ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Ф.М.Лев

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ СИСТЕМ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

ДУБНА

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р4-88-829

Ф.М.Лев *

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ СИСТЕМ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

*Дальневосточное отделение АН СССР

Дубна 1988

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Релятивистская квантовая механика систем с заданным числом частиц (обозначаемая далее как РКМ) у большинства физиков не пользуется популярностью, поскольку обычно считается, что правильной релятивистской квантовой теорией может быть лишь локальная теория поля, в которой, как известно, число частиц не может сохраняться. Кроме того, отрицательное отношение некоторых физиков к РКМ было, на наш взгляд, вызвано тем, что во многих работах эта теория именовалась теорией релятивистских прямых взаимодействий. Это создавало впечатление,что речь идет о каких-то экзотических взаимодействиях, которые вряд ли существуют в природе.

Исходя из сказанного в начале работы приводятся аргументы в пользу того,что при низких энергиях РКМ не противоречит квантовой теории поля. В то же время в техническом плане РМК намного проще квантовой теории поля и поэтому является удобным аппаратом для расчетов различных релятивистских эффектов при низких энергиях.

В основной части работы мы подробно обсуждаем метод пакующих операторов Соколова, который предписывает, как построить генераторы представления группы Пуанкаре, чтобы условия релятивистской инвариантности и кластерной сепарабельности выполнялись автоматически. Большое внимание уделено также явному вычислению гамильтониана N - частичной системы в приближении $1/c^2$.

Материал главы 2 может представить интерес для теоретиков, интересующихся нетрадиционными методами квантовой теории. В основном же изложение ориентировано на физиков, занимающихся расчетами конкретных процессов в малонуклонных системах. Предполагается, что читателю известны основные факты, касающиеся унитарных представлений группы Пуанкаре (и, разумеется, обычная квантовая механика).

Для понимания принципиальных вопросов рассматриваемой теории большое значение имели для автора многочисленные обсуждения с Л.А.Кондратюком и С.Н. Соколовым, которым автор выражает глубокую благодарность. Автор благодарен У.Мутце за конструктивную переписку. Кроме того, в настоящую работу включено элегантное решение задачи о сложении взаимодействий, содержащееся в одном из писем У. Мутце автору. За обсуждение различных проблем РКМ и физики малонуклонных систем автор признателен также Б.Л.Баккеру, В.Б.Беляеву, Р.П.Гайде, Н.П.Клепикову, В.И.Кукулину, И.М.Народецкому. Ю.А. Симонову, В.В.Соловьеву, Дж.Л.Фрайару и А.Н.Шатнему, а за организацию этих лекций - В.Б.Беляеву и Г.М.Гавриленко.

ГЛАВА I. ВВЕДЕНИЕ

§ I.I. Проблема описания релятивистских эффектов в ядерной физике

В традиционной ядерной физике ядро рассматривается как система нерелятивистских нуклонов, и при описании этой системы, как правило, учитывают лишь парные взаимодействия между нуклонами. Несмотря на большие успехи ядерной физики, остается ряд проблем, которые в рамках традиционного подхода не решены.

Самой известной из этих проблем является проблема магнитного момента дейтрона; суть этой проблемы описана во многих учебниках и монографиях (см., например, монографию /I/). Другой проблемой, известной более узкому кругу специалистов, является так называемая проблема недосвязки легчайших ядер. Она заключается в том, что энергии связи ядер ^3H, ^3He, ^4He, вычисленные для различных реалистических потенциалов (с учетом лишь парных сил), существенно меньше их экспериментального значения. Так, например, при вычислении энергии связи тритона в работах /2,3/ даже при учете 34-х каналов оказалось, что энергия связи для известных реалистических нуклон-нуклонных потенциалов не превышает значения 7,7 МэВ, в то время как экспериментальное значение составляет 8,48 МэВ. Исключением является результат 8,33 МэВ для боннского потенциала (см. работу /4/), однако, как отмечено в /5,6/, это связано с тем, что боннский потенциал уже частично учитывает релятивистские эффекты. Недосвязка ядра ^3He имеет такой же порядок величины, что и для ядра ^3H (см., например, /7/), а для ядра ^4He большинство расчетов дают недосвязку порядка нескольких МэВ. Так, например, расчет работы /8/ дал значения 2I,I МэВ и 2I,2 МэВ для потенциала Рида и парижского потенциала соответственно, в то время как экспериментальное значение составляет 28,3 МэВ.

Известно, что расхождения между теорией и экспериментом имеются и для таких низкоэнергетических параметров, как длины нуклон-дейтронного рассеяния, среднеквадратичные зарядовые радиусы ^3H, ^3He, их магнитные моменты и т.д. (см., например, /7,9/).

В связи с указанными проблемами в физической литературе и на многих международных и внутрисоюзных конференциях интенсивно обсуждаются вопросы об учете мезонных и кварковых степеней свободы в ядрах и о роли трехнуклонных взаимодействий. Несмотря на большие трудности, здесь имеется существенный прогресс в понимании физики явлений, однако удовлетворительное согласие теории с экспериментом еще не достигнуто. Вместе с тем имеется сравнительно малое число работ, в которых учитывается вклад релятивистских эффектов. Это связано, на наш взгляд, с несколькими обстоятельствами. Прежде

всего считается, что учет релятивизма с необходимостью приводит к квантовополевому описанию, то есть к учету бесконечного числа степеней свободы. Поэтому нельзя выделить отдельно вклады релятивистских эффектов и вклады, связанные с мезонными и кварковыми степенями свободы. Другой причиной, тесно связанной с только что указанной, является то, что в квантовой хромодинамике (КХД), являющейся главным кандидатом на роль физической теории сильных взаимодействий, описание происходит на языке кварков и глюонов, и переход от такого описания к описанию на языке нуклонов и мезонов связан с большими трудностями. Задачу об определении нуклон-нуклонного потенциала, исходя из лагранжиана КХД, можно считать главной проблемой ядерной физики. Тем более сложной является задача о том, чтобы из лагранжиана КХД определить не только нуклон-нуклонный потенциал, но и релятивистские поправки к нему.

Таким образом, с первого взгляда, задача об учете релятивистских эффектов в ядрах может показаться невообразимо сложной. Однако более внимательный анализ показывает, что имеется несколько путей обхода описанных выше трудностей. Прежде всего отметим, что для энергий связи, электростатических параметров и различных низкоэнергетических характеристик рассеяния учет релятивизма в первом приближении по $1/c^2$, по-видимому, достаточен. Из электродинамики (классической и квантовой) мы знаем, что систему заряженных частиц, движущихся со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, можно рассмотреть, не выходя за рамки теории с конечным числом степеней свободы, не только в нерелятивистском приближении, но и в приближении $1/c^2$. Естественно предположить, и ниже мы приведем соответствующие аргументы, что для системы медленных нуклонов аналогичное утверждение также имеет место. Поэтому основная трудность, связанная с учетом бесконечного числа степеней свободы, в данном случае отпадает. Отметим также, что, с точки зрения квантовой теории поля, весьма необычной является экспериментальная ситуация в нуклон-нуклонном рассеянии с низшими парциальными волнами, когда неупругости в фазах рассеяния начинают проявляться лишь с энергий I ÷ I,5 ГэВ, то есть намного выше порога рождения π - мезона. Поэтому возможно, что учет лишь конечного числа степеней свободы будет давать хорошие результаты и в областях "запрещенных" с точки зрения обычных представлений.

Ввиду ограниченного объема настоящей работы мы не сможем рассмотреть здесь задачу о релятивистской поправке к магнитному моменту дейтрона, поэтому сделаем лишь некоторые замечания. Для вычисления такой поправки необходимо, прежде всего, построить в нужном приближении оператор электромагнитного тока дейтрона, удовлетворяющий условиям сохранения тока, ковариантности и локальности. Можно показать, что если исходить из обычных волновых функций, определенных на пространственноподобной поверхности $t=const$, то необходимо вычислить либо пространственную компоненту оператора тока в приближении $1/c^3$, либо временную компоненту с точностью $1/c^4$. В данном случае вклад виртуальных нуклон-антинуклонных пар существен во всех компонентах тока, а пренебрежение этим вкладом приведет к нарушению локальности и сохранения тока. Выход из указанного положения предложен в работе /10/, где показано, что если использовать так называемую "динамику светового фронта", то для нахождения так называемой "большой" компоненты тока можно пренебречь виртуальным рождением нуклон-антинуклонных пар и ограничиться лишь областью нерелятивистских относительных импульсов протона и нейтрона. Таким образом, мы опять можем ограничиться рассмотрением лишь конечного числа степеней свободы, но при этом систему взаимодействующих протона и нейтрона мы должны рассматривать в рамках фронтовой формы релятивистской динамики (см. § 1.4). Расчет, проведенный в работе /10/, показал, что с учетом релятивистской поправки расхождение между теорией и экспериментом уменьшается примерно в 2 раза.

Исходя из сказанного, мы видим, что для исследования интересующих нас релятивистских эффектов удобным аппаратом является не квантовая теория поля, а релятивистская квантовая механика (РКМ), то есть теория, описывающая системы из заданного числа взаимодействующих частиц. С точки зрения квантовой теории поля РКМ не может быть точной теорией, однако, как мы видели выше, при различных условиях она может работать с хорошей точностью. Поскольку в РКМ не рассматриваются степени свободы, связанные с полем, передающим взаимодействие, а взаимодействие описывается лишь в терминах заданного числа частиц, эту теорию часто называют теорией прямых взаимодействий (в зарубежной литературе употребляется термин "direct interaction"). Как мы отметили в Предисловии, это название представляется нам неудачным. Название же "релятивистская квантовая механика" показывает, что теория строится по аналогии с обычной квантовой механикой, но группой инвариантности является не группа Галилея, а группа Пуанкаре.

§ 1.2. О приближении $1/c^2$ в ядерной физике

Прежде чем перейти к изложению РКМ и ее приложений, мы приведем аргументы в пользу того, что эта теория имеет "пересечение" с квантовой теорией поля по крайней мере в приближении $1/c^2$.

В квантовой электродинамике учет конечного числа степеней свободы в приближении $1/c^2$ обосновывается двумя обстоятельствами. Прежде

всего отмечается, что процессы излучения становятся существенными лишь в приближении $1/c^3$. Это следует из того факта, что поперечная компонента нерелятивистского оператора электромагнитного тока имеет порядок $1/c$. Вторым обстоятельством является то, что можно ввести двухчастичный потенциал, такой, что двухчастичная S-матрица (как в области рассеяния, так и в области связанных состояний) в приближении $1/c^2$ может быть вычислена как S-матрица потенциального взаимодействия с этим потенциалом. Отметим, что для выполнения этого условия отсутствие излучения в приближении $1/c^2$ является необходимым, но не достаточным.

Из хорошо известных выражений для радиационных поправок к вершинным функциям и функциям Грина (см.,например,книги /11-13/) легко видеть, что в нерелятивистской области эти поправки имеют порядок $1/c^3$. Поэтому если ограничиться приближением $1/c^2$, то в фейнмановских диаграммах, определяющих амплитуду двухчастичного рассеяния,достаточно рассматривать лишь обычные вершины и пропагаторы. Среди этих диаграмм имеются диаграммы лестничного типа (см. рис.1) и диаграммы типа рис.2, в которых в промежуточном состоянии имеется более чем 2 частицы. Естественно ожидать, что в приближении $1/c^2$ потенциал взаимодействия существует, если в этом приближении вклад дают лишь диаграммы вида рис.1. В квантовой электродинамике это действительно так, если фотонный пропагатор выбрать в кулоновой калибровке (см.,например, § 122 в книге /12/),но в случае произвольной калибровки, вследствие полюсов в фотонных пропагаторах, вклад диаграмм вида рис.2 в приближении $1/c^2$ необходимо учитывать. Разумеется, эти полюса дают вклад и в диаграммы типа δ, θ и т.д. на рис.1, и суммарная амплитуда не зависит от выбора калибровки для фотонного пропагатора.

Исходя из сказанного, можно заключить, что в других теориях в приближении $1/c^2$ необходимо, вообще говоря, учитывать как диаграммы вида рис.1, так и диаграммы вида рис.2. Таким образом, вообще говоря, нет гарантии, что в приближении $1/c^2$ потенциал взаимодействия всегда существует. Отметим, что в известных учебниках /11,12/ при изложении вопроса о потенциале в квантовой электродинамике в приближении $1/c^2$ имеется следующая неточность. Утверждается, что потенциал можно определить по диаграммам вида рис.1а. На самом же деле, по таким диаграммам можно определить матричные элементы оператора взаимодействия (потенциала) лишь в физической области, а именно: если $\vec{p}_1'$ и $\vec{p}_2'$ – импульсы начальных частиц, а $\vec{p}_1''$ и $\vec{p}_2''$ – импульсы конечных частиц, то диаграммы вида рис.1а дают возможность определить матричный элемент $\langle\vec{p}_1''\vec{p}_2''|V|\vec{p}_1'\vec{p}_2'\rangle$ лишь при условии сохранения 4-импульса: $p_1'+p_2'=p_1''+p_2''$. В то же время потенциал V определяется полностью, лишь если из-является физически адекватным аппаратом для определения релятивистских эффектов в малонуклонных системах.

В последнее время (см., например, /26/) релятивистские эффекты учитываются в рамках так называемой полурелятивистской модели составных кварков, применяемой для расчетов спектроскопии барионов и мезонов. В этой модели релятивизуется оператор кинетической энергии, а оператор потенциальной энергии остается нерелятивистским. В этой связи отметим, что, как указывалось многими авторами, производившими расчет релятивистской поправки к энергии связи тритона (рассматриваемого как трехнуклонная система), релятивистские поправки к операторам кинетической и потенциальной энергии дают вклады разного знака и в результате существенно компенсируют друг друга. Поэтому нам представляется, что естественным способом учета релятивизма в рассматриваемом случае было бы рассмотрение в рамках РКМ.

§ I.3. Математический аппарат РКМ. Понятие о свойстве кластерной сепарабельности и о формах релятивисткой динамики.

Согласно основным положениям квантовой теории, для описания рассматриваемой системы частиц или квантованных полей необходимо построить гильбертово пространство состояний системы и унитарное представление группы симметрии в этом пространстве. В квантовой теории поля, где основным объектом является ковариантный лагранжиан, генераторы представления группы симметрии строятся, как интегралы от тензоров энергии-импульса и моментов по пространственно-подобным областям. Важнейшим физическим требованием является то, что генераторы представления группы симметрии должны удовлетворять коммутационным соотношениям для генераторов представления алгебры Ли этой группы. В квантовой теории поля это обеспечивается ковариантностью лагранжиана. Важно понимать, однако, что лагранжиан является лишь математическим понятием, в то время как генераторы представления группы симметрии, будучи самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве, определяют соответствующие им физические величины. На примере популярной в настоящее время теории суперструн (см. например, /27/) физики убедились, что нужные коммутационные соотношения могут выполняться и в случае, когда ковариантный лагранжиан построить нельзя.

В РКМ имеют дело лишь с гильбертовым пространством состояний системы и генераторами представления группы симметрии в этом пространстве. В теории с заданным числом частиц эти генераторы не могут быть построены исходя из какого-либо локального лагранжиана. Таким образом, РКМ является нелокальной теорией, и в аппарате РКМ нет лагранжиана и ковариантных уравнений.

Нелокальность теории еще не означает ее нефизичности, поскольку важно лишь, чтобы нелокальность не проявилась в макроскопических масштабах. Общее исследование характера нелокальности в РКМ затруднительно, в частности, по тем причинам, что неясно, как физически определить степень нелокальности. Известно, например, что в релятивистской теории нет оператора, обладающего всеми нужными свойствами оператора координаты. Поэтому в РКМ можно исследовать лишь те физические требования, которые формулируются в терминах гильбертовых пространств и операторов в них. В этой связи одним из важных является понятие о свойстве кластерной сепарабельности.

Физический смысл этого понятия заключается в том, что при выключении взаимодействий между различными подсистемами рассматриваемой системы мы должны получить описание, когда все физические характеристики для каждой подсистемы не зависят от физических характеристик остальных подсистем. Как сформулировать это утверждение математически? Впервые это было сделано, по-видимому, в работах Соколова /28,29/. Мы дадим такую формулировку, в которой неважно, рассматриваем ли мы систему с конечным или бесконечным числом степеней свободы, т.е. рассматриваем ли мы систему частиц или квантованных полей.

В квантовой теории гильбертово пространство состояний H для всей системы строится как тензорное произведение пространств, являющихся пространствами представления группы симметрии для более фундаментальных объектов - элементарных частиц или полей частиц данного сорта. По определению, элементарная частица описывается неприводимым представлением группы Пуанкаре (исключением является фотон, который описывается неприводимым представлением расширенной группы Пуанкаре, содержащей операции отражения пространства и времени). Поле частиц данного сорта, по определению, описывается прямой суммой n -частичных представлений (фоковским столцом), где $n = 1,2,...$, и каждое n-частичное представление является тензорным произведением n одночастичных представлений, симметризованных в соответствии со статистикой рассматриваемых частиц.

Пусть рассматриваемая система состоит из N объектов $1,2... N$. В ближайшее время для нас будет несущественным, являются ли эти объекты частицами или полями частиц данного сорта. Существенным будет лишь то, что каждый объект i описывается некоторым унитарным представлением группы Пуанкаре $g \to U_i(g)$ в гильбертовом пространстве H_i .

По определению, объекты $1,2...N$ не взаимодействуют друг с другом, если представление группы Пуанкаре для всей системы является тензорным произведением представлений $g \to U_i(g)$, $i = 1,2\ldots N$. Если какие-либо из объектов являются тождественными частицами, то всегда предполагается, что тензорное произведение симметризовано в соответствии с их статистикой. Представление, описывающее систему N невзаимодействующих объектов, будет обозначаться $g \to U(g)$. В общем случае, при наличии взаимодействия между объектами, предполагается, что пространство представления H остается тем, же, что и для представления $g \to U(g)$, но операторы представления $g \to \hat{U}(g)$ отличаются от операторов представления $g \to U(g)$. Разумеется, если мы рассматриваем некоторую подсистему рассматриваемой системы (состоящую, очевидно, не более чем из $N - 1$ объектов), то можно говорить о взаимодействиях в этой подсистеме аналогичным образом.

Приведенные определения выражают на языке теории представлений групп такие физические понятия, как наличие или отсутствие взаимодействия.

Как следует из определения тензорного произведения представлений групп (см., например, главу 5 в /30/), генераторы такого представления равны суммам генераторов, каждый из которых действует нетривиально лишь по переменным одного объекта, а по переменным остальных объектов действует как тождественный оператор. Поэтому стандартный способ введения взаимодействия заключается в том, что в выражения для генераторов невзаимодействующей системы вводятся так называемые операторы взаимодействия, действующие нетривиально по переменным по крайней мере двух объектов. Операторы взаимодействия не произвольны, поскольку новая система генераторов, как и старая, должна удовлетворять коммутационным соотношениям для генераторов представления группы Пуанкаре.

Пусть a - некоторое разбиение системы N объектов на n подсистем $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$. По определению, взаимодействия между этими подсистемами считаются выключенными, если все операторы взаимодействия, действующие нетривиально по переменным по крайней мере двух подсистем, положены равными нулю. Очевидно, что система из n таких подсистем описывается представлением $g \to \hat{U}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(g) \equiv U(g; a)$, равным тензорному произведению унитарных представлений $g \to \hat{U}_{\alpha_i}(g)$ для подсистем. Пусть представления $g \to \hat{U}_{\alpha}(g)$ для всех подсистем рассматриваемой системы известны, а $g \to \hat{U}(g)$ - произвольное унитарное представление группы Пуанкаре для всей системы. Если для любого a операторы представления $g \to \hat{U}(g)$ переходят в $\hat{U}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(g)$ при выключении взаимодействия между соответствующими подсистемами, то говорят, что выполняется (алгебраическое) свойство кластерной сепарабельности или разделимости.

В физической литературе формулировались более сильные свойства разделимости, выражающие математически тот факт, что взаимодействие между подсистемами должно исчезать при их разъединении на большие расстояния или при больших временах. Свойства временной разделимости были сформулированы в работе /28/, а свойства пространственной разделимости в работах /28,31,32/ и др. С точки зрения S-матричного подхода, достаточно существования многоканальной S - матрицы. Доказательство существования S - матрицы может быть проведено лишь в конкретных моделях при наложении определенных требований на операторы взаимодействия. Естественно думать, что (алгебраическое) свойство кластерной сепарабельности является одним из необходимых требований. Это свойство может быть исследовано при довольно общих предположениях без знания детальной информации об операторах взаимодействия.

Легко видеть, что в локальной квантовой теории поля свойство кластерной сепарабельности выполняется автоматически, если полный лагранжиан взаимодействия выбирается в виде суммы лагранжианов взаимодействия для различных подсистем. Однако в релятивистской квантовой механике (соответствующей случаю, когда все объекты являются элементарными частицами), удовлетворить этому свойству весьма непросто уже и для случая трех тел (см. ниже).

Перейдем теперь к понятию о формах релятивистской динамики. Пусть рассматриваемая взаимодействующая система описывается представлением $g \to \hat{U}(g)$ группы Пуанкаре.

Генераторы такого представления удовлетворяют известным коммутационным соотношениям

$$[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] = 0; \quad \hat{M}_{\mu\nu} = -\hat{M}_{\nu\mu}; \quad [\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{P}_\rho] = -i(g_{\mu\rho}\hat{P}_\nu - g_{\nu\rho}\hat{P}_\mu);$$

$$[\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{M}_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}\hat{M}_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}\hat{M}_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma}\hat{M}_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}\hat{M}_{\mu\sigma}), \tag{I.I}$$

где $\hat{P}_\mu$ - операторы импульса, $\hat{M}_{\nu\rho}$ - операторы моментов, а метрический тензор $g_{\mu\nu}$ диагонален, причем $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$. Из соотношений (I.I) видно, что если операторы взаимодействия содержатся в гамильтониане $\hat{P}_0$, то они обязательно должны содержаться и в некоторых других генераторах представления. Желательно вводить операторы взаимодействия в возможно меньшее число генераторов. В мгновенной форме, по определению, операторы взаимодействия входят в гамильтониан $\hat{P}_o$ и операторы лоренцевских бустов $\hat{M}_{oi}\,(i=1,2,3)$, а операторы импульса $\hat{\vec{P}}$ и пространственных вращений $\hat{M}_{ik}\,(i,k=1,2,3)$ свободны от взаимодействия. В точечной форме операторы взаимодействия входят в операторы 4-импульса $\hat{P}_\mu$, а операторы моментов $\hat{M}_{\mu\nu}$ свободны от взаимодействия. Во фронтовой форме с выделенной осью z вначале переходят к "+" и "-" компонентам векторов согласно соотношению

$$P^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(P^0+P^3)\;;\qquad P^-=\frac{1}{\sqrt{2}}(P^0-P^3) \tag{I.2}$$

(отметим, что при опускании индексов "+" переходит в "-" и наоборот). В этой форме взаимодействие входит в операторы $\hat{P}^-$ и $\hat{M}^{-j}\,(j=1,2)$, а остальные генераторы свободны от взаимодействия.

Таким образом, в мгновенной и точечной формах операторы взаимодействия присутствуют в четырех генераторах представления группы Пуанкаре, а во фронтовой - в трех. В то же время легко видеть, что во фронтовой форме операторы, соответствующие отражению пространства и времени, должны зависеть от взаимодействия.

