамики Максвелла, так и существенно-нелинейные, пригодные для описания протяженных объектов.

Напомним, что многообразие — это топологическое пространство, устроенное по аналогии с \mathbb{R}^n в окрестности каждой своей точки.

Более строго многообразие определяется заданием конечного или счетного набора перекрывающихся карт (U_i, φ_i) , где U_i — окрестность $\phi \in \mathcal{M}$, а φ_i — гомеоморфизм U_i на область $V_i \in \mathbb{R}^n$ (см.рис.I2).

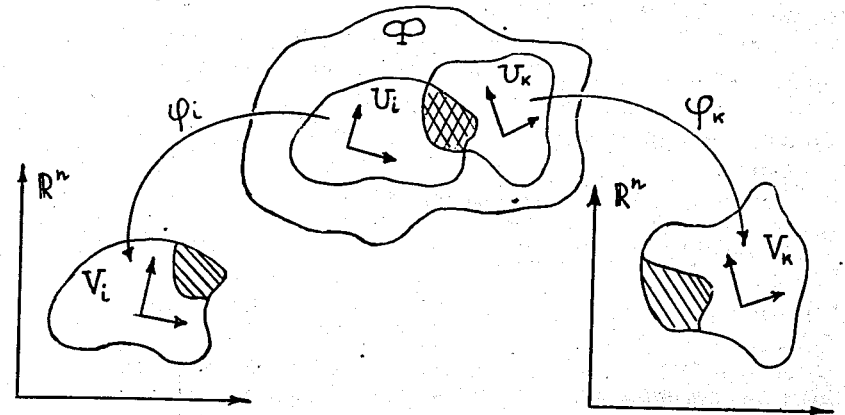


Рис. I2

Объединение таких карт $U_i(U_i, \varphi_i)$, полностью покрывающее \mathcal{M} , называется атласом^{*}. Функции φ_i^{-1} задают в U_i локальную параметризацию (систему координат), а в области перекрытия двух карт $U_i \cap U_k$ должны быть определены функции перехода (замены координат)

$$\varphi_{ik} = \varphi_i \circ \varphi_k^{-1}; \quad \varphi_{ik} \circ \varphi_k = \varphi_i \circ \varphi_k^{-1} \circ \varphi_k = \varphi_i. \quad (B.I)$$

Задачей атласа на \mathcal{M} определяется гладкая структура, совокупность \mathcal{M} и заданной на нем гладкой структуры называется гладким дифференциальным многообразием. Класс гладкости многообразия определяется гладкостью функций перехода (B.I), если $\varphi_{ik} \in C^m$ — классу m раз дифференцируемых функций, то соответствующее многообразие класса C^m . Различные гладкие структуры на многообразиях типа римановой геометрии, геометрии абсолютного параллелизма, конформной связности, комплексных и симплектических структур являются предметом изучения дифференциальной геометрии многообразий. Введение локальных координат позволяет использовать обычные операции анализа на многообразиях, т.е. определять понятие функции, строить касательные векторы, операторы дифференцирования и т.д.

^{*} Терминология введена К.Ф.Гауссом при решении задачи картографирования земной поверхности.

С этой точки зрения вещественное \mathbb{R}^n и комплексное \mathbb{C}^n пространства являются тривиальными многообразиями, поскольку их атласы могут состоять из единственной карты (глобальная декартова система координат). Простейшие нетривиальные многообразия это сфера S^n , группы Ли $SU(n)$, $SO(n)$, проективные пространства RP^n и CP^n . Именно они и их произведения служат полевыми многообразиями квантовой хромодинамики, теории Вайнберга-Салама, нелинейных G -моделей и т.д. Глобальной системы координат без особых точек для таких многообразий не существует, т.е. их атласы должны содержать как минимум две карты.

Приведем пример стандартного атласа сферы S^n , заданной в \mathbb{R}^{n+1} уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1. \quad (B.2)$$

Локальные координаты на S^n можно ввести, если выколоть какую-либо точку сферы. Тогда взаимно однозначное соответствие между оставшимися точками S^n и пространством \mathbb{R}^n устанавливается при помощи стереографической проекции. При выбрасывании северного полюса N с координатами $x_N = \{0, \dots, 1\}$ каждой точке $S^n \setminus \{N\}$ с помощью координатами из N и проходящего через заданную точку x , ставится точка Z_N с координатами $Z_N = \{z'_1, \dots, z'_n\}$ из экваториальной плоскости ($x_{n+1} = 0$) (рис.13).

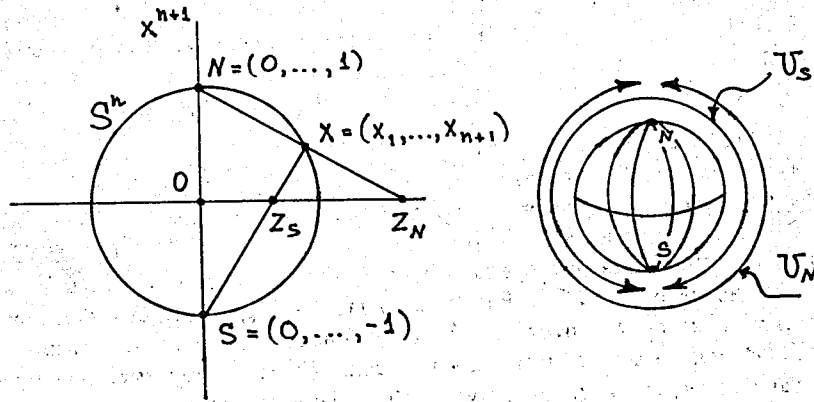


Рис.13

Координатный гомеоморфизм φ_N задается в виде

$$\varphi_N : (S^n \setminus \{N\}) \rightarrow \mathbb{R}^n : z'_i = \frac{x_i}{1 - x_{n+1}} ; i = 1, \dots, n, (B.3)$$

т.е. имеем карту (U_N, φ_N) с локальными координатами (z'_1, \dots, z'_n) . Аналогично координаты в карте (U_S, φ_S) определяются проекцией из южного выколотого полюса

$$\varphi_S : (S^n \setminus \{S\}) \rightarrow \mathbb{R}^n : z'_i = \frac{x_i}{1 + x_{n+1}} ; i = 1, \dots, n. (B.3)$$

Атлас $\{U_N, U_S\}$ покрывает всю сферу, и в области перекрытия карт $U_N \cap U_S$ определены функции перехода

$$\varphi_N \cdot \varphi_S^{-1} : z'_i = \frac{x_i(z_S)}{1 - x_{n+1}(z_S)} = z'_i |z_S|^{-2} ; (B.4)$$

$$\varphi_S \cdot \varphi_N^{-1} : z'_i = \frac{x_i(z_N)}{1 + x_{n+1}(z_N)} = z'_i |z_N|^{-2} ; (B.5)$$

где $\varphi_S^{-1} : x_i = \frac{2z'_i}{z_S^2 + 1} ; x_{n+1} = \frac{z_S^2 - 1}{z_S^2 + 1} ; z_S^2 = \sum_{i=1}^n (z'_i)^2 ;$

$$\varphi_N^{-1} : \varphi_S^{-1} (S \rightarrow N).$$

Якобианы функций перехода (B.4) и (B.5) положительны, что свидетельствует об ориентированности S^n . В общем случае многообразие \mathcal{P} ориентировано, если якобианы функций перехода

$$J_{\alpha\beta} = \det(\partial x'_\alpha / \partial x''_\beta) > 0 \quad (B.6)$$

во всех областях пересечения карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) . Если $J < 0$, то соответствующие пересекающиеся карты наделены системами координат с противоположной ориентацией (например, левые и правые тройки координат при $n = 3$). Ориентуемость многообразия является топологически инвариантным свойством, т.е. не изменяется при всевозможных непрерывных отображениях.

Другим важным топологически инвариантным свойством является связность. Топологическое пространство связно, если его нельзя представить в виде объединения двух замкнутых, непересекающихся непустых множеств. Для многообразия (объектов) вводится понятие линейной связности, когда две любые точки многообразия можно соединить путем. (Путь - это непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ числовой оси \mathbb{R}^1 в многообразие \mathcal{P}). Для многообразий, используемых в физических приложениях, понятия связности и линейной связности можно не различать. Если многообразие \mathcal{P} связно и ориентируемо, то его всегда можно ориентировать двумя способами (/37/, ч, II, §1), т.е. задать две разные ориентации.

Поскольку в основном тексте мы достаточно интенсивно использовали свойства групп Ли $SU(2)$, $SU(3)$ и $SO(3)$, то уместно привести некоторые факты о строении этих групп как многообразий.

Поскольку $SO(n)$ и $SU(n)$ - матричные группы, то они являются топологическими пространствами с непрерывными операциями умножения и

взятия обратного элемента. В пространстве параметров \mathbb{R}^{n^2} матричных $n \times n$ преобразований группу $SO(n)$ можно рассматривать как поверхность, определяемую уравнениями

$$A \cdot A^T = I ; \det A = 1. \quad (\text{B.7})$$

Таким образом, из общего числа n^2 параметров независимыми, в силу условий (B.7), остаются $n(n-1)/2$ параметров. В этом смысле $SO(n) - n(n-1)/2$ -параметрическое многообразие, и каждому элементу $A \in SO(n)$ можно сопоставить $m = n(n-1)/2$ параметров (a^1, a^2, \dots, a^m) . Аналогичным образом, $SU(n)$ -поверхность в $\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$, задаваемая уравнениями

$$U \cdot U^+ = I ; \det U = 1 \quad (\text{B.8})$$

и $\dim SU(n) = n^2 - 1$. Укажем теперь общую схему построения атласа на таких групповых многообразиях. Введем инфинитезимальные операторы - генераторы группы G по правилу

$$\Gamma_i = \left(\frac{\partial A}{\partial a^i} \right) \Big|_{a=0} ; \quad i = 1, 2, \dots, \dim G; \quad (\text{B.9})$$

тогда в окрестности единичного элемента $I \in G$ при малых a получим в линейном приближении выражение для элемента G (инфинитезимальные элемент)

$$A = I + a^i \Gamma_i. \quad (\text{B.10})$$

Матрицу $a = a^i \Gamma_i$ естественно рассматривать как элемент линейного пространства, базис которого составляют генераторы $\{\Gamma_i\}$. Более точно это касательное пространство в точке I , наделенное структурой алгебры Ли, но об этом более подробно мы будем говорить в следующем разделе. Для построения атласа на G для нас существенно то, что с помощью экспоненты от матрицы a

$$\exp(a) = \exp(a^i \Gamma_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \quad (\text{B.11})$$

мы можем индуцировать систему координат (локальную параметризацию) в окрестности I , т.е. построить в этой точке карту. Далее эта карта разносится в произвольную точку G с помощью преобразований $g \in G$ и получаем атлас, согласованный с групповой структурой (подробнее, см. /177/, гл.3, §3). Мы привели только схему построения атласа на группах Ли. Ее конкретная реализация осуществляется построением одномерных подгрупп для каждого генератора с учетом того, что любой элемент группы либо является элементом однопараметрической подгруппы, либо представляется в виде произведения таких эле-

ментов (теорема Ли). Последнее обстоятельство существенно при восстановлении дискретных подгрупп /178/.

Б.2. Касательные пространства, векторные поля и алгебры Ли

Будем считать, что мы научились задавать "системы координат" на многообразиях. Следующим шагом должно быть введение функций и операций анализа, таких как градиент, производная по направлению и т.д. Понятно, что на многообразиях такие понятия следует вводить локально, а затем распространять на многообразие в целом с помощью атласа. Задать функцию на многообразии Φ , означает указать правило, по которому каждой точке $\phi \in \Phi$ сопоставляется некоторое число. Пусть (ϕ^1, \dots, ϕ^n) - локальная параметризация точки ϕ , полученная с помощью координатного гомеоморфизма φ на область $V \subset \mathbb{R}^n$. Тогда функция $f(\phi)$ превращается в функцию на \mathbb{R}^n : $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и если она дифференцируема в \mathbb{R}^n , то $f(\phi)$ - дифференцируемая функция на Φ . Касательным вектором в точке $\phi \in \Phi$ к многообразию Φ называется вектор с компонентами $\{\xi^a\}_i$ в локальной системе координат $\{x^a\}_i$, где i - индекс карты. В области перекрытия двух карт $U_i \cap U_k$ компоненты вектора должны пересчитываться по формуле

$$\xi^a_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x^a_i}{\partial x^b_k} \right) \xi^b_k. \quad (\text{B.12})$$

Нетрудно видеть, что это обычное обобщение понятия вектора в евклидовом пространстве. Обобщение производной по направлению приводит к понятию векторного поля на многообразии, которое определяется как набор производных по направлению $\{\xi^a(x) \cdot \partial/\partial x^a\}$, взятых в каждой точке многообразия Φ .

Касательным пространством $T_\phi(\Phi)$ называется n -мерное векторное пространство, образованное касательными векторами в точке $\phi \in \Phi$ ко всем гладким кривым, проходящим через точку ϕ .

Существует еще одно эквивалентное определение касательного вектора как операции дифференцирования гладких функций в точке ϕ многообразия Φ . В частности, операцию частного дифференцирования $\partial/\partial x^a$ можно представить как касательный вектор с компонентами $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ в локальной системе координат (x^1, \dots, x^n) , где 1 стоит на месте с номером a /179, 180/. Поэтому касательные векторы $\{\partial/\partial x^a\}$ образуют базис $T_\phi(\Phi)$ и любой касательный вектор представим в виде $\xi = \sum_{a=1}^n \xi^a \partial/\partial x^a$.

Всю совокупность касательных векторов к многообразию Φ можно формально записать в виде объединения $\bigcup_{\phi \in \Phi} T_\phi(\Phi)$ - каса-

тельного расслоения, слоями которого служат $T_\phi(\Phi)$. Последняя конструкция есть обобщение понятия прямого (декартова) произведения пространств, но мы не будем здесь на этом останавливаться, так как в основном тексте теория расслоенных пространств практически не использовалась. Наиболее известным примером касательного пространства является пространство обобщенных скоростей $\{\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n\}$ в классической механике, где гладкие многообразия возникают как конфигурационные пространства механических систем, а обобщенные координаты $\{q^1, \dots, q^n\}$ задают локальную параметризацию таких многообразий.

Вернемся к векторным полям на многообразии Φ . Совокупность гладких полей на Φ , которые можно рассматривать как гладкие отображения $X: \Phi \rightarrow T(\Phi)$, образует векторное пространство над \mathbb{R}^n , т.е. для них определены операции сложения, умножения на число $\alpha \in \mathbb{R}^1$ и на гладкую функцию f :

$$(X + Y)_\phi = X_\phi + Y_\phi; (\alpha X)_\phi = \alpha X_\phi; (fX)_\phi = f(\phi) X_\phi$$

локально в любой точке $\phi \in \Phi$. Кроме того, относительно билинейной операции (коммутатора)

$$[X, Y] = XY - YX \quad (\text{B.13})$$

со свойствами

$$[X, X] = 0; [X[Y, Z]] + [Y[Z, X]] + [Z[X, Y]] = 0 \quad (\text{B.14})$$

векторные поля на Φ обладают структурой бесконечномерной алгебры Ли. Действительно, расписывая эти поля в локальных координатах

$$X = \xi^a \frac{\partial}{\partial x^a}; Y = \eta^b \frac{\partial}{\partial x^b}, \quad (\text{B.15})$$

убеждаемся, что коммутатор полей

$$[X, Y] = \left(\xi^a \frac{\partial \eta^b}{\partial x^a} - \eta^b \frac{\partial \xi^a}{\partial x^b} \right) \frac{\partial}{\partial x^c} \quad (\text{B.16})$$

также является векторным полем на Φ .

Введение алгебраических структур существенно упрощает изучение сложных геометрических объектов, поскольку позволяет использовать мощный расчетный аппарат алгебры. В этом находит свое отражение общая тенденция "алгебраизации" математики. Мы намеренно подробно останавливаемся на этом вопросе в надежде подготовить читателя к восприятию основной идеи алгебраической топологии - сопоставлении пространствам отображений бесконечной серии групп гомологий.

Плодотворность идеи "алгебраизации" наиболее отчетливо проявляется при изучении многообразий групп Ли путем сведения их к более простым структурам - алгебрам Ли (инфинитезимальный метод). Покажем это на примере группы $SU(3)$, которую мы активно использовали в основном тексте.

Алгебру Ли $su(3)$ можно считать линейным подпространством 3×3 матриц с умножением (скобкой) Ли в виде коммутатора (B.13). Из условия (B.8), примененного к инфинитезимальному элементу (B.10), получаем, что элементами $su(3)$ являются антиэрмитовы бесследовые 3×3 матрицы ($A = -A^\dagger, Sp A = 0$). Базисными элементами являются генераторы группы $SU(3) - \Gamma_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, 8$), вычисленные по правилу (B.9) и удовлетворяющие соотношениям

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = i f_{\alpha\beta\gamma} \Gamma_\gamma, \quad (\text{B.17})$$

где $f_{\alpha\beta\gamma}$ - структурные константы (действительные полностью антисимметричные по индексам символы). Фундаментальным является представление \mathfrak{z} с генераторами $\Gamma_\alpha = \lambda_\alpha / 2$, где λ_α - эрмитовы бесследовые матрицы Гелл-Манна. Дополняя указанный набор матрицей $\lambda_0 = \sqrt{2/3} I$, получим базис алгебры Ли группы $U(3): \{\lambda_i\}, i = 0, 1, 8$, для которого справедливы соотношения

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk} \lambda_k; [\lambda_i, \lambda_j]_+ = \frac{4}{3} \delta_{ij} + 2d_{ijk} \lambda_k;$$

$$Sp(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}; Sp(\lambda_i [\lambda_j, \lambda_k]) = 4i f_{ijk}; \quad (\text{B.18})$$

$$Sp(\lambda_i [\lambda_j, \lambda_k]_+) = 4i d_{ijk}; Sp \lambda_\alpha = 0.$$

Здесь $[\]_+$ - антикоммутатор; d_{ijk} - симметричный по двум индексам символ, значения которого выписаны, например, в /IIB/, табл. 2.3.

На алгебраическом уровне легко решается вопрос о способах вложения $SU(2)$ -подгрупп в группу $SU(3)$, который был существенным для нас в §§7.2 и 10.1. Действительно, из восьми λ -матриц Гелл-Манна можно образовать три тройки генераторов:

$$1. \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}; 2. \{\lambda_4, \lambda_5, \frac{1}{2}(\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8)\}; 3. \{\lambda_6, \lambda_7, \frac{1}{2}(\sqrt{3}\lambda_8 - \lambda_3)\}, \quad (\text{B.19})$$

для которых будут выполняться коммутационные соотношения алгебры $su(2)$:

$$[\tau_a, \tau_b] = i \varepsilon_{abc} \tau_c; a = 1, 2, 3. \quad (\text{B.20})$$

Естественным образом возникает и параметризация элемента группы $SU(3)$ через обобщенные углы Эйлера и разложение Ивасавы $U = V \cdot W V'$, где V, V' и W определяются соотношениями

$$\begin{aligned} V &= \exp[-i\frac{\alpha}{2}\lambda_3] \exp[-i\frac{\beta}{2}\lambda_2] \exp[-i\frac{\gamma}{2}\lambda_3]; \\ W &= \exp[-i\delta\lambda_4] \exp[-i\frac{\nu}{\sqrt{3}}\lambda_8]; \\ V' &= V(\alpha, \beta, \gamma \rightarrow \alpha', \beta', \gamma'); \end{aligned} \quad (B.21)$$

при ограничениях

$$0 \leq \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi; 0 \leq \gamma \leq 2\pi; 0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \nu \leq 3\pi.$$

При изложении модели Скинра мы пользовались левыми киральными токами L_μ , которые в силу своего определения (3.2) являются левоинвариантными векторными полями на $G = SU(2)$. Для множества таких полей $\mathcal{L} = \{L_\mu\}$ справедливы утверждения (см. /181/, гл.3):

1. \mathcal{L} - векторное пространство над \mathbb{R} . Отображение $\gamma: \mathcal{L} \rightarrow G_I$ ($\gamma(L_\mu) = L_\mu(I)$), где G_I - связная компонента единичного элемента $I \in G$, задает изоморфизм между \mathcal{L} и касательным пространством $T_I(G)$ к многообразию G в единице $\dim \mathcal{L} = \dim G_I = \dim G$.
2. Любое инвариантное векторное поле гладкое.
3. Скобки Ли $[L_\mu, L_\nu] \in \mathcal{L}$.
4. \mathcal{L} образует алгебру Ли относительно операции скобок Ли.