В локальной квантовой теории поля операторы $\hat{P}_\mu$ и $\hat{M}_{\mu\nu}$ получаются следующим образом. Пусть $\mathcal{L}(U_i, U_{i;\mu})$ - плотность лагранжиана, как функция от локально-полевых операторов $U_i(x)\,(i=1,2,\ldots N)$ и их производных $U_{i;\mu}=\partial U_i(x)/\partial x^\mu$. Определим тензор энергии-импульса

$$T^\nu_\mu=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_{i;\nu}}\,\frac{\partial U_i}{\partial x^\mu}\right)-\mathcal{L}\,\delta^\nu_\mu \tag{I.3}$$

и тензор моментов

$$M^\rho_{\mu\nu}=(x_\nu T^\rho_\mu-x_\mu T^\rho_\nu)-\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_{i;\rho}}A^j_{i\mu\nu}U_j\,, \tag{I.4}$$

где $A^j_{i\mu\nu}$ - некоторые константы, определяющиеся трансформационными свойствами функций $U_i(x)$ (см., например, книгу /13/. При квантовании этих тензоров получаются локально-полевые операторы $\hat{T}^\nu_\mu(x)$ и $\hat{M}^\rho_{\mu\nu}(x)$. Тогда (см., например, /13/)

$$\hat{P}_\mu=\int\hat{T}^\nu_\mu(x)\,d\sigma_\nu(x)\,,$$

$$\hat{M}_{\mu\nu}=\int\hat{M}^\rho_{\mu\nu}(x)\,d\sigma_\rho(x)\,, \tag{I.5}$$

где $d\sigma_\nu(x)$ - элемент объема некоторой пространственноподобной гиперповерхности $(\lambda,x)=\tau$.

В локальной квантовой теории поля явный вид генераторов представления группы Пуанкаре зависит от выбора гиперповерхности, по которой производится интегрирование в формулах (I.5). Поэтому в некоторых работах, как и в работе Дирака /33/, в которой понятие о формах динамики рассматривалось впервые: форма динамики связывалась с определенным выбором гиперповерхности. Допустим, что лагранжиан $\hat{\mathcal{L}}(x)$ представлен в виде $\mathcal{L}(x)+\mathcal{L}_{int}(x)$, где $\mathcal{L}(x)$ - свободный лагранжиан, а лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{int}(x)$ зависит лишь от $\{U_i\}$ и не зависит от $\{\partial U_i/\partial x^\mu\}$. Тогда из (I.3) и (I.4) следует, что квантованные операторы $\hat{T}^\nu_\mu(x)$ и $\hat{M}^\rho_{\mu\nu}(x)$ можно представить в виде

$$\hat{T}^\nu_\mu(x)=T^\nu_\mu(x)-\mathcal{L}_{int}(x)\,\delta^\nu_\mu\;;$$

$$\hat{M}^\rho_{\mu\nu}(x)=M^\rho_{\mu\nu}(x)-\mathcal{L}_{int}(x)(x_\nu\delta^\rho_\mu-x_\mu\delta^\rho_\nu)\,. \tag{I.6}$$

где $T^\nu_\mu(x)$ и $M^\rho_{\mu\nu}(x)$ означают теперь квантованные операторы при отсутствии взаимодействия. Элемент объема $d\sigma_\nu(x)$ в формулах (I.5) можно представить в виде $d\sigma_\nu(x)=\lambda_\nu\,\delta((\lambda,x)-\tau)\,d^4x$. Тогда с учетом (I.5) и (I.6) получаем

$$\hat{P}^\mu=P^\mu-\lambda^\mu\int\mathcal{L}_{int}(x)\,\delta((\lambda,x)-\tau)\,d^4x\,,$$

$$\hat{M}^{\mu\nu}=M^{\mu\nu}-\int\mathcal{L}_{int}(x)(x^\nu\lambda^\mu-x^\mu\lambda^\nu)\,\delta((\lambda,x)-\tau)\,d^4x\,. \tag{I.7}$$

Случаю, когда интегрирование ведется по обычному трехмерному пространству, соответствует вектор λ, такой, что $\lambda_o=1$, $\vec{\lambda}=0$.

Тогда, как следует из (I.7), мы получаем систему генераторов в мгновенной форме.

Фронтовая форма может быть формально получена из (I.7) следующим образом. Рассмотрим вектор λ с компонентами $\lambda^0 = 1/(1-v^2)^{1/2}$, $\lambda^3 = -v/(1-v^2)^{1/2}$, $\lambda^j = 0 (j=1,2)$. Переходя в (I.7) к пределу $v \to$ I, получаем

$$\hat{P}^\mu = P^\mu - \omega^\mu \int \mathcal{L}_{int}(x)\,\delta(x^+)\,d^4x\,,$$

$$\hat{M}^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} - \int \mathcal{L}_{int}(x)(x^\nu\omega^\mu - x^\mu\omega^\nu)\,\delta(x^+)\,d^4x\,, \tag{I.8}$$

где вектор ω имеет компоненты $\omega^- =$ I, $\omega^+ = \omega^j = 0$. Генераторы (I.8) являются, очевидно, генераторами фронтовой формы. Таким образом, с этой формой можно связать "поверхность светового фронта", определяемую условием $x^+ = 0$.

Что же касается точечной формы, то вопрос о связи с теорией поля здесь сложнее. В работе Дирака /33/ с точечной формой связывалась гиперповерхность $t^2 - \vec{x}^2 = const < 0,\ t > 0$, однако, как показано в работе Соколова /34/, с точечной формой должна связываться гиперплоскость, ортогональная вектору 4-скорости системы.

§ I.4. Краткий обзор развития релятивистской квантовой механики

Как указывалось в § I.I., РКМ часто трактуется как теория прямого взаимодействия. В физической литературе имеется много работ, в которых концепция прямого взаимодействия обсуждается с классической точки зрения. Поскольку мы рассматриваем РКМ лишь как приближенную теорию, мы не будем обсуждать эти работы. В недавно вышедшей книге Владимирова и Турыгина /35/ обсуждается, в основном, вопрос о формулировке классической электродинамики и общей теории относительности в терминах теории прямого взаимодействия. Различные принципиальные вопросы классической теории прямых взаимодействий (классической релятивистской механики) рассматриваются в работах Гайды, Клепикова, Ключковского, Майорова, Соколова, Третьяка, Шатнего и многих иностранных авторов. Читатель, интересующийся этими вопросами, может обратиться к работам /36-41/ и к работам, там цитируемым.

К другой серии относятся работы, в которых исследуется, как релятивистское квантовомеханическое описание может быть получено из квантовой теории поля. Наиболее полные результаты здесь имеются для случая двух частиц, динамика которых определяется "четырехххвостной" вершинной функцией. Различные уравнения для этой функции предложены в работах Бете-Солпитера /42/, Логунова - Тавхелидзе /43/, Кадышевского /44/, Бланкенбеклера-Шугара /45/, Гросса /46/, Тодорова /47/ и других авторов. Динамика двухчастичной системы во фронтовой форме, полученная из рассмотрения фейнмановских диаграмм в системе с бесконечным импульсом, рассматривалась в работах Вайнберга /48/, Бродского и Лепажа /49/, Намысловского /50/, Франкфурта и Стрикмана /51/, Кондратюка и Терентьева /52/ и других авторов. В соответствующей теории возмущений все частицы находятся на массовой поверхности, но в вершинах сохраняются лишь компоненты импульса p^1, p^2, p^+. Более общая и к тому же ковариантная теория возмущений, в которой промежуточные частицы находятся на массовой поверхности, предложена Кадышевским /53/, исходя из гамильтоновой формулировки квантовой теории поля. Как показано в работах /54,55/, в рамках этого подхода также может быть выведено квазипотенциальное уравнение Логунова-Тавхелидзе. Применение же техники Кадышевского для описания динамики в системе бесконечного импульса рассматривалось в работах Карманова /56/. Недавно Фудой /57/ был предложен такой вариант ковариантной теории возмущений на световом фронте, в котором, в отличие от подхода Кадышевского, диаграммы не содержат шпурионов. Еще один вариант ковариантной теории возмущений, в которой частицы находятся на массовой поверхности, а в промежуточных состояниях сохраняется 4-скорость системы, рассмотрен в работах Рюйгрока и де Гроота /58,59/. Этот вариант приводит к точечной форме динамики.

Что же касается релятивизованных уравнений Фаддеева для трех частиц, то их первый вариант предложен, по-видимому, Ахмадзадехом и Чоном /60/, однако большую популярность приобрел вариант Аарона, Амадо и Янга /61/. Оказалось, однако, что и этот вариант имеет недостатки, и поэтому различные модификации релятивистских уравнений Фаддеева рассматривались многими авторами. Среди последних работ на эту тему отметим работы Сафронова /62/, Гарсилазо /63,64/ и Фуды /57/.

При выводе релятивистских трехчастичных уравнений в диаграммном подходе обычно исходят из дополнительных предположений о малости вклада тех или иных диаграмм или о малости вклада тех или иных особенностей в учитываемых диаграммах. Корректность этих предложений, как правило, не очевидна, и поэтому неясно, будет ли полученное уравнение удовлетворять нужным физическим требованиям (см., например, обсуждение в работе /65/). Мы увидим ниже, что в подходе РКМ во всяком случае выполняются такие свойства, как релятивистская инвариантность, трехмерность уравнений, правильный нерелятивистский предел, двух- и трехчастичная унитарность, а также кластерная сепарабельность. Последнее свойство выполняется не во всех подходах. Так,например, неверным является утверждение Намысловского/50/, что, вследствие специфического выбора переменных в динамике светового фронта, это свойство выполняется здесь в полной аналогии с нерелятивистской квантовой механикой. Аналогия не может быть полной, так как в релятивистском случае операторы взаимодействия входят не только в гамильтониан, но и в другие генераторы представления группы Пуанкаре,и обеспечить разделимость в этих генераторах далеко не просто (см., например, /66/).В этой связи отметим,что условие разделимости всех десяти генераторов является,как правило,более сильным,чем условие разделимости S-матрицы,рассматриваемое в диаграммном подходе.Можно привести аргументы, что многие варианты трехчастичных уравнений, полученные в диаграммном подходе,не соответствуют разделимости во всех десяти генераторах. В § 3.6 мы обсудим в этой связи вариант Гарсилазо /63/, а в более подробной работе, в которой будет рассмотрена и динамика трехчастичной системы на световом фронте,- вариант Фуды /57/. В то же время диаграммный подход позволяет, в принципе, определить трехчастичное взаимодействие, тогда как РМК, учитывая лишь свойства инвариантности и разделимости, определить это взаимодействие не может. Исходя из результатов этой работы нам представляется, что трехчастичные уравнения, выведенные в рамках РКМ,являются наиболее обоснованными, однако конкретный вид трехчастичного взаимодействия в них должен быть определен исходя из диаграммного или других подходов.

Как нам представляется, подход РКМ имеет и то преимущество, что он обобщается на случай произвольного числа частиц гораздо проще, чем подходы, основанные на квантовой теории поля, и, кроме того, релятивистские многочастичные уравнения выводятся здесь по той же схеме, что и в обычной квантовой механике. Разумеется, при применении этих уравнений в конкретных случаях необходимо иметь в виду, какие физические предположения заложены в РКМ и, соответственно, на какую точность можно рассчитывать.

Исходя из сказанного, мы уделим теперь внимание лишь тем работам, в которых динамика системы из заданного числа частиц рассматривалась непосредственно в рамках РКМ, то есть были построены генераторы представления группы Пуанкаре. Отметим лишь, что в последнее время релятивизм нуклонов и кварков учитывается также в рамках уравнения Дирака для квазинезависимых нуклонов и кварков, в рамках

"квантовой хадродинамики" и т.д. Читатель, интересующийся этими вопросами может обратиться к /67-69,22/ и к работам,там цитируемым.

Начало работам по РКМ было положено упоминавшейся статьей Дирака /33/, в которой, в частности, введено понятие о трех основных формах релятивистской динамики. Первое явное построение генераторов представления группы Пуанкаре для системы двух взаимодействующих частиц было дано Бакамджаном и Томасом /70/ в мгновенной форме. Физический смысл построения Бакамджана-Томаса обсуждался затем в различных работах. В частности, Фонг и Зухер /71/показали, что в этой модели существует релятивистски-инвариантная S- матрица, а физический смысл релятивистского относительного радиуса-вектора исследовал Осборн /72/. В то же время было довольно быстро понято, что переход к случаю трех и более частиц весьма непрост в связи с тем, что необходимо выполнение условия кластерной сепарабельности.

Первый вариант решения задачи трех тел предложен Кэстером /73/ в мгновенной форме, однако в этой работе имеется неточность (см. §3.2) и, кроме того, используемый метод применим лишь в случае трех тел. Принципиально новый подход к задаче трех и более тел был дан Соколовым, который предложил так называемый метод пакующих операторов. Этот метод является, с одной стороны, довольно простым, а с другой стороны, весьма элегантным. К сожалению, этот метод знаком лишь немногим физикам. По-видимому, такая ситуация сложилась из-за того,что метод Соколова связывался лишь с существованием прямых взаимодействий.

В работах /29,74/, где рассмотрение ведется в рамках точечной формы, метод пакующих операторов продемонстрирован Соколовым для случаев трех частиц и многих частиц соответственно. Если в случае трех частиц результаты являются, в принципиальном плане, исчерпывающими, то, как оказалось, в случае четырех и большего числа частиц возникают новые усложнения. Это связано со свойством симметрии пакующих операторов относительно порядка, в котором производится выключение взаимодействий между подсистемами. Мы подробно рассмотрим это свойство в главе 2.

Независимо от работ Соколова, в работах Терентьева /75/ и Берестецкого и Терентьева /76/ было предложено другое направление, в котором система из заданного числа частиц описывается в рамках фронтовой формы динамики. В работах Кондратюка и Терентьева /52/ и Баккера, Кондратюка и Терентьева/77/, развивающих этот подход, были получены трехчастичные уравнения и система генераторов для трех частиц, удовлетворяющие свойствам релятивистской инвариантности и разделимости. В дальнейшем оказалось /78/, что эти результаты могут быть также получены в рамках метода пакующих операторов Соколова. Оказалось также (см. /66/), что трудности, связанные со свойством симметрии пакующих операторов при переходе к большему числу тел остаются и во фронтовой форме.

В связи с тем, что имеются описания систем взаимодействующих частиц в различных формах, возникает следующий принципиальный вопрос. Являются ли различные формы физически эквивалентными или какая либо из них более предпочтительна? В работе Соколова и Шатнего /79/ рассматривалось описание системы трех тел в различных формах. Были построены унитарные операторы, переводящие одну форму в другую и сохраняющие S - матрицу. Таким образом, по крайней мере в случае трех тел, все формы являются физически эквивалентными. Более того, можно показать (это будет сделано автором в отдельной работе), что решения для трехчастичных массовых операторов, найденные в работах /73, 29,77,31,32,80/ (с учетом неточности работы /73/), унитарно эквивалентны друг другу. Между тем авторы этих работ исходили лишь из условий релятивистской инвариантности и кластерной сепарабельности. Поэтому возникает вопрос, являются ли эти условия достаточными и существуют ли другие решения. Как показано в /80/, исходя лишь из релятивистской инвариантности и кластерной сепарабельности, можно получить бесконечное множество решений, приводящих к различным физическим следствиям. При этом оказалось, что только одно решение обеспечивает выполнение фундаментального свойства, что электрический заряд системы равен сумме электрических зарядов составляющих и, как можно показать, это решение соответствует результатам /73,29,77,31,32,80/.

То, что условия релятивистской инвариантности и кластерной сепарабельности являются недостаточными, отмечалось также Соколовым /29/, Кондратюком /81/ и Гроссом /82/. Более того, в обзоре Гросса /82/ задается следующий вопрос: "Какое значение имеют такие уравнения, когда динамика полностью произвольна?". Следуя работе Кэстера и Виринга /83/, Гросс считает, что подход, основанный на РКМ может давать лишь качественно величину релятивистских эффектов. Мы увидим ниже, что решения, найденные в /73,29,77,31,32,80/, выделены среди остальных решений тем, что они соответствуют квантовой теории поля, по крайней мере, в приближении $1/c^2$. Поэтому мы считаем, что условия релятивистской инвариантности, сепарабельности и соответствия с теорией поля могут приводить не только к качественным, но и к вполне надежным количественным результатам.

Итак, мы видим, что вплоть до последнего времени была всесторонне исследована задача трех тел. В задаче же четырех и более тел имелось решение, найденное Фолди и Крайчиком /84/ в мгновенной форме в

приближении $1/c^2$. Подробное исследование классической и квантовой теории многих тел в этом приближении проведено в обзоре Гайды /39/. Что же касается точного решения, то здесь подход, предложенный Соколовым /74/ приводит к дилемме: найти ли вначале произвольное решение для пакующих операторов и затем симметризовать его относительно различных способов выключения взаимодействия между подсистемами, или найти сразу решение, для которого симметризация является излишней.

В работе Кэстера и Полизоу /31/ решение для пакующих операторов искалось исходя из многоканальной теории рассеяния, а затем был предложен явный способ симметризации этого решения. Другое решение было найдено Мутце /32/, и им также предложен явный способ симметризации. В работе же /85/ было найдено решение, уже обладающее всеми нужными свойствами симметрии. Было показано также, что это решение совпадает с решением работы /31/, и поэтому симметризация, проведенная в /31/, является, на наш взгляд, излишней. Недавно Мутце /86/ было предложено простое решение, использующее не разложение в прямой интеграл, как в /31,85/, а свойства оператора положения Ньютона-Вигнера. В случае, когда разложение в прямой интеграл законно, решение Мутце /86/ совпадает с решениями /31,85/ и также обладает всеми нужными свойствами симметрии. Кроме того, как мы увидим в главе 2, решения /31,85,86/ находятся в соответствии с теорией поля по крайней мере в приближении $1/c^2$. Поэтому мы считаем, что сейчас уже имеется надежная теоретическая основа для расчета релятивистских эффектов в многочастичных задачах.

§ 1.5. Различные реализации унитарного неприводимого представления группы Пуанкаре с положительной массой

Одной из основных целей предыдущего изложения было убедить читателя, стоящего на позициях квантовой теории поля, что РКМ является вполне приемлемой физической теорией. Перед тем, как начать изложение этой теории, приведем те сведения об унитарных неприводимых представлениях группы Пуанкаре, которые понадобятся нам в дальнейшем /87/. Подробное изложение имеется во многих учебниках (см., например, /87/). Отметим, что в квантовой теории поля элементарная частица описывается не только унитарным неприводимым представлением, но и некоторым неунитарным представлением, которое описывается ковариантным уравнением (Клейна-Гордона, Дирака и т.д.). В РКМ же имеют дело лишь с унитарными представлениями.

Хорошо известно, что в квантовой теории надо работать не с самой группой Пуанкаре, а с ее односвязной накрывающей $SL(2,C)\otimes\mathcal{T}$, где $\otimes$ означает полупрямое произведение, а $\mathcal{T}$ – группа сдвигов четырехмерного пространства Минковского. В дальнейшем, говоря о группе Пуанкаре, мы будем всегда иметь в виду группу $G=SL(2,C)\otimes\mathcal{T}$. Группа $SL(2,C)$ содержит подгруппу $SU(2)$, являющуюся накрывающей для группы вращений.

Если $\ell\in SL(2,C)$, то через $L(\ell)$ будем обозначать элемент группы Лоренца, соответствующий ℓ. 4-импульс частицы p может принимать значения на гиперболоиде, определяемом условиями $p^2=\mu^2$, $p^0\geq\mu$, где μ – масса частицы. Для явного задания операторов представления группы Пуанкаре необходимо каждой точке гиперболоида p поставить в соответствие элемент $x(p)\in SL(2,C)$, так что $L(x(p))\,p^{(0)}=p$. Здесь $p^{(0)}$ – 4-вектор с компонентами $p^0=\mu$, $\vec{p}=0$. Пусть $\tau\to u(\tau)$ – неприводимое представление группы $SU(2)$ со спином s. Тогда представление группы Пуанкаре $U_{\mu s}$ описывающее элементарную частицу с массой μ и спином s, может быть явно реализовано многими эквивалентными способами. Мы рассмотрим три из них, которые используются в мгновенной, точечной и фронтовой формах динамики. Пусть $(\ell,p)\in SU(2)$ – фактор, определяемый из соотношения

$$\ell\, x(p)=x(L(\ell)p)\,(\ell,p)\,, \tag{I.9}$$

а $\|\ldots\|$ – норма в пространстве представления $\tau\to u(\tau)$. Тогда тремя указанными способами являются следующие.

I. В качестве гильбертова пространства для представления $U_{\mu s}$ выбирается линейное пространство функций на гиперболоиде $\varphi(\vec{p})$ со значениями в пространстве представления $\tau\to u(\tau)$ и такими, что

$$\int\|\varphi(\vec{p})\|^2\,d^3\vec{p}<\infty\,. \tag{I.10}$$

В качестве $x(p)$ выбирается матрица

$$\alpha\left(\frac{\vec{p}}{\mu}\right)=\frac{\varepsilon(\vec{p})+\mu+\vec{p}\,\vec{\sigma}}{\left[2\mu(\varepsilon(\vec{p})+\mu)\right]^{1/2}}\,, \tag{I.11}$$

где $\varepsilon(\vec{p})=(\mu^2+\vec{p}^{\,2})^{1/2}$, а $\{\vec{\sigma}\}$ – матрицы Паули. Тогда элементу (ℓ,a) из группы Пуанкаре соответствует оператор $U_{\mu s}(\ell,a)$, такой, что

$$U_{\mu s}(\ell,a)\;\varphi(\vec{p})=\exp\{i(L(\ell)a,p)\}\left(\frac{\mu^2+\vec{p}^{\,\prime 2}}{\mu^2+\vec{p}^{\,2}}\right)^{1/4}\times$$
$$\times\,u((\ell^{-1},p))^{-1}\,\varphi(\vec{p}^{\,\prime})\,, \tag{I.12}$$

где $p'=L(\ell)^{-1}p$. Множитель $(\mu^2+\vec{p}^{\,\prime 2})^{1/4}(\mu^2+\vec{p}^{\,2})^{-1/4}$ в (I.12) возник из-за того, что в качестве меры на гиперболоиде мы выбрали не релятивистски-инвариантную меру $d^3\vec{p}\,/\,(1+\frac{\vec{p}^{\,2}}{\mu^2})^{1/2}$, а обычную меру $d^3\vec{p}$.

Прямое вычисление показывает, что генераторы представления (I.12) имеют вид

$$\vec{P}=\vec{p}\,;\qquad E=(\mu^2+\vec{p}^{\,2})^{1/2}\,;$$

$$\vec{M}=\vec{\ell}(\vec{p})+\vec{s}\,;$$

$$\vec{N}=-i(\mu^2+\vec{p}^{\,2})^{1/4}\frac{\partial}{\partial\vec{p}}(\mu^2+\vec{p}^{\,2})^{1/4}+\frac{\vec{s}\times\vec{p}}{\mu+(\mu^2+\vec{p}^{\,2})^{1/2}}\,, \tag{I.13}$$

где $\vec{p}$ – оператор умножения на $\vec{p}$, $\vec{\ell}(\vec{p})=-i\vec{p}\times\frac{\partial}{\partial\vec{p}}$ – оператор орбитального момента, $\vec{s}$ – оператор спина, $\vec{P}$ – оператор импульса, E – оператор энергии, $\vec{M}=\{M^{23},M^{31},M^{12}\}$, $\vec{N}=\{M^{01},M^{02},M^{03}\}$.

II. В качестве гильбертова пространства для представления $U_{\mu s}$ выбирается линейное пространство функций $\varphi(\vec{g})$ со значениями в пространстве представления $\tau\to u(\tau)$ и такими, что

$$\int\|\varphi(\vec{g})\|^2\,d\mu(g)<\infty\,. \tag{I.14}$$

где $g = p/\mu$ – 4-скорость частицы, $\vec{g}$ – пространственные компоненты вектора g, а релявистски инвариантная мера $d\mu(g)$ имеет вид

$$d\mu(g) = \frac{d^3\vec{g}}{2g^0}\ ; \quad g_0 = (1+\vec{g}^2)^{1/2}\ . \tag{I.15}$$

В качестве $x(p)$ выбирается матрица (I.II), которая теперь представляется в виде

$$\alpha(\vec{g}) = \frac{g_0 + 1 + \vec{g}\vec{\sigma}}{[2(1+g_0)]^{1/2}}\ . \tag{I.16}$$

Тогда элементу (ℓ,a) из группы Пуанкаре соответствует оператор $U_{\mu s}(\ell,a)$, такой, что

$$U_{\mu s}(\ell,a)\ \varphi(\vec{g}) = \exp\{i\mu(L(\ell)a,g)\}\, u((\ell^{-1},\mu g))^{-1}\,\varphi(\vec{g}')\ , \tag{I.17}$$

где $\vec{g}'$ – пространственная компонента 4-вектора $g' = L(\ell)^{-1}g$. Прямое вычисление показывает, что генераторы представления имеют вид

$$P = \mu g\ ; \quad \vec{M} = \vec{\ell}(\vec{g}) + \vec{s}\ ;$$

$$\vec{N} = -ig^0\frac{\partial}{\partial\vec{g}} + \frac{\vec{s}\times\vec{g}}{1+g_0}\ . \tag{I.18}$$

Ш. В качестве гильбертова пространства для представления $U_{\mu s}$ выбирается линейное пространство функций $\varphi(\vec{p}_\perp, p^+)$ со значениями в пространстве представления $\tau \to u(\tau)$ и такими, что

$$\int \|\varphi(\vec{p}_\perp,p^+)\|^2\ \frac{d^2\vec{p}_\perp dp^+}{2p^+} < \infty\ , \tag{I.19}$$

где $\perp$ означает проекцию вектора на плоскость $\{1,2\}$.
В качестве $x(p)$ выбирается матрица

$$\ell\left(\frac{\vec{p}_\perp}{\mu},\frac{p^+}{\mu}\right) = \frac{1}{[\mu(p^0+p^3)]^{1/2}}\begin{Vmatrix} p^0+p^3 & 0 \\ p^1+ip^2 & \mu \end{Vmatrix}\ . \tag{I.20}$$

Тогда элементу (ℓ,a) из группы Пуанкаре соответствует оператор $U_{\mu s}(\ell,a)$, такой, что

$$U_{\mu s}(\ell,a)\ \varphi(\vec{p}_\perp,p^+) = \exp\{i(L(\ell)a,p)\}\times u((\ell^{-1},p))^{-1}\varphi(\vec{p}_\perp{}',p'^+)\ , \tag{I.21}$$

где $\vec{p}_\perp{}'$ и p'^+ – компоненты 4-вектора $p' = L(\ell)^{-1}p$. Прямое вычисление приводит к следующему выражению для генераторов представления

$$\vec{P}_\perp = \vec{p}_\perp\ ; \quad P^+ = p^+\ ; \quad P^- = p^- = \frac{m^2+\vec{p}_\perp^{\,2}}{2p^+}\ ;$$

$$M^{+-} = ip^+\frac{\partial}{\partial p^+}\ ; \quad M^{+j} = -ip^+\frac{\partial}{\partial p^j}\ ; \quad M^{12} = \ell_3(\vec{p}_\perp) + s^3\ ;$$

$$M^{-j} = -i\left(p^j\frac{\partial}{\partial p^+} + p^-\frac{\partial}{\partial p^j}\right) - \frac{\varepsilon_{j\ell}}{p^+}\left(\mu s^\ell + p^\ell s^3\right)\ , \tag{I.22}$$

где $j,\ell = 1,2$, $\varepsilon_{j\ell}$ имеет компоненты $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, а по повторяющимся индексам предполагается суммирование.
Рассмотренным описаниям представления $U_{\mu s}$ можно дать следующую интерпретацию. Роль переменных, описывающих "внутреннее" состояние частицы, играют спиновые переменные, а в качестве набора, описывающего "внешнее" движение, выбирается $\{\vec{p}\}$, $\{\vec{g}\}$ или $\{\vec{p}_\perp, p^+\}$. Выбор матрицы $x(p)$ показывает, что частица с импульсом p, по

определению, имеет то же "внутреннее"состояние, что и покоящаяся частица, если состояние с импульсом p получается из состояния покоя преобразованием $\mathcal{X}(p)$. Этому понятию можно дать обоснование на языке прямого интеграла (см. § 2.3).

В случаях I и П, как легко видеть, частица с импульсом p имеет то же "внутреннее"состояние, что и покоящаяся частица, если эти состояния получены друг из друга чисто лоренцевским бустом. Такой выбор $\mathcal{X}(p)$ (канонический выбор) удобен во многих вопросах, однако лоренцевские бусты не образуют группу. Поэтому в случаях I и П одинаковые "внутренние" состояния с произвольными импульсами связаны преобразованием, которое, вообще говоря, не является лоренцевским бустом. Преобразования же (I.20) образуют в $SL(2,C)$ подгруппу матриц вида

$$\ell(d,z)=\begin{Vmatrix} d & 0 \\ z & 1/d \end{Vmatrix}, \quad d>0 . \tag{I.23}$$

Генераторами представления этой подгруппы являются M^{+-}, M^{+j}. Матрицам $\ell(d,z)$ соответствует преобразование $L(\ell(d,z))$, которое определяется формулами

$$p'^{+}=d^2p^+ ; \quad p'^{1}=p^1+\sqrt{2}\,dxp^+ ; \quad p'^{2}=p^2+\sqrt{2}\,dyp^+, \tag{I.24}$$

где $z=x+iy$. Поэтому для произвольных импульсов p и p' можно по формулам (I.27) найти параметры матрицы $\ell(d,z)$, такой, что $p'=L(\ell(d,z))p$. Будем обозначать такую матрицу $\ell(p\to p')$. Тогда из группового свойства матриц (I.23) следует, что

$$\ell\left(\frac{\vec{p}_\perp^{\,\prime}}{\mu},\frac{p'^{+}}{\mu}\right)=\ell(p\to p')\,\ell\left(\frac{\vec{p}_\perp}{\mu},\frac{p^{+}}{\mu}\right) . \tag{I.25}$$

Это свойство существенно используется во фронтовой форме динамики (см., например, /52/).

ГЛАВА 2. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

В этой главе излагается общий подход к задаче сложения взаимодействий в рамках метода пакующих операторов Соколова. С методической точки зрения, возможно, следовало бы предварительно обсудить описания систем двух и трех частиц в различных формах и трудности при переходе в большему числу частиц. Однако ввиду ограничений на объем настоящей работы такой способ изложения неприемлем. Автор надеется, однако, что, по крайней мере для некоторых читателей, принятый способ изложения окажется даже более подходящим. Как нам представляется, основная трудность в понимании материала главы может возникнуть лишь из его некоторой необычности, а серьезных технических проблем возникнуть не должно. Наше рассмотрение является, по существу, чисто алгебраическим. Что же касается интегралов по операторной мере и прямых интегралов, то с физической точки зрения их конструкция понятна, а вопросы, связанные с обоснованием можно, при желании, опустить.

Мы рассматриваем такую постановку задачи, когда неважно,какова природа объектов, составляющих нашу систему. В данном случае для нас будет неважным, что объектами являются частицы, и в качестве объектов могут быть и квантованные поля. Оказывается, что в рамках такого подхода для пакующих операторов в мгновенной форме имеется естественное решение, которое удовлетворяет всем нужным свойствам симметрии. Вопрос же о том, имеется ли такое решение в других формах,остается открытым и ниже, в главе 3, мы рассматриваем лишь задачу многих тел в мгновенной форме РКМ. Поэтому при чтении настоящей главы читатель, интересующийся лишь приложениями, может опустить все вопросы, связанные с точечной и фронтовой формами.

§ 2.I. Общая формулировка метода пакующих операторов Соколова

В § I.3 мы сформулировали понятие о свойстве кластерной сепарабельности. В нашей формулировке предполагалось, что рассматриваемая система состоит из N объектов I,2,... N, а свойства унитарных представлений $g\to U_i(g)$ $(i=1,2,\dots N)$,описывающих эти объекты, для нас не имели значения. В общем случае задачу о сложении взаимодействий можно сформулировать следующим образом.

Пусть для всех подсистем α рассматриваемой системы заданы представления $g\to U_\alpha(g)$, удовлетворяющие свойству кластерной сепарабельности. Как построить представление $g\to \hat{U}(g)$ для всей системы, которое также удовлетворяет свойству кластерной сепарабельности?

Мы отмечали в § I.3, что свойство кластерной сепарабельности может быть сформулировано и на языке генераторов представления. С математической точки зрения связь между представлениями группы Ли и соответствующей алгебры Ли в случае бесконечномерных представлений не всегда однозначна, но мы, как это обычно принимается в физике, будем считать, что выполнены все условия для того, чтобы заданное представление алгебры Ли могло быть однозначно проинтегрировано до представления соответствующей группы Ли (см., например, главу II книги /30/).

Перейдем теперь к решению задачи о сложении взаимодействий. Поскольку нам известны все представления $g \to \hat{U}_{\alpha}(g)$, то нам известны также и все представления $g \to \hat{U}_{\alpha_1,\dots\alpha_n}(g) = U(g;a)$ (см. § I.3), описывающие n невзаимодействующих подсистем $\alpha_1,\dots \alpha_n$: представление $g \to U(g;a)$ равно тензорному произведению представлений $g \to \hat{U}_{\alpha_i}(g)$ $(i=1,2,\dots n)$. Пусть $\{\Gamma(a)\}$ – набор из десяти генераторов представления $g \to U(g;a)$. Согласно идее метода пакующих операторов, вместо набора $\{\Gamma(a)\}$ рассматриваем набор из 10 операторов $\{E, F(a), M(a)\}$, так что оба набора связаны между собой взаимно однозначно, $M(a)$ – массовый оператор, определенный как положительный квадратный корень из оператора $P(a)^2$, а среди остальных девяти операторов часть – операторы E – являются генераторами, которые в данной форме свободны от взаимодействия, а остальные операторы $F(a)$ содержат взаимодействие. Вопрос о том, какие операторы выбираются в качестве $F(a)$, решается по-разному в каждой конкретной форме динамики.

Мы увидим ниже, что для взаимно однозначного соответствия между наборами $\{\Gamma(a)\}$ $\{E, F(a), M(a)\}$ во всех трех формах достаточно потребовать, чтобы оператор $M(a)$ был строго положителен, т.е. чтобы его нижняя грань m_0 удовлетворяла условию $m_0 > 0$. В дальнейшем это условие принимается без оговорок. Заметим также, что так как оператор $M(a)$ коммутирует со всеми генераторами представления, то он коммутирует с E и $F(a)$:

$$[M(a), E] = [M(a), F(a)] = 0 . \tag{2.I}$$

Допустим, мы нашли унитарные операторы $A(a)$, такие, что

$$A(a)E = EA(a) \; ; \quad A(a)F A(a)^{-1} = F(a) , \tag{2.2}$$

где F – это те же операторы $F(a)$, но в случае, когда все взаимодействия в рассматриваемой системе выключены. Для того чтобы

сформулировать свойства симметрии операторов $A(a)$ относительно порядка выключения взаимодействий, мы, следуя Кэстеру и Полизоу /31/, введем следующие обозначения. Пусть b означает разбиение рассматриваемой системы на невзаимодействующие подсистемы $\beta_1,\dots \beta_\ell$. Тогда под $a \cap b$ понимается разбиение на невзаимодействующие подсистемы, полученное при выключении взаимодействий как между подсистемами $\alpha_1,\dots \alpha_n$, так и между подсистемами $\beta_1,\dots \beta_\ell$. Пусть далее, O означает некоторый оператор, определенный по операторам представления $g \to \hat{U}(g)$. Тогда O_b означает оператор, полученный из O при выключении взаимодействий между подсистемами $\beta_1,\dots \beta_\ell$. Операторы $F(a)$ и $M(a)$, по построению, удовлетворяют условиям

$$F(a)_b = F(a \cap b) , \quad M(a)_b = M(a \cap b) \tag{2.3}$$

для любых a и b.

Мы потребуем, чтобы операторы $A(a)$ удовлетворяли такому же условию:

$$A(a)_b = A(a \cap b) . \tag{2.4}$$

Тогда решение задачи о сложении взаимодействий может быть проведено в три этапа.

I) Представляем все наборы $\{E, F(a), M(a)\}$ в виде $A(a)\{E, F, \tilde{M}(a)\} A(a)^{-1}$, где

$$\tilde{M}(a) = A(a)^{-1} M(a) A(a) . \tag{2.5}$$

Тогда вспомогательные наборы $\{E, F, \tilde{M}(a)\}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1), и $\tilde{M}(a)$ коммутирует с E и F.

2) Из операторов $\tilde{M}(a)$ строим оператор $\tilde{M}$, такой, что $\tilde{M}_a = \tilde{M}(a)$ для любого a, и вводим вспомогательный набор $\{E, F, \tilde{M}\}$. С учетом того, что все $\tilde{M}(a)$ коммутируют с E и F, способ построения оператора $\tilde{M}$ должен быть таким, чтобы $\tilde{M}$ также коммутировал с E и F. Тогда набор $\{E, F, \tilde{M}\}$ удовлетворяет нужным коммутационным соотношениям (I.I).

3) Из операторов $A(a)$ строим оператор A такой, что $A_a = A(a)$ и $AE = EA$ (см. 2.2). Тогда набор $A\{E, F, \tilde{M}\}A^{-1}$ удовлетворяет нужным коммутационным соотношениям, свойству кластерной сепарабельности, и, кроме того, задача о сложении взаимодействий решается не выходя за рамки заданной формы динамики.

Мы видим, что комбинировать различные взаимодействия мы можем лишь в наборе $\{E, F, \tilde{M}(a)\}$, полученном из набора $\{E, F(a), M(a)\}$

при помощи его "упаковки" операторами $\mathcal{A}(a)$. Поэтому Соколов и назвал свой метод методом пакующих операторов. В нерелятивистском пределе пакующие операторы $\mathcal{A}(a)$ обращаются в единицу и, следовательно, упаковка становится тривиальной.

Решение указанной комбинаторной задачи о конструкции операторов $\widetilde{M}$ и $\mathcal{A}$ было дано Соколовым /74/ (см. также работы /31,32/). В качестве оператора $\widetilde{M}$ можно взять, например, оператор

$$\widetilde{M}=\sum_{k=2}^{N}(-1)^{k}(k-1)!\,\widetilde{M}_{(k)}+V_{N}\,, \tag{2.6}$$

где V_N - полностью связанная часть оператора $\widetilde{M}$ (N - частичное" взаимодействие), а

$$\widetilde{M}_{(k)}=\sum_{\dim a=k}\widetilde{M}(a)=\sum_{\alpha_1,\dots\alpha_k}\widetilde{M}_{\alpha_1\dots\alpha_k}\,, \tag{2.7}$$

где суммирование происходит по всем разбиениям индексов I,2... N на k групп $\alpha_1,\dots\alpha_k$, причем порядок индексов $\alpha_1,\dots\alpha_k$ не учитывается. Оператор V_N, очевидно, не должен зависеть от способа нумерации объектов I,2 ... N, а для коммутации $\widetilde{M}$ с E и F, он, очевидно, также должен коммутировать с E и F. Ясно, что в частном случае V_N = 0 это условие выполняется автоматически.

Прежде чем доказать, что оператор $\widetilde{M}$, определенный формулами (2.6) и (2.7), удовлетворяет условию $\widetilde{M}_a=\widetilde{M}(a)$ для любого " a ", обсудим подробнее условие

$$\widetilde{M}(a)_{b}=\widetilde{M}(a\cap b), \tag{2.8}$$

следующее из (2.3) - (2.5). Рассмотрим оператор $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$, соответствующий случаю, когда рассматриваемая система N объектов разбита на невзаимодействующие подсистемы α и β. Пусть теперь подсистема α, в свою очередь, разбивается на невзаимодействующие подсистемы α' и α''. В этом случае мы вместо $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$ пишем $\widetilde{M}_{\alpha'\alpha''\beta}$. Разбиение системы N объектов на невзаимодействующие подсистемы α', α'' и β можно, очевидно, получить при другом порядке выключения взаимодействий: вначале выключить взаимодействие между подсистемой α' и подсистемой β', состоящией из α'' и β, а затем выключить взаимодействие между подсистемами α'' и β. Аналогично, оператор $\widetilde{M}_{\alpha_1\dots\alpha_k}$, соответствующий отсутствию взаимодействия между подсистемами $\alpha_1,\dots\alpha_k$, можно получить при различном порядке выключения взаимодействий между этими подсистемами. Условие (2.8) означает, что оператор $\widetilde{M}_{\alpha_1\dots\alpha_k}$ не зависит от порядка выключения взаимодействий между подсистемами $\alpha_1,\dots\alpha_k$ или, иначе говоря, этот оператор симметричен относительно любых перестановок индексов $\alpha_1,\dots\alpha_k$.

Для доказательства соотношения $\widetilde{M}_a=\widetilde{M}(a)$ достаточно, очевидно, показать, что при выключении взаимодействия между подсистемами α и β оператор (2.6) переходит в $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$. Будем обозначать через $\alpha_1,\dots\alpha_n$ различные подсистемы системы α, а через $\beta_1,\dots\beta_\ell$ - различные подсистемы системы β. Пусть $\alpha_1,\dots\alpha_n,\beta_1,\dots\beta_\ell$ заданы. Вычислим коэффициент, с которым $\widetilde{M}_{\alpha_1\dots\alpha_n\beta_1\dots\beta_\ell}$ входит в сумму (2.6) при выключении взаимодействий между подсистемами α и β. Допустим, для определенности, что $n\geqslant\ell$, $n\geqslant 2$. Легко убедиться в том, что $\widetilde{M}_{\alpha_1\dots\alpha_n\beta_1\dots\beta_\ell}$ может получиться только из тех членов в сумме (2.6), для которых $n\leq k\leq n+\ell$. Далее, легко убедиться в том, что в сумме для $\widetilde{M}_{(n+\ell-s)}$ (см. (2.7)) имеются $C_n^s C_\ell^s s!$ членов, которые при указанном выключении взаимодействия переходят в $\widetilde{M}_{\alpha_1\dots\alpha_n\beta_1\dots\beta_\ell}$. Поэтому интересующий нас коэффициент равен

$$\sum_{s=0}^{\ell}(-1)^{n+\ell-s}(n+\ell-s-1)!\,C_n^s C_\ell^s s! =$$

$$=(-1)^{n+\ell}n!(\ell-1)!\sum_{s=0}^{\ell}(-1)^{s}C_{\ell+n-s-1}^{\ell-1}C_\ell^s\,. \tag{2.9}$$

В комбинаторике известно, что сумма в правой части этой формулы равна нулю (см., например, стр. 253 в книге /88/). Таким образом, в сумме (2.6) остаются лишь члены с $n=1$, $\ell=1$. Но при рассматриваемом выключении взаимодействий из этих членов остается лишь $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$. Следовательно, нужное утверждение доказано.

Очевидно, что кроме (2.6), условию $\widetilde{M}_a=\widetilde{M}(a)$ можно удовлетворить многими способами. Например, вместо формулы (2.6) можно складывать аналогично квадраты массовых операторов и считать, что полученный таким образом оператор является оператором $\widetilde{M}^2$. Таким образом, мы еще раз убеждаемся в том, что исходя лишь из свойств релятивистской инвариантности и кластерной сепарабельности, можно получить бесчисленное множество решений.

По аналогии с формулой (2.6) можно построить и "разделимое произведение", определяющее оператор A, такой, что $A_a = A(a)$. Например, представим $A(a)$ в виде $exp(iB(a))$, определим

$$B = \sum_{K=2}^{N} (-1)^K (k-1)! B_{(K)} + B_N \,, \tag{2.10}$$

где B_N - некоторый " N- частичный оператор", а

$$B_{(K)} = \sum_{dim a = K} B(a) \,. \tag{2.11}$$

После этого положим $A = exp(iB)$. Ясно, что все нужные свойства будут выполнены, если B_N коммутирует с операторами E, в частности, они автоматически выполнены при $B_N = 0$.

В литературе обсуждались и другие способы построения оператора A (см., например, работы /29,31,32/), но мы не будем на них останавливаться. Отметим только, что если исходить лишь из свойств релятивистской инвариантности и кластерной сепарабельности, то, разумеется, нельзя предпочесть какой-либо из этих способов другим.

§ 2.2. Сложение взаимодействий в трех основных формах динамики

В точечной форме в качестве операторов E выступают генераторы представления группы Лоренца $M^{\mu\nu}$, а в качестве операторов $F(a)$ можно выбрать пространственную часть оператора 4-скорости: $\vec{G}(a) = \vec{P}(a) / M(a)$. Ясно, что если оператор $M(a)$ строго положителен, то наборы $\{M^{\mu\nu}, P(a)\}$ и $\{M^{\mu\nu}, \vec{G}(a), M(a)\}$ связаны между собой взаимно однозначно. Для решения задачи о сложении взаимодействий, надо найти операторы $A(a)$, такие, что

$$[A(a), M^{\mu\nu}] = 0 \,; \quad A(a)\vec{G}A(a)^{-1} = \vec{G}(a) \,; \quad A(a)_b = A(a \cap b) \,. \tag{2.12}$$

Во фронтовой форме, в качестве операторов E выступают операторы $P^+, P^j, M^{+-}, M^{12}, M^{+j}$ $(j=1,2)$, а в качестве операторов $F(a)$ выбираются $J_1(a)$ и $J_2(a)$, определяемые через генераторы следующим образом:

$$J_j(a) = \frac{1}{M(a)} \left[W(a)^j - P^j J_3 \right] \quad (j=1,2) \,, \tag{2.13}$$

где $\hat{W}^\mu = \frac{1}{2} e^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \hat{M}^{\nu\rho} \hat{P}^\sigma$ - оператор Паули-Любаньского, а J_3 определяется как $J_3 = \hat{W}^+ / P^+$. Из выражения для $\hat{W}^+$ легко убедиться в том, что во фронтовой форме оператор $\hat{W}^+$ не зависит от взаимодействия, и поэтому J_3 также не зависит от взаимодействия. Хорошо известно (и это можно проверить непосредственным вычислением), что из коммутационных соотношений для генераторов представления группы Пуанкаре следует, что набор $\{J_1(a), J_2(a), J_3\}$ удовлетворяет коммутационным соотношениям для операторов спина. Для решения задачи о сложении взаимодействий во фронтовой форме надо найти операторы $A(a)$, такие, что

$$[A(a), E] = 0 \,; \quad A(a) J_j A(a)^{-1} = J_j(a) \,; \quad A(a)_b = A(a \cap b) \,. \tag{2.14}$$

Для системы из четырех и большего числа частиц пакующие операторы в точечной форме были найдены в работе /74/, однако эти операторы удовлетворяют лишь первым двум условиям (2.12), а третье условие для них не выполняется. Аналогично, в случае фронтовой формы в работе /66/ были найдены лишь операторы, удовлетворяющие первым двум условиям (2.14), но третье условие для них также не выполняется. Поэтому задача построения генераторов для системы четырех и более тел в точечной и фронтовой формах пока еще окончательно не решена, вопреки утверждениям в работах /31,50/. Как и в рассмотренном выше случае массового оператора, условие (2.4) означает, что оператор $A_{d_1 \dots d_n}$ не должен зависеть от порядка, в котором производится выключение взаимодействий между подсистемами $d_1 \dots d_n$. В случае же трех частиц разбиение системы на три невзаимодействующие подсистемы означает выключение всех взаимодействий, пакующие операторы обращаются в данном случае в единицу, и условие (2.4) выполняется автоматически.