На примере связи между группами и алгебрами Ли поясним идею накрывающего пространства, о котором мы упоминали в §8. Известно, что одна и та же алгебра Ли способна генерировать несколько групп Ли, отличных по своим топологическим свойствам. В частности, алгебра Ли с коммутатором (B.20) генерирует как группу $SU(2)$, так и группу $O(3)$, при соответствующем выборе генераторов T_i . Обе группы компактные, но при этом $SU(2)$ односвязна, тогда как $O(3)$ двусвязна (помимо связной компоненты I с $\det A = 1$ содержит компоненту с $\det A = -1$). В общем случае, среди всех групп, генерируемых заданной алгеброй Ли, имеется лишь одна односвязная группа, которую называют накрывающей по отношению ко всем другим, генерируемым этой алгеброй. Односвязность $SU(2)$ легко устанавливается из того факта, что многообразию $SU(2) = S^3$, а S^3 - односвязное многообразие. В этом можно убедиться простой выкладкой на основе определения (B.8): $U \in SU(2): U U^\dagger = I$,

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}; \det U = |a|^2 + |b|^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1. \quad (B.22)$$

Рассматриваемый пример является частным случаем двулистного универсального накрытия, задаваемого отображением $f: S^n \rightarrow RP^n$. Это отображение отождествляет диаметрально противоположные точки сферы S^n , в результате чего получается проективное пространство RP^n . Другими словами, имеет место факторизация $RP^n = S^n / Z_2$, где $Z_2 = \{I, -I\}$ - центр. Установление такого рода соотношений между многообразиями существенно для вычисления гомотопических групп (см. разд. B.5) в формализме точных последовательностей.

B.3. Дифференциальные формы

Попытка распространения дифференциального исчисления на многообразиях на тензорные поля произвольного ранга традиционным путем не приводит к желаемым результатам. Причины здесь следующие:

- 1) Мы должны сравнивать тензорные поля в близких друг к другу точках многообразия, т.е. сравнивать объекты, принадлежащие разным касательным пространствам, что зачастую лишено геометрического смысла;
- 2) анализ применения к тензорным полям на многообразиях стандартного набора алгебраических операций (сложения, умножения на гладкую функцию, перестановки индексов, свертки по индексам, тензорного произведения, поднятия и опускания индексов, симметрирования, альтернирования) показывает, что не все эти операции сохраняют тензорный характер при замене координат в области пересечения карт (подробности можно найти в /176/ гл.7 и в /179/ гл.5).

Выход был найден в рассмотрении специального класса тензорных полей - антисимметричных ковариантных тензорных полей, которые могут быть определены при наличии римановой метрики на многообразии \mathcal{P} , или в более общем случае, при наличии невырожденного тензорного поля типа (0, 2) или (2, 0). Напомним, что риманова метрика на гладком многообразии \mathcal{P} может быть задана как семейство положительно определенных скалярных (внутренних) произведений для каждого касательного пространства $T_\phi(\mathcal{P})$

$$(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{i,j} g_{ij}(\phi) \xi^i \eta^j, \quad (B.23)$$

* Накрытие, задаваемое отображением $f: M \rightarrow N$, называется универсальным, если M - односвязно.

где матрица $g_{ij}(\phi)$ является гладкой функцией локальных координат в любой карте на \mathcal{P} .

В областях перекрытия карт матрицы $g_{ij}(\phi)$ должны пересчитываться по правилу

$$g_{ij}(\phi) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha\beta}(\phi) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}, \quad (\text{B.24})$$

где $\{x^\alpha\}$ и $\{y^i\}$ - локальные координаты перекрывающихся карт. В частности, для групповых многообразий $SO(n)$ и $SU(n)$ имеем, соответственно, скалярные произведения

$$\langle \bar{A}, \bar{B} \rangle = Sp(AB^T); \quad \langle U, V \rangle = Sp(UV^T). \quad (\text{B.25})$$

Теперь мы имеем возможность сопоставить каждой точке $\phi \in \mathcal{P}$ не только касательное пространство $T_\phi(\mathcal{P})$, но и дуальное к нему векторное пространство $T_\phi^*(\mathcal{P})$ - пространство ковекторов (I-форм), заданных как линейные функционалы на векторных полях. Базис в $T_\phi^*(\mathcal{P})$ - $\{e^i\}$ должен быть дуальным к базису в $T_\phi(\mathcal{P})$ - $\{E_i\}$, т.е. определяться из условия

$$\langle E_i, e^j \rangle = \delta_i^j, \quad (\text{B.26})$$

где δ_i^j - символ Кронекера. В случае натурального базиса $\{\partial/\partial x^i\}$ в $T_\phi(\mathcal{P})$ двойственным к нему является базис дифференциалов координатных функций $\{dx^i\}$, в силу (B.26). Это позволяет представить произвольное ковекторное поле в виде $\omega = \omega_i dx^i$.

Для физиков идея кокасательного пространства привычна, поскольку наряду с пространством скоростей (касательным пространством к конфигурационному) в классической механике традиционно рассматривается пространство импульсов с ковекторными полями $p_i dq^i$. Эта идея находит затем развитие в переходе к импульсному представлению в квантовой теории поля и т.д.

В общем случае дифференциальные формы определяются как алгебраические функции от дифференциалов координат. Среди них нас будут интересовать в дальнейшем лишь внешние формы вида

$$\omega = \omega_{i_1, \dots, i_p}(\phi^1, \dots, \phi^n) d\phi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi^{i_p}, \quad (\text{B.27})$$

где $d\phi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi^{i_p}$ - внешнее произведение дифференциалов локальных координат на \mathcal{P} в точке ϕ . Внешнее произведение было введено Гроссманом в качестве операции внешней алгебры, описывающей порождение многомерных пространств одиммерными. Оно обладает свойствами дистрибутивности и ассоциативности, и для двух форм ω_1 и ω_2 справедливо соотношение

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{\deg \omega_1 \deg \omega_2} \omega_2 \wedge \omega_1, \quad (\text{B.28})$$

где $\deg \omega$ - степень (ранг) формы, определяемый по числу сомножителей во внешнем произведении. В частности, формула (B.27) соответствует p -форме. Коэффициенты ω_{i_1, \dots, i_p} будем считать полностью антисимметричными по индексам гладкими функциями, тогда формы (B.27) будут находиться во взаимно однозначном соответствии с антисимметричными тензорными полями. Формы одинаковых степеней принято рассматривать в виде множества $\Lambda^p = \Lambda^p_\phi(\mathcal{P})$, наделенного свойствами векторного пространства. Если $\dim \mathcal{P} = n$, то размерность такого пространства определяется по формуле

$$\dim \Lambda^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \quad (\text{B.29})$$

Через $C^\infty(\Lambda^p)$ обозначим пространство гладких p -форм вида (B.27). Нетрудно составить следующую табличку для таких пространств с указанием размерности и характерного представителя /32/

$$C^\infty(\Lambda^0) = \{ \omega(x) \}; \quad \dim = 1;$$

$$C^\infty(\Lambda^1) = \{ \omega_i dx^i \}; \quad \dim = n;$$

$$C^\infty(\Lambda^2) = \{ \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j \}; \quad \dim = \frac{n(n-1)}{2!};$$

$$C^\infty(\Lambda^3) = \{ \omega_{ijk}(x) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \}; \quad \dim = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!};$$

$$\dots$$

$$C^\infty(\Lambda^{n-1}) = \{ \omega_{i_1, \dots, i_{n-1}}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}} \}; \quad \dim = n;$$

$$C^\infty(\Lambda^n) = \{ \omega_{i_1, \dots, i_n}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \}; \quad \dim = 1.$$

Таким образом, 0-формы - обычные числовые функции на \mathcal{P} со значениями в \mathbb{R}^1 ; I-формы - ковекторы, $\Lambda^1_\phi(\mathcal{P}) = T_\phi^*(\mathcal{P})$; n -формы - формы максимального ранга на \mathcal{P} (формы объема). Можно определить пространство

$$\Lambda^* = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \dots \oplus \Lambda^n, \quad (\text{B.30})$$

которое замкнуто относительно операции внешнего умножения и называется ассоциативной градуированной внешней алгеброй Картана с генераторами Λ^0, Λ^1 и условием градуированной коммутативности (B.28).

На внешних формах вводятся следующие аналоги дифференциальных векторных операций.

I. Внешний дифференциал d - операция, переводящая p -форму в $(p+1)$ -форму

$$d: C^\infty(\mathcal{L}^0) \rightarrow C^\infty(\mathcal{L}^1); d(\omega(x)) = \frac{\partial \omega}{\partial x^i} dx^i = d\omega;$$

$$d: C^\infty(\mathcal{L}^1) \rightarrow C^\infty(\mathcal{L}^2); d(\omega_i dx^i) = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i.$$

При этом принято соглашение, что новый дифференциал домножается внешним образом слева и вклад дают лишь антисимметричные части производных $(\partial \omega_i / \partial x^j)$. В общем случае можно записать для (Б.27)

$$d\omega = d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = f_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

где $f_{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{p+1} \sum_{s=0}^p (-1)^s \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \omega_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_p}$. (Б.31)

Внешний дифференциал обладает следующими свойствами:

$$d(d\omega) \equiv 0 \quad (\text{лемма Пуанкаре}); \quad (Б.32)$$

$$d(\omega_p \wedge \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q \quad (\text{правило Лейбница}). \quad (Б.33)$$

В качестве иллюстрации приведем соотношения, связывающие внешние формы с обычными операциями векторного исчисления в \mathbb{R}^3 . В декартовых координатах: $(x^1, x^2, x^3) = \vec{x}$

$$\omega^0 = f(x); \quad \omega^1 = \omega_i dx^i = \vec{\omega}(x) \cdot d\vec{x};$$

$$\omega^2 = F_1 dx^2 \wedge dx^3 + F_2 dx^3 \wedge dx^1 + F_3 dx^1 \wedge dx^2 = \vec{F} \cdot d\vec{S};$$

$$\omega^3 = \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \rho dV.$$

Тогда соотношения $\omega^1 = d\omega^0$, $\omega^2 = d\omega^1$, $\omega^3 = d\omega^2$ приобретают привычный вид $\vec{\omega}(x) = \text{grad } f(x)$; $\vec{F} = \text{rot } \vec{\omega}$; $\rho = \text{div } \vec{F}$. Соотношение (Б.32) эквивалентно в \mathbb{R}^3 векторным тождествам $\text{rot grad } f(x) = 0$; $\text{div rot } \vec{\omega} = 0$.

2. Оператор дуального сопряжения $*$ (звездочка Ходжа)

Из формулы (Б.29) и составленной на ее основе таблицы следует, что число независимых функций в пространствах $C^\infty(\mathcal{L}^p)$ и $C^\infty(\mathcal{L}^{n-p})$ одинаково, т.е. эти пространства можно рассматривать как дуальные друг к другу. и ввести преобразование дуальности по правилу

$$*: C^\infty(\mathcal{L}^p) \rightarrow C^\infty(\mathcal{L}^{n-p}); \quad p < n. \quad (Б.34)$$

Расшифруем (Б.34) на примере p -формы

$$\omega_p = \frac{1}{p!} \Omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad (Б.35)$$

дуальную к которой $(n-p)$ -форму определим как

$$*\omega_p = \frac{1}{(n-p)!} \tilde{\Omega}_{j_1 \dots j_{n-p}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-p}}, \quad (Б.36)$$

где $\tilde{\Omega}_{j_1 \dots j_{n-p}}$ - тензор, дуальный к $\Omega_{i_1 \dots i_p}$ в (Б.35) и задаваемый формулой

$$\tilde{\Omega}_{j_1 \dots j_{n-p}} = \frac{1}{p!} \sqrt{g} \varepsilon_{j_1 \dots j_{n-p} i_1 \dots i_p} \Omega^{i_1 \dots i_p} \quad (Б.37)$$

(поднятие индексов у тензора $\Omega_{i_1 \dots i_p}$ осуществляется с помощью метрического тензора g_{ij} ; $\sqrt{g} \varepsilon_{j_1 \dots j_{n-p} i_1 \dots i_p}$ - коэффициентные функции n -формы объема на многообразии Φ). На основании определения (Б.34)-(Б.36) легко установить справедливость соотношения

$$**\omega_p = (-1)^{p(n-p)} \omega_p, \quad (Б.39)$$

а также проверить, что с помощью $*$ -оператора можно определить скалярное произведение p -форм

$$\langle \omega_p, \omega'_p \rangle = \int_\Phi \omega_p \wedge *\omega'_p, \quad (Б.40)$$

позволяющее свертывать формы друг с другом.

3. Внешний дифференциал δ

При наличии метрики g_{ij} на Φ можно ввести операцию, понижающую ранг формы на единицу

$$\delta: C^\infty(\mathcal{L}^p) \rightarrow C^\infty(\mathcal{L}^{p-1})$$

по правилу

$$\delta\omega_p = (-1)^{n(p+1)+1} *d*\omega_p. \quad (Б.41)$$

Операторы d и δ сопряжены, т.е.

$$\langle \omega_p, d\tau_{p-1} \rangle = \langle \delta\omega_p, \tau_{p-1} \rangle, \quad (Б.42)$$

кроме того, для оператора δ справедлив аналог леммы Пуанкаре

$$\delta(\delta\omega) = \pm *d*\omega \equiv 0. \quad (Б.43)$$

4. Оператор Лапласа - де Рама Δ

Как и две предыдущие операции, оператор Лапласа - де Рама может быть введен при наличии метрики на многообразии Φ как отображение

с помощью формулы

$$\Delta = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d. \quad (\text{Б.44})$$

Он самосопряжен и коммутирует со всеми предыдущими операторами. Для него выполняется следующее соотношение:

$$\langle \omega_p, \Delta \omega_p \rangle = \langle \delta \omega_p, \delta \omega_p \rangle + \langle d \omega_p, d \omega_p \rangle \geq 0. \quad (\text{Б.45})$$

На основании введенных операций можно выделить некоторые важные классы форм:

Замкнутые формы: $d\omega = 0$;
Точные формы: $d\alpha = \omega$;
 (соответственно, козамкнутые $\delta\omega = 0$ и коточные $\Omega = \delta\omega$).
Гармонические формы: $\Delta\omega = 0$.

Теорема Ходжа: на компактном многообразии без границы любая форма ω может быть представлена единственным образом в виде суммы точной, коточной и гармонической форм, т.е.

$$\omega_p = d\alpha_{p-1} + \delta\beta_{p+1} + \gamma_p. \quad (\text{Б.46})$$

Теперь мы обладаем тем минимальным запасом сведений о дифференциальном исчислении на многообразиях, которое необходимо для восприятия идеи интегрирования на многообразиях и построения основных топологических инвариантов: групп гомологий, когомологий, гомотопических групп, характеристических классов и т.д.

Б.4. Интегрирование на многообразиях и когомологии де Рама

До сих пор мы интересовались локальными свойствами гладких многообразий, сознавая, что при решении ряда задач, связанных со свойствами многообразия в целом, нам потребуется некоторый аналог интегрального исчисления. Основопологающую роль в развитии концепции интеграла на многообразии и построении топологических инвариантов сыграла идея А. Пуанкаре рассматривать подынтегральные выражения как внешние формы. Эта идея первоначально реализовалась в построении интегрального инварианта Пуанкаре-Картана $J = \int \beta d\alpha - H dt$, а затем трансформировалась в построение первоначального варианта теории гомологий - гомологий полиэдров.

Мы остановимся лишь на основной идее этих построений, т.к. подробности можно найти в прекрасных пособиях [36, 37]. При интегрировании функций, заданных на некоторой окрестности евклидова пространства, основным требованием корректного определения интеграла является

независимость предела интегральных сумм от характера разбиения области определения функций на бесконечно малые клетки. В качестве "строительных блоков" для построения области интегрирования p -форм Пуанкаре избрал симплексы - простейшие выпуклые многогранники в \mathbb{R}^n (см. рис. I4).

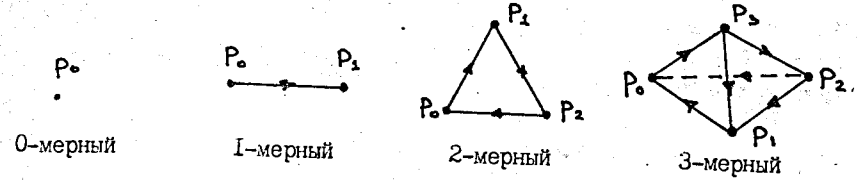


Рис. I4

Если Δ_p - p -симплекс, то его граница $\partial \Delta_p$ - формальная сумма $(p-1)$ -симплексов с целыми коэффициентами. Из Δ_p строятся p -цепи $C_p = \sum a_i \Delta_p^i$ с границами $\partial C_p = \sum a_i \partial \Delta_p^i$, при этом $\partial(\partial C_p) = 0$. Совокупность симплексов произвольной размерности образуют симплициальный комплекс. Если M можно представить в виде симплициального комплекса таких симплексов, то M - триангулируемо*. Это понятие служит некоторым аналогом "хорошего" разбиения евклидовой области, и, в то же время, мы получаем аппарат для выяснения глобальных свойств многообразий алгебраическим путем. Заметим, что если $a_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$ или любой другой абелевой группе по сложению, то и цепи образуют абелеву группу. Можно рассмотреть циклы Z_p как цепи C_p с тривиальной границей ($\partial C_p = 0$). Тогда два цикла Z_p и Z'_p будут эквивалентны (гомологичны), если они отличаются на некоторую границу ∂C_{p+1} , т.е. $Z'_p = Z_p + \partial C_{p+1}$. Множества циклов $Z_p = \{z_p\}$ и границ $B_p = \{\partial C_{p+1}\}$ также обладают групповой структурой, а факторгруппа

$$H_p(M, F) = Z_p / B_p, \quad (\text{Б.47})$$

элементами которой являются классы гомологий циклов, называется группой гомологий M , где $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$. Соотношение между группами $H_p(M; F)$ при разном выборе коэффициентов, устанавливается с помощью универсальной теоремы о замене коэффициентов.

$$H_p(M; \mathbb{R}) = H_p(M, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R};$$

$$H_p(M; \mathbb{C}) = H_p(M; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} = H_p(M; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}. \quad (\text{Б.48})$$

*) Симплициальная триангуляция является частным случаем более общей клеточной триангуляции (см. §4 / 37/).

Элементами $H_{DR}^p(M; \mathbb{R})$ будут классы когомологий, замкнутых форм с точностью до точных

$$\omega_p \sim \omega'_p : \omega'_p = \omega_p + d\alpha_{p-1} \quad (B.49)$$

В силу отмеченной дуальности $H_p(M; \mathbb{F})$ и $H^p(M; \mathbb{F})$ для элементов этих пространств можно ввести внутреннее (скалярное) произведение замкнутой формы $\omega_p \in \mathbb{Z}^p$ и цикла $C_p \in \mathbb{Z}_p$, по аналогии с (B.26)

$$T(C_p, \omega_p) = \int_{C_p} \omega_p, \quad (B.50)$$

$T(C_p, \omega_p)$ называют периодом формы ω_p по циклу C_p . Если цикл C_p в многообразии M^n задавать с помощью гладкого отображения $f: M^p \rightarrow M^n$, т.е. $C_p = (M^p, f)$, то определение периода (B.50) совпадает с используемым в §2 основного текста.

Приведем без доказательства ряд фактов из теории когомологий. На языке форм интегральные формулы Ньютона-Лейбница, Гаусса-Остроградского, Стокса и Грина обобщаются в одну теорему Стокса:

Пусть M - n -мерное ориентированное многообразие с краем ∂M , ω - n -форма с компактным носителем. Тогда

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (B.51)$$

Под краем n -мерного многообразия M понимают совокупность точек из M , для которых нельзя указать окрестности, топологически эквивалентной \mathbb{R}^n , т.е. $(n-1)$ -мерное подмногообразие. Примером многообразия с краем является шар B^n , краем которого является сфера S^{n-1} . Интеграл в левой части (B.51) следует понимать в смысле

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha} \int_{U_{\alpha}} \varphi_{\alpha} \omega, \quad (B.52)$$

где $\{\varphi_{\alpha}\}$ - разбиения единицы, подчиненные атласу $\{U_{\alpha}\}$ на многообразии M . В формуле (B.51) ∂M наделено индуцированной ориентацией.

Гладкое отображение многообразий $f: M_1 \rightarrow M_2$ индуцирует отображение форм $\omega \rightarrow f^*(\omega)$ такое, что $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$, т.е. замкнутые формы переходят в замкнутые, а точные остаются точными. В силу этого классы когомологий переходят друг в друга при отображении f^* , которое задает гомоморфизм групп когомологий

$$f^*: H^p(M_2; \mathbb{R}) \rightarrow H^p(M_1; \mathbb{R}). \quad (B.53)$$

В основе алгоритма Айшема (см. §2.3) лежит следующее утверждение, доказательство которого дано в /37/ §1: если два гладких отображения

$$f_1: M_1 \rightarrow M_2; \quad f_2: M_2 \rightarrow M_1 \quad (B.54)$$

гомотопны между собой, то индуцированные отображения групп когомологий f_1^* и f_2^* совпадают:

$$f_1^* = f_2^*: H^p(M_2; \mathbb{R}) \rightarrow H^p(M_1; \mathbb{R}). \quad (B.55)$$

Два многообразия называются гомотопически эквивалентными, если найдутся такие отображения (B.54), что суперпозиции $f_1 \circ f_2: M_2 \rightarrow M_2$ и $f_2 \circ f_1: M_1 \rightarrow M_1$ гомотопны тождественным отображениям. На основании этого доказывается утверждение: гомотопически эквивалентные многообразия имеют одинаковые группы когомологий. Иными словами, индуцированные гомоморфизмы $(f_1 \circ f_2)^* = f_2^* \circ f_1^*$ и $(f_2 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_2^*$ являются тождественными гомоморфизмами групп когомологий

$$Id = f_2^* \circ f_1^*: H^p(M_2; \mathbb{R}) \rightarrow H^p(M_2; \mathbb{R}); \quad Id = f_1^* \circ f_2^*: H^p(M_1; \mathbb{R}) \rightarrow H^p(M_1; \mathbb{R}) \quad (B.56)$$

т.е. сами гомоморфизмы f_1^* и f_2^* - изоморфизмы, при этом $f_1^* = (f_2^*)^{-1}$.

Приведенные факты существенно упрощают как процесс вычисления групп когомологий, так и построение явного вида топологических инвариантов.

Мы еще вернемся к этим вопросам, а пока продемонстрируем некоторые возможности развитого аппарата. В теории когомологий можно получить точный ответ на вопрос, при каких условиях гладкая p -форма ω генерируется $(p-1)$ -формой $\alpha: \omega = d\alpha$. Для ответа на этот вопрос традиционным путем требуется решать систему уравнений в частных производных, что непросто даже в случае 1-форм (см. /179/ гл. 6). В терминах когомологий ответ дается теоремой существования де Рама: гладкая форма ω_p точна тогда и только тогда, когда $d\omega_p = 0$ (локальное условие) и ее периоды по всем циклам $T(\omega_p, C_p) = 0$ (глобальное условие), т.е. когда класс когомологий $[\omega_p] \in H^p(M)$ равен нулю.

Как уже отмечалось, группа $H^p(M; \mathbb{R})$ наделена структурой векторного пространства. Размерность этого пространства называется числом Бетти многообразия M и является топологическим инвариантом

$$b_p = \dim H^p(M; \mathbb{R}). \quad (B.57)$$

Рассмотрим произвольное многообразие M , $\dim M = n$. Для групп когомологий $H^p(M; \mathbb{R})$ имеем: $H^0(M; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, если M -

связно, $\beta_0(M) = 1$; $H^0(M; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^k$, если $M = \bigcup_{i=1}^k M_i$ (k -связно), $\beta_0(M) = k$; $H^n(M; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, если M - компактно и связно.

$H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, $H^p(\mathbb{R}^n) = 0$ при $p > 0$.

В случае $M = S^n$ для вычисления $H^p(S^n)$ воспользуемся теоремой Ходжа (Б.46). Если ω - замкнута, то $d\delta\beta = 0$, т.к. $d^2\alpha = 0$, а форма γ - гармоничная (из $\Delta\gamma = 0$ и коммутативности $d\Delta = \Delta d$ следует $d\gamma = 0$). Поэтому замкнутые формы выделяются (калибровочным) условием $\delta\beta = 0$, т.е. $\omega = d\alpha + \gamma$. В силу определения (Б.49) находим, что каждый класс гомологий в $H^p(M)$ содержит в точности одну гармоническую форму и существует изоморфизм между $H^p(M; \mathbb{R})$ и множеством гармонических p -форм $\text{Harm}^p(M; \mathbb{R})$. Так, на S^n определены лишь две гармонические формы: 0- и n -форма (форма объема). Следовательно, $H^0(S^n; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$; $H^n(S^n; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$; $H^p(S^n; \mathbb{R}) = 0$ ($p \neq 0, n$).

Сведения о группах гомологий и когомологий многообразия позволяют судить о наличии, свойствах и числе независимых решений уравнения еще до того, как это уравнение выписано в явном виде. Действительно, если M^n - компактное ориентируемое риманово многообразие, то

а) число Бетти $\beta_p(M)$ конечно и равно числу линейно независимых решений уравнения $\Delta\omega = 0$;

б) имеет место двойственность Пуанкаре

$$H^p(M) = H^{n-p}(M); \quad \beta_p(M) = \beta_{n-p}(M). \quad (\text{Б.58})$$

Кроме того, эта информация позволяет оценить снизу число критических точек функций и функционалов в зависимости от многообразий, на которых они заданы, выявить наличие особенностей у векторных и тензорных полей на M и т.д. /36/. Как отмечалось в §2 и будет показано в следующем разделе, группы когомологий используются как мощное техническое средство при построении гомотопических инвариантов.

Б.5. Фундаментальная группа, гомотопические группы и другие топологические инварианты

Мы подробно останавливались на вопросах применения теории гомотопий при изучении топологических свойств непрерывных отображений (физических полей) в §2. Здесь приведем лишь обещанные уточнения.

Закон композиции на множестве $\{[S^1, \Phi]\}$. Пусть $\phi: (S^1, N) \rightarrow (\Phi, \phi_0)$, где N - северный полюс S^1 , ϕ_0 - отмеченная точка Φ . Образом S^1 на Φ будет замкнутый путь (петля) с началом и концом в точке ϕ_0 . (рис.15а)

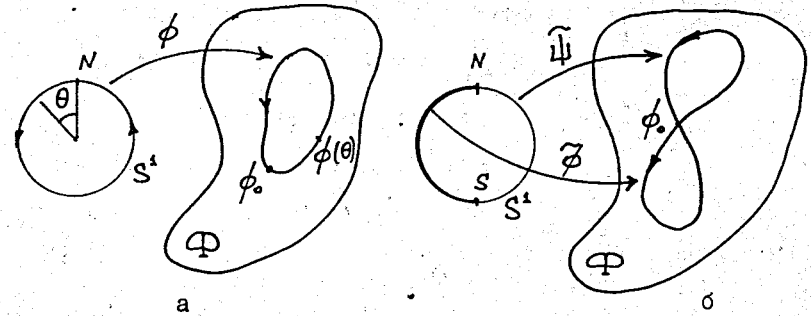


Рис.15

Отображение ϕ гомотопно отображению $\tilde{\phi}$, нетривиальному на полуокружности $0 \leq \theta \leq \pi$, в силу наличия гомотопии

$$F_\nu(\theta) = \left\{ \phi\left(\frac{1}{\nu}\theta\right) : 0 \leq \theta \leq 2\nu\pi; \phi_0 : 2\nu\pi \leq \theta \leq 2\nu\pi \right\};$$

переводящей $\phi = F_\nu(\theta)$, ($\nu = 1$) в $\tilde{\phi} = F_{1/2}(\theta)$, ($\nu = 1/2$). При этом $\tilde{\phi}(\theta) = \left\{ \phi(2\theta), \text{ при } 0 \leq \theta \leq \pi; \phi_0, \text{ при } \pi \leq \theta \leq 2\pi \right\}$.

Рассмотрим отображение $\psi: (S^1, N) \rightarrow (\Phi, \phi_0)$, сконцентрируем его на полуокружности $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ аналогичным образом и обозначим через $\tilde{\psi}$ (рис.15б). Композицию ϕ и ψ определим по правилу

$$\psi \cdot \phi(\theta) = \begin{cases} \tilde{\phi}(\theta), & \text{при } 0 \leq \theta \leq \pi; \\ \tilde{\psi}(\theta), & \text{при } \pi \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (\text{Б.59})$$

т.е. мы пробегаем с удвоенной скоростью, вначале по ϕ -петле, а затем по ψ -петле. Нетрудно проверить, что если $F_\nu(\theta)$ и $G_\nu(\theta)$ - гомотопии, переводящие ϕ и ψ в $\tilde{\phi}$ и $\tilde{\psi}$ соответственно, то и их композиция $G_\nu * F_\nu(\theta)$, индуцированная равенством (Б.59), будет гомотопией. В результате, имеем закон композиции на множестве гомотопических классов $\{[\phi]\}$:

$$[\phi \cdot \psi] = [\phi] * [\psi], \quad (\text{Б.60})$$

снабжающий $\{[\phi]\}$ групповой структурой. Единичным элементом группы является гомотопический класс постоянного отображения $\phi_0(\theta): S^1 \rightarrow \phi_0$, т.к.

$$\phi_0 \cdot \phi = \tilde{\phi}(\sim\phi) \Rightarrow [\phi_0] * [\phi] = [\phi].$$

Обратный элемент к $[\phi]$ определяется как гомотопический класс отображений $[\phi^{-1}(\theta)] = [\phi(2\pi - \theta)] = [\phi]^{-1}$, пробегающих ту же ϕ -

петлю, но в обратном направлении. Проверим, что $\phi^{-1} \cdot \phi(\theta) \sim \phi_0(\theta)$. Для этого достаточно предъявить соответствующую гомотопию

$$F_\nu(\theta) = \begin{cases} \phi_0, & \text{при } 0 \leq \theta \leq \frac{\nu}{2}; \\ \phi(2\theta - \nu), & \text{при } \frac{\nu}{2} \leq \theta \leq \pi; \\ \phi(4\pi - \nu - 2\theta), & \text{при } \pi \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\nu}{2}; \end{cases} \quad (\text{B.61})$$

связывающую $F_0(\theta) = \phi^{-1} \cdot \phi(\theta)$ и $F_{2\pi}(\theta) = \phi_0$. При $\nu = \pi$, $F_\pi(\theta)$ пробегает лишь половину ϕ -петли, а затем возвращается обратно к ϕ_0 ; при $\nu = 3\pi/2$, $F_{3\pi/2}(\theta)$ пробегает лишь четверть ϕ -петли, а затем поворачивает к ϕ_0 . Все это следует из (B.61). Множество $\{[\phi]\}$ с законом композиции (B.60) называется фундаментальной группой многообразия Φ с отмеченной точкой ϕ_0 и обозначается $\pi_1(\Phi, \phi_0)$. В случае линейно связного Φ фундаментальные группы в различных точках $\phi_0 \in \Phi$ изоморфны с точностью до внутреннего изоморфизма. Если $\pi_1(\Phi, \phi_0)$ - абелева группа, то изоморфизм единственен и группы $\pi_1(\Phi, \phi_0)$ во всех точках Φ отождествляются и обозначаются $\pi_1(\Phi)$. Рассмотрим подробнее случай $\Phi = S^1$, задавая S^1 в множестве комплексных чисел уравнением $|z|=1$. Отображение $f: S^1 \rightarrow S^1$ осуществляется гладкой функцией $f(z) = z^n$, где n - целое число. Любая точка S^1 регулярна относительно отображения f , т.к. прообраз $f^{-1}(z_0)$ любой точки $z_0 \in S^1$ состоит из n точек - корней степени n из z_0 , а якобиан отображения f имеет ранг 1. Разбиение на гомотопические классы подробно обсуждалось в §2.2, здесь мы лишь уточним, в каком смысле число n , реализующее изоморфизм $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, является степенью отображения.

По определению (/27/, ч.3 §2), степенью отображения $f: M^n \rightarrow N^n$ двух связных ориентированных многообразий в регулярной точке $q \in N$, где полный прообраз $f^{-1}(q)$ состоит из конечного числа точек p_i , называется сумма

$$Q = \text{deg}_q(f) = \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \text{sgn} \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right). \quad (\text{B.62})$$

Здесь $(x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots, y^n)$ - локальные координаты в окрестности точки $q \in N^n$ и точек $p_i \in f^{-1}(q) \in M^n$ соответственно. Обычно требуют, чтобы M^n было компактным многообразием, но это требование можно снять, рассматривая так называемые собственные отображения (см./27/, стр.253).

На практике для вычисления степени отображения Q используется более простая формула. Если $\omega = \omega(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ - n -форм

на N^n , то

$$\int_M f^*(\omega) = (\text{deg } f) \int_N \omega, \quad (\text{B.63})$$

т.е.

$$\text{deg } f = \int_M f^*(\omega) / \int_N \omega, \quad (\text{B.64})$$

где f^* - индуцированное отображение форм, при этом обычно накладывается условие нормировки $\int_N \omega = 1$.

Вернемся к отображению $f: S^1(\theta) \rightarrow S^1(\varphi)$ в локальной (угловой) параметризации. Явный вид функции $\varphi = f(\theta)$ должен удовлетворять условию $f(\theta + 2\pi) = f(\theta) + 2\pi n$, отождествляющему точки, отличающиеся на $2\pi n$, где n - целое число. В частности, рассмотрим $f(\theta) = n\theta$ и зададим 1-форму ("объема") на S^1 - $\omega = d\theta$, тогда

$$f^*(\omega) = d(f(\theta)) = n d\theta = n\omega; \quad \bullet$$

$$\int_{S^1} f^*(\omega) = n \int_{S^1} \omega; \quad n = \int_{S^1} f^*(\omega) / \int_{S^1} \omega; \quad (\text{B.65})$$

т.е. $n \in \mathbb{Z}$ действительно степень отображения $S^1 \rightarrow S^1$, а в силу (B.53) f^* реализует гомоморфизм $H^1(S^1) \rightarrow H^1(S^1)$

Всякое компактное ориентированное многообразие M^n отвечает всем требованиям определения n -цикла. Соответствующий класс гомологий $[M]$ генерирует группу гомологий $H_n(M)$, т.к. для любого связного M класс гомологий n -циклов кратен $[M]$. Поэтому в терминах теории гомологий степень отображения $f: M_1 \rightarrow M_2$ можно определить формулой

$$f_*([M_1]) = (\text{deg } f) \cdot [M_2]; \quad \text{deg } f = f_*([M_1]) / [M_2]. \quad (\text{B.66})$$

Обратимся теперь к способам вычисления высших гомотопических групп

$\pi_n(\Phi)$ и топологических инвариантов для многообразий групп $SO(n)$ и $SU(n)$, сфер S^n и однородных пространств G/H .

Высшие гомотопические группы $\pi_n(\Phi)$ определяются по аналогии с фундаментальной группой путем задания закона композиции на множестве гомотопических классов $\{[S^n, \Phi]\}$. Если $\Phi = G$ - группа Ли, то умножение в $\pi_n(\Phi)$ задается с помощью умножения в G . Для топологически эквивалентных многообразий их гомотопические группы совпадают. Многообразие Φ односвязно, если $\pi_1(\Phi) = 0$, т.к. любой контур на Φ можно стянуть в точку (например, $\Phi = \mathbb{R}^n, S^n (n > 2)$). Однако, S^1 не односвязна, т.к. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, не односвязен и тор $T^2 = S^1 \otimes S^1$, т.к. $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, т.е. тор двусвязен. Заметим, что $\pi_1(SU(2)) = \pi_1(S^3) = 0$, в то время как $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$.

Это еще одно выражение того факта, что $SU(2)$ дважды покрывает $SO(3)$.

Поскольку физикам редко приходится заниматься непосредственным вычислением неизвестных групп $\pi_n(\mathcal{F})$, что является в общем случае сложной задачей, то, следуя работе /29/, укажем полезный способ выражения неизвестных групп $\pi_n(\mathcal{F})$ через известные. Пусть на \mathcal{F} действует группа преобразований G , тогда, относительно действия G , \mathcal{F} разбивается на классы эквивалентности \mathcal{F}/G . Каждый из классов эквивалентности является орбитой группы G , а отображение Π , ставящее в соответствие точке $\phi \in \mathcal{F}$ ее орбиту $\sigma \in \mathcal{F}/G$, называется проекцией $\Pi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/G$. Кроме проекции можно рассмотреть вложение i орбиты группы G в многообразие \mathcal{F} — $i: \sigma \rightarrow \mathcal{F}$. Если $f: X \rightarrow \mathcal{F}$ — непрерывное отображение, то существует гомоморфизм гомотопических групп:

$$*f: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(\mathcal{F}), \quad (B.67)$$

и соответствующая последовательность гомоморфизмов

$$\pi_n(\mathcal{O}) \xrightarrow{*i} \pi_n(\mathcal{F}) \xrightarrow{* \Pi} \pi_n(\mathcal{F}/G). \quad (B.68)$$

Если эту последовательность продолжить с помощью граничного гомоморфизма d :

$$\pi_n(\mathcal{F}/G) \xrightarrow{d} \pi_{n-1}(\mathcal{O}),$$

то последовательность становится точной. Напомним, что последовательность гомоморфизмов $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C$ называется точной в B тогда и только тогда, когда $\text{Im } f = \text{Ker } h$, где $\text{Im } f = f(A) \in B$ — образ A в B , а $\text{Ker } h$ — множество точек из B , отображаемых в ноль множества C (см. рис. I6)

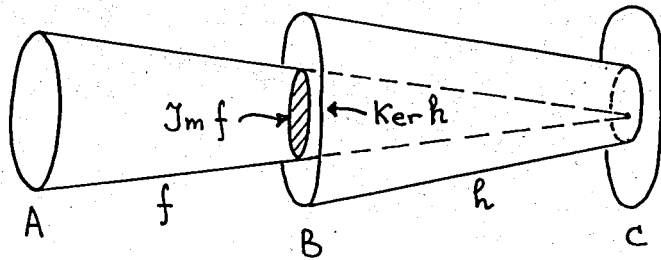


Рис. I6

Для нас будет важным следующее свойство точных последовательностей: последовательность $e \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C \rightarrow e$, точная тогда и только тогда, когда $C = B/\text{Im } f$. Если $C = B/A$ — фактор-группа, то $e \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C \rightarrow e$ — точная последовательность. Здесь e — единичные элементы.

Приведем примеры точных последовательностей гомоморфизмов.

$$I: e_1 \xrightarrow{f} Z_2 \xrightarrow{g} SU(2) \xrightarrow{h} SO(3) \xrightarrow{k} e_2. \quad (B.69)$$

Здесь f — вложение единичной матрицы $e_1 = \text{diag}(1, 1)$ в $Z_2 = \{e_1, -e_1\}$; g — вложение группы Z_2 в $SU(2)$ с элементами $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$; h — стереографическая проекция дробно-линейного преобразования в $\mathbb{C}^1: z \rightarrow \frac{\alpha z - \beta}{\beta z + \alpha}$ в $SO(3)$; k — отображение элементов $SO(3)$ в $e_2 = \text{diag}(1, 1, 1)$. В качестве следствия имеем

$$SO(3) = SU(2)/Z_2. \quad (B.70)$$

$$2: e_1 \xrightarrow{f} SU(n) \xrightarrow{g} U(n) \xrightarrow{h} U(1) \xrightarrow{k} e_1. \quad (B.71)$$

Здесь g — вложение $SU(n)$ в $U(n)$; h — отображение вида $\det: \det g \in U(1)$; где $g \in U(n)$. В качестве следствия имеем

$$U(1) = U(n)/SU(n). \quad (B.72)$$

Применим теперь точную последовательность

$$d \rightarrow \pi_n(\mathcal{O}) \xrightarrow{*i} \pi_n(\mathcal{F}) \xrightarrow{* \Pi} \pi_n(\mathcal{F}/G) \xrightarrow{d} \pi_{n-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{*i} \pi_{n-1}(\mathcal{F}) \quad (B.73)$$

для отыскания $\pi_n(\mathcal{F})$.