В мгновенной форме роль операторов E играют $\vec{P}$ и $\vec{M} = \{M^{23}, M^{31}, M^{12}\}$. В качестве же $F(a)$ выбирают операторы положения Ньютона-Вигнера, которые выражаются через генераторы представления следующим образом:

$$\vec{X}(a) = -\frac{1}{2}\{P^0(a)^{-1}, \vec{N}(a)\} + \frac{\vec{P} \times \vec{W}(a)}{M(a)P^0(a)[M(a) + P^0(a)]} \,, \tag{2.15}$$

где $\vec{N}=\{M^{01}, M^{02}, M^{03}\}$, $\vec{W}=\{W^1, W^2, W^3\}$.Если ввести операторы

$$\vec{J}(a)=\vec{M}-\vec{X}(a)\times\vec{P}, \tag{2.16}$$

то операторы $\vec{N}(a)$ могут быть выражены через $\vec{X}(a)$ при помощи соотношения

$$\vec{N}(a)=-\frac{1}{2}\{P^{0}(a),\vec{X}(a)\}+\frac{\vec{J}(a)\times\vec{P}}{M(a)+P^{0}(a)}. \tag{2.17}$$

Таким образом, между наборами $\{\vec{M},\vec{P},\vec{N}(a),P^{0}(a)\}$ и $\{\vec{M},\vec{P},\vec{X}(a),M(a)\}$ имеется взаимно однозначное соответствие.

Свойства введенного таким образом оператора $\vec{X}(a)$ рассматривались во многих работах (см.,например, работы /89,90/. Исходя из коммутационных соотношения для генераторов представления, можно показать, что оператор (2.15) удовлетворяет каноническим коммутационным соотношениям для оператора координаты:

$$[X(a)^{i}, X(a)^{k}]=0;\quad [X(a)^{i}, P^{k}]=i\delta^{ik}. \tag{2.18}$$

Для решения задачи о сложении взаимодействий в мгновенной форме нам надо найти оператор $A(a)$, такой, что

$$[A(a),\vec{M}]=[A(a),\vec{P}]=0,\quad A(a)\vec{X}A(a)^{-1}=\vec{X}(a).$$

$$A(a)_{b}=A(a\cap b). \tag{2.19}$$

Рассмотрим набор операторов $\vec{P}=\{P^1,P^2,P^3\}$.Пусть $\Delta\to E(\Delta)$ - спектральная мера, соответствующая этому набору, так что каждому множеству Δ в пространстве импульсов R^3 соответствует проектор $E(\Delta)$. Из коммутационных соотношений между операторами $\vec{M}$ и $\vec{P}$ и из (2.18) можно получить стандартным способом, что

$$U(\tau)E(\Delta)U(\tau)^{-1}=E(L(\tau)\Delta), \tag{2.20}$$

$$\exp(i\vec{X}(a)\vec{p})E(\Delta)\exp(-i\vec{X}(a)\vec{p})=E(\Delta+\vec{p}), \tag{2.21}$$

где $\tau\in SU(2)$, $L(\tau)\Delta$ означает множество, полученное из Δ вращением $L(\tau)$, а $\Delta+\vec{p}$ - множество, полученное прибавлением ко всем векторам из Δ вектора $\vec{p}$. Ясно, что если бы в формулах (2.18) и (2.21) мы взяли $\vec{X}$ вместо $\vec{X}(a)$, то формулы остались бы такими же. Здесь важно то, что в мгновенной форме операторы $\vec{P}$ свободны от взаимодействия, и поэтому спектральная мера также не зависит от взаимодействия. Из формулы (2.21) тогда легко следует, что при любых Δ и $\vec{p}$

$$e^{i\vec{X}(a)\vec{p}}e^{-i\vec{X}\vec{p}}E(\Delta)=E(\Delta)e^{i\vec{X}(a)\vec{p}}e^{-i\vec{X}\vec{p}}. \tag{2.22}$$

Рассмотрим оператор

$$A(a)=\int dE(p)\,e^{i\vec{X}(a)\vec{p}}e^{-i\vec{X}\vec{p}}. \tag{2.23}$$

Здесь интеграл понимается как предел римановых интегральных сумм вида

$$\sum_{k}E(\Delta_k)e^{-i\vec{X}(a)\vec{p}_k}e^{-i\vec{X}\vec{p}_k},$$

где множества Δ_k не пересекаются и $\vec{p}_k\in\Delta_k$. Для читателя, желающего иметь строгое обоснование, отметим, что вначале интеграл определяется по ограниченным множествам S в R^3. При этом можно показать стандартным способом, что предел римановых интегральных сумм существует в смысле равномерной сходимости операторов. Затем интеграл (2.23) определяется как сильный предел интеграла по множеству S, когда S в пределе заполняет все трехмерное пространство импульсов R^3.

Используя (2.22), можно показать стандартным способом, что оператор (2.23) является унитарным. Из "физических" же соображений это ясно из самого способа построения оператора $A(a)$. Действительно, из (2.23) видно, что оператор $A(a)$ строится следующим образом. Все пространство H разбивается на подпространства $H(\vec{p})$ с определенным значением импульса $\vec{p}$, и в каждом $H(\vec{p})$ действует унитарный оператор $exp(i\vec{X}(a)\vec{p})exp(-i\vec{X}\vec{p})$. Строгое определение пространств $H(\vec{p})$ может быть дано на языке прямого интеграла (см. § 2.3).

Из формул (2.20) - (2.23) следует, что

$$[A(a),U(\tau)]=[A(a),E(\Delta)]=0\,,$$
$$A(a)e^{i\vec{X}\vec{p}}A(a)^{-1}=e^{i\vec{X}(a)\vec{p}} \tag{2.24}$$

для любых $\tau\in SU(2)$, $\vec{p},\Delta\in R^3$. Поэтому оператор $A(a)$ удовлетворяет первым трем условиям (2.19). Выполнимость же условия $A(a)_b=A(a\cap b)$ следует из (2.3).

Приведенное решение для оператора $A(a)$ было предложено Мутце /86/. Оно выглядит весьма привлекательно с эстетической точки зрения и просто для понимания, так как по существу вся конструкция является чисто алгебраической. Кроме того, трудно себе представить, что для оператора $A(a)$ может существовать решение, более простое, чем (2.23). Однако несмотря на то, что формула (2.23) полностью решает задачу в принципиальном плане, она неудобна в практических вычислениях, поскольку оператор положения Ньютона-Вигнера $\vec{X}(a)$ выражается через генераторы представления сложным образом (см. 2.I5)). В § 2.4 мы дадим решение для $A(a)$, не использующее оператор $\vec{X}(a)$, однако нам придется использовать формализм прямого интеграла.

В заключение этого параграфа отметим, что в точечной и фронтовой формах аналогичный подход к нахождению оператора $A(a)$ не проходит. Действительно, если мы рассмотрим, например, точечную форму, то оператором, канонически сопряженным с $\vec{G}(a)$, здесь будет $\vec{R}(a)=M(a)\vec{X}(a)$, и в наборе $\{\vec{G}(a),\vec{R}(a)\}$ все операторы, вообще говоря, зависят от взаимодействия, в отличие от той ситуации, которая имелась в мгновенной форме.

§ 2.3. Различные разложения пространства H

В этом и следующем параграфах задача о сложении взаимодействий будет рассмотрена в формализме прямого интеграла. При этом для пакующих операторов будут даны формулы, которые в дальнейшем непосредственно применяются для конкретных расчетов. Мы увидим также, что задача о сложении взаимодействий тесно связана с вопросом о разделении движений на "внешнее" и "внутреннее".

Пусть $g\to\hat{U}(g)$ унитарное представление группы Пуанкаре в гильбертовом пространстве H. В процессе нашего рассмотрения мы будем налагать на операторы этого представления некоторые естественные условия, однако мы не будем предполагать, что представление $g\to\hat{U}(g)$ задано в какой-либо форме динамики. Таким образом, все 10 генераторов представления $g\to\hat{U}(g)$ могут, вообще говоря, отличаться от генераторов представления $g\to U(g)$ при отсутствии взаимодействия.

Рассмотрим вначале сужение представления $g\to\hat{U}(g)$ на группу сдвигов обычного трехмерного пространства. Генераторами соответствующего представления будут компоненты оператора импульса $\hat{\vec{P}}$. Эти операторы однозначно определяются представлением $g\to\hat{U}(g)$, поскольку, как хорошо известно (см., например, /91/), унитарное представление коммутативной группы однозначно определяет спектральную меру $\Delta\to\hat{E}(\Delta)$. В данном случае эта мера задана на пространстве импульсов R^3. Предположим, что эта мера абсолютно непрерывна относительно обычной евклидовой меры на R^3, $\Delta\to\partial(\Delta)$. Тогда для любых $\xi,\eta\in H$ существует функция $f(\vec{p};\xi,\eta)$ такая, что для любого (борелевого) множества Δ

$$(\hat{E}(\Delta)\xi,\eta)=\int_\Delta f(\vec{p};\xi,\eta)\,d^3\vec{p}\,, \tag{2.25}$$

где (,) - скалярное произведение в H. Функция $f(\vec{p};\xi,\eta)$ определена (почти всюду по евклидовой мере на R^3) как производная Радона-Никодима

$$f(\vec{p};\xi,\eta)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{(\hat{E}(\Delta)\xi,\eta)}{\partial(\Delta)}\,, \tag{2.26}$$

где предел берется по множествам Δ, содержащим точку $\vec{p}$ и стягивающимся к этой точке.

Пусть $X(\vec{p})$ - такое подпространство в H, что $f(\vec{p};\xi,\xi)$

существует для всех $\xi \in \mathcal{X}(\vec{p})$. Функция $f(\vec{p};\xi,\eta)$ задает на $\mathcal{X}(\vec{p})$ полускалярное произведение и порождает естественным образом скалярное произведение в фактор-пространстве $\mathcal{X}(\vec{p})/N(\vec{p})$, где $N(\vec{p})=\{\xi: f(\vec{p};\xi,\xi)=0\}$. Определим $\hat{H}(\vec{p})$ как пополнение $\mathcal{X}(\vec{p})/N(\vec{p})$, а $I(\vec{p})$ – как композицию двух канонических гомоморфизмов $\mathcal{X}(\vec{p})\to\mathcal{X}(\vec{p})/N(\vec{p})\to\hat{H}(\vec{p})$. Разумеется, образ $\mathcal{X}(\vec{p})$ при отображении $I(\vec{p})$ плотен в $\hat{H}(\vec{p})$.
Определим гильбертово пространство $\int\oplus\hat{H}(\vec{p})d^3\vec{p}$. Элементами этого пространства являются наборы $\{\xi(\vec{p})\}$, $\xi(\vec{p})\in\hat{H}(\vec{p})$, которые удовлетворяют так называемому условию f – измеримости (см., например, /92/) и условию

$$\int\|\xi(\vec{p})\|^2_{\hat{H}(\vec{p})}d^3\vec{p}<\infty\,, \tag{2.27}$$

где $\|\ldots\|_{\hat{H}(\vec{p})}$ есть норма в $\hat{H}(\vec{p})$, а интегрирование в (2.27) ведется по всему трехмерному пространству. Унитарный оператор $\hat{T}$ из H в $\int\oplus\hat{H}(\vec{p})d^3\vec{p}$ определяется следующим образом: для любого $\xi\in H$, $\hat{T}\xi=\{I(\vec{p})\xi\}$ (из сказанного выше следует, что $I(\vec{p})\xi$ определено почти при всех $\vec{p}$).

Так как массовый оператор $\hat{M}$ коммутирует с $\hat{E}(\Delta)$, то, по теореме фон Неймана (см., например, /91,93/), в представлении $H=\int\oplus\hat{H}(\vec{p})d^3\vec{p}$ он является разложимым оператором $\{\hat{m}(\vec{p})\}$, где $\hat{m}(\vec{p})$ – оператор в $\hat{H}(\vec{p})$, и если $E(\mu)$ – спектральная функция оператора $\hat{M}$, а $\hat{e}(\mu;\vec{p})$ – спектральная функция оператора $\hat{m}(\vec{p})$, то

$$I(\vec{p})E(\mu)\xi=\hat{e}(\mu;\vec{p})I(\vec{p})\xi\,. \tag{2.28}$$

Пусть $h=I(\vec{p})\xi$. Тогда из (2.28) следует, что

$$\|h\|^2_{\hat{H}(\vec{p})}=\int d(\hat{e}(\mu;\vec{p})h,h)=\int df(\vec{p};E(\mu)\xi,\xi)\,. \tag{2.29}$$

Интегралы в (2.29) являются интегралами Стильтьеса по спектру операторов $\hat{m}(\vec{p})$ и $\hat{M}$ соответственно.

Обозначим $\hat{H}(0)=\hat{H}(\vec{p})$ при $\vec{p}=0$. Нашей следующей задачей будет построение унитарного оператора $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})$ из $\hat{H}(0)$ в $\hat{H}(\vec{p})$ при любом $\vec{p}$. Обозначим через $\alpha(\vec{p}/\mu)$ матрицу (I.II) и определим оператор

$$\hat{\tilde{U}}(\vec{p})=\int\hat{U}(\alpha(\frac{\vec{p}}{\mu}))d\hat{E}(\mu) \tag{2.30}$$

как сильный предел соответствующих римановых интегральных сумм. Так как операторы $\hat{U}(\alpha(\vec{p}/\mu))$ унитарны, то можно стандартным образом убедиться в том, что оператор (2.30) также унитарен. Введем оператор $\hat{B}(\vec{p})=(1+\vec{p}^2/\hat{M}^2)^{1/4}$ и определим новый оператор $\hat{U}(\vec{p})=\hat{B}(\vec{p})\hat{\tilde{U}}(\vec{p})$. Теперь мы можем определить оператор $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})$ следующим образом.

$$\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})h=I(\vec{p})\hat{U}(\vec{p})\xi\,, \tag{2.31}$$

если $h=I(0)\xi$. Используя формулы (2.26) и (2.29), можно показать стандартным вычислением, что $\|\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})h\|_{\hat{H}(\vec{p})}=\|h\|_{\hat{H}(0)}$.
Поэтому оператор $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})$ корректно определен формулой (2.31) и изометричен. Этот оператор имеет обратный:

$$\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})^{-1}h'=I(0)\hat{U}(\vec{p})^{-1}\eta\,, \tag{2.32}$$

если $h'=I(\vec{p})\eta$. Поэтому $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})$ является унитарным оператором из $\hat{H}(0)$ в $\hat{H}(\vec{p})$. Необходимость введения оператора $\hat{B}(\vec{p})$ связана с тем хорошо известным из теории одночастичных представлений фактом, что релятивистски-инвариантной мерой является не $d^3\vec{p}$, а $d^3\vec{p}/(m^2+\vec{p}^2)^{1/2}$, где m – масса частицы.

Рассмотрим теперь ограничение представления $g\to\hat{U}(g)$ на группу $SU(2)$. По аналогии с доказательством унитарности операторов $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})$ мы можем доказать, что операторы $\hat{u}(\tau)$, определяемые формулой

$$\hat{u}(\tau)h=I(0)\hat{U}(\tau)\xi\,, \tag{2.33}$$

где $\tau\in SU(2)$, $h=I(0)\xi$, определяют унитарное представление группы $SU(2)$ в $\hat{H}(0)$.

Из свойств интеграла Стильтьеса (так называемой первой теоремы Хелли (см., например, /94/)) следует, что операторы $\hat{\tilde{U}}(\vec{p})$, определенные формулой (2.30), сильно непрерывны по $\vec{p}$. Поэтому набор операторов $\{\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})^{-1}\}$ имеет свойства измеримости, достаточные для того, чтобы оператор

$$\hat{\mathcal{U}}^{-1}=\int\oplus\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})^{-1}d^3\vec{p} \tag{2.34}$$

являлся унитарным оператором из $\int\oplus\hat{H}(\vec{p})d^3\vec{p}$ в $L_2(\vec{p})\otimes\hat{H}(0)$, где $L_2(\vec{p})$ – пространство комплексных функций от $\vec{p}$, квадрат модуля которых интегрируем по мере ϑ (подробное рассмотрение теории прямых операторных интегралов имеется в книге Диксмье /93/). Тогда оператор $\hat{\mathcal{U}}^{-1}\hat{\Pi}$ является унитарным оператором из H в $L_2(\vec{p})\otimes\hat{H}(0)$.

Мы подошли к основной задаче этого пункта: определению вида представления $g\to\hat{U}(g)$ в пространстве $L_2(\vec{p})\otimes\hat{H}(0)$. Сделаем следующее предположение: в пространстве H существует плотное подпространство $\mathcal{X}$, инвариантное относительно всех операторов $\hat{U}(g)$, $\hat{E}(\mu)$ и такое, что если $\xi\in\mathcal{X}$, то $f(\vec{p};\xi,\xi)$ непрерывно по $\vec{p}$. Можно показать, что в качестве $\mathcal{X}$ можно взять, например, пространство бесконечно-дифференцируемых векторов H^∞ (см., например, главу II в книге /30/), но мы не будем на этом останавливаться. В приложениях обычно ясно, какое пространство выбрать в качестве $\mathcal{X}$ (см. главу 3).

Пусть $\xi\in\mathcal{X}$, $\eta=\hat{U}(g)\xi$. Тогда с учетом (2.30) и (2.31)

$$\eta(\vec{p})=I(\vec{p})\hat{U}(g)\xi=\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})I(0)\int\Big(1+\frac{\vec{P}^2}{\mu^2}\Big)^{-1/4}\hat{U}\Big(\alpha\Big(\frac{\vec{P}}{\mu}\Big)\Big)^{-1}\times$$

$$\hat{U}(g)d\hat{E}(\mu)\xi\;. \tag{2.35}$$

Представим $g\in G$ в виде (ℓ,a), где $\ell\in SL(2,C)$, $a\in\mathcal{T}$. Тогда $\ell^{-1}\alpha(\vec{P}/\mu)=\alpha(\vec{P}'/\mu)\,(\ell^{-1},p)$, где фактор определен в (I.9), а вектор $\vec{p}'$ - в (I.I2). Тогда

$$\eta(\vec{p})=\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})I(0)\int d\hat{E}(\mu)\Big(\frac{\mu^2+\vec{p}'^2}{\mu^2+\vec{p}^2}\Big)^{1/4}\hat{U}((\ell^{-1},p))^{-1},$$

$$\hat{U}\Big(L\Big(\alpha\Big(\frac{\vec{P}'}{\mu}\Big)\Big)^{-1}a\Big)\hat{U}\Big(\alpha\Big(\frac{\vec{P}'}{\mu}\Big)\Big)^{-1}\Big(1+\frac{\vec{P}^2}{\mu^2}\Big)^{-1/4}\xi\;. \tag{2.36}$$

Теперь мы воспользуемся (2.28) и внесем $I(0)$ в подынтегральное выражение (2.36). Мы не будем заниматься математическим обоснованием этой операции, однако отметим, что оно не совсем простое, так как $I(0)$ не является ограниченным оператором из $\hat{H}$ в $\hat{H}(0)$; тем не менее, можно доказать, что оператор $I(0)$ является в некотором смысле замкнутым и внесение его в подынтегральное выражение (2.36) законно.

Исходя из формул (I,I2), (I,I3), (2.32) - (2.34) и (2.36), мы можем теперь заключить следующее. Генераторы представления $g\to\hat{U}(g)$ можно представить в виде $\hat{\Gamma}^i=\hat{\Pi}^{-1}\hat{\mathcal{U}}\Gamma^i(\vec{p};\hat{m},\hat{\vec{j}})\hat{\mathcal{U}}^{-1}\hat{\Pi}\;(i=1,2,...10)$, где $\hat{m}=\hat{m}(0)$, $\hat{\vec{j}}$ - генераторы представления $z\to\hat{u}(z)$ в $\hat{H}(0)$, а операторы $\Gamma^i(\vec{p};\hat{m},\hat{\vec{j}})$, действующие в $L_2(\vec{p})\otimes\hat{H}(0)$, имеют вид

$$\hat{\vec{P}}=\vec{p};\qquad\hat{E}=(\hat{m}^2+\vec{p}^2)^{1/2};\qquad\hat{\vec{M}}=\vec{\ell}(\vec{p})+\hat{\vec{j}};$$

$$\hat{\vec{N}}=-i(\hat{m}^2+\vec{p}^2)^{1/4}\frac{\partial}{\partial\vec{p}}(\hat{m}^2+\vec{p}^2)^{1/4}+\frac{\hat{\vec{j}}\times\vec{p}}{\hat{m}+(\hat{m}^2+\vec{p}^2)^{1/2}}\;, \tag{2.37}$$

где $\hat{\vec{M}}$ - генераторы представления группы $SU(2)$, $\hat{\vec{N}}$ - генераторы лоренцевских бустов, а зависимость от $\hat{m}$, как обычно, понимается в виде спектрального разложения.

Мы видим, что генераторы (2.37) имеют тот же вид, что и генераторы одночастичного представления в (I.I3), но в (2.37) вместо массы частицы входит массовый оператор $\hat{m}$ в $\hat{H}(0)$, а вместо генераторов спина - генераторы представления $z\to\hat{u}(z)$ в $\hat{H}(0)$. Таким образом, переход к пространству $L_2(\vec{p})\otimes\hat{H}(0)$ физически связан с разделением переменных на внешние и внутренние. Внешняя переменная определяется по 3-импульсу $\hat{\vec{P}}$, а внутренними переменными являются переменные пространства $\hat{H}(0)$. В релятивистской теории в качестве оператора, описывающего движение системы как целого, можно, однако, выбирать и другие наборы трех коммутирующих самосопряженных операторов. Соответственно, и другим будет разложение пространства H. Ниже мы описываем такое разложение еще в двух случаях.

Возьмем, вначале в качестве "внешней переменной", оператор 4-скорости $\hat{G}=\hat{P}/\hat{M}$. Так как $\hat{G}^2=1$, то ясно, что на самом деле независимыми являются лишь три оператора, например $\hat{\vec{G}}=\hat{\vec{P}}/\hat{M}$. Набор операторов $\hat{\vec{G}}$ определяет спектральную меру $\Delta\to\hat{E}(\Delta)$ на гиперболоиде λ^2 = I. Пусть эта мера абсолютно непрерывна относительно меры $d\vartheta(\lambda)=d^3\vec{\lambda}/(1+\vec{\lambda}^2)^{1/2}$. Тогда мы можем реализовать H в виде $\int\oplus\hat{H}(\lambda)d\vartheta(\lambda)$. Обозначим $\hat{H}(0)=\hat{H}(\lambda)$ при $\vec{\lambda}$ = 0. Разумеется, это пространство отличается от пространства $\hat{H}(0)$, рассмотренного выше. Здесь и далее мы, однако, будем использовать те же обозначения, что и выше, для того, чтобы аналогия между рассматриваемыми случаями выглядела более явной.

Как и выше, мы можем построить унитарный оператор $\hat{\mathcal{U}}(\lambda)$ из $\hat{H}(0)$ в $\hat{H}(\lambda)$. Так как мера $d\vartheta(\lambda)$ является релятивистски инвариантной, то для построения операторов $\hat{\mathcal{U}}(\lambda)$ достаточно использовать лишь операторы $\hat{U}(d(\vec{\lambda}))$, а нужды в операторах типа $\hat{B}(\vec{p})$ не возникает. Сужая операторы $\hat{M}$ и $\hat{U}(r)$ на $\hat{H}(0)$, мы можем, как и выше, определить операторы $\hat{m}$ и $\hat{u}(r)$.