1. Сферу S^n представим как однородное пространство $S^n = SO(n+1)/SO(n)$. При $n > 2: \pi_2(S^n) = 0, \pi_1(S^n) = 0$. Тогда $0 = \pi_2(S^n) \xrightarrow{d} \pi_1(SO(n)) \xrightarrow{*i} \pi_1(SO(n+1)) \xrightarrow{* \Pi} \pi_1(S^n) = 0$.

Откуда следует

$$\pi_1(SO(n)) = \pi_1(SO(n+1)). \quad (B.74)$$

2. Нечетномерная сфера $S^{2n-1} = SU(n)/SU(n-1), n \geq 2$ приводит к последовательности

$$0 = \pi_2(S^{2n-1}) \xrightarrow{d} \pi_1(SU(n-1)) \xrightarrow{*i} \pi_1(SU(n)) \xrightarrow{* \Pi} \pi_1(S^{2n-1}) = 0.$$

Откуда следует: $\pi_1(SU(n)) = 0$, т.е. $SU(n)$ — односвязна.

3. Из соотношения (B.72) имеем точную последовательность при $k > 1$:

Таблица I. Результаты вычислений гомотопических групп сфер и классических групп Ли

Φ	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	$\pi_k, k > 8$
S^1	\mathbb{Z}	$\pi_k(S^1) = 0, k > 1$							
S^2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}	$\pi_k(S^2) = 0, k > 6$		
S^3	0	0	\mathbb{Z}	$\pi_k(S^3) = \pi_k(S^2), k > 3$					
S^n ($n > 3$)	$\pi_k(S^n) = 0, k < n; \pi_n(S^n) = \mathbb{Z}; \pi_{n+1}(S^n) = \pi_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2$ $\pi_m(S^n) = \pi_{m+1}(S^{n+1}), m < 2n-1; \pi_{n+3}(S^n) = \mathbb{Z}_{24};$ $\pi_{n+4}(S^n) = 0, n \geq 6; \pi_{n+5}(S^n) = 0, n \geq 7; \pi_{4n-1}(S^{2n}) = \mathbb{Z}.$								
$SO(3)$	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	$\pi_k(SO(3)) = \pi_k(S^3), k > 1$				
$SO(4)$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\pi_k(SO(4)) = \pi_k(S^3) \oplus \pi_k(S^3), k > 1$						
$SO(5)$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	$\pi_3(SO(n)) = \mathbb{Z}, n \geq 5; \pi_4(SO(n)) = 0, n \geq 5$						
$SO(n)$ ($n > 5$)	$\pi_k(SO(n)) \cong \pi_k(SO)$ - стабильная группа, $1 < k \leq n-2$								
SO	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	$\pi_{k+8}(SO) = \pi_k(SO)$
$U(1)$	$\pi_k(U(1)) = 0, k > 1; \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$								
$SU(2)$	0	0	\mathbb{Z}	$\pi_k(SU(2)) = \pi_k(S^3), k > 1$					
$SU(3)$	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	$\pi_4(SU(n)) = 0, n \geq 3$			
$SU(n)$	$\pi_1(SU(n)) = 0, n \geq 1; \pi_2(SU(n)) = 0, n \geq 1$ $\pi_3(SU(n)) = \mathbb{Z}, n \geq 2; \pi_k(SU(n)) = \pi_k(U(n)), k > 1$								
$U(n)$	$\pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}, n \geq 1;$ $\pi_k(U(n)) \cong \pi_k(U)$ - стабильная группа, $1 \leq k \leq 2n-1$								
U	\mathbb{Z}	0	$\pi_{k+2}(U) = \pi_k(U)$						
$Sp(n)$	$\pi_1(Sp(n)) = 0, n \geq 1; \pi_3(Sp(n)) = \mathbb{Z}, n \geq 1$ $\pi_4(Sp(n)) = \mathbb{Z}_2, n > 1$ $\pi_k(Sp(n)) \cong \pi_k(Sp); \pi_{k+8}(Sp) = \pi_k(Sp)$								

$$0 = \pi_{k+1}(U(1)) \xrightarrow{d} \pi_k(SU(n)) \xrightarrow{\pi^!} \pi_k(U(n)) \xrightarrow{\pi^!} \pi_k(U(1)) = 0.$$

Следовательно,

$$\pi_k(SU(n)) = \pi_k(U(n)). \quad (B.75)$$

Приведем еще ряд фактов из теории когомологий групп Ли, которые использовались при построении явного вида топологического заряда в §2.3. В качестве генератора группы $H^3(SU(2); \mathbb{R})$ выбиралась $SU(2)$ -инвариантная форма (2.18)-(2.19) на основе общего положения, что когомологии однородных пространств компактной связной группы Ли могут быть вычислены с помощью только инвариантных форм (/37/, §1). Любая компактная группа Ли G является, кроме того, симметрическим пространством группы $G \otimes G$, действующей по правилу

$$T(g, h)(x) = g \cdot x \cdot h^{-1}. \quad (B.76)$$

Поэтому справедливы утверждения: а) любая замкнутая форма на G когомологична инвариантной; б) любая инвариантная форма на G замкнута; в) инвариантная (ненулевая) форма никогда не когомологична нулю. В силу того, что на G существует инвариантная метрика Киллинга, то можно определить нормированный инвариантный элемент объема $d\mu(g)$. Тогда любой замкнутой форме ω можно сопоставить инвариантную форму $\tilde{\omega}$ по формуле

$$\tilde{\omega} = \int_G T_g^* \omega d\mu(g). \quad (B.77)$$

В случае компактной группы G инвариантные формы $\tilde{\omega}$ - это двусторонне инвариантные (относительно правых и левых сдвигов) формы. Мы пользовались наличием на G левоинвариантной 1-формы $\omega = g^{-1}dg$, принимающей значения в алгебре Ли группы G . При правых сдвигах на h^{-1} эта форма преобразуется по правилу $\omega \rightarrow \omega' = h\omega h^{-1}$. Соответственно, если форма ω инвариантна относительно внутренних автоморфизмов, то она двусторонне инвариантна. Такие формы находятся во взаимно однозначном соответствии с антисимметричными полилинейными функциями на алгебре Ли \mathfrak{g} группы G , инвариантными относительно внутренних автоморфизмов. В частности, примером таких функций служит 3-линейная функция на векторных полях в алгебре Ли, составленная с помощью формы Киллинга на \mathfrak{g}

$$\langle X, [Y, Z] \rangle = \int_{\mathfrak{g}} X^a Y^b Z^c \chi. \quad (B.78)$$

В случае $G = SU(2)$ с учетом (B.25), соответствующей нормировки и того, что киральные токи L_{μ} задают реализацию алгебры $su(2)$, приходим к явному виду топологического заряда (4.4).

В заключение приведем вычисления члена Весса-Зумино в формуле (8.46). Поскольку ω^5 в (8.36) замкнутая форма ($d\omega^5 = 0$) на диске D_5^+ , то для ее вычисления воспользуемся представлением $D_5^+ = S^3 \times S^1 \times [0,1]$ и расширим поле $V(\bar{x}, t) \rightarrow V(\bar{x}, t, \rho)$ таким образом, чтобы на границе пространства Минковского $V(\bar{x}, t, \rho = 1) \equiv V(\bar{x}, t)$. В силу односвязности $SU(3)$ ($\pi_1(SU(3)) = 0$) и периодичности $A(t)$ в (8.44) такое расширение можно выбрать в виде

$$V(\bar{x}, t, \rho) = A^+(t, \rho) V(\bar{x}) A(t, \rho). \quad (B.79)$$

Пренебрегая членами, не дающими вклада в член Весса-Зумино, запишем

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} \text{Sp}[L_\mu L_\nu L_\lambda L_\rho L_\sigma] &= 5 \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ij} \text{Sp}[L_i L_j L_a L_b L_c] = \\ &= 5 \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ij} \text{Sp}[L_i L_j A V^+ \partial_a V \cdot V^+ \partial_b V V V^+ \partial_c V A], \end{aligned} \quad (B.80)$$

где a, b, c - пространственные индексы, а i, j - индексы, связанные с параметрами t и ρ . В силу инвариантности относительно пространственных вращений формы ω^5 нам нет необходимости вычислять ее значения во всех точках S^3 , достаточно найти эти значения для одного из направлений, например, на оси Z ($\bar{x} = (0, 0, r)$). Тогда имеем для (8.43)

$$\begin{aligned} V(\bar{x}) \cdot \rightarrow V(z) &= \cos \theta(z) + i \tau_3 \sin \theta(z) \\ \partial_{1,2} V &= i \frac{\tau_{1,2}}{z} \sin \theta; \quad V^+ \partial_3 V = i \tau_3 \theta' \end{aligned} \quad (B.81)$$

и в результате вычислений находим

$$\varepsilon^{abc} V^+ \partial_a V V^+ \partial_b V V V^+ \partial_c V \equiv F(z) \cdot I. \quad (B.82)$$

Подставим полученные значения в (B.80)

$$\frac{i}{240\pi^2} \int_{D_5^+} \text{Sp}(\ell^5) = \frac{iQ}{2} \int_{D_2} d^2x \varepsilon^{ij} \text{Sp}[\partial_i A^+ \partial_j A], \quad (B.83)$$

где Q - топологический заряд. Двумерный диск $D_2 = [0,1] \times [0,2\pi]$ параметризуем "полярными" координатами ρ и t так, что ρ имеет смысл радиуса, t - угловая переменная, тогда

$$A(\rho, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho e^{it} & 0 \\ 0 & -\sqrt{1-\rho^2} & \rho e^{it} \end{pmatrix}. \quad (B.84)$$

В результате подстановки в (B.83) находим

$$\varepsilon^{ij} \text{Sp}[\partial_i A^+ \partial_j A] = -2i\rho,$$

поэтому

$$\frac{i}{240\pi^2} \int_{D_5^+} \text{Sp}(\ell^5) = Q \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} dt = \pi Q. \quad (B.85)$$

Дополнение В. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕДУКЦИИ КИРАЛЬНЫХ ЛАГРАНЖИАНОВ

Здесь мы приводим наброски доказательств и иллюстрации ряда утверждений из §§ 4,5 основного текста, позволяющих сузить круг возможных подстановок при отыскании минимумов функционалов в киральных моделях. В частности, практически всегда можно ограничиваться классом статических полей, если функционал квадратичен по временным производным, что мы и демонстрируем на примере функционала Скирма (4.5). Если функционал инвариантен относительно преобразований из группы G , то согласно теореме Коулмена-Пале минимум его следует искать среди G -инвариантных полей. В разделе В.2 излагается идея доказательства и дается контрпример, проясняющий существенность условий этой теоремы. В ряде случаев можно в результате редукции прийти к функционалу, удовлетворяющему условиям теоремы 4.3. Тогда методом сферической перестройки можно пытаться отыскать анзац, реализующий абсолютный минимум функционала. Иллюстрация метода сферической перестройки дана в заключительном разделе. Таким образом, просматривается некоторая схема последовательной редукции функционалов, которая может быть использована при решении других задач.

В.1. Редукция к статическим полям

Приведем выкладки, подтверждающие анонсированное в §4.1 утверждение, что $J_n \neq H$ (4.5) реализуется на классе статических полей.

Подставим (3.3) и (3.5) в (4.5) и вычислим шпур. Приходим к выражению /90/

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2\lambda^2} [(\partial_0 \theta)^2 + (\partial_i \theta)^2 + \sin^2 \theta ((\partial_0 \underline{n})^2 + (\partial_i \underline{n})^2)] + \right. \\ &+ \varepsilon^2 \sin^2 \theta [(\partial_0 \underline{n})^2 (\partial_i \theta)^2 + (\partial_i \underline{n})^2 (\partial_0 \theta)^2 + (\partial_i \underline{n})^2 (\partial_k \theta)^2 + \\ &+ \sin^2 \theta ((\partial_0 \underline{n})^2 (\partial_i \underline{n})^2 - (\partial_0 \underline{n} \cdot \partial_i \underline{n})^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \underline{n})^2 (\partial_k \underline{n})^2 - \\ &\left. - \frac{1}{2} (\partial_i \underline{n} \cdot \partial_k \underline{n})^2) - 2\lambda_0 \theta \partial_i \theta (\partial_0 \underline{n} \cdot \partial_i \underline{n}) - (\partial_i \theta \partial_k \theta) (\partial_i \underline{n} \cdot \partial_k \underline{n}) \right\}. \end{aligned} \quad (B.1)$$

Рассматривая (В.1) как функцию от $(\underline{v}, \underline{u})$ и (\underline{v}, θ) , минимизируем ее по этим переменным. Приходим к системе

$$\begin{cases} \partial_{\underline{u}} \left[\frac{1}{2\lambda^2} + \varepsilon^2 \underline{L}_i \right] = \varepsilon^2 \partial_{\underline{u}} (\underline{L}_0, \underline{L}_i); & (a) \\ \partial_{\theta} \left[\frac{1}{2\lambda^2} + \varepsilon^2 \underline{L}_i \right] = \varepsilon^2 \partial_{\theta} (\underline{L}_0, \underline{L}_i). & (б) \end{cases}$$

Умножая уравнение (а) на $\partial_{\underline{u}} \underline{u} \cdot \sin^2 \theta$, а уравнение (б) на $\partial_{\theta} \theta$, и складывая, приходим к равенству

$$(\underline{L}_0 \cdot \underline{L}_i) = 0. \quad (B.2)$$

Из (а) и (б) заключаем, что $\partial_{\underline{u}} \underline{u} = \partial_{\theta} \theta = 0$ или $\underline{L}_0 = 0$, что и подтверждает высказанное утверждение. Нетрудно заметить, что аналогичные утверждения будут справедливы для любого функционала, квадратичного по временным производным.

В.2. Редукция к G -инвариантным полям

Поясним идею доказательства теоремы Коулмена-Пале в § 4.2. Введем обозначение для вариационной производной $X \equiv \delta F / \delta \phi [\phi]$ и запишем условие экстремальности функционала $F[\phi]$ на инвариантном множестве $\mathcal{P}_0 \ni \phi_0$:

$$(X, \delta \phi_0) = 0, \quad \delta \phi_0 \in \mathcal{P}_0. \quad (B.3)$$

Здесь использован символ скалярного произведения для обозначения линейного функционала на \mathcal{P}_0 .

С другой стороны, из G -инвариантности функционала $F[\phi]$ следует, что

$$\delta F = (X, \delta \phi) = (X_g, \delta \phi_g), \quad (B.4)$$

где X_g и $\delta \phi_g$ - суть величины X и $\delta \phi$, преобразованные под действием элемента g группы G . Заметим, что

$$\begin{aligned} \delta F &= F[\phi_0 + \delta \phi] - F[\phi_0] = F[g\phi_0 + \delta \phi_g] - \\ &- F[\phi_0] = F[\phi_0 + \delta \phi_g] - F[\phi_0] = (X, \delta \phi_g). \end{aligned} \quad (B.5)$$

Сравнение (B.3) и (B.4) показывает, что $(X_g - X, \delta \phi_g) = 0$ и, в силу произвольности, найдем

$$X_g = X. \quad (B.6)$$

Соотношение (B.6) означает, что X инвариантно под действием группы. Обозначим множество инвариантных полей X через \mathcal{P}_0^* .

Подчеркнем различие множеств \mathcal{P}_0 и \mathcal{P}_0^* , так как в сопряженном пространстве, к которому принадлежит X , группа G может действовать иначе, чем на основном полево многообразии.

Наконец, соотношение (B.3) означает, что X принадлежит аннулятору множества \mathcal{P}_0 , т.е. $X \in \mathcal{P}_0^*$. Отсюда нетрудно заключить, что $\delta F = 0$ или $X = 0$, если

$$\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_0^* = \emptyset \quad (B.7)$$

- пустое множество. Теорема доказана.

Проиллюстрируем существенность условия (B.7) примером, принадлежащим О.А. Ладженской. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x^1, x^2\}$ функционал (функцию) $F[\phi] = f(x^2)$, инвариантный относительно действия группы $G \ni g$:

$$\phi = \{x^1, x^2\} \rightarrow g\phi = \{x^1 + \tau x^2, x^2\},$$

задаваемого параметром $\tau \in \mathbb{R}^1$. Инвариантное множество есть $\mathcal{P}_0 = \{x^1 = 0\}$. Построим множества \mathcal{P}_0 и \mathcal{P}_0^* . Для этого сначала выясним, как действует группа G в сопряженном пространстве векторных полей $\delta F / \delta \phi \equiv \{X_1, X_2\}$. Запишем условие инвариантности функционала

$$X_1 \delta x^1 + X_2 \delta x^2 = X_1' \delta x^1 + X_2' \delta x^2,$$

где $\delta x^1 = \delta x^1 + \tau \delta x^2$, $\delta x^2 = \delta x^2$.
Отсюда выводим закон преобразования

$$X_1' = X_1; \quad X_2' = X_2 - \tau X_1.$$

Поэтому инвариантное множество \mathcal{P}_0 в сопряженном пространстве имеет структуру: $X_1 = 0$, X_2 - произвольно, т.е. $\mathcal{P}_0 = \{0, X_2\}$.

Наконец, аннулятор \mathcal{P}_0^* находим из условия

$$\delta F |_{\mathcal{P}_0} = (X_1, \delta x^1) = 0,$$

или $\mathcal{P}_0^* = \{0, X_2\} = \mathcal{P}_0$. Отсюда видно, что условие (B.7) не выполняется, и теорема Коулмена-Пале не работает. Действительно, если $f'(0) \neq 0$, то, хотя на инвариантном множестве $\mathcal{P}_0 = \{x^1 = 0\}$ имеем $df |_{\mathcal{P}_0} = 0$, однако полный дифференциал $df(0) = f'(0) dx^1 \neq 0$.

В.3. Метод сферической перестройки (полный пример)

Применение метода сферической перестройки проиллюстрируем доказательством неравенства (5.5), где функция $f(\vec{x})$ - неотрицательная и убывающая. Введем обозначения

$$F(M) = \int_{f > M} |\nabla f|^2 d^3x; \quad F_R(M) = \int_{f > M} |\nabla_{\mathbb{R}} f| d^3x \quad (B.8)$$

и перепишем условие (5.1) в виде

$$\int_{f > M} d^3x = \int_{f_R = M} d^3x \stackrel{\text{def}}{=} V. \quad (\text{B.9})$$

Элементы площадей поверхностей уровня $f(\vec{x}) = M$, $f_R = M$ обозначим через dS_M и dS_{RM} соответственно, нормальными к этим поверхностям будут $\vec{\nabla}f$ и $\nabla_2 f_R$, элемент объема dV запишем в виде

$$dV = \int dS_M \cdot dh(\vec{x}),$$

а приращение уровня dM (см. рис.17):

$$dM = |\vec{\nabla}f| dh(\vec{x}) = \text{const}. \quad (\text{B.10})$$

Введенные обозначения позволяют записать соотношение

$$\left| \frac{dV}{dM} \right| = \oint \frac{dS_M dh}{|\vec{\nabla}f| dh} = \oint \frac{dS_M}{|\vec{\nabla}f|} = \oint \frac{dS_{RM}}{|\nabla_2 f_R|}. \quad (\text{B.11})$$

Аналогичным образом из (B.8) следует

$$\left| \frac{dF(M)}{dM} \right| = \oint |\vec{\nabla}f| dS_M; \quad \left| \frac{dF_R(M)}{dM} \right| = \oint |\nabla_2 f_R| dS_{RM}. \quad (\text{B.12})$$

Перемножим выражения (B.11) и (B.12).

Тогда в силу неравенства Шварца

$$\left| \frac{dV}{dM} \right| \cdot \left| \frac{dF}{dM} \right| = \oint \frac{dS_M}{|\vec{\nabla}f|} \times \oint |\vec{\nabla}f| dS_M \geq \left| \oint dS_M \right|^2; \quad (\text{B.13})$$

$$\left| \frac{dV}{dM} \right| \cdot \left| \frac{dF_R}{dM} \right| = \oint \frac{dS_{RM}}{|\nabla_2 f_R|} \times \oint |\nabla_2 f_R| dS_{RM} = \left| \oint dS_{RM} \right|^2. \quad (\text{B.14})$$

Знак равенства в (B.14) следует из того, что $|\nabla_2 f_R| = \text{const}$ вдоль поверхности $f_R = M = \text{const}$ по построению. Но поверхности уровня $f = M$ и $f_R = M$ ограничивают в силу (B.9) одинаковый объем, а при фиксированном объеме сфера является наименьшей из поверхностей, его ограничивающих, т.е.

$$\oint dS_M \geq \oint dS_{RM}. \quad (\text{B.15})$$

Это означает, что

$$\left| \frac{dV}{dM} \right| \cdot \left| \frac{dF}{dM} \right| \geq \left| \frac{dV}{dM} \right| \left| \frac{dF_R}{dM} \right|; \quad \left| \frac{dF}{dM} \right| \geq \left| \frac{dF_R}{dM} \right|. \quad (\text{B.16})$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от $M=0$ до M_{max} , получаем искомое неравенство (5.5).

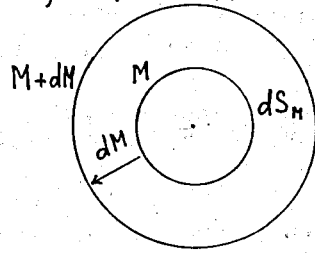


Рис.17

Дополнение Г. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ СУЩЕСТВОВАНИЯ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ СКИРМА

Вначале приведем доказательство обобщенной теоремы Хобарта-Деррика (теорема 6.1), существенной при выяснении вопроса об устойчивости солитонных решений в нелинейных моделях /86, 91/.

Г.1. Доказательство обобщенной теоремы Хобарта-Деррика

Запишем уравнения (6.1) для поля u :

$$U_s^s = 0, \quad U_s - \partial_i U_s^i = 0, \quad s = \overline{1, n}, \quad (\text{Г.1})$$

где для удобства использованы обозначения

$$U_s^s = \partial U / \partial \varphi^s, \quad U_s^i = \partial U / \partial (\partial_i \varphi^s); \quad U_s = \partial U / \partial \varphi^s. \quad (\text{Г.2})$$

Вычислим вторую вариацию функционала V (см. формулу (6.2)) в точке u

$$\delta^2 V[\xi] = \int d^3x \left[U_{s_2^2}^s \xi^s \xi^2 + 2 U_{s_2^2}^s \xi^s \xi^2 + U_{s_2^2}^s \xi^s \xi^2 + \right. \\ \left. + 2 U_{s_2^2}^s \xi^s \partial_i \xi^2 + U_{2s}^{ik} \partial_i \xi^2 \partial_k \xi^s + 2 U_{2s}^i \partial_i \xi^2 \xi^s \right]. \quad (\text{Г.3})$$

Подставим теперь в (Г.3) частные возмущения

$$\xi^s = f^j(\vec{x}) \partial_j u^s, \quad \xi^2 = f^j(\vec{x}) \partial_j u^2$$

и с учетом уравнений (Г.1) преобразуем $\delta^2 V$ к виду

$$\delta^2 V[\underline{f}] = \int d^3x \left[\partial_i f^l A_{lj}^{ik} \partial_k f^j + (\partial_i f^l f^j - \partial_i f^j f^l) B_{jl}^i \right], \quad (\text{Г.4})$$

где обозначено

$$A_{lj}^{ik} = \partial_l u^k U_{2s}^{ik} \partial_j u^s; \quad 2 B_{jl}^i = -2 B_{lj}^i = \partial_{[j} U_{2s}^i \partial_{l]} u^s. \quad (\text{Г.5})$$

Заметим, что второе слагаемое в (Г.4) явно знакопеременно, а в силу уравнений (Г.1) выполняется равенство

$$\partial_i B_{jl}^i = 0, \quad (\text{Г.6})$$

из которого следует представление

$$2 B_{jl}^i = \varepsilon^{ikm} \partial_k a_{mjl}, \quad (\text{Г.7})$$

где положено

$$a_{mjl} = \frac{1}{2\pi} \varepsilon_{mki} \partial^k \int d^3x' \frac{B_{jl}^i(\underline{z}')}{|\underline{z} - \underline{z}'|}. \quad (\text{Г.8})$$

Учитывая (Г.7) и интегрируя в (Г.4) по частям, найдем

$$\delta^2 V[\underline{f}] = \int d^3x \left[\partial_i f^l (A_{lj}^{ik} + \varepsilon^{ikm} a_{mjl}) \partial_k f^j \right]. \quad (\text{Г.9})$$

Теперь нам достаточно исследовать знакоопределенность подынтегрального выражения в (Г.9). Рассмотрим, в частности, асимптотическую область $z \rightarrow \infty$. Тогда из формулы (6.8) основного текста и (Г.3) выводим, что

$$B_{j\ell}^i = O[z^{-(3+2\alpha)}]. \quad (\text{Г.10})$$

Поэтому из (Г.8) легко получить, что $a_{mj\ell} = O(z^{-\nu})$, где $\nu = 3$ при $\alpha > 1/2$ и $\nu = 2(1+\alpha)$ при $\alpha < 1/2$. В самом деле, сначала из (6.8) и (Г.6) путем интегрирования по частям выводим тождество

$$\int d^3x B_{j\ell}^i = 0, \quad (\text{Г.11})$$

с учетом которого равенство (Г.8) можно переписать в виде

$$a_{mj\ell} = \frac{1}{2\pi} \varepsilon_{mki} \partial^k \int d^3x' B_{j\ell}^i(z') \left(\frac{1}{|z-z'|} - \frac{1}{z} \right). \quad (\text{Г.8a})$$

Из (6.8) вытекает, что для любого конечного a верна оценка

$$\partial^k \int_{(z' < a)} d^3x' B_{j\ell}^i(z') \left(\frac{1}{|z-z'|} - \frac{1}{z} \right) = O(z^{-3}) \quad (\text{Г.12})$$

и поэтому остается рассмотреть вклад в (Г.8a) области $z' > a$:

$$\begin{aligned} & \int_{(z' > a)} d^3x B_{j\ell}^i(z') \left(\frac{1}{|z-z'|} - \frac{1}{z} \right) < \\ & < C \int_{(z' > a)} d^3x' (z')^{-(3+2\alpha)} \left| \frac{1}{|z-z'|} - \frac{1}{z} \right| \equiv M(z). \end{aligned} \quad (\text{Г.13})$$

Вычислим интеграл в правой части (Г.13):

$$\frac{M(z)}{2\pi C} = \frac{1}{z^2} \frac{\alpha^{1-2\alpha}}{2\alpha-1} + z^{-(2\alpha+1)} \left[\frac{(\alpha+1)2^{1-2\alpha}-1}{\alpha(1+2\alpha)} - \frac{2^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right]. \quad (\text{Г.14})$$

Из (Г.14) сразу же следует нужная оценка для $a_{mj\ell}$. Ее сравнение с оценкой $A_{ij}^{ik} = O[z^{-(3+2\alpha)}]$, вытекающей из (6.8) и (Г.5) показывает, что второе слагаемое в (Г.9) превосходит первое. Это свидетельствует о знакопеременности квадратичной формы в (Г.9).

Заметим, что приведенное доказательство теоремы (6.1) легко распространить на случай солитонов в пространстве размерности $d = N+2 \geq 2$. При этом вместо (Г.7) и (Г.8) будем иметь представления

$$2 B_{j\ell}^i = \varepsilon^{ik} \alpha_1 \dots \alpha_N \partial_k a_{\alpha_1 \dots \alpha_N j\ell}; \quad (\text{Г.15})$$

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_N j\ell} = \frac{2}{N!} \varepsilon_{ik} \alpha_1 \dots \alpha_N \partial^k \int d^{N+2}x' G(z-z') B_{j\ell}^i(z'), \quad (\text{Г.16})$$

где $G(z-z')$ - функция Грина d -мерного уравнения Лапласа.

Г.2. Доказательство существования регулярного решения в модели Скирма

В §6.3 основного текста мы уже ввели все необходимые определения для доказательства теоремы существования регулярных решений. Здесь мы приводим технические детали этого доказательства /83, 90/, используя обозначения из основного текста.

Вначале докажем слабую полунепрерывность функционала $H_{a\ell}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1(a, \ell)$. Для этого представим $H_{a\ell}$ в виде суммы скалярных произведений

$$H_{a\ell} = \sum_{m=1}^4 \|h_m\|^2, \quad (\text{Г.17})$$

где положено

$$\begin{aligned} h_1 &= x \theta' / \sqrt{2} ; & h_2 &= \sqrt{2} \sin \theta \cdot \theta', \\ h_3 &= \sin \theta ; & h_4 &= \sin^2 \theta / x. \end{aligned} \quad (\text{Г.18})$$

Воспользуемся теперь фактом вложения пространства $\mathcal{H}_1(a, \ell)$ в пространство непрерывных функций /182/:

$$\mathcal{H}_1(a, \ell) \hookrightarrow C(a, \ell).$$

Это означает, что последовательность $\{\theta_n(x)\}$ слабо сходится в $\mathcal{H}_1(a, \ell)$ и сильно в $C(a, \ell)$ к некоторой предельной функции $\theta(x)$. Но функции h_3 и h_4 непрерывны по θ и поэтому тоже сходятся к соответствующим пределам. Далее, $\theta'_n(x)$ слабо сходится к θ' в $L_2(a, \ell)$, и поэтому $h_1(\theta'_n)$ слабо сходится в $L_2(a, \ell)$ к $h_1(\theta)$. Наконец, $h_2(\theta_n) = \sqrt{2} \sin \theta_n \cdot \theta'_n$, и последовательность $\{h_2(\theta_n)\}$ представляет собой произведение двух последовательностей: $\{\sqrt{2} \theta'_n\}$ - слабо сходящейся в $L_2(a, \ell)$ и $\{\sin \theta_n\}$ - сильно сходящейся в $C(a, \ell)$. Поэтому $\{h_2(\theta_n)\}$ слабо сходится в $L_2(a, \ell)$.

Таким образом, все векторы h_m , $m = \overline{1, 4}$ слабо сходятся в $L_2(a, \ell)$, и, значит, функционал $H_{a\ell}$ слабо полунепрерывен снизу в $\mathcal{H}_1(a, \ell)$ в соответствии с теоремой 6.2.

Окончательный результат получается предельным переходом $a \rightarrow 0, \ell \rightarrow \infty$. При этом функционал $H_{a\ell}$ непрерывен, так как в силу доказанных в основном тексте оценок (6.21) и (6.29) имеем

$$\int_a^a \mathcal{H} dx = O(a^3), \quad \int_b^\infty \mathcal{H} dx = O(\ell^{-3}). \quad (\text{Г.19})$$

Итак, доказана слабая достижимость нижней грани $\inf_{Q=N} H$ в простран-

стве $\mathcal{H}_1(0, \infty)$. Однако мы строили последовательность $\{\theta_n\}$ на множестве гладких функций и поэтому должны доказать регулярность слабого решения уравнений поля [83, 90]

$$\theta'' = F(x, \theta, \theta'), \quad (\Gamma.20)$$

где $F = (x^2 + 4 \sin^2 \theta)^{-1} \{ \sin 2\theta(1 - 2\theta'^2 + 2 \sin^2 \theta/x^2) - 2x\theta' \}$.

Заметим, что для некоторого $a > 0$ $x\theta', \sin \theta \in L_2(a, \infty)$. Поэтому $F \in L_1(a, \infty)$ и уравнение (Г.20) эквивалентно следующему:

$$\theta'(x) = - \int_x^\infty F dx, \quad x \geq a > 0. \quad (\Gamma.21)$$

Из (Г.21) следует ограниченность $\theta'(x)$ при $x \geq a$, а также и ограниченность F . Но тогда θ' и F непрерывны при $x \geq a$. Наконец, из (Г.20) вытекает гладкость θ', F и θ'' при $x \geq a$. В итоге находим, что $\theta(x) \in C^\infty(a, \infty)$. Устремляя $a \rightarrow 0$ и учитывая (6.21), устанавливаем регулярность предельной функции.

Итак, окончательно установлено существование сферически-симметричных скирмионов с любым значением топологического заряда $Q = n$. В §7 показано, что эти состояния неустойчивы при $|Q| > 1$.

Дополнение Д. "СПИНОРНЫЕ СТРУКТУРЫ" ФИНКЕЛЬШТЕЙНА-УИЛЬЯМСА

Убедимся, следуя работе [103], что вычисление фундаментальной группы $\mathcal{H}_1(\Sigma_0)$ можно свести к вычислению $\mathcal{H}_4(\mathcal{P})$, т.е. установим изоморфизм между элементами этих групп. В качестве представителя класса Σ_0 рассмотрим отображение

$$\gamma: \mathbb{R}^1 \rightarrow \Sigma_0; \quad \gamma(-\infty) = \gamma(+\infty) = \sigma_0, \quad (\text{Д.1})$$

где σ_0 - фиксированная точка Σ_0 , в которой начинается и заканчивается путь γ в Σ_0 . Определим отображение

$$F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{P}; \quad F(\bar{x}, s) = [\gamma(s)](\bar{x}). \quad (\text{Д.2})$$

Заметим, что $F(\bar{x}, s) \rightarrow \phi_0 \in \mathcal{P}$ при стремлении любого из аргументов $|\bar{x}|$ или $|s|$ к бесконечности. Таким образом, установлено соотношение между путями (Д.1) и отображениями (Д.2). Но отображение F (Д.2) принадлежит одному из гомотопических классов - элементу группы $\mathcal{H}_4(\mathcal{P})$. Поскольку тривиальность или нетривиальность пути γ в Σ_0 зависит от того, тривиально или нет отображение F , то группы

$\mathcal{H}_1(\Sigma_0)$ и $\mathcal{H}_4(\mathcal{P})$ изоморфны. Напомним, что тривиальными являются отображения типа (8.5). Приведем теперь выкладки Уильямса [103], подтверждающие нетривиальность путей, начинающихся и заканчивающихся в точке $\phi_1 \in \Sigma_1$ и отвечающих вращению солитонного состояния на угол 2π (см. также [58]). Мы должны для этого выбрать отображение из Σ_1 $\{ \varphi_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow S^3; \deg(\varphi) = 1 \}$, например, задавая $\varphi_i(\bar{x}) = (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$, где (ϕ_0, ϕ_1) - компоненты стереографической проекции (8.7) с $R^{ab}(\lambda) = I$. Вращение для простоты будем рассматривать относительно оси z : $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$.

$$x_i \rightarrow x'_i = R_{ij}(\lambda) x_j; \quad \|R_{ij}(\lambda)\| = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\lambda & \sin 2\pi\lambda & 0 \\ \sin 2\pi\lambda & \cos 2\pi\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Д.3})$$

При пробегании параметром λ значений от 0 до 1 мы получаем непрерывную последовательность отображений (8.6), (8.7), определяющую замкнутый путь (петлю) в Σ_1 . Для проверки нетривиальности этого пути удобно представить φ_1 как отображение сфер $S^3 \rightarrow S^3$, топологически эквивалентное тождественному $\tilde{\varphi}_1: S^3 \rightarrow S^3$, которое можно определить как $\{ \phi_a = \psi_a, a = 1, \bar{3}; \phi_0 = \psi_0 \}$, где (ψ_0, ψ_a) - точка сферы-прообраза, соответственно (ϕ_0, ϕ_a) - точка сферы-образа. Тогда путь на сфере-образе S^3 получим, отображая (ψ_0, ψ_a) с помощью φ_1 , а затем, задавая вращение сферы-прообраза с помощью матрицы $R_{ij}(\lambda)$, следим за выполнением соответствия точек образа и прообраза:

$$\phi_a = R_{a\beta}(\lambda) \psi_\beta; \quad \phi_0 = \psi_0; \quad a, \beta = 1, \bar{3}. \quad (\text{Д.4})$$

Поскольку сферу-образ можно эквивалентным образом рассматривать как группу $SU(2)$, а линейно-связные компоненты топологической группы гомеоморфны между собой, то и гомотопические классы Σ_i будут гомеоморфны друг другу. Тогда путь (Д.4) в Σ_1 можно записать в виде унитарной матрицы

$$U(\lambda) = \begin{pmatrix} \phi_0 + i\phi_3 & \phi_2 + i\phi_1 \\ -\phi_2 + i\phi_1 & \phi_0 - i\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 + iR_{3\beta}\psi_\beta & R_{2\beta}\psi_\beta + iR_{1\beta}\psi_\beta \\ -R_{2\beta}\psi_\beta + iR_{1\beta}\psi_\beta & \psi_0 - iR_{3\beta}\psi_\beta \end{pmatrix} \quad (\text{Д.5})$$

С помощью подходящего гомеоморфизма путь в Σ_1 можно преобразовать в путь в Σ_0 . Такой гомеоморфизм строится домножением $U(\lambda)$ (Д.5) на $U^{-1}(0)$:

$$U^{-1}(0)U(\lambda) = \begin{pmatrix} \phi_0 + i\phi_3 & \phi_2 + i\phi_1 \\ -\phi_2 + i\phi_1 & \phi_0 - i\phi_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{Д.6})$$

Легко видеть, что это путь в Σ_0 с отождествленными началом и концом, отвечающих значениям $\lambda = 0, 1$:

$$U^{-1}(0)U(0) = U^{-1}(0)U(1) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (Д.7)$$

что соответствует постоянному отображению $\phi_0 = 1, \phi_a = 0$. Записывая (Д.5) в явном виде, находим выражения для (ϕ_a, ϕ^a) :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \psi_0 [\psi_1 (\cos 2\pi\lambda - 1) + \psi_2 \sin 2\pi\lambda] - \psi_3 [\psi_1 \sin 2\pi\lambda + \psi_2 (\cos 2\pi\lambda - 1)] \\ \phi_2 &= \psi_0 [-\psi_1 \sin 2\pi\lambda + \psi_2 (\cos 2\pi\lambda - 1)] + \psi_3 [\psi_1 (\cos 2\pi\lambda - 1) + \psi_2 \sin 2\pi\lambda], \quad (Д.8) \\ \phi_3 &= -(\psi_1^2 + \psi_2^2) \sin 2\pi\lambda; \quad \phi_0 = 1 + (\psi_1^2 + \psi_2^2)(\cos 2\pi\lambda - 1). \end{aligned}$$

В соответствии с (Д.2) с путем (Д.8) можно связать отображение

$$f: S^4 \rightarrow S^3, \quad (Д.9)$$

при этом параметр λ играет роль дополнительной переменной, по которой S^4 расслаивается на сферы S^3 . Путь (Д.8) будет нетривиален в Σ_0 при условии, что нетривиально отображение (Д.9). Поскольку $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$, то имеется лишь два гомотопических класса Σ'_0 и Σ'_1 , а все нетривиальные отображения должны принадлежать Σ'_1 . Выбирая в (Д.8) $\lambda = 1/2$, находим

$$\begin{cases} \phi_1 = -2(\psi_0\psi_1 - \psi_3\psi_2); \\ \phi_2 = -2(\psi_0\psi_2 + \psi_3\psi_1); \\ \phi_0 = 1 - 2(\psi_1^2 + \psi_2^2). \end{cases} \quad (Д.10)$$

Мы получим известное нетривиальное отображение Хопфа $H: S^3 \rightarrow S^2$, $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ и на основании этого заключаем, что и отображение f (Д.9), являющееся поднятием H , нетривиально. Это и является доказательством существования полуцелого спина по Уильямсу-Финкельштейну.

Дополнение Е. СТАТИЧЕСКИЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ АДРОНОВ КАК КВАНТОВАННЫХ СКРИМИОНОВ

Для начала приведем доказательство существования несингулярной матрицы $N_{\alpha\beta}$, позволяющей осуществить переход от импульсов (Ю.16) к моментам импульса (Ю.19) в схеме канонического квантования (§Ю.2), следуя работе /183/.