Путь $\hat{\mathcal{T}}$ реализует H в виде $\int\oplus\hat{H}(\lambda)d\vartheta(\lambda)$, а $\hat{\mathcal{U}} = \int\oplus\hat{\mathcal{U}}(\lambda)d\vartheta(\lambda)$. Тогда для генераторов представления $g\to\hat{U}(g)$ мы имеем $\hat{\Gamma}^i = \hat{\mathcal{T}}^{-1}\hat{\mathcal{U}}\Gamma^i(\vec{\lambda};\hat{m},\hat{\vec{j}})\hat{\mathcal{U}}^{-1}\hat{\mathcal{T}}$, а явный вид операторов $\Gamma^i(\vec{\lambda};\hat{m},\hat{\vec{j}})$ в $L_2(\vec{\lambda})\otimes\hat{H}(0)$ следующий (ср.с (I.18)):

$$\hat{P} = \hat{m}\lambda, \quad \hat{\vec{M}} = \vec{l}(\lambda)+\hat{\vec{j}},$$

$$\vec{N} = -i\lambda_0\frac{\partial}{\partial\vec{\lambda}} + \frac{\hat{\vec{j}}\times\vec{\lambda}}{1+\lambda_0}, \tag{2.38}$$

причем $L_2(\vec{\lambda})$ - пространство функций на гиперболоиде, таких, что

$$\int|f(\lambda)|^2 d\vartheta(\lambda) < \infty.$$

Рассмотренные выше разложения пространства H применяются, как мы увидим в дальнейшем, для сложения взаимодействий в мгновенной и точечной формах соответственно. Опишем еще одно разложение, которое применяется во фронтовой форме. В качестве "внешней переменной" здесь выбираются операторы $\{\hat{P}^j, \hat{P}^+\}$ $(j=1,2)$, а в качестве меры на пространстве импульсов $-d\vartheta(\vec{p}_\perp,p^+) = d^2\vec{p}_\perp dp^+/2p^+$. Поэтому можно построить оператор $\hat{\mathcal{T}}$, реализующий H в виде $\int\oplus\hat{H}(\vec{p}_\perp,p^+)d\vartheta(\vec{p}_\perp,p^+)$. В качестве аналога $\hat{H}(0)$ можно выбрать пространство $\hat{H}(\vec{p}_\perp{}',p'^+)$ с $\vec{p}_\perp{}' = 0$ и произвольным значением $p'^+ > 0$. Тогда операторы $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p}_\perp,p^+)$ можно определить формулой

$$\hat{\mathcal{U}}(\vec{p}_\perp,p^+)h = I(\vec{p}_\perp,p^+)\hat{U}(l(p'\to p))\xi, \tag{2.39}$$

где $h = I(\vec{p}_\perp{}',p'^+)\xi$, а матрица $l(p'\to p)$ определяется по аналогии с (I.23), (I.24).

Операторы $\hat{\vec{j}}$ определяются в данном случае следующим образом. Так как оператор Паули-Любаньского коммутирует с оператором 4-импульса, то в представлении $\int\oplus\hat{H}(\vec{p}_\perp,p^+)d\vartheta(\vec{p}_\perp,p^+)$ он разложим.

Обозначим через $\hat{j}_1$, $\hat{j}_2$ и $\hat{j}_3$ сужения на $\hat{H}(0,p'^+)$ операторов $\hat{W}^1/\hat{M}$, $\hat{W}^2/\hat{M}$ и $\hat{W}^+/\hat{p}^+$ соответственно (ср.с (2.I3)). Тогда набор $\{\hat{j}_1,\hat{j}_2,\hat{j}_3\}$ удовлетворяет коммутационным соотношениям для операторов спина. Генераторы же представления $g\to\hat{U}(g)$ можно записать в виде $\hat{\Gamma}^i = \hat{\mathcal{T}}^{-1}\hat{\mathcal{U}}\Gamma^i(\vec{p}_\perp,p^+;\hat{m},\hat{\vec{j}})\hat{\mathcal{U}}^{-1}\hat{\mathcal{T}}$, где генераторы представления $\Gamma^i(\vec{p}_\perp,p^+;\hat{m},\hat{\vec{j}})$ действуют в $L_2(\vec{p}_\perp,p^+)\otimes\hat{H}(0,p'^+)$ и имеют в этом пространстве вид (ср. с (I.22))

$$\hat{P}^+ = p^+, \quad \hat{\vec{P}}_\perp = \vec{p}_\perp, \quad \hat{P}^- = \frac{\hat{m}^2+\vec{p}_\perp^{\,2}}{2p^+},$$

$$\hat{M}^{+-} = ip^+\frac{\partial}{\partial p^+}; \quad \hat{M}^{+j} = -ip^+\frac{\partial}{\partial p^j}; \quad \hat{M}^{12} = l_3(\vec{p}_\perp)+\hat{j}_3,$$

$$\hat{M}^{-j} = -i\left(p^j\frac{\partial}{\partial p^+}+\hat{P}^-\frac{\partial}{\partial p^j}\right) - \frac{\varepsilon_{jl}}{p^+}(\hat{m}\hat{j}_l+p^l\hat{j}_3), \tag{2.40}$$

где $\hat{m}$ - сужение $\hat{M}$ на $\hat{H}(0,p'^+)$.

Итак, мы рассмотрели три разложения пространства H. Общим у этих разложений является то, что из I0 генераторов представления группы Пуанкаре $g\to\hat{U}(g)$ мы выделили массовый оператор $\hat{M}$, , некоторый 3-векторный оператор $\hat{\vec{K}}$, задающий разложение $H=\int\oplus\hat{H}(\vec{k})d\vartheta(\vec{k})$ по некоторой мере ϑ, трехпараметрическое семейство операторов, используемое для построения операторов $\hat{\mathcal{U}}(\vec{k})$, и трехпараметрическое семейство операторов, используемое для построения операторов $\hat{\vec{j}}$. Рассмотрим также представление $g\to U(g)$ и допустим, что по этому представлению можно определить разложение $H=\int\oplus H(\vec{k})d\vartheta(\vec{k})$ по той же мере ϑ и операторы $\mathcal{U}(\vec{k})$ и $\vec{j}$. Допустим, нам удалось найти такой унитарный оператор A из $H(0)$ в $\hat{H}(0)$, что $A\vec{j}A^{-1} = \hat{\vec{j}}$. Тогда, как следует из проведенных построений, оператор

$$\mathcal{A} = \hat{\mathcal{T}}^{-1}\left\{\int\oplus\hat{\mathcal{U}}(\vec{k})A\,\mathcal{U}(\vec{k})^{-1}d\vartheta(\vec{k})\right\}\mathcal{T} \tag{2.4I}$$

осуществляет унитарную эквивалентность между генераторами представления $g\to\hat{U}(g)$ и операторами

$$\widetilde{\Gamma}^i=\Pi^{-1}\,\mathcal{U}\,\Gamma^i(\vec{k};\widetilde{m};\vec{j})\,\mathcal{U}^{-1}\Pi\ , \tag{2.42}$$

где $\widetilde{m}=A^{-1}\hat{m}A$. Из этой формулы и из формул (2.37), (2.38) и (2.40) следует, что для случая трех последовательных разложений, рассмотренных выше, мы можем получить таким образом унитарную эквивалентность генераторов произвольного представления и представления, заданного соответственно в мгновенной, точечной и фронтовой формах. В общем случае, однако, мы не видим, какой естественный оператор может претендовать на роль A, и поэтому вопрос остается открытым. Кроме того, унитарная эквивалентность двух представлений еще не означает их физической эквивалентности. Необходимо, чтобы оператор, осуществляющий эквивалентность, связывал также S - матрицы в обоих представлениях (см., например, /79/).

§ 2.4. Сложение взаимодействий в формализме прямого интеграла

При использовании разложений, описанных выше, мы можем для каждого представления $g\to U(g;a)$ (см. § 2.I) построить операторы $\Pi(a)$, $\mathcal{U}(\vec{k};a)$, $\vec{j}(a)$, $m(a)$ и пространства $H(\vec{k};a)$, такие, что представление $g\to U(g;a)$ реализуется в пространстве $\int\oplus H(\vec{k};a)d\nu(\vec{k})$, где $\Delta\to\nu(\Delta)$ — некоторая мера. Мы предполагаем, что мера $\Delta\to\nu(\Delta)$ выбрана одинаковой при всех a. В то же время указанные выше операторы и пространства при различных a, вообще говоря, отличаются друг от друга. Ясно, что операцию перехода от $\mathcal{O}$ к $\mathcal{O}_b$, описанную в § 2.I, можно применять и к операторам, и к пространствам $H(\vec{k};a)$. Так как $U(g;a)_b=U(g;a\cap b)$ (см. § 2.I), то все операторы и пространства, построенные по представлению $g\to U(g;a)$, также обладают таким свойством.

Допустим, нам удалось найти унитарные операторы $A(a)$ из $H(0)$ в $H(0;a)$, которые удовлетворяют условиям

$$A(a)\vec{j}A(a)^{-1}=\vec{j}(a)\ ,\qquad A(a)_b=A(a\cap b)\ . \tag{2.43}$$

Тогда, исходя из результатов § 2.3, мы можем представить генераторы представления $g\to U(g;a)$ в виде

$$\Gamma^i(a)=\mathcal{A}(a)\,\widetilde{\Gamma}^i(a)\,\mathcal{A}(a)^{-1}\qquad (i=1,2,\dots 10)\ , \tag{2.44}$$

где (ср.с (4.4I), (4.42))

$$\mathcal{A}(a)=\Pi(a)^{-1}\Big\{\int\oplus\,\mathcal{U}(\vec{k};a)A(a)\,\mathcal{U}(\vec{k})^{-1}d\nu(\vec{k})\Big\}\Pi\ , \tag{2.45}$$

$$\widetilde{\Gamma}^i(a)=\Pi^{-1}\,\mathcal{U}\,\Gamma^i(\vec{k};\widetilde{m}(a),\vec{j})\,\mathcal{U}^{-1}\Pi\ , \tag{2.46}$$

$$\widetilde{m}(a)=A(a)^{-1}m(a)A(a)\ . \tag{2.47}$$

Из (2.43) и сказанного выше следует, что

$$\mathcal{A}(a)_b=\mathcal{A}(a\cap b)\ ;\qquad \widetilde{m}(a)_b=\widetilde{m}(a\cap b)\ . \tag{2.48}$$

Поэтому мы можем по той же схеме, что и в § 2.I, из операторов $\widetilde{m}(a)$ построить $\widetilde{\mathfrak{m}}$, а из операторов $\mathcal{A}(a)$ построить $\mathfrak{A}$, так что

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_a=\widetilde{m}(a)\ ,\qquad \mathfrak{A}_a=\mathcal{A}(a)\ . \tag{2.49}$$

Тогда формула

$$\hat{\Gamma}^i=\mathfrak{A}\,\widetilde{\Gamma}^i\,\mathfrak{A}^{-1}\ , \tag{2.50}$$

где

$$\widetilde{\Gamma}^i=\Pi^{-1}\,\mathcal{U}\,\Gamma^i(\vec{k};\widetilde{\mathfrak{m}},\vec{j})\,\mathcal{U}^{-1}\Pi\ . \tag{2.5I}$$

дает решение задачи о сложении взаимодействий, при котором выполняется условие релятивистской инвариантности и сепарабельности.

Напомним, что хотя мы не конкретизируем какую-либо из форм динамики, надо иметь в виду, что в этом параграфе мы рассматриваем задачу о сложении взаимодействий в какой-нибудь определенной форме. В каждой форме свободными от взаимодействия являются генераторы при таких i, при которых $\Gamma^i(\vec{k};\widetilde{m},\vec{j})$ не зависит от $\widetilde{m}$ (см. (2.37), (2.38), (2.40)). Поэтому если для каждой формы мы будем использовать соответствующее разложение в прямой интеграл (см. §2.3), то, как следует из (2.44) и (2.46), при этих i операторы $\mathcal{A}(a)$ и $\widetilde{\Gamma}^i(a)=\Gamma^i$ коммутируют друг с другом. Поэтому, как следует из (2.50) и (2.5I), задача о сложении взаимодействий решается, таким образом, не выходя за рамки данной формы.

Обсудим теперь, как конкретно изложенная выше схема работает в каждой из трех основных форм динамики.

В точечной форме все пространства $H(0;a)$ вообще говоря, различны. Следовательно, все операторы $\mathcal{U}(\lambda;a)$ также, вообще говоря, различны, хотя они порождаются одним и тем же оператором $\mathcal{U}(d(\vec{\lambda}))$, не зависящим от взаимодействия. Соответственно, все операторы $\vec{j}(a)$, вообще говоря, отличаются от $\vec{j}$. Поэтому нахождение оператора $A(a)$ из $H(0)$ из $H(0;a)$, который удовлетворяет (2.43), является в общем случае непростой задачей.

Во фронтовой форме все пространства $H(\vec{p}_\perp,p^+;a)$ при различных "a" совпадают друг с другом, т.е. $H(\vec{p}_\perp,p^+;a)=H(\vec{p}_\perp,p^+)$. $\mathcal{T}(a)=\mathcal{T}$. Все операторы $\mathcal{U}(\vec{p}_\perp,p^+;a)$ также одинаковы при различных "a" и совпадают с $\mathcal{U}(\vec{p}_\perp,p^+)$. Что же касается операторов $\vec{j}(a)$, то все они действуют в одном пространстве $H(0,p'^+)$ и при всех "a" $j_3(a)=j_3$. Однако операторы $j_1(a)$ и $j_2(a)$ при различных "a", вообще говоря, отличаются друг от друга. Для решения задачи о сложении взаимодействий надо найти операторы $A(a)$ в $H(0,p'^+)$, удовлетворяющие (2.43). Ясно, что в общем случае эта задача далеко не простая.

В мгновенной форме все пространства $H(\vec{p};a)$ при различных "a" также совпадают друг с другом, т.е. $H(\vec{p};a)=H(\vec{p})$, $\mathcal{T}(a)=\mathcal{T}$. Операторы же $\mathcal{U}(\vec{p};a)$ зависят от взаимодействия, однако так как они зависят лишь от операторов представления $g\to\mathcal{U}(g;a)$, то $\mathcal{U}(\vec{p};a)_B=\mathcal{U}(\vec{p};a\cap B)$. Так как операторы представления группы $SU(2)$ не зависят от взаимодействия и $H(0;a)=H(0)$, то, очевидно, все операторы $\vec{j}(a)$ действуют в одном и том же пространстве и совпадают с $\vec{j}$. Поэтому задача о сложении взаимодействий полностью решается, если для всех "a" положить $A(a)=$ I.

Вариант $A(a)=$ I в мгновенной форме соответствует следующему. Мы берем массовые операторы $M(a)$, сужаем их на пространство $H(0)$ и получаем операторы $m(a)$. Последние уже без всякой упаковки входят в формулы типа (2.6), (2.7). В точечной и фронтовой формах мы не можем положить $A(a)=$ I. Это, конечно, еще не означает, что эти формы "хуже" мгновенной. В то же время мы видим, что в мгновенной форме мы можем построить нужное унитарное преобразование в "один прием", не используя пакующих операторов для подсистем, а возможность такого построения в точечной и фронтовой формах пока еще не вполне ясна.

В мгновенной форме мы можем придать закону сложения взаимодействий в массовом операторе такой же вид, как и нерелятивистской квантовой механике.

Действительно, операторы $\hat{m}_{d_1\ldots d_n}$ равны сужению на $H(0)$ массовых операторов $\hat{M}_{d_1\ldots d_n}$, соответствующих представлению $g\to\mathcal{U}_{d_1\ldots d_n}(g)$. В свою очередь, сужение $\hat{M}_{d_1\ldots d_n}$ на $H(0)$, очевидно, совпадает с сужением на $H(0)$ оператора энергии $\hat{E}_{d_1\ldots d_n}$. Последний же обладает свойством аддитивности: $\hat{E}_{d_1\ldots d_n}=\hat{E}_{d_1}+\ldots\hat{E}_{d_n}$. Поэтому мы можем ввести операторы, учитывающие "двухчастичные", "трехчастичные" и т.д. взаимодействия. Именно, занумеруем все объекты в системе индексами I,2... N. Определим

$$V_{k\ell}=\hat{E}_{k\ell}-\hat{E}_k-\hat{E}_\ell\ ,$$

$$V_{k\ell m}=\hat{E}_{k\ell m}-V_{k\ell}-V_{km}-V_{\ell m}-\hat{E}_k-\hat{E}_\ell-\hat{E}_m \tag{2.52}$$

и так далее. $\hat{E}_{k\ell}$ означает здесь оператор энергии системы, состоящей из объектов k и ℓ, $\hat{E}_{k\ell m}$ – оператор энергии системы, состоящей из объектов k, ℓ и m и т.д. Операторы $V_{k\ell}, V_{k\ell m}$ и т.д., очевидно, коммутируют с $\vec{P}$. Поэтому в представлении $H=\int\oplus H(\vec{p})d^3\vec{p}$ они являются разложимыми операторами. Обозначим $v_{k\ell}$, $v_{k\ell m}$ и т.д. их сужения на $H(0)$. Обозначим теперь через m сужение свободного массового оператора на $H(0)$. Тогда оператор

$$\hat{m}=m+\frac{1}{2!}\sum_{k\neq\ell}v_{k\ell}+\frac{1}{3!}\sum_{k\neq\ell\neq m}v_{k\ell m}+\ldots v_N \tag{2.53}$$

будет удовлетворять всем нужным требованиям.

В мгновенной форме можно дать также более простой вид для закона сложения взаимодействий в операторе A. Поскольку оператор $\mathcal{T}(a)$ не зависит от "a" в этой форме, мы можем положить $\mathcal{T}(a)=$ I, т.е. сразу считать, что пространство H уже реализовано как $\int\oplus H(\vec{p})d^3\vec{p}$. Тогда вместо (2.45) мы имеем при $A(a)=$ I

$$A(a)=\int\oplus\,\mathcal{U}(\vec{p};a)\,\mathcal{U}(\vec{p})^{-1}d^3\vec{p}=\int\oplus\,\mathcal{W}(\vec{p};a)\,d^3\vec{p}\ . \tag{2.54}$$

где $\mathcal{W}(\vec{p};a)=\mathcal{U}(\vec{p};a)\,\mathcal{U}(\vec{p})^{-1}$ является оператором в $H(\vec{p})$. При каждом $\vec{p}$ мы можем из унитарных операторов $\mathcal{W}(\vec{p};a)$ построить "разделимое произведение" $\hat{\mathcal{W}}(\vec{p})$, как описано выше, а затем представить оператор A в виде

$$A=\hat{\mathcal{U}}\,\mathcal{U}^{-1}, \qquad \hat{\mathcal{U}}=\int\oplus\,\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})\,d^3\vec{p},$$

$$\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})=\hat{\mathcal{W}}(\vec{p})\,\mathcal{U}(\vec{p}). \tag{2.55}$$

Как отмечалось в § I.3, в квантовой теории поля мгновенная форма получается при выборе гиперповерхности с $\lambda^{\circ}=1$, $\vec{\lambda}=0$. Поэтому если полный лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{int}(x)$ представить в виде суммы всех "элементарных" лагранжианов взаимодействия $\mathcal{L}^{(n)}_{int}(x)$, то из (I.7) мы получим

$$\hat{P}^{\circ}=P^{\circ}-\sum_n\int\mathcal{L}^{(n)}_{int}(x)\,d^3\vec{x}. \tag{2.56}$$

Так как сужения операторов энергии и массового оператора на пространство $H(0)$ совпадают друг с другом, и пространство $H(0)$ в мгновенной форме не зависит от взаимодействия, то ясно, что, сужая (2.56) на $H(0)$, мы получим формулу (2.53). Поэтому в квантовой теории поля также выбирается $A(a)=1$, причем массовые операторы складываются в полный массовый оператор линейно. Нахождение же явного вида операторов $A(a)$ и закона их сложения в оператор A здесь технически далеко не простое.

Рассмотренный в § 2.3 и в этом параграфе подход в формализме прямого интеграла может показаться гораздо более сложным, чем изложенный в § 2.3. На самом же деле основные сложности заключаются лишь в математическом обосновании действий с прямыми интегралами, а физический смысл пакующих операторов здесь весьма прозрачен. Так, например, в мгновенной форме мы связываем пространство $H(0)$ для нулевого импульса с пространством $H(\vec{p})$ при помощи обычного лоренцевского буста, а необходимость введения пакующих операторов здесь связана с тем, что операторы бустов зависят от взаимодействия. С технической же точки зрения, подход в формализме прямого интеграла позволяет свести задачу нахождения оператора $A(a)$, удовлетворяющего условиям (2.2) и (2.4), к более простой задаче о нахождении оператора $A(a)$, удовлетворяющего лишь условиям (2.43). Таким образом, мы переходим от всего пространства H к более узкому пространству $H(0;a)$, описывающему лишь внутренние переменные.

В заключение этого параграфа сравним найденное решение в мгновенной форме с решением Кэстера и Полизоу /31/ и с решением Мутце /86/, описанным в параграфе 2.2. Кэстер и Полизоу /31/ также используют разложение в прямой интеграл $H=\int\oplus H(\vec{p})\,d^3\vec{p}$. Они работают в формализме многоканальной теории рассеяния и вводят дополнительное пространство $H_f=\int\oplus H_f(\vec{p})\,d^3\vec{p}$, которое является прямой суммой канальных пространств. Далее они связывают пространства $H(\vec{p})$ и $H_f(\vec{p})$ между собой $H(\vec{p})=\exp(-i\vec{p}\,\vec{X}(a))\cdot H(0)$, $H_f(\vec{p})=\exp(-i\vec{p}\vec{X}_f)H_f(0)$, где $\vec{X}(a)$ и $\vec{X}_f$ – операторы Ньютона-Вигнера в H и H_f соответственно. Эти равенства надо понимать в смысле формулы (2.31):

$$\mathcal{U}'(\vec{p};a)h=I(\vec{p})\exp(i\vec{p}\,\vec{X}(a))\xi,$$

$$\mathcal{U}'_f(\vec{p})\,h_f=I_f(\vec{p})\exp(i\vec{p}\,\vec{X}_f)\xi_f, \tag{2.57}$$

если $h=I(0)\xi$, $h_f=I_f(0)\xi_f$. Далее Кэстер и Полизоу рассматривают два разложимых волновых оператора из H_f в H:

$$\Omega(a)=\int\oplus\,\Omega(\vec{p};a)\,d^3\vec{p}, \qquad \tilde{\Omega}=\int\oplus\,\tilde{\Omega}(\vec{p})\,d^3\vec{p}, \tag{2.58}$$

где

$$\Omega(\vec{p};a)=\mathcal{U}'(\vec{p};a)\,\Omega(0;a)\,\mathcal{U}'_f(\vec{p})^{-1},$$

$$\tilde{\Omega}(\vec{p})=\mathcal{U}'(\vec{p})\,\Omega(0;a)\,\mathcal{U}'_f(\vec{p})^{-1}, \tag{2.59}$$

причем индексы $\pm$ у этих операторов мы опускаем. Вместо оператора $A(a)^{-1}$ из (2.54), Кэстер и Полизоу /31/ решают задачу при помощи оператора $B=\tilde{\Omega}\Omega^{+}$ (см. формулу (3.67) из их работы). В предположении полноты волновых операторов из (2.58) и (2.59) тогда следует, что

$$B(a)=\int\oplus\,\mathcal{U}'(\vec{p})\,\mathcal{U}'(\vec{p};a)^{-1}\,d^3\vec{p}. \tag{2.60}$$

Таким образом, мы явно показали, что вспомогательное пространство H_f и канальные волновые операторы могут быть исключены из ответа - результат, отмеченный Кэстером и Полизоу во Введении их работы. Из формулы (2.60) получаем, что

$$A(a)=\int\oplus\, \mathcal{U}'(\vec{p};a)\,\mathcal{U}'(\vec{p})^{-1}d^3\vec{p}\ . \tag{2.61}$$

Из определения операторов $\mathcal{U}'(\vec{p};a)$ в (2.57) легко видеть, что когда разложение в прямой интеграл законно, оператор (2.23) также можно представить в виде (2.61). Поэтому если разложение в прямой интеграл законно, то решения Кэстера и Полизоу /31/ и Мутце /86/ совпадают друг с другом.