Е.1. Существование несингулярной матрицы $N_{\alpha\beta}$

Параметризацию коллективных переменных $A(t) \in SU(3)$ (Ю.15)

можно эквивалентным образом переписать в виде

$$A[\mathcal{Z}(\theta)] = e \exp(i \lambda_\alpha \theta_\alpha) A[\mathcal{Z}]; \quad \mathcal{Z}(0) = \mathcal{Z}, \quad (Е.1)$$

где $\mathcal{Z}(\theta) = \{\mathcal{Z}_1(\theta), \mathcal{Z}_2(\theta), \dots, \mathcal{Z}_8(\theta)\}$; $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_8)$ - наборы функций и параметров, λ_α ($\alpha = 1, \dots, 8$) - генераторы $SU(3)$. Дифференцируя (Е.1) по θ_α и полагая в итоге $\theta = 0$, получаем

$$i \lambda_\alpha A[\mathcal{Z}] = \frac{\partial A[\mathcal{Z}]}{\partial \mathcal{Z}_\beta} \cdot N_{\beta\alpha}(\mathcal{Z}); \quad (Е.2)$$

$$N_{\beta\alpha}(\mathcal{Z}) = \frac{\partial \mathcal{Z}_\beta(\theta)}{\partial \theta_\alpha} \Big|_{\theta=0}. \quad (Е.3)$$

Несингулярность матрицы $N_{\alpha\beta}$ доказывается методом от противного. Будем полагать, что $N_{\alpha\beta}$ - сингулярна, т.е. $\det N = 0$. Тогда существует такой набор $\{x_\alpha\}$, среди которых не все равны нулю, что

$$N_{\beta\alpha} \cdot x_\alpha = 0. \quad (Е.4)$$

Домножим (Е.2) на x_α :

$$i x_\alpha \lambda_\alpha A[\mathcal{Z}] = x_\alpha N_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial A[\mathcal{Z}]}{\partial \mathcal{Z}_\beta} = 0, \quad (Е.5)$$

откуда следует, что $x_\alpha \lambda_\alpha = 0$. Но это противоречит линейной независимости генераторов λ_α , т.е. выполняется лишь при условии, что все $x_\alpha = 0$. Таким образом, приходим к противоречию с высказанным предположением (Е.4), что и доказывает несингулярность матрицы $N_{\alpha\beta}$ из (Е.3).

Е.2. Расчетные формулы и значения для статических наблюдаемых адронов

В §Ю.3 был приведен алгоритм расчета спектра масс барионов на основе модели Скирма. В табл. 2, взятой из работы /159/, приведены результаты расчетов спектра масс барионов, где в качестве исходных чисел (задаваемых руками) выбирались следующие величины: средние массы октета $M_{\underline{8}} = 1151 \text{ MeV}$, декуплета - $M_{10} = 1382 \text{ MeV}$; $m_{\pi} = 140 \text{ MeV}$ и $m_K = 459 \text{ MeV}$. На их основе пересчитывались значения F_{π} , ϵ и γ , входящие в выражение (Ю.38), по формулам

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \bar{m}^2 / F_{\pi}^2 \epsilon^2; \quad \bar{m}^2 = m^2 - \frac{2}{3} \Delta m^2; \\ \Delta M &= M_{10} - M_{\underline{8}} = \frac{9}{4\pi} \frac{F_{\pi} \epsilon^2}{L}; \end{aligned} \quad (Е.6)$$

$$M_{\underline{8}} = \frac{\pi}{2} \frac{F_{\pi}}{\epsilon} M_{Sk} + \frac{\Delta M}{4} \left(1 + \frac{8}{3} \frac{L}{G} \right) + \frac{3}{2} \frac{\Delta m^2 M}{L \Delta M}.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$L = \int_0^\infty dx \sin^2 \theta (x^2 + 4 \sin^2 \theta + 4 x^2 \theta'^2) = \int_0^\infty dx L(x);$$

$$G = \int_0^\infty dx (1 - \cos \theta) (x^2 + x^2 \theta'^2 + 2 \sin^2 \theta) = \int_0^\infty dx G(x).$$

Для удобства значения констант F_π , ϵ и γ также приведены в таблице для трех случаев: 1) $SU(3)$ -симметрии ($\Delta m^2 = 0$); 2) явно нарушенной $SU(3)$ -симметрии ($\Delta m^2 \neq 0$) и 3) с квантовой добавкой к гамильтониану (10.34), исчезающей при переходе к классике $H' = H + (2\delta/\sqrt{3}) F_\pi \mathcal{H}_8$. В скобках указана относительная погрешность по сравнению с экспериментальными данными, в процентах.

Таблица 2. Спектр масс барионов $SU(3)$ модели Скирма ($\delta \text{ MeV}$)

Частица	$\Delta m^2 = 0$	$\Delta m^2 \neq 0$; $\delta = 0$	$\Delta m^2 \neq 0$; $\delta = -7.82$	Эксперимент
N	1116 (18,8)	1065 (13,4)	1026 (9,3)	939
Λ	1139 (2,0)	1122 (0,5)	1110 (-0,5)	1116
Σ	1163 (-2,5)	1180 (-1,1)	1192 (0)	1193
Σ^*	1174 (-10,9)	1208 (-8,3)	1234 (-6,4)	1318
Δ	1367 (11,0)	1346 (9,3)	1330 (8,0)	1232
Δ^*	1382 (-0,2)	1382 (-0,2)	1382 (-0,2)	1385
Σ^*	1397 (-8,7)	1417 (-7,4)	1433 (-6,3)	1530
Ω	1441 (-13,8)	1454 (-13,0)	1486 (-11,1)	1672
γ	1,82	0,49	0,195	
ϵ	4,27	5,10	3,86	
F_π	51,5	56,1	186 (исходн.)	

Для расчета значений статических наблюдаемых адронов используется следующая стандартная схема /98, 99, 116, 117, 156, 159/: для исходного лагранжиана по формулам (A.23), (A.26) - (A.31) вычисляется явный вид векторных и аксиальных (V_μ и A_μ) токов. Электромагнитный ток в $SU(3)$ -случае, например, записывается в виде

$$V_\mu^{EM} = V_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} V_\mu^8. \quad (E.7)$$

Затем токи переписываются в терминах коллективных переменных, т.е. как функции от $A^{-1} \cdot \dot{A}$ (см. §10), и выражаются через $A_{\mu\alpha}$ и \mathcal{H}_α . Статические наблюдаемые определяются через компоненты токов следующим образом:

Зарядовый радиус $(r_E^a)^2 = \int d^3x r^2 V_0^a(r); \quad (E.8)$

Магнитный момент $\mu_\alpha^a = \frac{1}{2} \int d^3x [\vec{F} \times \vec{V}^a]_\alpha; \quad (E.9)$

Магнитный зарядовый радиус $(r_M^a)^2 = \frac{1}{2} \int d^3x r^2 [\vec{F} \times \vec{V}^a]_\alpha. \quad (E.10)$

Каждая из наблюдаемых (E.8)-(E.10) представляется как оператор в гильбертовом пространстве и соответствующие матричные элементы, вычисленные для волновых функций нуклонов (подробнее см. /159/) дают следующие расчетные формулы.

1) Для электрического и магнитного зарядовых радиусов:

$$\langle r_E^2 \rangle_{I=0} = \frac{1}{\epsilon^2 F_\pi^2} \left[\frac{1}{10} \frac{L'}{L} + \frac{3}{5} \left(\frac{G'}{G} + \frac{K}{\pi} \right) \right]; \quad (E.11)$$

$$\langle r_E^2 \rangle_{I=1} = \frac{1}{\epsilon^2 F_\pi^2} \left[\frac{7}{10} \frac{L'}{L} + \frac{1}{5} \left(\frac{G'}{G} + \frac{K}{\pi} \right) \right]; \quad (E.12)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_{I=0} = \frac{1}{\epsilon^2 F_\pi^2} \left[\frac{1}{10} + \frac{\epsilon^4}{\pi^3} \frac{K'}{L \cdot L'} \left(\frac{27}{40} + \frac{L}{10G} \right) \right] \frac{L'}{L} \left(\frac{3}{\mu_{I=0}} \right); \quad (E.13)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_{I=1} = \frac{1}{\epsilon^2 F_\pi^2} \left[\frac{7}{10} + \frac{\epsilon^4}{\pi^3} \frac{K'}{L \cdot L'} \left(\frac{9}{40} + \frac{7L}{10G} \right) \right] \frac{L'}{L} \left(\frac{3}{\mu_{I=1}} \right). \quad (E.14)$$

Где помимо (E.7) использовались обозначения

$$L' = \int_0^\infty dx x^2 L^2; \quad G' = \int_0^\infty dx x^2 G(x); \quad (E.15)$$

$$K = - \int_0^\infty dx x^2 \sin^2 \theta \theta'; \quad K' = - \int_0^\infty dx x^4 \sin^2 \theta \theta';$$

$$\zeta = \frac{4\pi}{9} \frac{L}{F_\pi \epsilon^3} m_N = \frac{m_N}{\Delta M}.$$

При этом $\langle r_M^2 \rangle_{p,n} = [\langle r_M^2 \rangle_{I=0} \mu_{I=0} \pm \langle r_M^2 \rangle_{I=1} \mu_{I=1}] / 2\mu_{p,n}$.

2) Для магнитных моментов в единицах ядерного магнетона:

$$\mu_{I=0} = \zeta \left[\frac{1}{10} + \frac{\epsilon^4}{\pi^3} \frac{K}{L^2} \left(\frac{27}{40} + \frac{L}{10G} \right) \right]; \quad (E.16)$$

$$\mu_{I=1} = \zeta \left[\frac{7}{10} + \frac{\epsilon^4}{\pi^3} \frac{K}{L^2} \left(\frac{9}{40} + \frac{7L}{10G} \right) \right]; \quad (E.17)$$

$$\mu_{p\Delta^+ (S_z = 1/2)} = - \frac{3}{\sqrt{5}} \left[1 + \frac{\epsilon^4}{\pi^3} \frac{K}{L G} \right]; \quad (E.18)$$

$$\mu_{\Delta^{++} (S_z = 3/2)} = \frac{3}{4} \zeta \left[1 + \frac{9}{4} \frac{\epsilon^4}{\pi^3} \frac{K}{L} \left(1 + \frac{4L}{9G} \right) \right]. \quad (E.19)$$

Магнитные моменты октета барионов подчинены соотношениям:

$$\mu_{\Sigma^-} = \mu_{\Sigma^-} = -\mu_{I=0} = -(\mu_n + \mu_p); \quad (E.20)$$

$$\mu_{\Sigma^0} = 2\mu_\Lambda = -2\mu_{\Sigma^0} = \mu_n; \quad \mu_{\Sigma^+} = \mu_p.$$

Для расчета констант связи используется асимптотическое поведение профильной функции скирмиона $\theta(x)$: $\theta(x) \approx d \exp(-\gamma x)$, в результате для пионных полей имеем

$$\pi^a(r) = \frac{d}{2\epsilon} D_{ax}^8 \frac{r_\alpha}{r^2} e^{-m_\pi r}, \quad (E.21)$$

$$\langle p | \pi^3(r) | p \rangle_{S_z = 1/2} = - \frac{g_{\pi NN}}{8\pi} \frac{m_N}{m_\pi} \frac{\Gamma_\pi}{\Gamma^2} e^{-m_\pi r}; \quad (E.22)$$

$$\langle \Delta^+ | \pi^3(r) | p \rangle_{S_z = 1/2} = \frac{1}{8\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3} g_{\pi N\Delta} \frac{m_N}{m_\pi} \frac{\Gamma_\pi}{\Gamma^2} e^{-m_\pi r}. \quad (E.23)$$

Для расчета аксиальной константы связи использовано стандартное соотношение

$$g_A \langle \frac{\lambda_a}{2} \sigma_i \rangle_N = \langle \int d^3x A_i^a(r) \rangle_N, \quad (E.24)$$

где A_i^a - компоненты аксиального тока. В итоге приходим к расчетным формулам для этих констант:

$$g_A = - \frac{7}{45} \frac{\pi}{\epsilon^2} E \left(1 + \frac{2\epsilon^4}{\pi^3} \frac{H}{GE} \right); \quad (E.25)$$

$$g_{\pi NN} = \frac{14\pi}{15} \frac{m_N}{m_\pi} \frac{d}{\epsilon}; \quad g_{\pi N\Delta} = \frac{3\sqrt{10}}{4} g_{\pi NN}, \quad (E.26)$$

где

$$E = \int dx x^2 \left[\left(\theta' + 2 \frac{\sin 2\theta}{x} \right) + 4 \left(\frac{\sin 2\theta}{x} \theta'^2 + \frac{2 \sin^2 \theta}{x^2} \theta' + \frac{2 \sin^3 \theta \cos \theta}{x^3} \right) \right]; \quad H = \int dx (1 - \cos \theta) (2x\theta' - \sin \theta). \quad (E.27)$$

В табл. 3, взятой из работы /99/ приведены численные значения статических наблюдаемых, полученные на основании численного решения модифицированного уравнения (5.22). Для сравнения приводятся также результаты работы /98/ для $SU(2)$ - модели. В скобках дается относительная погрешность расчетных значений по отношению к экспериментальным данным, в процентах.

Приведенные результаты позволяют судить о возможностях модели Скирма для описания на ее основе статических характеристик адронов. Заметим, что с помощью разного рода ухищрений (см./99/) эти результаты можно, по-видимому, существенно приблизить к данным эксперимента, но это, пожалуй, будет менее интересно, чем более тонкое изучение природы скирмиона.

Краткие биографические сведения о Т.Х.Р.Скирме ^{x)}

Тони Хилтон Роял Скирма родился 5 декабря 1922 г. Получив школьное образование в г.Итоне, поступил в Тринити-Колледж Кембриджского университета, который окончил в 1943 г. С 1943 по 1946 гг. работал в Лос Аламосе (США) над Манхэттенским проектом в качестве физика-теоретика. По возвращении в Англию в течение трех лет был стипендиатом

x) Авторы признательны А.Н.Гордееву (УДН), взявшему на себя труд отыскания биографических материалов о профессоре Т.Скирме во время его пребывания в Империи Колледже Кембриджского Университета.

Таблица 3. Магнитные моменты, зарядовые радиусы и константы связи адронов

Наблюдаемые частиц	$\Delta m^2 = 0$	$\Delta m^2 \neq 0$ $\delta = 0$	$\Delta m^2 \neq 0$ $\delta = -7.82$	$SU(2)$ - модель	Эксперим. данные
μ_p	2,33(-16,5)	2,50(-10,4)	1,82(-34,8)	1,97(-29,4)	2,79
μ_n	-1,48(-22,5)	-1,50(-21,5)	-1,28(-33,0)	-1,24(-35,0)	-1,91
μ_Σ^+	-0,85(23,2)	-0,99(43,5)	-0,54(-21,7)	---	-0,69
$ \mu_n/\mu_p $	0,63(-8,7)	0,64(-7,3)	0,70(1,4)	0,63(-8,7)	0,69
$ \mu_{p\Delta^+}/\mu_p $	1,1(-6,8)	1,0(-15,3)	1,1(-6,8)	1,2(1,7)	1,18
$\mu_{\Delta^+}^{(1/2)}/\mu_p$	2,1	1,9	1,9	---	1,7-2,4
$r_{E, p}^{(1/2)}$	0,32(17,1)	1,85(4,3)	0,62(-11,4)	0,77(10)	0,70
$r_{E, n}^{(1/2)}$	-0,09(-18,1)	-0,16(63,6)	-0,06(-45,5)	-0,31(181,8)	-0,11
$r_{E, p}^{(3/2)}$	1,24(74,6)	1,97(177,5)	0,72(1,4)	1,05(47,9)	0,71
$r_{E, n}^{(3/2)}$	1,28(68,4)	1,87(146,)	0,76(0)	1,12(47,4)	0,76

Константы связи

g_A	0,83(-32,5)	0,80(-35,0)	0,96(-22,0)	0,65(-47,2)	1,23
$g_{\pi NN}$	72,8(439,3)	7,9(-41,5)	13,5(0)	11,9(-11,9)	13,5
$g_{\pi N\Delta}$	98,7(386,2)	10,7(-47,3)	18,3(-9,9)	17,9(-11,8)	20,3
F_π	51,5(-72,3)	56,0(-70)	186(исходн.)	108(-41,9)	186

Тринити Колледжа и именно в это время занялся теоретическими исследованиями в области ядерной физики. В 1950-1961 гг. возглавлял группу по проблемам ядерной физики в теоретическом отделе Научно-исследовательского центра по атомной энергии в г.Харуэлле (Англия). В этот период им и были выполнены основополагающие работы по созданию модели ядерного вещества и, в частности, модели бариона, широко известной в настоящее время как модели Скирма. С 1962 г. Тони Скирма посвящает себя, в основном, преподавательской деятельности. В течение двух лет работает на кафедре математики Малайского университета в Куала-Лумпуре, а в 1964 г. возвращается в Англию и до конца своих дней работает в Бирмингемском университете, вначале как профессор и заведующий кафедрой математической физики, а затем как профессор кафедры прикладной математики.

В 1985 г. Королевское общество Великобритании наградило профессора Т.Скирму Медалью Хьюза в знак признания его вклада в развитие теории элементарных частиц и атомного ядра.

Умер Т.Х.Р.Скирм 25 июня 1987 г. на 65-м году жизни. В некрологе отмечается, что коллеги и ученики профессора Скирма всегда восхищались его широкой эрудицией, глубоким проникновением в существо физических проблем, целостностью и прямотой его характера в сочетании с истинной интеллигентностью. Даже в тех случаях, когда на семинарах докладывались результаты, относящиеся к области физики, далекой от его непосредственных интересов, он задавал вопросы, свидетельствующие о глубоком понимании им сути проблемы, и тем самым оказывал докладчикам неоценимую помощь.

Как лектор, профессор Т.Скирм отличался умением подать материал в неожиданном ракурсе, его лекции изобиловали массой интересных находок, что делало изложение весьма трудных вопросов простым и доступным. При этом он никогда не приписывал эти находки себе, а обязательно ссылался на кого-нибудь из коллег. Живость его ума и острота мышления никогда не подавляли студентов, так как он умел подвести даже весьма слабых учеников к самостоятельному решению задачи, которым они имели право гордиться. Дверь дома профессора Т.Скирма всегда была открыта для тех, кто нуждался в его помощи или просто участии.

Таким был в жизни автор модели барионов, в честь которого фермионы, составленные из бозонов, получили отныне название - скирмионы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skyrme T.H.R. - The effective nuclear potential// Nucl.Phys., 1959, v. 9, No 4, p.615-634 (Соловьев В.Г. Теория атомного ядра: ядерные модели. М.: Энергоатомиздат, 1981, - 296 с.).
2. Elliott J.P., Skyrme T.H.R. - Centre of mass effects in the nuclear shell model// Proc.Roy.Soc., 1959, v. A232, p.561-566 (Ситенко А.Г. Тартаковский В.К.: Лекции по теории ядра. М.: Атомиздат, 1972, - 352с.).
3. Skyrme T.H.R. - A nonlinear field theory// Proc.Roy.Soc., 1961, v. A260, No 1300, p.127-138.
4. Skyrme T.H.R. - A unified field theory of mesons and baryons// Nucl. Phys., 1962, v. 31, No 4, p. 556-569.
5. Skyrme T.H.R. - A new model for nuclear matter// Proc.Roy.Soc., 1954, v. A226, No 1167, p. 521-530.
6. Skyrme T.H.R. - Meson Theory and nuclear matter// Proc.Roy.Soc., 1955, v. A230, No 1181, p. 277-286.
7. Skyrme T.H.R. - The concept of a mesic fluid in relation to pseudo-scalar meson theory// Nuovo Cim., 1956, v. 4, Suppl., No 2, p. 749-753.
8. Skyrme T.H.R. - A nonlinear theory of strong interactions// Proc. Roy.Soc., 1958, v. A247, No 1249, p. 260-278.
9. Skyrme T.H.R. - A unified model of K- and Π -mesons// Proc.Roy.Soc., 1959, v. A252, No 1269, p. 236-245.
10. Skyrme T.H.R. - Particle states of quantized meson field// Proc. Roy.Soc., 1961, v. A262, No 1309, p. 237-245.
11. Skyrme T.H.R., Perring J.K. - A model unified field equation// Nucl.Phys., 1962, v. 31, No 4, p.550-555.
12. Skyrme T.H.R. - Kinks and the Dirac equations// J.Math.Phys., 1971, v. 12, No 8, p. 1755-1743.
13. Паули В. - Мезонная теория ядерных сил. М.: ГИИЛ, 1947, - 80 с.
14. Де Альфаро В., Фубини С., Фурлан Г., Россетти К. Токи в физике адронов. М.: Мир, 1976, - 670 с.
15. Френкель Я.И., Конторова Т.М. - О теории пластической деформации и двойниковании // Физический журн., 1939, т.1, с.137-149.
16. Скотт Э., Чу Ф., Мак-Лафлин Д. - Солитон - новое понятие в прикладных науках. - В кн.: Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов.радио, 1977, с.215-284.
17. Makhankov V.G. - Dynamics of classical solitons (in nonintegrable systems)// Phys.Rep., 1978, v. 35, No 1, p. 1-128.
18. Coleman S. - Quantum sine-Gordon equations as the massive Thirring model// Phys.Rev. D, 1975, v.11, No 8, p.2088-2097.
19. Finkelstein D., Misner Ch. - Some new conservation laws// Ann.of Phys., 1959, v. 6, No 2, p. 230-243.