Покажем теперь, что операторы $\mathcal{U}(\vec{p};a)$, определенные формулой (2.31), совпадают с операторами $\mathcal{U}'(\vec{p};a)$. Так как оператор Ньютона-Вигнера, построенный по генераторам (2.37), имеет стандартный вид $i\partial/\partial\vec{p}$, то из представления $\hat{\Gamma}^i=\hat{\mathcal{U}}\Gamma^i(\vec{p};\hat{m},\hat{j})\,\hat{\mathcal{U}}^{-1}$ в мгновенной форме (мы считаем, что $\mathcal{T}$ = I) следует, что

$$\vec{X}(a)=\mathcal{U}(a)\left\{i\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\right\}\mathcal{U}(a)^{-1}. \tag{2.62}$$

Если пространство H уже реализовано в виде $\int\oplus H(\vec{p})d^3\vec{p}$ и элемент $\xi\in H$ определяется набором $\xi=\{\xi(\vec{p})\}$, то при $\xi\in\mathcal{X}$ (см. § 2.3) мы, очевидно, имеем

$$I(\vec{p}\,')\xi=\xi(\vec{p}\,')\ . \tag{2.63}$$

Легко видеть также, что если оператор $\vec{X}_o$ в $L_2(\vec{p})\otimes H(0)$ имеет вид $i\partial/\partial\vec{p}$, то

$$exp\{i\vec{p}\,'\vec{X}_o\}\{\xi(\vec{p})\}=\{\xi_1(\vec{p})\}\ , \tag{2.64}$$

где $\xi_1(\vec{p})=\xi(\vec{p}-\vec{p}\,')$. Поэтому если $\xi=\{\xi(\vec{p})\}$, где $\xi(\vec{p})\in H(\vec{p})$, то

$$e^{i\vec{p}\,'\vec{X}_o}\,\mathcal{U}(a)^{-1}\xi=\{\eta_1(\vec{p})\}\ , \tag{2.65}$$

где $\eta_1(\vec{p})=\eta(\vec{p}-\vec{p}\,')$, а $\eta(\vec{p})=\mathcal{U}(\vec{p};a)^{-1}\xi(\vec{p})$. Поэтому, как следует из (2.62),

$$e^{i\vec{p}\,'\vec{X}(a)}\xi=\{\mathcal{U}(\vec{p};a)\eta_1(\vec{p})\}\ , \tag{2.66}$$

а из (2.57) и (2.63) теперь следует, что

$$\mathcal{U}'(\vec{p};a)\xi(0)=\mathcal{U}(\vec{p};a)\eta_1(\vec{p})\ . \tag{2.67}$$

Но, очевидно, что $\eta_1(\vec{p}\,')=\xi(0)$, так как, по определению операторов $\mathcal{U}(\vec{p};a)$, $\mathcal{U}(0;a)$ = I. Поэтому, действительно, $\mathcal{U}'(\vec{p};a)=\mathcal{U}(\vec{p};a)$, и если разложение в прямой интеграл законно, то найденное в этом параграфе решение с $A(a)$ = I (впервые оно изложено в работах /85,95/) совпадает с решениями Кэстера и Полизоу /31/ и Мутце /86/. Можно показать также (см. работу /96/), что это решение может быть обобщено на случай, когда теория является не только Пуанкаре-, но и супер-Пуанкаре-инвариантной

§ 2.5. Задача рассеяния в релятивистской квантовой механике

После того как построено представление группы Пуанкаре, описывающее рассматриваемую систему, необходимо найти S - матрицу и убедиться в том, что она релятивистски-инвариантна. Мы рассмотрим, для простоты, постановку задачи рассеяния в РКМ, когда объекты, составляющие систему, являются частицами.

Пусть α означает канал, в котором имеются невзаимодействующие подсистемы $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_K$, причем частицы, составляющие каждую подсистему, находятся в связанном состоянии. Обозначим Π_α - проектор на состояния такого канала. Рассмотрим лишь случай мгновенной формы. В ней динамика определяется оператором энергии, и канальный волновой оператор представляется в виде

$$W_{\alpha\pm} = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\, \exp(i\hat{P}^\circ t)\exp(-iP^\circ(a)t)\Pi_\alpha \,, \tag{2.68}$$

где $s\text{-}\lim$ означает сильный предел, а " a " соответствует разбиению на подсистемы $\alpha_1,\dots \alpha_k$. При $\mathbb{T}$ = I формулу (2.68) с учетом (2.54) и (2.55) можно, очевидно, представить в виде

$$W_{\alpha\pm} = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\, \hat{\mathcal{U}}\exp(i\hat{E}t)\hat{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{U}(a)\times$$

$$\times\exp(-iE_\alpha t)\tilde{\Pi}_\alpha\,\mathcal{U}(a)^{-1}\,, \tag{2.69}$$

где, с учетом (2.37)

$$\hat{E} = (\hat{m}^2+\hat{\vec{p}}^2)^{1/2}\,,\qquad E_\alpha = (m^2_{\alpha_1\dots\alpha_k}+\vec{p}^2)^{1/2}\,,$$

$$\Pi_\alpha = \mathcal{U}(a)\tilde{\Pi}_\alpha\,\mathcal{U}(a)^{-1}. \tag{2.70}$$

Величина $m_{\alpha_1\dots\alpha_k}$, очевидно, вычисляется как масса свободной системы из частиц с массами $m_{\alpha_1}, m_{\alpha_2}\dots\ m_{\alpha_k}$. Операторы $\hat{E}, E_\alpha$ и $\tilde{\Pi}_\alpha$ действуют в $L_2(\vec{p})\otimes H(0)$, причем $\tilde{\Pi}_\alpha$ можно представить в виде

$$\tilde{\Pi}_\alpha = 1\otimes\pi_\alpha\,, \tag{2.71}$$

где π_α - оператор в $H(0)$, коммутирующий с $\vec{j}$ и $m_{\alpha_1\dots\alpha_k}$. Допустим, что выполняется следующее условие разделимости пакующих операторов

$$\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\,[\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}(a)-1]e^{-iE_\alpha t}\tilde{\Pi}_\alpha = 0\,. \tag{2.72}$$

Тогда из (2.69) следует, что

$$W_{\alpha\pm} = \hat{\mathcal{U}}\,\tilde{W}_{\alpha\pm}(\hat{E},E_\alpha)\,\mathcal{U}(a)^{-1}\,, \tag{2.73}$$

где

$$\tilde{W}_{\alpha\pm}(\hat{E},E_\alpha) = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{i\hat{E}t}e^{-iE_\alpha t}\tilde{\Pi}_\alpha\,. \tag{2.74}$$

Допустим, что выполняется принцип инвариантности волновых операторов $\tilde{W}_{\alpha\pm}(\hat{E},E_\alpha) = \tilde{W}_\alpha(\hat{E}^2, E^2_\alpha)$. Очевидно, что $\tilde{W}_\alpha(\hat{E}^2,E^2_\alpha) = \tilde{W}_\alpha(\hat{m}^2, m^2_{\alpha_1\dots\alpha_k})$. Поэтому $\tilde{W}_{\alpha\pm}(\hat{E},E_\alpha) = 1\otimes w_{\alpha\pm}$, где $w_{\alpha\pm}$ действует в $H(0)$ и определяется формулой

$$w_{\alpha\pm} = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{i\hat{m}t}e^{-im_{\alpha_1\dots\alpha_k}t}\pi_\alpha\,. \tag{2.75}$$

Пусть β - канал с разбиением на подсистемы $\beta_1\dots\beta_\ell$ и $g\to\mathcal{U}(g;b)$ - соответствующее представление. Как обычно, определим элемент S - матрицы для перехода из канала α в канал β формулой

$$S_{\beta\alpha} = W^*_{\beta+}W_{\alpha-}\,. \tag{2.76}$$

Тогда из (2.73) - (2.76) следует, что

$$S_{\beta\alpha} = \mathcal{U}(\beta)(1\otimes s_{\beta\alpha})\,\mathcal{U}(\alpha)^{-1}\,, \tag{2.77}$$

где $s_{\beta\alpha} = w^*_{\beta+}w_{\alpha-}$

Условие релятивистской инвариантности S - матрицы заключается в том, что матричные элементы оператора $S_{\beta\alpha}$ между состояниями Φ_β и Φ_α должны быть равны матричным элементам, вычисленным между состояниями, полученными из Φ_β и Φ_α одним и тем же преобразованием группы Пуанкаре. Таким образом, для любого элемента g из группы Пуанкаре должно быть

$$\langle\Phi_\beta|S_{\beta\alpha}|\Phi_\alpha\rangle = \langle\mathcal{U}(g;b)\Phi_\beta|S_{\beta\alpha}|\mathcal{U}(g;a)\Phi_\alpha\rangle\,. \tag{2.78}$$

Следовательно, условие релятивистской инвариантности S - матрицы имеет вид

$$S_{\beta\alpha} = U(g;b)^{-1} S_{\beta\alpha} U(g;a) . \tag{2.79}$$

Очевидно, что $U(g;a)$ можно представить в виде

$$U(g;a) = \mathcal{U}(a) U(\vec{p}; m_{\alpha_1 \dots \alpha_k}, \vec{j}; g) \mathcal{U}(a)^{-1} , \tag{2.80}$$

где операторы представления $g \to U(\vec{p}; m_{\alpha_1 \dots \alpha_k}, \vec{j}; g)$ определяются по генераторам(2.37) с $\hat{m} = m_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$. Поэтому из (2.77) и (2.79) следует, что условие релятивистской инвариантности S - матрицы выполнено, если для любой ограниченной функции $f(x)$

$$S_{\beta\alpha} f(m_{\alpha_1 \dots \alpha_k}) = f(m_{\beta_1 \dots \beta_l}) S_{\beta\alpha} . \tag{2.81}$$

Итак, мы видим, что обоснование задачи рассеяния в мгновенной форме должно проводиться следующим образом. Вначале надо доказать, что выполняется условие разделимости пакующих операторов (2.72). После этого мы можем рассмотреть задачу в пространстве $L_2(\vec{p}) \otimes H(0)$. Далее, если выполняется принцип инвариантности $\widetilde{W}_{\alpha\pm}(\hat{E}, E_\alpha) = \widetilde{W}_{\alpha\pm}(\hat{E}^2, E_\alpha^2)$, то задача сводится к определению S - матрицы "внутреннего движения", т.е. к определению операторов $S_{\beta\alpha}$ в $H(0)$. Как и в нерелятивистской теории, необходимо доказать, что оператор $S_{\beta\alpha}$ унитарен и выполняется (2.81). Тогда S - матрица будет унитарной и релятивистски-инвариантной.

Замечание: Если мы из каких-либо соображений уверены в том, что S - матрица релятивистски-инвариантна, то параметры интересующего нас процесса можно вычислять в любой системе отсчета, например в системе центра инерции. Тогда, как следует из (2.77), нам достаточно знать $S_{\beta\alpha}$, а значение операторов $\mathcal{U}(a)$ необязательно, так как $\mathcal{U}(\vec{p}=0) = 1$. Однако это не значит, что операторы $\mathcal{U}(\vec{p})$ играют лишь формальную роль, так как $S_{\beta\alpha}$ зависит от операторов $\mathcal{U}_{\alpha_i}(\vec{p})$ для всевозможных подсистем рассматриваемой системы.

По аналогии с проведенным рассмотрением можно разобрать задачу рассеяния и в других формах динамики. Во всех формах существенно используются условия разделимости пакующих операторов и принцип инвариантности волновых операторов. На необходимость условий разделимости пакующих операторов впервые было указано Соколовым /29/. В работе /80/ было показано, что это условие не является особенно ограничительным, так как оно выполняется для широкого класса пакующих операторов. Поэтому можно думать, что основная сложность в математическом обосновании теории рассеяния будет заключаться в доказательстве свойств S - матрицы "внутреннего движения". С идейной точки зрения доказательство свойств S - матрицы "внутреннего движения" может проводиться по той же схеме, что в работах Фаддеева и других авторов. С технической же точки зрения релятивистский случай является более сложным, чем нерелятивистский, поскольку, вследствие релятивистской кинематики, связь между различными наборами внутренних переменных значительно сложнее, чем в нерелятивистском случае (см., например, § 3.6).

В качестве пространства $\mathcal{X}$ (см. § 2.3) можно взять, например, пространство непрерывных функций в H. Если же мы хотим, кроме того, чтобы на $\mathcal{X}$ было определено представление алгебры Ли группы Пуанкаре, то в качестве $\mathcal{X}$ можно взять пространство финитных бесконечнодифференцируемых функций. Для некоторых целей в качестве $\mathcal{X}$ можно выбрать еще более узкое пространство, которое тем не менее плотно в H, но мы не будем обсуждать этот вопрос (см., например, главу II в книге /30/). На функциях из $\mathcal{X}$ оператор $I(\vec{p})$ определяется формулой

$$I(\vec{p})\,\varphi(\vec{P},\vec{k}_1,\dots\vec{k}_N,\sigma_1,\dots\sigma_N)=\varphi(\vec{p},\vec{k}_1,\dots\vec{k}_N,\sigma_1,\dots\sigma_N)\,. \tag{3.8}$$

Отметим, что действие оператора $I(0)$ можно представить в виде

$$I(0)\,\varphi(\vec{p}_1,\sigma_1,\dots\vec{p}_N,\sigma_N)=\varphi(\vec{k}_1,\sigma_1,\dots\vec{k}_N,\sigma_N)\,. \tag{3.9}$$

При выборе в одночастичном пространстве релятивистски-инвариантной меры (3.2) операторы одночастичного представления имеют вид (ср. с (I.I2))

$$U_{m_i s_i}(l,a)\,\varphi_i(\vec{p}_i)=\exp\{i(L(l)a,p_i)\}\times \mathcal{D}^{s_i}\left((l^{-1},p_i)\right)^{-1}\varphi_i(\vec{p}_i{}'), \tag{3.10}$$

где $\mathcal{D}^{s_i}(\tau)$ - матрица неприводимого представления группы $SU(2)$ со спином s_i, соответствующая $\tau\in SU(2)$, $p_i'=L(l)^{-1}p_i$. Поскольку если частицы не взаимодействуют, то они описываются тензорным произведением одночастичных представлений, мы можем теперь, исходя из формул (2.30), (2.31), (3.8) и (3.10), найти вид операторов $\mathcal{U}(\vec{p})$.

Введем матрицу

$$\gamma\left(\frac{\vec{P}}{m},\frac{\vec{k}_i}{m_i}\right)=\alpha\left(\frac{\vec{p}_i}{m_i}\right)^{-1}\alpha\left(\frac{\vec{P}}{m}\right)\alpha\left(\frac{\vec{k}_i}{m_i}\right). \tag{3.11}$$

Ее явный вид следующий:

$$\gamma\left(\frac{\vec{P}}{m},\frac{\vec{K}_i}{m_i}\right)=\frac{(E+m)(\varepsilon_i+m_i)+\vec{P}\vec{k}_i+i\vec{\sigma}(\vec{P}\times\vec{k}_i)}{\{2(E+m)(\varepsilon_i+m_i)(E\varepsilon_i+\vec{P}\vec{k}_i+mm_i)\}^{1/2}}\,, \tag{3.12}$$

где $E=(m^2+\vec{P}^2)^{1/2}$, $\varepsilon_i=\varepsilon_i(\vec{k}_i)$. Действие же оператора $\mathcal{U}(\vec{p})$ дается формулой

$$\mathcal{U}(\vec{p})\,\varphi(\vec{k}_1,\dots\vec{k}_N)=\left(1+\frac{\vec{P}^2}{m^2}\right)^{1/4}\times \prod_{i=1}^{N}\mathcal{D}^{s_i}\left\{\gamma_i\left(\frac{\vec{P}}{m},\frac{\vec{k}_i}{m_i}\right)\right\}\varphi(\vec{k}_1,\dots\vec{k}_N,\sigma_1,\dots\sigma_N), \tag{3.13}$$

где $\mathcal{D}^{s_i}$ действует лишь по спиновой переменной σ_i.

Из формул (2.33) и (3.9) легко следует также, что если в качестве $N-1$ независимых импульсов в $H(0)$ взять $\vec{k}_1,\vec{k}_2,\dots\vec{k}_{N-1}$, то оператор $\vec{j}$ (см. § 2.3) имеет стандартный вид

$$\vec{j}=\vec{l}(\vec{k}_1)+\dots+\vec{l}(\vec{k}_{N-1})+\vec{s}_1+\dots+\vec{s}_N\,, \tag{3.14}$$

где $\vec{s}_i$ - оператор спина i-й частицы. Генераторы же представления группы Пуанкаре в пространстве $L_2(\vec{p})\otimes H(0)$ имеют вид (2.37), где $\hat{m}$ заменено на $m=m(\vec{k}_1,\dots\vec{k}_N)=\varepsilon_1(\vec{k}_1)+\dots+\varepsilon_N(\vec{k}_N)$.

§ 3.2. Системы двух и трех взаимодействующих частиц в мгновенной форме динамики

Согласно общим правилам, описанным в § 2.4, введение взаимодействия в систему двух частиц производится при помощи замены оператора m в $H(0)$ на $\hat{m}$ и при помощи замены операторов $\mathcal{U}(\vec{p})$ некоторыми операторами $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})$. При этом оператор $\hat{m}$ должен коммутировать с

$\vec{j}$, а $\hat{\mathcal{U}}=\int\oplus\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})d^3\vec{p}$ – с операторами $\vec{P}$ и $U(r)\,(r\in SU(2))$ для того, чтобы не нарушились коммутационные соотношения и чтобы мы не вышли за рамки мгновенной формы. Будем считать, что $\hat{m}=m+\widetilde{w}$, где $m=\varepsilon_1(\vec{k})+\varepsilon_2(\vec{k})$, $\vec{k}=\vec{k}_1$, а действие $\widetilde{w}$, как интегрального оператора, дается формулой (см. (3.6))

$$\widetilde{w}\,\varphi(\vec{k},\sigma_1,\sigma_2)=\int\widetilde{w}(\vec{k},\sigma_1,\sigma_2;\vec{k}',\sigma_1',\sigma_2')\,\varphi(\vec{k}',\sigma_1',\sigma_2')\,\frac{d^3\vec{k}'}{4\varepsilon_1(\vec{k}')\varepsilon_2(\vec{k}')}\,, \tag{3.15}$$

где $\widetilde{w}(\vec{k},\sigma_1,\sigma_2;\vec{k}',\sigma_1',\sigma_2')$ – ядро оператора $\widetilde{w}$, а по повторяющимся индексам производится суммирование. Из условия коммутации $\widetilde{w}$ с оператором (3.14) следует, очевидно, что ядро $\widetilde{w}(\vec{k},\vec{k}')$, рассматриваемое как оператор по спиновым переменным, должно зависеть лишь от скалярных произведений трехмерных векторов, составленных из векторов $\vec{k},\vec{k}'$ и операторов спина. Таким образом, на ядро оператора накладываются такие же условия, как и в нерелятивистской квантовой механике.

Легко видеть, что уравнение на собственные значения массового оператора совпадает с уравнением типа Логунова – Тавхелидзе /43/, причем оператор взаимодействия, в отличие от квазипотенциала в уравнении Логунова-Тавхелидзе, не имеет мнимой части и не зависит от энергии. Это, очевидно, является следствием того, что мы предположили физическую адекватность РКМ при низких энергиях (см. обсуждение в главе I). Возникает также следующий вопрос: имеются ли какие-нибудь дополнительные условия, которым должен удовлетворять оператор $\hat{\mathcal{U}}$.

В работе /55/ в качестве "внутреннего" элемента объема для частиц равной массы вместо (3.6) выбиралось $d^3\vec{k}/\varepsilon(\vec{k})\ (\varepsilon(\vec{k})=\varepsilon_1(\vec{k})=\varepsilon_2(\vec{k}))$, что пропорционально релятивистски-инвариантному элементу объема для частиц с массой $m_1=m_2$ и импульсом $\vec{k}$. Это наблюдение дало толчок большой серии работ, в которых как и в /55/, при помощи преобразования Шапиро /97/ было введено релятивистское координатное пространство, а затем считалось, что релятивистский оператор взаимодействия имеет в этом пространстве такой же вид, что и нерелятивистский оператор взаимодействия в обычном пространстве.

В работах Рюйгрока и де Гроота /58,59/, в которых форма динамики является точечной, в качестве "внутренней" переменной выбирается не импульсная, а скоростная переменная и считается, что оператор взаимодействия локален в таком пространстве.

Только что рассмотренные и другие способы релятивизации могут

быть привлекательны с математической и технической точек зрения, однако, как ясно из обсуждения в главе I, нет физических причин для того, чтобы предпочесть какой-либо из них. Если исходить из квантовой теории поля, то, например, различные релятивизации кулоновского потенциала должны удовлетворять не только условию перехода в обычный кулоновский потенциал в нерелятивистском пределе, но и условию перехода в брейтовский потенциал в приближении $1/c^2$. В работах же /55,58,59/ это последнее условие не выполняется.

Что же касается операторов $\mathcal{U}(\vec{p})$, то их вид не сказывается на двухчастичной S -матрице, однако выбор $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})$ существен , если рассматриваемая двухчастичная система является составной частью более сложной системы (см. Замечание в § 2.5). Одна из возможностей заключается в том, чтобы не вводить взаимодействия в операторы $\mathcal{U}(\vec{p})$, т.е. положить $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})=\mathcal{U}(\vec{p})$. На языке метода пакующих операторов Соколова можно сказать, что выбор $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})=\mathcal{U}(\vec{p})$ соответствует тому, что в двухчастичном случае пакующие операторы выбираются равными единице (см. формулу (2.55). Такой выбор представляется естественным, но он требует физического обоснования. Мы рассмотрим этот вопрос в § 3.3. Сейчас же просто примем, что $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})=\mathcal{U}(\vec{p})$.

При выборе $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})=\mathcal{U}(\vec{p})$ мы имеем из (2.37), что оператор энергии для системы двух взаимодействующих частиц имеет следующий вид в пространстве H :

$$\hat{P}^0=\mathcal{U}(\hat{m}^2+\vec{P}^2)^{1/2}\,\mathcal{U}^{-1}, \tag{3.16}$$

а если $\hat{m}=m+\widetilde{w}$, то

$$\hat{P}^0=\{(m+\widetilde{W})^2+\vec{P}^2\}^{1/2}, \quad \widetilde{W}=\mathcal{U}\,\widetilde{w}\,\mathcal{U}^{-1}. \tag{3.17}$$

Согласно (3.5) и (3.6), двухчастичное пространство H можно реализовать как пространство функций $\varphi(\vec{P},\vec{k},\sigma_1,\sigma_2)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2}\int|\varphi(\vec{P},\vec{k},\sigma_1,\sigma_2)|^2\,\frac{d^3\vec{P}\,d^3\vec{k}\,m(\vec{k})}{4E(\vec{P})\varepsilon_1(\vec{k})\varepsilon_2(\vec{k})}<\infty\,, \tag{3.18}$$

где $E(\vec{P})=(m(\vec{k})^2+\vec{P}^2)^{1/2}$. Тогда, как следует из (3.13) и (3.17), ядро оператора $\widetilde{W}$, рассматриваемое как оператор по спиновым пере-

ГЛАВА 3. СИСТЕМА МНОГИХ ТЕЛ В МГНОВЕННОЙ ФОРМЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

В описанной в главе 2 схеме решения задачи о сложении взаимодействий никак не использовались конкретные свойства этих взаимодействий. Поэтому результаты главы 2 могут, в принципе, применяться как в локальных, так и в нелокальных теориях, причем число частиц может, вообще говоря, меняться. Теперь мы обсудим конкретно случай РКМ. Заметим, что описанная схема может применяться как для сложения, так и для введения взаимодействия в систему (член с V_N в формуле (2.6)).