20. Картавенко В.Г. - Решения солитонного типа в ядерной гидродинамике // Ядерн.физ., 1984, т.40, № 2, с.377-388.
21. Barashenkov I., Makhankov V. - Soliton - like excitations in a one-dimensional nuclear matter // JINR preprint E2-84-173, Dubna, 1984, 12 p.
22. Witten E. - Current algebra, baryons and quark confinement // Nucl. Phys. B, 1983, v. 223, No 2, p. 433-444.
23. Witten E. - Global aspects of current algebra // Nucl. Phys. B, 1983, v. 223, No 2, p. 422-432.
24. Ху Ся-цзян. - Теория гомотопий. М.: Мир, 1964, - 468 с.
25. Стинрод Н. - Топология косых произведений. М.: Изд.иностр.лит., 1953, - 274 с.
26. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. - Современная геометрия. М.: Наука, 1979, - 760 с.
27. Новиков С.П., Фоменко А.Т. - Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987, - 432 с.
28. Шварц А.С. - Гомотопическая топология для физиков. - В кн.: Элементарные частицы (третья школа физики ИТЭФ), вып. I, М.: Атомиздат, 1975, с. 78-88.
29. Ольшанецкий М.А. - Краткий путеводитель для физиков по современной геометрии // Усп.физ.наук, 1982, т.136, вып.3, с. 421-433.
30. Рожков С.С. - Топология, многообразия и гомотопия: основные понятия и приложения к моделям n - поля // Усп.физ.наук, 1986, т. 149, вып.2, с. 259-273.
31. Boya L.J., Cariñena J.F., Mateos J. - Homotopy and solitons // Fortschr.Phys., 1978, No 3, v. 26, p. 175-214.
32. Eguchi T., Gilkey P.V., Hanson A.J. - Gravitation, gauge theories and differential geometry // Phys.Rep., 1980, v.66, No 6, p.213-393.
33. Фукс Д.Б., Фоменко А.Т., Гутенмахер В.Л. - Гомотопическая топология. М.: Изд-во МГУ, 1969, - 460 с.
34. Isham C.J. - Topological currents for arbitrary chiral groups in three space dimensions // J.Phys.A, 1977, v.10, No 8, p.1397-1407.
35. Westenholtz C. von. - Topological and Noether-conservation laws // Ann.Inst.Henri Poincaré, 1979, v. A30, No 4, p. 353-377.
36. Шапиро И.С., Ольшанецкий М.А. - Лекции по топологии для физиков. - В кн.: Элементарные частицы (Шестая школа физики ИТЭФ), вып.4, М.: Атомиздат, 1979, с. 3-76.
37. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. - Современная геометрия. Методы теории гомотопий. М.: Наука, 1984, - 344 с.
38. Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. - Topological Skyrmeons // The Niels Bohr Inst. preprint, NBI-HE-81-49, Copenhagen, 1981, - 36 p.

39. Фаддеев Л.Д. - Адроны из лептонов? // Письма в ЖЭТФ, 1975, т.21, вып. I, с. 141-144.
40. Фаддеев Л.Д. - В поисках многомерных солитонов. - В кн.: Нелокальные, нелинейные и ненормируемые теории поля. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976, с. 207-223
41. Weinberg S. - Dynamical approach to current algebra // Phys.Rev. Lett., 1967, v. 18, No 5, p. 188-191.
42. Chang P., Gürsey F. - Unified formulation of effective nonlinear pion-nucleon Lagrangians // Phys.Rev., 1967, v. 164, No 5, p. 1752-61.
43. Wess J., Zumino B. - Lagrangian method for chiral symmetries // Phys.Rev., 1967, v. 163, No 5, p. 1727-1735.
44. Coleman S., Wess J., Zumino B. - Structure of fenomenological Lagrangians // Phys. Rev., 1969, v. 177, No 3, p. 2239-2247.
45. Callan C., Coleman S., Wess J., Zumino B. - Structure of fenomenological Lagrangians // Phys.Rev., 1969, v. 177, p. 2247-2250.
46. Gasiorovicz S., Geffen D.A. - Effective Lagrangians and field algebras with chiral symmetry // Rev.Mod.Phys., 1969, v. 41, No 3, p. 531-573.
47. Волков Д.В. - Феноменологические лагранжианы // ЭЧАЯ, 1973, т.4, № I, с. 3-41.
48. Волков М.К. - Феноменологический киральный лагранжиан с учетом глюонных аномалий // ЭЧАЯ, 1982, т.13, вып.5, с. 1070-1093.
49. Isham C.J. - A group-theoretic approach to chiral transformations // Nuovo Cim., 1969, v. 59A, No 3, p. 356-375.
50. Barnes K.J., Isham C.J. - Chiral metric meson Lagrangians // Nucl. Phys. B, 1970, v. 15, No 2, p. 333-349.
51. Barnes K.J., Dondi P.H., Sarkar S.C. - Nonlinear realizations of chiral algebras and fenomenological Lagrangians // Proc.Roy.Soc., 1972, v. A330, No 1582, p. 389-415.
52. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. - Инвариантная теория возмущения для нелинейных киральных лагранжианов // ТМФ, 1971, т.8, № 3, с.297-307.
53. Slavnov A.A. - Invariant regularization of nonlinear chiral theories // Nucl.Phys. B, 1971, v. 31, No 3, p. 301-315.
54. Barnes K.J., Ketley I.J., Nicole D.A., O'Donnell P. J. - Nonlinear chiral models and many dimensional solitons // Phys.Rev. D, 1977, v. 16, No 2, p. 511-516.
55. Gürsey F. - On the symmetry of strong and weak interactions // Nuovo Cim., 1960, v. 16, No 2, p. 230-240.
56. Gürsey F. - On the structure and parity of weak interaction currents // Ann. of Phys., 1961, v. 12, No 1, p. 91-117.

57. Weinberg S.- Phenomenological Lagrangians// *Physica A*, 1979, v. 96, No 1,2, p. 327-340.
58. Pak N.K., Tze H.Ch.- Chiral solitons and current algebra// *Ann. of Phys.*, 1979, v. 117, No 2, p. 164-194.
59. Hobart R.H.- On the instability of a class of unitary field model//*Proc.Phys.Soc.*,1963, v. 82, No 2, p. 201-203.
60. Derrick G.H.- Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles// *J.Math.Phys.*,1964, v. 5, No 6, p. 1252-1254.
61. Рыбаков Д.П.- Структура частиц в нелинейной теории поля. М.: Изд-во УДН, 1985, - 80 с.
62. Маханьков В.Г.- Солитоны и численный эксперимент // ЭЧАЯ, 1983, т.14, вып.1, с. 123-180.
63. Nietarinta J.- On the existence of localized solutions in nonlinear chiral theories// *J.Math.Phys.*,1977, v. 18, No 1,p.65-71.
64. Hobart R.H.- Nonlinear field equilibria// *Proc.Phys.Soc.*,1965, v. 85, No 3, p. 610-611.
65. Jackson A., Jackson A.D., Goldhaber A.S., Brown G.E., Castillejo L.S.- A modified Skyrmion// *Phys.Lett. B*, 1985, v. 154, No.2,3, p. 101-106.
66. Duff M.J., Isham C.J.- Solitons and vortex type solutions in nonlinear chiral theories// *Nucl.Phys. B*, 1976, v. 108, No 1, p. 130-140.
67. Kundu A.- Construction of nonlinear σ -models in two and higher space dimensions // *Ann. of Phys.*, 1982, v. 139, No 1, p. 36-47.
68. Bells J., Sampson J.H.- Harmonic mappings of riemannian manifolds// *Amer.J.Math.*, 1964, v. 86, No 1,p.109-160.
69. Bells J., Lemaire L.- A report on harmonic maps// *Bull.Lond. Math. Soc.*, 1978, v. 10, No 1, p.1-98.
70. Богомольный Е.Б.- Устойчивость классических решений // *Ядерн.физ.*, 1976, т.24, вып. 4, с.861-870.
71. Капитанский Л.В., Ладженская О.А.- О принципе Коулмена нахождения стационарных точек инвариантных функционалов // *Записки науч. сем.ЛОМИ*, 1983, т.127, с.84-102.
72. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.- Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, - 479 с.
73. Экланд И., Темам Р.- Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979, - 399 с.
74. Lions P.L.- The concentration-compactness principle in the calculus of variations: Part 1 - *Ann.Inst.Henri Poincaré, Anal.Non-Lin.*,1984, v. 1, No 2, p.109-145;Part 2 - No 4, p.223-283.

75. Lions P.L.-The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case// *Rev.Math.Iber.*,1985,Part 1 - v. 1, No 1, p.145-200;Part 2 - v. 1, 2; p. 45-121.
76. Esteban M.J.- A direct variational approach to Skyrme's model for meson fields// *Commun.Math.Phys.*,1986, v.105, No 6,p.571-591.
77. Coleman S.- Classical lumps and their quantum descendants - In: "New Phenomena in Sub-Nuclear Physics", ed. A.Zichichi (New York, Plenum Press, 1977), p. 297-421.
78. Palais R.S.- The principle of symmetric criticality// *Commun. Math.Phys.*, 1979, v. 69, No 1, p. 19-30.
79. Glaser V., Martin A., Grossé H., Thirring W.- A family of optimal conditions for the absence of bound states in a potential. In: "Studies in Mathematical Physics", ed. E.H.Lieb, B.Simon, A.S.Wightman (Princeton, New Jersey, 1976), p.169-194.
80. Coleman S., Glaser V., Martin A.- Action Minima among solutions of euclidean scalar field equations// *Commun.Math.Phys.*,1978, v. 58, No 3, p. 211-221.
81. Поля Г., Серё Г.- Изопериметрические неравенства в математической физике.М.: Физматгиз, 1962, - 336 с.
82. Luttinger J.M.- Generalized isoperimetric inequalities//*J.Math. Phys.*, 1973, v. 14, No 5, p. 586-593.
83. Рыбаков Д.П.- Об устойчивости регулярных решений в нелинейной теории поля - В кн.:Проблемы теории гравитации и элементарных частиц, М.: Атомиздат, 1979, вып.10.,с.194-202.Поиск абсолютного минимума энергии в киральных моделях. - В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц, М.: Энергоатомиздат, вып.13, 1982, с.187-192
84. Нисиченко В.П. Исследование регулярных решений нелинейных уравнений для некоторых полевых моделей.Автореф.канд.дисс.,М.,УДН,1981.
85. Богомольный Е.Б., Фатеев В.А.- Асимптотическое вычисление масс солитонов// *Ядерн.физ.*, 1983, т.37, вып.1, с.228-241.
86. Рыбаков Д.П.- Об устойчивости многозарядных солитонов. В кн.: Проблемы теор.гравит. и элем.част. М.:Атомиздат,1984,вып. 14, с.161.
87. Rybakov Yu.P.,Chakrabarti S.- Conditional stability of multiple-charged solitons//*Int.J.Theor.Phys.*,1984,v.8,No 4, p.325-333.
88. Barashenkov I.- Stability properties of solutions to nonlinear models possessing a sign-undefined metric // *Acta Phys.Austr.*, 1983, v. 55, No 2, p. 155-165.
89. Ахизер Н.И., Глазман И.М.- Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966, - 544 с.

90. Санюк В.И. Исследование нелинейных моделей классической теории поля с топологическими зарядами. Автореф. канд. дисс., М., УДН, 1979.
91. Рыбаков Ю.П. — О критических точках инвариантных функционалов. — В кн.: Актуальные проблемы квантовой механики и статистической физики, М.: Изд-во УДН, 1988, с. 71-77.
92. Копелиович В.Б., Штерн Б.Е. — Экзотические солитоны в модели Скирмы // Письма в ЖЭТФ, 1987, т.45, вып.4, с. 165-168.
93. Verbaarschot J.J.M. — Axial Symmetry of bound baryon-number two soliton of the Skyrme model // Phys.Lett. B, 1987, v. 195, No 2, p. 235-239.
94. Kundu A., Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. — Topological solitons in the gauge Skyrme model // Indian J.Pure & Appl. Phys., 1979, v.17, No 10, p.673-677.
95. Kundu A., Rybakov Yu.P. — Closed-vortex-type solitons with Hopf index // J.Phys.A: Math.Gen., 1982, v. 15, No 2, 269-275.
96. Романов В.Н., Фролов И.В., Шварц А.С. — О сферически-симметричных солитонах // Т М Ф, 1978, т.37, № 3, с.305-319.
97. Balachandran A.P. et al. — Doubly strange dibaryon in the chiral model // Phys.Rev.Lett., 1984, v.52, No 11, p.887-890.
98. Adkins G.S., Nappi C.R., Witten E. — Static properties of nucleons in the Skyrme model // Nucl.Phys. B, 1983, v.228, No 4, p.552-566.
99. Kanazawa A. — Static properties of baryons in the SU(3) Skyrme model // Progr.Theor.Phys., 1987, v.77, No 5, p.1240-1252.
100. Kudrjavitsev A.E., Martemyanov B.V. — Does the rotating chiral soliton exist? // Prepr.ITER-9, ITER, M., 1985 - 10 p.
101. Finkelstein D. — Kinks // J.Math.Phys., 1966, v.7, No 7, p.1218-25.
102. Finkelstein D., Rubinstein J. — Connection between spin, statistics and kinks // J.Math.Phys., 1968, v.9, No 11, p.1762-1779.
103. Williams J. — Topological analysis of nonlinear field theory // J.Math.Phys., 1970, v. 11, No 8, p. 2611-2616.
104. Wilczek F., Zee A. — Linking numbers, spin and statistics of solitons // Phys.Rev.Lett., 1983, v.51, No 25, p. 2250-2252.
105. Новиков С.П. — Многозначные функции и функционалы. Аналог теории Морса // ДАН СССР, 1981, т.260, № 1, с.31-35.
106. Новиков С.П. — Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Усп.мат.наук, 1982, т.37, вып.5, с.3-49.
107. Джэкив Р. — Квантование физических параметров // Усп.физ.наук, 1986, т.149, вып.1, с.139-148.
108. Tamm Ig. — Die verallgemeinerten Kugelfunctionen und die Wellenfunktionen eines Electrons im Felde eines Magnetpoles // Z.Phys., 1931, Bd. 71, No 3, p. 141-150.

109. Wu T., Yang Ch. — Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields // Phys.Rev.D., 1975, v.12, No 12, p. 3845-3857.
110. 't Hooft G. — A planar diagram theory for strong interactions // Nucl.Phys. B, 1974, v. 72, n 2, p.461-473.
111. Witten E. — Baryons in the $1/N$ expansion // Nucl.Phys.B, 1979, v. 160, No 1, p. 57-115.
112. Wess J., Zumino B. — Consequences of anomalous Ward identities // Phys.Lett.B, 1971, v. 37, No 1, p. 95-97.
113. Manton N.S. — Geometry of Skyrmions // Commun.Math.Phys., 1987, v. 111, No 3, p.469-478.
114. Боголюбская А.А., Боголюбский И.Л. — Двумерная модель анизотропного магнетика с устойчивыми топологическими солитонами // Сообщ. ОИЯИ, Р5-87-761, Дубна, 1987, 10 с.
115. Jackson A., Jackson A.D., Pasquier V. — The Skyrme-Skyrmion interaction // Nucl.Phys.A, 1985, v.432, No 3, p. 567-609.
116. Chemtob M. — Skyrme-baryon phenomenology in the effective gauged chiral SU(2)-action approach // Nucl.Phys.A, 1987, v.466, No 3,4, p. 509-559.
117. Zahed I., Brown G.E. — The Skyrme model // Phys.Rep., 1986, v.142, No 1&2, p. 1-102.
118. Хуанг К. — Кварки, лептоны и калибровочные поля. М.: Мир, 1985, - 382 с.
119. Волошин М.Б., Тер-Мартirosян К.А. — Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1984, -296 с.
120. Славнов А.А. — Приближенное решение матричных N^2 моделей при больших N // Т М Ф, 1983, т.57, № 1, с.4-II.
121. Witten E. — Quarks, atoms and $1/N$ expansion // Physics Today, 1980, v. 33, No 7, p. 38-43.
122. Berlin T.H., Kac M. — The spherical model of ferromagnet // Phys. Rev., 1952, v. 86, No 6, p. 821-835.
123. Стенли Г. — Фазовые переходы и критические явления. М.: Мир, 1973, - 419 с.
124. Dyakonov D.I., Mirlin A.D. — On the possibility of condensed nuclear matter // Prepr.LNPI-87-1327, Leningrad, 1987, - 31 p. (Ядерн.физ., 1988, т.47, вып.3, с. 662-672).
125. Adler S. — Axial-vector vertex in spinor electrodynamics // Phys. Rev., 1969, v. 177, No 5, p. 2426-2438.
126. Bell J.S., Jackiw R. — A PCAC puzzle $\pi^+ \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ -model // Nuovo Cim. A, 1969, v.60, No 1, p. 47-60.
127. Морозов А.Д. — Аномалии в калибровочных теориях // Усп.физ.наук, 1986, т.150, № 3, с.337-416.

128. Balachandran A.P., Nair V.P., Rajeev S.G., Stern A.— Exotic levels from topology in the quantum-chromodynamic effective Lagrangians// Phys.Rev.Lett., 1982, v. 49, No 16, p.1124-1127.
129. Andrianov A.A., Novozilov Yu.V.— Chiral bosonization in non-abelian gauge theories // Phys.Lett. B, 1985, v.153, No 6, p.422-426.
130. Andrianov A.A.— Bosonization in four dimensions due to anomalies and an effective Lagrangian for pseudoscalar mesons//Phys. Lett.B, 1985, v. 157, No 5,6; p. 425-429.
131. Андрианов А.А., Андрианов В.А., Новожилов В.Ю., Новожилов Ю.В.— Асимметрия спектра кварков и эффективный лагранжиан для массивных псевдоскалярных мезонов // Т М Ф, 1987, т.70, № 1, с.63-75.
132. Дьяконов Д.И., Эйдес М.И.— Киральный лагранжиан из функционального интеграла по кваркам // Письма в ЖЭТФ, 1983, т.38, №7, с.358-360.
133. Дьяконов Д.И., Петров В.Ю.— Бариион как солитон // Пр-нт ЛИЯФ-84-967, Лен-д, 1984, - 59 с.
134. Дьяконов Д.И., Петров В.Ю.— Пропагатор кварка и киральный конденсат в инстантонном вакууме// ЖЭТФ, 1985, т.89, № 2, с.361-379.
135. Dyakonov D.I., Petrov V.Yu.— Instanton-based vacuum from the Feynman variational principle// Nucl.Phys. B, 1984, v. 245, No 2, p. 259-292.
136. Aitchison I.J.R., Fraser C.M., Miron P.J.— Effective Lagrangians for Skyrme physics // Phys. Rev. D, 1986, v. 33, No 7, p. 1994-2002.
137. Aitchison I.J.R., Fraser C.M.— Derivative expansions of fermion determinants: Anomaly-induced vertices, Goldstone-Wilczek current and Skyrme term//Phys.Rev.D, 1985, v.31, No 10, p.2605-2615.
138. Balog J.— Effective Lagrangian from QCD anomalies//Phys.Lett. B, 1984, v.149, No 1,2,3; p. 197-200.
139. Simic P.— QCD at large N_c — Skyrme or the Bag?// Phys.Rev.Lett., 1985, v. 55, No 1, p. 40-43.
140. Ebert D., Reinhardt H.— Effective chiral hadron Lagrangian with anomalies and Skyrme term from quark flavour dynamics//Nucl. Phys. B, 1986, v.271, No 1, p. 188-226.
141. Карчев Н.И., Славнов А.А.— Эффективный киральный лагранжиан из $SU(\infty)$ квантовой хромодинамики// Т М Ф, 1985, т.65, №2, с.192-20.
142. Славнов А.А.— Квантовая хромодинамика и матричные модели в терминах синглетных переменных $1/N$ разложения//Т М Ф, 1982, т.51, № 3, с.307-316.
143. Славнов А.А.— Инфракрасные особенности глюонного пропагатора и удержание кварков в пределе бесконечного числа цветов// Т М Ф, 1983, т.54, № 1, с.52-56.
144. Witten E.— Skyrmeons and QCD. — In: Solitons in Nuclear and Elementary Particle Physics, ed. A.Chodos, E.Hadjimichael and C.Tze (World Scientific, Singapore, 1984), p.306-312.
145. Balachandran A.P., Nair V.P., Rajeev S.G., Stern A.— Soliton states in the quantum chromodynamics effective Lagrangian// Phys.Rev.D, 1983, v. 27, No 5, p.1153-1164.
146. Balachandran A.P., Lizzi F., Rodgers V.G.J., Stern A.— Dibaryons as chiral solitons// Nucl.Phys. B, 1985, v. 256, No 3, p.525-556.
147. Balachandran A.P.— Solitons in ${}^3\text{He}$ -B// Nucl.Phys.B, 1986, v.271, No 1, p. 227-252.
148. Guadagnini E.— Baryons as solitons and mass formulae //Nucl. Phys. B, 1984, v. 236, No 1, p. 35-47.
149. Rabinovici E., Schwimmer A., Yankielowicz S.— Quantization in the presence of Wess-Zumino terms//Nucl.Phys.B, 1984, v.248, No 3, p. 523-535.
150. Wudka J.— Canonical quantization of the Skyrme model//Nucl.Phys. B, 1985, v. 259, No 4, p. 689-701.
151. Jain S., Wadia S.R.— Large- N baryons: collective coordinates of the topological soliton in the $SU(3)$ chiral model//Nucl.Phys. B, 1985, v. 258, No 3,4; p. 713-725.
152. Боголюбов Н.Н.— Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем// Укр.мат.журн.1950, т.2, № 2, с.3-24 (Избранные труды, т.2, Киев: Наукова думка, 1970, с.499-520).
153. Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталеv О.А.— Преобразование Н.Н.Боголюбова в теории сильной связи// Т М Ф, 1972, т.11, № 3, с.317-330.
154. Khrustalev O.A., Razumov A.V., Taranov A.Yu.— Collective coordinate method in the canonical formalism: Bogolubov's transformation// Nucl.Phys. B, 1980, v. 172, No 1, p.44-58.
155. Parmentola J.A.— The Skyrme model and the strong coupling applications// Phys.Rev.D, 1984, v.30, No 3, p. 685-687.
156. Chemtob M.— Three flavour Skyrme model supplied to baryon octet and decimet// Nuovo Cim. A, 1985, v. 89, No 4, p. 381-435.
157. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.— Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Физматгиз, 1963, - 704 с.
158. Новожилов Ю.В.— Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972, - 472 с.

159. Kanazawa A.— A note on the phenomenology of the SU(3) Skyrme model // Progr.Theor.Phys., 1987, v.77, No 2, p.212-217.
160. Николаев В.А.— Модель Скирма: нуклоны, дибарионы, ядра // ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.2, с.401-439.
161. Pais A.— On the program of systematization of particles and interactions // Proc.Nat.Acad.Sci (USA), 1954, v.40.No 6, p. 484-492.
162. Pais A.— Isotopic spin and mass quantization // Physica, 1953, v. 19, p. 869-887.
163. Touschek B.F.— Parity conservation and the mass of the neutrino // Nuovo Cim., 1957, v.5, No 3, p. 754-755.
164. Watanabe S.— Chirality of K particle // Phys.Rev., 1957, v.106, No 6, p. 1306-1315.
165. Feynman R., Gell-Mann M.— Theory of Fermi interaction // Phys. Rev., 1958, v. 109, No 1, p. 193-198.
166. Gell-Mann M.— Symmetries of baryons and mesons // Phys.Rev., 1962, v.125, No 3, p. 1067-1084.
167. Адлер С., Дашен Р.— Алгебры токов и их применение в физике частиц. М.: Мир, 1970.
168. Трейман С., Джэкив Р., Гросс Д.— Лекции по алгебре токов. М.: Атомиздат, 1977, - 232 с.
169. Волков М.К., Первушин В.Н.— Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов. М.: Атомиздат, 1978, - 240 с.
170. Weinberg S.— Nonlinear realization of chiral symmetry // Phys. Rev., 1968, v. 166, No 5, p. 1568-1577.
171. Картан Э.— Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: Изд-во иностр.лит., 1949.
172. Желобенко Д.П.— Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970 - 664 с.
173. Meetz K.— Realization of chiral symmetry in a curved isospin space // J.Math.Phys., 1969, v.10, No 4, p. 589-593.
174. Шварц Дж.— Дифференциальная геометрия и топология. М.: Мир, 1970 - 224 с.
175. Sugawara H.— A field theory of currents // Phys.Rev., 1968, v.170, No 5, p. 1659-1662.
176. Felsager B.— Geometry, particles and fields, Odense Univ. Press, 1981- 643 p.
177. Ляховский В.Д., Болотов А.А.— Группы симметрии и элементарные частицы. Л.: Изд-во Ленингр.ун-та, 1983, - 336 с.
178. Постников М.М.— Лекции по геометрии. Семестр V, Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982 - 447 с.

179. Мищенко А.С., Фоменко А.Т.— Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980 - 439 с.
180. Шутц Б.— Геометрические методы математической физики. М.: Мир, 1984 - 304 с.
181. Уорнер Ф.— Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987 - 304 с.
182. Соболев С.Л.— Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.- - 256 с.
183. Balachandran A.P., Marmo G., Skagerstam B.-S., Stern A.— Gauge symmetries and fibre bundles // Lect.Notes in Phys., 1983, v. 188, Springer Verlag, Berlin, 140 p.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июля 1989 года.

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

§ 1. МОДЕЛЬ СКИРМА: ИСТОКИ И ЭВОЛЮЦИЯ 4

1.1. Модель "пионной жидкости" 4

1.2. Киральная модификация модели 6

1.3. Двумеризованная модель (синус Гордон) 7

1.4. Модель Скирма: итоговая формулировка 9

§ 2. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ 13

2.1. Теория поля с точки зрения гомотопий 13

2.2. Гомотопические классы синус-Гордон модели 16

2.3. Гомотопические группы и топологические заряды 19

§ 3. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ЗАРЯДАМИ 22

3.1. Кирально-инвариантные лагранжианы 23

3.2. Теорема Хобарта-Деррика 25

3.3. Топологическая устойчивость 29

§ 4. МЕТОДЫ ПОИСКА МНОГОМЕРНЫХ СОЛИТОНОВ МОДЕЛИ СКИРМА 30

4.1. Модель Скирма: основные формулы 31

4.2. Теорема Коулмена-Пале и группа инвариантности гамильтониана Скирма 34

4.3. Метод прямой минимизации 37

§ 5. АБСОЛЮТНЫЙ МИНИМУМ ЭНЕРГИИ МОДЕЛИ СКИРМА 41

5.1. Метод сферической перестройки 41

5.2. Скирмион как абсолютный минимум функционала энергии 44

5.3. Уравнение поля для скирмиона 45

§ 6. СУЩЕСТВОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ СКИРМИОНОВ 47

6.1. Структура второй вариации стационарных функционалов (обобщение теоремы Хобарта-Деррика) 47

6.2. Прямые методы вариационного исчисления 49

6.3. Доказательство существования сферически-симметричных скирмионов 52

§ 7. МУЛЬТИБАРИОННЫЕ СОСТОЯНИЯ 54

7.1. Минимум гамильтониана Скирма в высших гомотопических классах 55

7.2. О критических точках инвариантных функционалов 57

7.3. Вращающийся скирмион 59

§ 8. СКИРМИОН КАК ФЕРМИОН 62

8.1. Двухзначные функционалы Финкельштейна 62

8.2. Многозначное действие электрона в поле монополя Дирака 65

8.3. Член Весса-Зумино и реализация двухзначных функционалов Финкельштейна по Виттену 69

§ 9. МОДЕЛЬ СКИРМА И КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА 75

9.1. Экспресс-обзор современного статуса КХД 75

9.2. $1/N$ - разложение 77

9.3. Эффективный киральный лагранжиан из КХД 83

§ 10. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ И СТАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СКИРМИОНА 88

10.1. Метод коллективных переменных Н.Н.Боголюбова 89

10.2. Каноническое квантование скирмиона 93

10.3. Спектр масс барионов в модели Скирма 98

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 101

Дополнение А. КИРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ 102

А.1. Алгебраические аспекты киральной симметрии 103

А.2. Геометрические аспекты киральной симметрии 108

Дополнение Б. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ 112

Б.1. Гладкие многообразия 112

Б.2. Касательные пространства, векторные поля и алгебры Ли 117

Б.3. Дифференциальные формы 121

Б.4. Интегрирование на многообразиях и когомологии де Рама 126

Б.5. Фундаментальная группа, гомотопические группы и другие топологические инварианты 130

Дополнение В. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕДУКЦИИ КИРАЛЬНЫХ ЛАГРАНЖИАНОВ 139

В.1. Редукция к статическим полям 139

В.2. Редукция к G - инвариантным полям

В.3. Метод сферической перестройки (пояснительный пример) 141

Дополнение Г. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ СУЩЕСТВОВАНИЯ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ СКИРМА 143

Г.1. Доказательство обобщенной теоремы Хобарта-Деррика 143

Г.2. Доказательство существования регулярного решения в модели Скирма 145

Дополнение Д. "СПИНОРНЫЕ СТРУКТУРЫ" ФИНКЕЛЬШТЕЙНА - УИЛЬЯМСА 146

Дополнение Е. СТАТИЧЕСКИЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ АДРОНОВ КАК КВАНТОВАННЫХ СКИРМИОНОВ 148

Е.1. Существование несингулярной матрицы $N_{\alpha\beta}$ 148

Е.2. Расчетные формулы и значения для статических наблюдаемых адронов 149

Краткие биографические сведения о Т.Х.Р.Скирме 152

Л И Т Е Р А Т У Р А 155

ПЕРЕЧЕНЬ

лекций, вышедших с 1974 в ОИЯИ

Фаустов Р.Н. Связанная система частиц в квантовой электродинамике. Вып.1. ОИЯИ, Дубна, 1974.

Синаев А.Н. Современные аппаратные системы модульной структуры, используемые при создании измерительно-вычислительных комплексов /КАМАК, ВЕКТОР/. Вып.2. ОИЯИ, 8507, Дубна, 1975.

Волков Д.В. Кварки как следствие дуальности. Вып.3. ОИЯИ, P2-8765, Дубна, 1975.

Пальчик М.Я., Фрадкин Е.С. Введение в теорию конформно-инвариантных квантовых полей. Вып.4. ОИЯИ, 2-8874, Дубна, 1975.

Замори Э. Микропроцессоры. Вып.5. ОИЯИ, P10-8852, Дубна, 1975.

Биленький С.М. Вопросы физики нейтрино высоких энергий. Вып.6. ОИЯИ, 2-9026, Дубна, 1975.

Малкин И.А., Манько В.И. Инварианты, когерентные состояния и динамические симметрии квантовых систем. Вып.7. ОИЯИ, P2-9228, Дубна, 1975.

Волков М.К., Первушин В.Н. Квантовая теория поля с киральным лагранжианом и физика мезонов низких энергий. Вып.8. ОИЯИ, P2-9390, Дубна, 1976.

Басиладзе С.Г. Интегральные схемы с эмиттерной связью и их применение в наносекундной ядерной электронике. Вып.9. ОИЯИ, 13-9744, Дубна, 1976.

Аникин С.А. и др. Перенормированные составные поля в квантовой теории поля. Вып.10. ОИЯИ, P2-10528, Дубна, 1977.

Шляпников П.В. Множественные процессы и инклюзивные реакции. Вып.11. ОИЯИ, P2-10681, Дубна, 1977.

Капусцик Э. Галилеева инвариантность в теории поля. Вып.12. ОИЯИ, P2-10677, Дубна, 1977.

Бутцев В.С. Явление возбуждения высокоспиновых ядерных состояний и механизм поглощения отрицательных p -мезонов. Вып.13. ОИЯИ, P15-10847, Дубна, 1977.

Валуев Б.Н. Применение алгебры Клиффорда к решению задачи Изинга - Онсагера. Вып.14. ОИЯИ, P17-11020, Дубна, 1977.

Капусцик Э. Нестандартные алгебры квантово-механических наблюдаемых. Вып.15. ОИЯИ, P4-11497, Дубна, 1978.

Блохинцев Д.И. Квантовая механика. Лекции по избранным вопросам. Вып.16. ОИЯИ, P2-11728, Дубна, 1978.

Ширикова Н.Ю. Начинаям работать на ЭВМ CDC-6500. Вып.17. ОИЯИ, P11-11739, Дубна, 1978.

Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Непрерывные симметрии в теории поля. Вып.18. ОИЯИ, P2-12029, Дубна, 1978.

Некоторые проблемы физики высоких энергий /сборник/. Вып.19. ОИЯИ, P2-12080, Дубна, 1978.

Басиладзе С.Г. Электронная регистрирующая аппаратура физического эксперимента. Вып.20. ОИЯИ, P13-12151, Дубна, 1979.

Ефремов А.В., Раджшкин А.В. Партоны, жесткие процессы и квантовая хромодинамика. Вып.21. ОИЯИ, P2-12803, Дубна, 1979.

Говорков А.Б. Введение в теорию кварков. Вып.22. ОИЯИ, P2-12803, Дубна, 1979.

Говорков А.Б. Цветные кварки и глюоны. Вып.23. ОИЯИ, P2-80-6, Дубна, 1980.

Исаев П.С. Глубоконеупругое рассеяние лептонов на нуклонах.

Партонная модель нуклона. Вып.24. ОИЯИ, P2-80-325, Дубна, 1980.

Казаков Д.И., Ширков Д.В. Суммирование асимптотических рядов в квантовой теории поля. Вып.25. ОИЯИ, P2-80-462, Дубна, 1980.

Ососков Г.А. Применение методов распознавания образов в физике высоких энергий. Вып.26. ОИЯИ, P10-83-187, Дубна, 1983.

Мальшев В.А. Элементарное введение в математическую физику бесконечно-частичных систем. Вып.27. ОИЯИ, P17-83-363, Дубна, 1983.

Савушкин Л.Н., Фоменко В.Н. Введение в мезонную теорию ядерных взаимодействий и ядерных систем. Вып.28. ОИЯИ, P4-83-369, Дубна, 1983.

Биленький С.М. Осцилляции нейтрино. Вып.29. ОИЯИ, P2-83-441, Дубна, 1983.

Бужек В. Введение в метод стохастического квантования. Вып.30. ОИЯИ, P2-84-419, Дубна, 1984.

Шумовский А.С., Юкалов В.И. Фазовые состояния и переходы. Вып.31. ОИЯИ, P17-85-676, Дубна, 1985.

Владимиров А.А. Введение в квантовые интегрируемые системы. Метод R-матрицы. Вып.32. ОИЯИ, P17-85-742, Дубна, 1985.

Осипов В.А., Федянин В.К. Полиацетилен и двумерные модели квантовой теории поля. Вып.33. ОИЯИ, P17-85-809, Дубна, 1985.

Шуан Ш. Стохастичность в динамических системах. Вып. 34. ОИЯИ, Р17-86-211, Дубна, 1986.

Ефремов А.В. Введение в квантовую хромодинамику. Вып. 35. ОИЯИ, Р2-86-212, Дубна, 1986.

Нестеренко В.В., Червяков А.М. Сингулярные лагранжианы. Классическая динамика и квантование. Вып. 36. ОИЯИ, Р2-86-323, Дубна, 1986.

Пепельшев П.Н. Регистрация нейтронов /современное состояние и перспективы развития/ Вып. 37. ОИЯИ, Р13-86-719, Дубна, 1986.

Боголюбов Н.Н./мл./, Шумовский А.С. Светоизлучение. Вып. 38. ОИЯИ, Р17-87-176, Дубна, 1987.

Пушкарлов Д.И. Дефектоны в кристаллах. /Метод квазичастиц в квантовой теории дефектов/. Вып. 39. ОИЯИ, Р17-87-177, Дубна, 1987.

Никитюк Н.М. От современной алгебры к специализированным процессорам. Вып. 40. ОИЯИ, Р10-87-401, Дубна, 1987.

Дубничкова А.З. Непрерывные группы для физиков. Вып. 41, ОИЯИ, Р2-87-197, Дубна, 1987.

Никитюк Н.М. Электронные методы экспериментальной физики высоких энергий. Вып. 42, ОИЯИ, Р1-87-909, Дубна, 1987.

Балдин А.М., Диденко Л.А. Асимптотические свойства адронной материи в пространстве четырехмерных относительных скоростей. Вып. 43, ОИЯИ, Р1-87-912, Дубна, 1987.

Машкевич В.С. Индетерминистская квантовая динамика. Вып. 44, ОИЯИ, Р2-88-150, 1988.

Филиппов А.Т. Введение в теорию суперструн. Вып. 45, ОИЯИ, Р2-88-188, 1988.

Бардин Д.Ю. Прецизионные проверки стандартной теории. Вып. 46, ОИЯИ, Р2-88-189, 1988.

Смирнов В.А., Четыркин К.Г. R^* -операция: техника ренормгрупповых вычислений и другие приложения. Вып. 47, ОИЯИ, Р2-88-190, 1988.

Добролюбов М.И., Игнатьев А.Ю., Шапошников М.Е. Элементарные частицы и космология. Вып. 48, ОИЯИ, Р2-88-654, 1988.

Ambjørn J. Non-Perturbative Field Theory / Field Theory on a Lattice. Вып. 49, ОИЯИ, Е2-88-655, 1988.

Горбатов А.М. Гиперсферический базис в квантовой теории многих тел. Вып. 50, ОИЯИ, Р6-88-656, 1988.

Бельков А.А., Первушин В.П., Эберт Д. Низкоэнергетические предсказания современных киральных лагранжианов, основанных на динамике кварков. Вып. 51, ОИЯИ, Р2-88-657, Дубна, 1988.

Лев Ф.М. Некоторые вопросы релятивистской квантовой механики систем с заданным числом степеней свободы. Вып. 52. ОИЯИ, Р4-88-829, Дубна, 1988.

Карамян С.А. Новые возможности определения времени жизни возбужденных ядер в реакциях с тяжелыми ионами.

Вып. 53. ОИЯИ, Р7-89-50, Дубна, 1989.

Шабанов С.В. Структура фазового пространства в калибровочных теориях. Вып. 54. ОИЯИ, Р2-89-533, Дубна, 1989.

Требования, предъявляемые к серии брошюр
"Лекции для молодых ученых ОИЯИ"

Серия брошюр "Лекции для молодых ученых ОИЯИ" издаётся с целью повышения научно-профессионального кругозора и уровня молодых ученых и специалистов ОИЯИ в актуальных областях исследований, ведущихся по тематике Института. Выпуски должны представлять собой законченные циклы лекций, прочитанные в ОИЯИ и ориентированные прежде всего на молодых сотрудников Института.

Лекции должны иметь характер учебного пособия, предназначенного для первого ознакомления с рассматриваемой проблемой, а также содержать обзор её современного состояния. Они должны быть снабжены подробным оглавлением и основной литературой. Большие параграфы рекомендуется разбивать на подпараграфы с вынесенными в оглавление подзаголовками.

Весь текст, включая отдельные главы и параграфы, следует печатать, заполняя каждую страницу целиком.

Рукопись должна быть напечатана на специальных бланках, предназначенных для прямого репродуцирования, которые можно получить в издательском отделе. Все формулы и схемы должны быть вписаны аккуратно и ясно тушью или чернилами черного цвета. Разметка формул не производится, их нумерация должна находиться в конце строки справа в круглых скобках. Текст лекций печатается на машинке с черной (не серой) лентой через 1,5 интервала. Объем лекций не должен превышать 100 страниц машинописного текста.

Рукопись представляется в Редакционный совет серии брошюр "Лекции для молодых ученых ОИЯИ" Советом молодых ученых и специалистов ОИЯИ и Советами молодых ученых и специалистов лабораторий Института. Редакционный совет принимает окончательное решение о целесообразности ее публикации.

Редакционный совет