§ 3.I. Реализация представления группы Пуанкаре для системы невзаимодействующих частиц

В РКМ пространством представления для системы N свободных или взаимодействующих частиц является тензорное произведение одночастичных пространств. Занумеруем частицы индексами I,2 ... N. Состояние каждой частицы будем характеризовать ее импульсом $\vec p_i$ и проекцией спина σ_i. В качестве матриц $x(p)$ (см. § I.5) будем выбирать $\alpha(\vec p_i/m_i)$ (см. (I.II). В отличие от (I.IO), нам будет удобно считать теперь, что одночастичное представление действует в пространстве функций $\varphi(\vec p_i,\sigma_i)$ таких, что

$$\sum_{\sigma_i}\int \left|\varphi(\vec p_i,\sigma_i)\right|^2 d\vartheta(\vec p_i)<\infty , \tag{3.I}$$

где

$$d\vartheta(\vec p_i)=\frac{d^3\vec p_i}{2\varepsilon_i(\vec p_i)}\;;\qquad \varepsilon_i(\vec p)=(m_i^2+\vec p^{\,2})^{1/2} . \tag{3.2}$$

Тогда пространство H для N частиц является пространством функций $\varphi(\vec p_1,\sigma_1,\dots \vec p_N,\sigma_N)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\dots\sigma_N}\int\left|\varphi(\vec p_1,\sigma_1,\dots \vec p_N;\sigma_N)\right|^2 d\vartheta(\vec p_1)\dots d\vartheta(\vec p_N)<\infty . \tag{3.3}$$

От переменных $\vec p_i$ перейдем к новым переменным. Обозначим $\vec P=\vec p_1+\vec p_2+\dots+\vec p_N$, а через $\vec k_i$ обозначим пространственную часть 4-вектора

$$K_i=\Lambda\left\{\alpha\left(\frac{\vec P}{M}\right)^{-1}\right\}p_i , \tag{3.4}$$

где $M^2=(p_1+\dots+p_N)^2$, а p_i – 4-импульс свободной частицы i. Легко видеть, что $\vec k_1+\dots+\vec k_N=0$, $M=\varepsilon_1(\vec k_1)+\dots+\varepsilon_N(\vec k_N)$. В переменных $\vec P,\vec k_1,\dots\vec k_N$ пространство H реализуется как пространство функций $\varphi(\vec P,\vec k_1,\dots\vec k_N,\sigma_1,\dots\sigma_N)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\dots\sigma_N}\int\frac{d^3\vec P}{\left(1+\frac{\vec P^2}{M^2}\right)^{1/2}}\,d\vartheta(int)\left|\varphi(\vec P,\vec k_1,\dots\vec k_N,\sigma_1,\dots\sigma_N)\right|^2<\infty , \tag{3.5}$$

где

$$d\vartheta(int)=\frac{d^3\vec k_1}{2\varepsilon_1(\vec k_1)}\cdots\frac{d^3\vec k_N}{2\varepsilon_N(\vec k_N)}\,\delta^{(3)}(\vec k_1+\dots+\vec k_N) . \tag{3.6}$$

Как следует из (3.5), пространство H можно реализовать в виде $H=\int\oplus H(\vec P)\,d^3\vec P$, где пространство $H(\vec P)$ при фиксированном $\vec P$ является пространством функций $\varphi(\vec k_1,\dots\vec k_N,\sigma_1\dots\sigma_N)$, для которых

$$\sum_{\sigma_1\dots\sigma_N}\int\frac{d\vartheta(int)}{\left(1+\frac{\vec P^2}{M^2}\right)^{1/2}}\left|\varphi(\vec k_1,\dots\vec k_N,\sigma_1,\dots\sigma_N)\right|^2<\infty . \tag{3.7}$$

В частности, $H(0)$ является пространством функций от $\vec k_1,\dots\vec k_N,\sigma_1,\dots\sigma_N$, квадрат модуля которых интегрируем по мере $d\vartheta(int)$ при каждом $\sigma_1,\dots\sigma_N$.

менным, имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\vec{P},\vec{k};\vec{P}',\vec{k}')=\delta^{(3)}(\vec{P}-\vec{P}')\left(\frac{EE'}{mm'}\right)^{1/2}\mathcal{U}(\vec{P},\vec{k})\widetilde{w}(\vec{k},\vec{k}')\,\mathcal{U}(\vec{P},\vec{k}')^{-1}, \tag{3.19}$$

где (ср. с (2.76))

$$\mathcal{U}(\vec{P},\vec{k})=\mathcal{D}^{s_1}(\gamma_1(\frac{\vec{P}}{m},\frac{\vec{k}}{m_1}))\,\mathcal{D}^{s_2}(\gamma_2(\frac{\vec{P}}{m},-\frac{\vec{k}}{m_2})),$$

$$m=m(\vec{k}),\ m'=m(\vec{k}'),\ E=(m^2+\vec{P}^2)^{1/2},\ E'=(m'^2+\vec{P}'^2)^{1/2}. \tag{3.20}$$

Обозначим через $\mathcal{W}$ действие оператора $\widetilde{\mathcal{W}}$ в случае, когда интегрирование производится по мере $d^3\vec{P}d^3\vec{k}$ (вместо (3.18)), а через w – действие оператора $\widetilde{w}$, когда интегрирование в $H(0)$ ведется не по мере $d\vartheta(int)$ (см. (3.6)), а по $d^3\vec{k}$. Тогда мы имеем, очевидно,

$$\mathcal{W}(\vec{P},\vec{k};\vec{P}',\vec{k}')=\frac{\widetilde{\mathcal{W}}(\vec{P},\vec{k};\vec{P}',\vec{k}')(mm')^{1/2}}{4\{EE'\varepsilon_1(\vec{k})\varepsilon_2(\vec{k})\varepsilon_1(\vec{k}')\varepsilon_2(\vec{k}')\}^{1/2}},$$

$$w(\vec{k},\vec{k}')=\frac{\widetilde{w}(\vec{k},\vec{k}')}{4\{\varepsilon_1(\vec{k})\varepsilon_2(\vec{k})\varepsilon_1(\vec{k}')\varepsilon_2(\vec{k}')\}^{1/2}}. \tag{3.21}$$

Поэтому из (3.19) и (3.21) следует, что

$$\mathcal{W}(\vec{P},\vec{k})=\delta^{(3)}(\vec{P}-\vec{P}')\,\mathcal{U}(\vec{P},\vec{k})\,w(\vec{k},\vec{k}')\,\mathcal{U}(\vec{P},\vec{k}')^{-1}. \tag{3.22}$$

Итак, мы имеем, что в пространстве функций $\varphi(\vec{P},\vec{k},\sigma_1,\sigma_2)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2}\int|\varphi(\vec{P},\vec{k},\sigma_1,\sigma_2)|^2d^3\vec{P}d^3\vec{k}, \tag{3.23}$$

оператор энергии двухчастичной системы представляется в виде

$$\hat{P}^0=E(\vec{P})+V;\quad V=[(m+\mathcal{W})^2+\vec{P}^2]^{1/2}-(m^2+\vec{P}^2)^{1/2}. \tag{3.24}$$

Рассмотрим теперь систему трех тел. Предположим, что трехчастичное взаимодействие в формуле (2.53) отсутствует. Тогда, как следует из этой формулы, трехчастичный массовый оператор $\hat{m}$ в трехчастичном пространстве $H(0)$ имеет вид

$$\hat{m}=m(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3)+v_{12}+v_{31}+v_{23}, \tag{3.25}$$

где $m(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3)=\varepsilon_1(\vec{k}_1)+\varepsilon_2(\vec{k}_2)+\varepsilon_3(\vec{k}_3)$, а операторы v_α ($\alpha=$ 12, 31, 23) равны сужению на $H(0)$ операторов V_α, определенных в (3.24). Если мы не выходим за рамки задачи трех тел, то нам достаточно знать лишь трехчастичный массовый оператор, а вид трехчастичных операторов $\hat{\mathcal{U}}(\vec{P})$ нам не важен (см. Замечание в § 2.5).

При сужении на трехчастичное пространство $H(0)$ двухчастичный оператор $\vec{P}$ для системы $\{1,2\}$ переходит, очевидно, в $\vec{Q}_{12}=\vec{k}_1+\vec{k}_2$, а двухчастичный импульс $\vec{k}$ – в вектор $\vec{k}_{12}$, равный пространственной части 4-вектора (ср. с (3.4)),

$$k_{12}=L\{\alpha(\frac{\vec{Q}_{12}}{m_{12}})\}^{-1}k_1, \tag{3,26}$$

где $m_{12}^2=(k_1+k_2)^2$.

Можно убедиться в том, что найденное выражение для трехчастичного массового оператора совпадает с результатом Соколова /29/ в точечной форме (подробнее см. также § 8 в /80/), с результатом Баккера, Кондратюка и Терентьева /77/ во фронтовой форме и с результатом Кэстера /73/, Кэстера и Полизоу /31/ и Мутце /32/ в мгновенной форме (с учетом неточности работы /73/, в которой не был учтен вклад операторов $\mathcal{U}(\vec{P})$).

§ 3.3. Оператор энергии системы двух частиц в приближении $1/c^2$

В предыдущем параграфе мы показали, что исходя из закона сложения взаимодействий, описанного в § 2.4, для трехчастичного массового оператора получается результат, совпадающий с результатами работ /73, 29, 77, 31, 32, 80/. Возникает вопрос, имеет ли полученный результат физическое обоснование. Мы отмечали в § 2.4, что линейный закон в сложения взаимодействий в массовом операторе и выбор $A(a)=$ I находятся в соответствии с локальной квантовой теорией поля. Поэтому единственное предположение, сделанное без обоснования, заключается в том, что взаимодействие не входит в двухчастичные операторы $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})$, т.е. $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})=\mathcal{U}(\vec{p})$ (см. обсуждение в §3.2). Для того чтобы выяснить, насколько это предположение соответствует теории поля, мы найдем оператор энергии двух частиц в приближении $1/c^2$, поскольку в этом приближении можно сравнить результат с тем, который получается в теории поля. (см. § 1.2).

Ясно, что релятивистские поправки к оператору кинетической энергии $E(\vec{P})$ учитываются элементарно, поэтому мы вычислим лишь оператор взаимодействия (см. (3.24)) в приближении $1/c^2$.

В нерелятивистском приближении $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p}) = 1$. Поэтому, как следует из (3.12) и (3.13), в приближении $1/c^2$ двухчастичный оператор $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})$ можно представить в виде

$$\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})=\left(1+\frac{\vec{P}^2}{M_0^2}\right)^{1/4}\left\{1+\frac{i}{2M_0}(\vec{p}\times\vec{\kappa})\left(\frac{\vec{S}_1}{m_1}-\frac{\vec{S}_2}{m_2}\right)+\vec{p}\vec{B}\right\}, \tag{3.27}$$

где $M_0=m_1+m_2$, а $\vec{B}$ – некоторый векторный оператор по внутренним переменным, учитывающий вклад взаимодействия в $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})$. При учете этого вклада оператор энергии взаимодействия двух частиц, в отличие от оператора (3.24), выглядит, очевидно, как

$$V=\left\{\left(m+\hat{\mathcal{U}}w\hat{\mathcal{U}}^{-1}\right)^2+\vec{P}^2\right\}^{1/2}-(m^2+\vec{P}^2)^{1/2}. \tag{3.28}$$

С учетом (3.27) легко получить, что в приближении $1/c^2$

$$V=w\left(1-\frac{\vec{P}^2}{2M_0^2}\right)+\frac{i}{2M_0}\left[(\vec{P}\times\vec{\kappa})\left(\frac{\vec{S}_1}{m_1}-\frac{\vec{S}_2}{m_2}\right),w\right]+$$

$$+\vec{P}\left[\vec{B},\frac{M_0\vec{\kappa}^2}{2m_1m_2}+w\right]. \tag{3.29}$$

Этот оператор действует в пространстве функций, удовлетворяющих условию (3.23). Поскольку мы хотим вычислить поправку в операторе V по сравнению с его нерелятивистским выражением, мы должны использовать ту же нормировку, что и в нерелятивистской теории, а именно, мы должны работать в пространстве функций $\varphi(\vec{P},\vec{q},\sigma_1,\sigma_2)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2}\int\left|\varphi(\vec{P},\vec{q},\sigma_1,\sigma_2)\right|^2 d^3\vec{P}d^3\vec{q}, \tag{3.30}$$

а относительный импульс $\vec{q}$ в нерелятивистской теории определяется как

$$\vec{q}=\frac{1}{M_0}(m_2\vec{p}_1-m_1\vec{p}_2). \tag{3.31}$$

В то же время, как следует из (3.4), релятивистский относительный импульс $\vec{\kappa}$ выражается через $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ следующим образом:

$$\vec{\kappa}=\vec{p}_1-\frac{\vec{P}}{m}\varepsilon_1(\vec{p}_1)+\frac{(\vec{P}\vec{p}_1)\vec{P}}{m(E+m)}. \tag{3.32}$$

Сравнивая (3.31) и (3.32), легко видеть, что в приближении $1/c^2$ векторы $\vec{q}$ и $\vec{\kappa}$ связаны соотношением

$$\vec{\kappa}=\vec{q}-\frac{\vec{P}\vec{q}^2}{2M_0}\left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\right)-\frac{(\vec{P}\vec{q})\vec{P}}{2M_0^2}. \tag{3.33}$$

Из этой формулы легко следует, что якобиан преобразования от переменных $\vec{\kappa}$ к переменным $\vec{q}$ в приближении $1/c^2$ равен

$$J=\left|\frac{\partial^3\vec{\kappa}}{\partial^3\vec{q}}\right|=1-\frac{\vec{P}\vec{q}}{M_0}\left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\right)-\frac{\vec{P}^2}{2M_0^2}. \tag{3.34}$$

Обозначим через v оператор, который в пространстве функций (3.30) действует так же, как оператор w в пространстве функций (3.23). Таким образом, мы считаем, что оператор v действует в пространстве функций (3.30) следующим образом:

$$v\varphi(\vec P,\vec q)=\int v(\vec q,\vec q\,')\,\varphi(\vec P,\vec q\,')\,d^3\vec q\,', \tag{3.35}$$

причем $v(\vec q,\vec q\,')=w(\vec q,\vec q\,')$. Тогда из формул (3.33) и (3.34) следует, что действие оператора (3.29) в пространстве функций (3.30) определяется оператором с ядром

$$\begin{aligned}
&V(\vec P,\vec q;\vec P',\vec q\,')=\delta^{(3)}(\vec P-\vec P')\,U(\vec P,\vec q;\vec P',\vec q\,'),\\
&U(\vec P,\vec q;\vec P,\vec q)=v(\vec q,\vec q\,')\Big[1-\frac{\vec P^2}{M_0^2}-\frac{(\vec P,\vec q+\vec q\,')}{2M_0}\Big(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\Big)\Big]-\\
&-\frac{\vec P}{2M_0}\Big(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\Big)\Big[\vec q^{\,2}\,\frac{\partial v(\vec q,\vec q\,')}{\partial\vec q}+\vec q\,'^2\,\frac{\partial v(\vec q,\vec q\,')}{\partial\vec q\,'}\Big]-\\
&-\frac{\vec P}{2M_0^2}\Big[(\vec P\vec q)\,\frac{\partial v(\vec q,\vec q\,')}{\partial\vec q}+(\vec P\vec q\,')\,\frac{\partial v(\vec q,\vec q\,')}{\partial\vec q\,'}\Big]+\\
&+\frac{i}{2M_0}(\vec P\times\vec q)\Big(\frac{\vec S_1}{m_1}-\frac{\vec S_2}{m_2}\Big)v(\vec q,\vec q\,')-\frac{i}{2M_0}v(\vec q,\vec q\,')(\vec P\times\vec q\,')\Big(\frac{\vec S_1}{m_1}-\frac{\vec S_2}{m_2}\Big)+\\
&+\frac{M_0(\vec q^{\,2}-\vec q\,'^2)}{2m_1m_2}\vec P\vec B(\vec q,\vec q\,')+\vec P\vec B_1(\vec q,\vec q\,'),
\end{aligned}\tag{3.36}$$

где $\vec B(\vec q,\vec q\,')$ – ядро оператора $\vec B$, $\vec B_1(\vec q,\vec q\,')$ – ядро оператора $\vec B_1=[\vec B,v]$. В формуле для $U(\vec P,\vec q;\vec P',\vec q\,')$ мы считаем, что $v(\vec q,\vec q\,')$ является оператором по спиновым переменным и учитываем, то, что $\vec P=\vec P'$.

Как следует из (3.36), оператор V с точностью $1/c^2$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
V=\;&v-v\frac{\vec P^2}{2M_0^2}-\frac{\vec P}{4M_0}\Big(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\Big)\Big[\Big\{\vec q^{\,2},\frac{\partial}{\partial\vec q}\Big\},v\Big]-\\
&-\frac{1}{2M_0^2}\Big[(\vec P\vec q)\Big(\vec P\frac{\partial}{\partial\vec q}\Big),v\Big]+\frac{i}{2M_0}\Big[(\vec P\times\vec q)\Big(\frac{\vec S_1}{m_1}-\frac{\vec S_2}{m_2}\Big),v\Big]+\\
&+\frac{\vec P M_0}{2m_1m_2}\big[\vec q^{\,2},\vec B\big]+\vec P\vec B_1\,.
\end{aligned}\tag{3.37}$$

Это выражение мы должны теперь сравнить с тем, которое получается в квантовой теории поля в приближении $1/c^2$. Для случая обмена фотоном ответ хорошо известен из квантовой электродинамики. Если частицы имеют спин 1/2 и электрические заряды e_1 и e_2, то величину $U(\vec P,\vec q;\vec P',\vec q\,')$ можно представить в виде (см., например, формулу (83.9) в книге /12/)

$$\begin{aligned}
U(\vec P,\vec q;\vec P',\vec q\,')=\;&v(\vec q,\vec q\,')+v^{кф}(\vec q,\vec q\,')\Big\{\frac{(\vec P,\vec q-\vec q\,')^2}{M_0^2|\vec q-\vec q\,'|^2}-\frac{\vec P^2}{M_0^2}+\\
&+\frac{(\vec P,\vec q-\vec q\,')(\vec q^{\,2}-\vec q\,'^2)}{2M_0|\vec q-\vec q\,'|^2}\Big(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\Big)-\frac{(\vec P,\vec q+\vec q\,')}{2M_0}\Big(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\Big)+\\
&+\frac{i}{4M_0}\big(\vec P\times(\vec q-\vec q\,')\big)\Big(\frac{\vec\sigma_1}{m_1}-\frac{\vec\sigma_2}{m_2}\Big)\Big\},
\end{aligned}\tag{3.38}$$

где $v^{кер}(\vec q,\vec q\,')= 4\pi e_1 e_2\,/\,|\vec q-\vec q\,'|^2$, а через $v(\vec q,\vec q\,')$ мы обозначили вклад, не содержащий $\vec P$. Можно убедиться в том (см., например, /I4-I6/), что для скалярной связи также получается формула (3.38) с $v^{кер}(\vec q,\vec q\,')=-4\pi e_1 e_2\,/\,|\vec q-\vec q\,'|^2$, но с другим выражением для $v(\vec q,\vec q\,')$. Этого следовало ожидать, так как вклад в $v(\vec q,\vec q\,')$ определяется релятивистскими поправками в массовом операторе, т.е. имеет динамическое происхождение. В частности, в $v(\vec q,\vec q\,')$ дают вклад аннигиляционные диаграммы, если они имеются (см., например, /I2/). Вклад же членов с $\vec P$, очевидно, должен определяться лишь нерелятивистским оператором взаимодействия и релятивистской кинематикой.

Из формулы (3.38) следует, что оператор V можно представить в виде

$$V=v-\frac{v\vec P^2}{2M_0^2}-\frac{1}{2M_0^2}\Big[(\vec P\vec q)(\vec P\frac{\partial}{\partial\vec q}),v\Big]-\frac{\vec P}{2M_0}\Big(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\Big)\{v,\vec q\}-$$

$$-\frac{\vec P}{8M_0}\Big(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\Big)\Big[\vec q^{\,2},\{v,\frac{\partial}{\partial\vec q}\}\Big]+\frac{i}{4M_0}\Big[(\vec P\times\vec q)\Big(\frac{\vec\sigma_1}{m_1}-\frac{\vec\sigma_2}{m_2}\Big),v\Big]\ . \qquad (3.39)$$

Сравнивая (3.37) и (3.39), получаем, что в приближении $1/c^2$

$$\vec B=\frac{m_2-m_1}{4M_0^2}\{v,\frac{\partial}{\partial\vec q}\}\ . \qquad (3.40)$$

При этом, как легко видеть, в интересующем нас приближении $\vec B_1=0$, поскольку в нерелятивистском приближении оператор v не зависит от спинов и является оператором типа свертки в импульсном представлении (оператором умножения на функцию в координатном представлении).

Если оператор $\vec B$ не зависит от $\vec P$, а $v^{кер}$ не зависит от спинов, то появление множителя (m_2-m_1) в $\vec B$ можно объяснить следующим образом. Так как $\vec B$ имеет порядок $1/c$, а $v^{кер}$ – $1/c^2$, то в $\vec B$ должна быть величина $\partial/\partial\vec q$, имеющая порядок c. Но при перестановке частиц $\partial/\partial\vec q$ меняет знак, а оператор $\vec B$ не должен меняться при такой перестановке. Поэтому в $\vec B$ должен быть множитель (m_2-m_1).

Итак, мы можем заключить, что для частиц с одинаковой массой предположение $\hat{\mathcal U}(\vec p)=\mathcal U(\vec p)$ является достаточно общим, и в дальнейшем такое предположение принимается без оговорок. Тогда, как следует из (3.37), оператор энергии взаимодействия двух частиц с массами $m_1=m_2=m_0$ в приближении $1/c^2$ можно представить в виде

$$V=v-v\frac{\vec P^2}{8m_0^2}-\frac{1}{8m_0^2}\Big[(\vec P\vec q)(\vec P\frac{\partial}{\partial\vec q}),v\Big]+$$

$$+\frac{i}{4m_0^2}\Big[(\vec P\times\vec q)(\vec s_1-\vec s_2),v\Big]\ . \qquad (3.41)$$

Общий вид оператора энергии двух частиц в приближении $1/c^2$ впервые рассматривался в работе Широкова /98/, но в этой работе не был учтен вклад оператора $\vec B$. Затем этот вопрос рассматривался Фолди и Крайчиком /84/, и особенно детально в работе Гайды /39/. В этой работе проанализирован произвол в классическом гамильтониане, а квантовый оператор получен из него при помощи квантования. При этом неопределенность квантового гамильтониана определяется неопределенностью процедуры квантования и некоторой функцией φ_{12}. Поскольку в нашем подходе неопределенность определяется оператором $\vec B$, то непосредственное сравнение обоих подходов затруднительно. Можно убедиться, однако, что по крайней мере в случае, когда нерелятивистский потенциал локален и не зависит от спинов, оба подхода совпадают при выборе $\vec B$ в виде (3.40), поскольку, как показано в /39/, в этом случае $\varphi_{12}=0$. Выбор $\vec B$ в виде (3.40) соответствует также квантовополевым моделям, в которых частицы со спином I/2 обмениваются скалярными или векторными частицами (см., например, работы /I4-I6/.

В случае частиц равных масс результат (3.4I) совпадает с результатами работ /98, 84, 39/, поскольку в этом случае мы считаем, что $\vec B=0$, а функция φ_{12} в /39/ также равна нулю. Отметим, что в рамках простой квантовополевой модели гамильтониан взаимодействия в приближении $1/c^2$ исследовался также в работе /I9/, в которой были указаны члены, отсутствующие в /84/. Однако речь идет лишь о связи между операторами $v^{кер}$ и v, а члены, зависящие от $\vec P$, здесь также согласуются с (3.4I).

В заключение этого параграфа мы покажем, что выбор $\vec B$ в виде (3.40) согласуется с такими классическими теориями, как электродинамика и ОТО. Действительно, если $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$,оператор расстояния между частицами - канонически сопряженный с $\vec{q}$, а $v^{нер}$ пропорционально оператору умножения на $1/|\vec{r}|$, то из (3.47) и (3.40) им имеем, что в приближении $1/c^2$

$$V=v-\frac{v\vec{P}^2}{2M_0^2}-\frac{(\vec{P}\vec{n})^2 v}{2M_0^2}-\frac{\vec{P}}{4M_0}\left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\right)\left(\{\vec{q},v\}+\{q_k,n_k\vec{n}v\}\right)+$$

$$+\frac{i}{2M_0}\left[(\vec{P}\times\vec{q})\left(\frac{\vec{S}_1}{m_1}-\frac{\vec{S}_2}{m_2}\right),v\right], \tag{3.42}$$

где $\vec{n}=\vec{r}/|\vec{r}|$. В классическом пределе коммутатор в этой формуле исчезает, а антикоммутатор можно заменить удвоенным произведением. Поэтому в классическом пределе в приближении $1/c^2$

$$V=v-\frac{v^{нер}}{2M_0^2}\left[\vec{P}^2+(\vec{P}\vec{n})^2\right]-\frac{1}{2M_0}\left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\right)v^{нер}\left[(\vec{P}\vec{q})+(\vec{P}\vec{n})(\vec{q}\vec{n})\right]. \tag{3.43}$$

В классической электродинамике гамильтониан двух частиц в приближении $1/c^2$ равен (см., например, формулу (65.8) в книге /18/)

$$H=\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1}+\frac{\vec{p}_2^2}{2m_2}-\frac{\vec{p}_1^4}{8m_1^3}-\frac{\vec{p}_2^4}{8m_2^3}+v^{нер}-\frac{v^{нер}}{2m_1m_2}\left[(\vec{p}_1\vec{p}_2)+(\vec{p}_1\vec{n})(\vec{p}_2\vec{n})\right], \tag{3.44}$$

а в ОТО (см., например, формулу (106,17) в книге /18/)

$$H=\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1}+\frac{\vec{p}_2^2}{2m_2}-\frac{\vec{p}_1^4}{8m_1^3}-\frac{\vec{p}_2^4}{8m_2^3}+v^{нер}+\frac{3}{2}v^{нер}\left(\frac{\vec{p}_1^2}{m_1^2}+\frac{\vec{p}_2^2}{m_2^2}\right)- \tag{3.45}$$

$$-\frac{v^{нер}}{2m_1m_2}\left[7(\vec{p}_1\vec{p}_2)+(\vec{p}_1\vec{n})(\vec{p}_2\vec{n})\right],$$

где $v^{нер}=-\gamma m_1m_2/|\vec{r}|$, а γ - гравитационная постоянная. Выражая $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ через $\vec{P}$ и $\vec{q}$, можно убедиться, что как (3.44), так и (3.45) согласуется с (3.43). В классической электродинамике и в ОТО величины v и $v^{нер}$ связаны друг с другом по-разному, однако члены, зависящие от $\vec{P}$, выражаются через $v^{нер}$ одинаково. Этого следовало ожидать, поскольку, как показано в работе Фаддеева /99/, если компоненты метрического тензора и связности достаточно быстро стремятся на бесконечности к тем значениям, которые они имеют в пространстве Минковского, то динамической группой симметрии в ОТО является группа Пуанкаре.

§ 3.4. Принцип минимального релятивизма

Рассмотрим теперь систему двух взаимодействующих нуклонов, причем разностью масс протона и нейтрона будем пренебрегать. Если система двух нуклонов рассматривается в их с.ц.и., то, как следует из (3.33), переменные $\vec{k}$ и $\vec{q}$ совпадают друг с другом. Поэтому, как следует из определения оператора v (см. (3.35), массовый оператор двухнуклонной системы имеет вид $\hat{m}=2\varepsilon(\vec{q})+v$ $(\varepsilon(\vec{q})=(m_0^2+\vec{q}^2)^{1/2})$, и этот оператор действует в пространстве функций $\varphi(\vec{q},\sigma_1,\sigma_2)$, удовлетворяющих, как и в нерелятивистской теории, условию

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2}\int|\varphi(\vec{q},\sigma_1,\sigma_2)|^2 d^3\vec{q}<\infty . \tag{3.46}$$

Пусть оператор $v^{нер}$ находится из условия, что этот оператор правильно описывает экспериментальные данные, если исходить из обычного уравнения Шредингера

$$\left(\frac{\vec{q}^2}{m_0}+v^{нер}\right)\varphi(\vec{q})=\frac{\varkappa^2}{m_0}\varphi(\vec{q}), \tag{3.47}$$

где $\varkappa$ - абсолютная величина относительного импульса двух нуклонов в их с.ц.и. Обозначим теперь через w разность между квадратом массового оператора и квадратом свободного массового оператора. Таким образом, по определению оператора w, $\hat{m}^2=4\varepsilon(\vec{q})^2+w$. В релятивистской теории вместо уравнения Шредингера мы должны решать уравнение на собственные значения оператора $\hat{m}$.

Такое уравнение, очевидно, можно представить в виде

$$\hat{m}^2\varphi(\vec{q}) = 4(m_0 + \varkappa^2)\varphi(\vec{q}). \tag{3.48}$$

Тогда, как следует из определения оператора w, это уравнение можно представить в виде

$$\left(\frac{\vec{q}^{\,2}}{m_0} + \frac{w}{4m_0}\right)\varphi(\vec{q}) = \frac{\varkappa^2}{m_0}\varphi(\vec{q}) \,. \tag{3.49}$$

Таким образом, мы опять пришли к обычному уравнению Шредингера (3.47), где роль $v^{\text{нер}}$ играет оператор $w/4m_0$. Факт, что если для частиц одинаковой массы вводить взаимодействие аддитивно в квадрат массового оператора, то релятивистское уравнение совпадает с уравнением Шредингера, известен как "принцип минимального релятивизма" (см., например, /I,8I/)

Из определения операторов v и w следует, очевидно, что

$$w = \{2\varepsilon(\vec{q}), v\} + v^2. \tag{3.50}$$

Поэтому в приближении $1/c^2$

$$w = 4m_0 v + \frac{1}{m_0}\{v, \vec{q}^{\,2}\} + v^2. \tag{3.51}$$

Следовательно, связь между операторами v и $v^{\text{нер}}$ дается формулой

$$v^{\text{нер}} = v + \frac{1}{4m_0^2}\{v, \vec{q}^{\,2}\} + \frac{v^2}{4m_0} \,. \tag{3.52}$$

Поэтому в приближении $1/c^2$ оператор энергии взаимодействия двух нуклонов (см. (3.4I)) дается формулой

$$V = v^{\text{нер}} - \frac{v^{\text{нер}\,2}}{4m_0} - \frac{1}{16m_0^2}\left\{v^{\text{нер}}, (4\vec{q}^{\,2} + \vec{P}^2)\right\} - \frac{1}{8m_0^2}\left[(\vec{P}\vec{q})\left(\vec{P}\frac{\partial}{\partial\vec{q}}\right), v^{\text{нер}}\right] + \frac{i}{8m_0^2}\left[(\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2)(\vec{P}\times\vec{q}), v^{\text{нер}}\right] \tag{3.53}$$

(напомним, что операторы $v^{\text{нер}}$ и $\vec{P}$ коммутируют друг с другом).

Итак, при использовании принципа минимального релятивизма мы выразили оператор V через оператор $v^{\text{нер}}$, который должен находиться по экспериментальным данным, путем решения обратной задачи для уравнения Шредингера (3.47). Во избежание недоразумений отметим, что индекс "нер" означает лишь, что оператор $v^{\text{нер}}$ должен находиться из уравнения Шредингера, но для наших целей он должен быть определен из этого уравнения не с нерелятивистской точностью, а в приближении $1/c^2$. Отметим также, что в правую часть уравнения (3.47) входит величина $\varkappa^2/m_0$, которая в приближении $1/c^2$ отличается от $\mu - 2m_0$, где μ – собственное значение массового оператора. Соотношение между этими величинами, очевидно, следующее :

$$\frac{\varkappa^2}{m_0} = (\mu - 2m_0)\left(1 + \frac{\mu - 2m_0}{4m_0}\right) . \tag{3.54}$$

Поэтому может сложиться впечатление, что при расчетах релятивистских поправок нельзя использовать в качестве $v^{\text{нер}}$ известные реалистические потенциалы (Рида, Хамада-Джонстона, парижский и т.д.), поскольку они получены исходя из уравнения Шредингера, в которое вместо $\varkappa^2/m_0$ входит $\mu - 2m_0$. Заметим, однако, что реалистические потенциалы хорошо описывают экспериментальные данные при низких кинетических энергиях, а при энергиях T = 400 Мэв, когда $1 + \frac{\mu - 2m_0}{4m_0} \approx 1{,}1$, погрешность описания заведомо больше чем 10%. Поэтому с той точностью, с которой определены реалистические потенциалы, можно считать, что они определены по уравнению (3.47), и можно отождествить их с $v^{\text{нер}}$.

С идейной точки зрения наиболее последовательным является подход, когда оператор $v^{\text{нер}}$ вообще не вводится, а оператор v, входящий в (3.4I), находится из решения обратной задачи для уравнения

$$\{2\varepsilon(\vec{q}) + v\}\,\varphi(\vec{q}) = \mu\,\varphi(\vec{q}) \,. \tag{3.55}$$

В этой связи отметим, что исследование релятивистской двухчастичной обратной задачи проведено в работе Соколова /100/.

С точностью $1/c^2$ уравнение (3.55) можно представить в виде

$$\left(\frac{\vec{q}^{\,2}}{m_0}+v-\frac{\vec{q}^{\,4}}{4m_0^3}\right)\varphi(\vec{q})=(\mu-2m_0)\,\varphi(\vec{q})\,. \tag{3.56}$$

Поэтому если формально определить $v^{кер}$ как $v-\frac{\vec{q}^{\,4}}{4m_0^3}$, чтобы имело место уравнение Шредингера с $\mu-2m_0$ в правой части, то так определенный оператор $v^{кер}$, даже при выключении взаимодействия между нуклонами, не обращается в 0, а содержит оператор четвертой производной в координатном представлении. В известные реалистические потенциалы такие операторы не вводятся. Поэтому если мы хотим воспользоваться уже полученными результатами для реалистических потенциалов, то, согласно сказанному выше, более оправданным является их отождествление с оператором $v^{кер}$, входящим в (3.53).

§ 3.5. Релятивистская поправка к энергии связи трех нуклонов

Рассмотрим массовый оператор трехнуклонной системы в приближении $1/c^2$. Пусть $v^{кер}$ – оператор, определенный, как описано в предыдущем параграфе, для системы $\{1,2\}$. Обозначим $v_{12}^{кер}$ его сужение на пространство $H(0)$ для трех частиц. Аналогично определим операторы $v_\alpha^{кер}$ (α = 12, 31, 23) для других α. Обозначим также через $\vec{q}_\alpha$ и $\vec{Q}_\alpha$ сужения на $H(0)$ соответствующих операторов $\vec{q}$ и $\vec{P}$. Тогда из (3.25) и (3.53) легко видеть, что в приближении $1/c^2$ массовый оператор трехнуклонной системы дается формулой

$$\hat{m}=\hat{m}^{кер}+T'+\sum_\alpha \tilde{V}'_\alpha\,, \tag{3.57}$$

где

$$\hat{m}^{кер}=3m_0+T^{кер}+\sum_\alpha v_\alpha^{кер},$$

$$T^{кер}=\frac{1}{m_0}\left(\vec{q}_{12}^{\,2}+\frac{3}{4}\vec{Q}_{12}^{\,2}\right),$$

$$T'=-\frac{1}{8m_0^3}\left[2\vec{q}_{12}^{\,4}+\vec{q}_{12}^{\,2}\vec{Q}_{12}^{\,2}+2(\vec{q}_{12}\vec{Q}_{12})^2+\frac{9}{8}\vec{Q}_{12}^{\,4}\right],$$

$$\tilde{V}'_\alpha=-\frac{v_\alpha^{кер\,2}}{4m_0}-\frac{1}{16m_0^2}\left\{v_\alpha^{кер},\left(4\vec{q}_\alpha^{\,2}+\vec{Q}_\alpha^{\,2}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{8m_0^2}\left[(\vec{Q}_\alpha\vec{q}_\alpha)\left(\vec{Q}_\alpha\frac{\partial}{\partial\vec{q}_\alpha}\right),v_\alpha^{кер}\right]+\frac{i}{8m_0^2}\left[\vec{\sigma}_\alpha(\vec{Q}_\alpha\times\vec{q}_\alpha),v_\alpha^{кер}\right], \tag{3.58}$$

причем в последней формуле суммирование по α не предполагается, через $\vec{\sigma}_{12}$ обозначено $\vec{\sigma}_1-\vec{\sigma}_2$, и аналогично определяются другие $\vec{\sigma}_\alpha$. Величина T' является, очевидно, релятивистской поправкой к оператору кинетической энергии трех частиц в их с.ц.и.

Пусть φ – нерелятивистская волновая функция связанного состояния трехнуклонной системы, найденная решением уравнения

$$\hat{m}^{кер}\varphi=(3m_0+\varepsilon_0)\varphi\,, \tag{3.59}$$

где ε_0 ($\varepsilon_0<0$) – нерелятивистская энергия связи. Тогда, как следует из (3.51), релятивистская поправка к энергии связи в приближении $1/c^2$ дается формулой

$$\Delta\varepsilon=\langle\varphi|T'+\sum_\alpha\tilde{V}'_\alpha|\varphi\rangle\,. \tag{3.60}$$

Допустим, что функция φ ищется исходя из системы уравнений для фаддеевских компонент

$$\left(T^{\text{нер}}-\varepsilon_0\right)\varphi_\alpha=-v_\alpha^{\text{нер}}\varphi$$

$$(\alpha=12,\ 31,\ 23)\ , \tag{3.61}$$

где $\varphi=\varphi_{12}+\varphi_{31}+\varphi_{23}$. Тогда из (3.58), (3.60) и (3.61) получаем

$$\Delta\varepsilon=\langle\varphi|T'|\varphi\rangle+\sum_\alpha\Big\{\frac{1}{4m_0^2}Re\langle\varphi|(T^{\text{нер}}-\varepsilon_0)(2\vec{q}_\alpha^{\,2}+\vec{Q}_\alpha^{\,2})|\varphi_\alpha\rangle-$$

$$-\frac{1}{4m_0}\langle\varphi_\alpha|(T^{\text{нер}}-\varepsilon_0)^2|\varphi_\alpha\rangle+\frac{1}{4m_0^2}Im\langle\varphi|\vec{\sigma}_\alpha(\vec{Q}_\alpha\times\vec{q}_\alpha)(T^{\text{нер}}-\varepsilon_0)|\varphi_\alpha\rangle+$$

$$+\frac{1}{4m_0^2}Re\langle\varphi|(\vec{Q}_\alpha\vec{q}_\alpha)(\vec{Q}_\alpha\frac{\partial}{\partial\vec{q}_\alpha})(T^{\text{нер}}-\varepsilon_0)|\varphi_\alpha\rangle\Big\}\ . \tag{3.62}$$

Таким образом, релятивистская поправка к энергии связи трех нуклонов полностью определяется фаддеевскими компонентами нерелятивистской волновой функции и нерелятивистской энергией связи $\varepsilon_0=-|\varepsilon_0|$. Поэтому, зная эти величины, можно найти релятивистскую поправку к энергии связи по формуле (3.62). В работах же /101, 102, 83, 103/ для расчета такой поправки приходилось явно выбирать модель нуклон-нуклонного взаимодействия, и поэтому расчеты оказались достаточно сложными даже при учете лишь полностью симметричного S - состояния в трехнуклонной волновой функции. В этой связи отметим, что, как ясно из (3.62), основной вклад в $\Delta\varepsilon$ дается высокоимпульсной частью волновой функции, и поэтому вклад высших парциальных волн должен быть существенным. Отметим также, что в работах /101-103, 83/ были вычислены не все поправки, так как не был учтен вклад спиновых эффектов и вклад, связанный с отличием векторов $\vec{k}$ и $\vec{q}$ (см. § 3.3). Эти вклады соответствуют последним двум членам в (3.53) и (3.62).

§ 3.6. Релятивистские трехчастичные уравнения

В предыдущем параграфе мы показали, что для вычисления релятивистской поправки к энергии связи трехнуклонной системы достаточно использовать обычные нерелятивистские уравнения Фаддеева, а нужды в релятивизованных уравнениях Фаддеева не возникает. Однако при вычислении релятивистских поправок к длинам рассеяния и другим низкоэнергетическим характеристикам необходимо иметь дело с релятивистским вариантом уравнений Фаддеева. Разумеется, если нас интересует лишь приближение $1/c^2$, то, исходя из выражения (3.57) для трехчастичного массового оператора, мы можем написать релятивистские уравнения Фаддеева в полной аналогии с нерелятивистскими. Однако при конкретных расчетах надо будет иметь в виду, что формулы (3.58) являются правильными лишь в области $|\vec{q}_\alpha|\ll m_0$, $|\vec{Q}_\alpha|\ll m_0$, и поэтому в области $|\vec{q}_\alpha|,|\vec{Q}_\alpha|\gtrsim m_0$ необходимо вводить обрезание. При вычислении релятивистской поправки к энергии связи трех нуклонов явное введение обрезания было излишним, поскольку в формуле (3.62) вклад области $|\vec{q}_\alpha|,|\vec{Q}_\alpha|\gtrsim m_0$ обрезается нерелятивистской волновой функцией связанного состояния. В случае же расчетов в непрерывном спектре пользоваться выражениями (3.57) и (3.58) без обрезания нельзя.

В этом параграфе мы приведем формулировку точной задачи трех тел в релятивистской квантовой механике. Даже если считать, что РКМ имеет смысл лишь в приближении $1/c^2$, то точная задача может рассматриваться как один из вариантов обрезания области $|\vec{q}_\alpha|,|\vec{Q}_\alpha|\gtrsim m_0$. Кроме того, возможно, что при численном расчете релятивистскую задачу лучше решать независимо от нерелятивистской. Действительно, если рассчитывать релятивистские уравнения Фаддеева по теории возмущений, считая нерелятивистские уравнения основным приближением, то необходимо с большой точностью знать резольвенту нерелятивистского гамильтониана, определенную из решения обычных уравнений Фаддеева. Кроме того, с технической точки зрения, может быть, удобнее работать с переменными $(\vec{k}_\alpha,\vec{Q}_\alpha)$, а не $(\vec{q}_\alpha,\vec{Q}_\alpha)$. Связь между наборами $(\vec{k}_\alpha,\vec{Q}_\alpha)$ при различных α не так проста, как между наборами $(\vec{q}_\alpha,\vec{Q}_\alpha)$, однако в переменных $(\vec{k}_\alpha,\vec{Q}_\alpha)$ не надо иметь дело с производными от нерелятивистского оператора взаимодействия (ср.с (3.58)).

Исходя из этих результатов § 3.2 нетрудно сформулировать соответствующие трехчастичные уравнения. Поскольку этот параграф адресуется, в основном, тем, кто предполагает проводить численные расчеты релятивистских уравнений Фаддеева, мы приведем сразу результаты и сформулируем их так, чтобы знакомство читателя с предыдущим материалом было необязательным.

Будем считать, что все три рассматриваемые частицы имеют спин I/2 и одинаковые массы m_0. Для решения трехчастичных уравнений необходимо вначале определить двухчастичные операторы взаимодействия, исходя из экспериментальных данных, а затем эти операторы подставить в трехчастичные уравнения.

Пусть $\vec{q}=(\vec{p}_1-\vec{p}_2)/2$ – относительный импульс двух частиц, а σ_1 и σ_2 – их проекции спина. Двухчастичный оператор взаимодействия V должен определяться из условия, что его ядро $V(\vec{q},\vec{q}\,')$, рассматриваемое как оператор по спиновым переменным, должно удовлетворять уравнению

$$2\varepsilon(\vec{q})\varphi(\vec{q})+\int V(\vec{q},\vec{q}\,')\,\varphi(\vec{q}\,')\,d^3\vec{q}\,'=\mu\,\varphi(\vec{q}), \tag{3.63}$$

где $\varepsilon(\vec{q})=(m_0^2+\vec{q}^{\,2})^{1/2}$, а μ – собственное значение массы для системы двух частиц. Обычно вместо массы используют кинетическую энергию T системы двух частиц в с.ц.и., равную $(\mu-2m_0)$. Тогда вместо (3.63), мы, очевидно, имеем

$$2(\varepsilon(\vec{q})-m_0)\varphi(\vec{q})+\int V(\vec{q},\vec{q}\,')\,\varphi(\vec{q}\,')\,d^3\vec{q}\,'=T\,\varphi(\vec{q}). \tag{3.64}$$

В формулах (3.63) и (3.64) функция $\varphi(\vec{q})$ является спинором по обеим спиновым переменным σ_1 и σ_2.

Формулы (3.63) или (3.64) должны рассматриваться как обратные задачи для определения оператора V.

Перейдем теперь к задаче трех тел. Эта задача будет рассматриваться в пространстве функций $\varphi(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\int|\varphi(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)|^2\,d\mu(int)<\infty, \tag{3.65}$$

$$d\mu(int)=\frac{d^3\vec{k}_1}{2\varepsilon(\vec{k}_1)}\,\frac{d^3\vec{k}_2}{2\varepsilon(\vec{k}_2)}\,\frac{d^3\vec{k}_3}{2\varepsilon(\vec{k}_3)}\,\delta^{(3)}(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3),$$

Ясно, что в качестве независимых можно выбрать любые два из трех векторов $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ и $\vec{k}_3$.

Пусть в качестве независимых векторов выбраны $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$. Введем векторы $\vec{Q}_{12}$ и $\vec{k}_{12}$, связанные с $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ формулами

$$\vec{Q}_{12}=\vec{k}_1+\vec{k}_2;$$

$$\vec{k}_{12}=\vec{k}_1-\frac{\varepsilon(\vec{k}_1)}{M_{12}}\vec{Q}_{12}+\frac{\vec{Q}_{12}(\vec{k}_1,\vec{Q}_{12})}{M_{12}(E_{12}+M_{12})}, \tag{3.66}$$

где $M_{12}=\{[\varepsilon(\vec{k}_1)+\varepsilon(\vec{k}_2)]^2-\vec{Q}_{12}^{\,2}\}^{1/2}$, $E_{12}=\varepsilon(\vec{k}_1)+\varepsilon(\vec{k}_2)$.

Векторы $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ выражаются через $\vec{Q}_{12}$ и $\vec{k}_{12}$ следующим образом:

$$\vec{k}_1=\vec{k}_{12}+\frac{1}{2}\vec{Q}_{12}+\frac{\vec{Q}_{12}(\vec{k}_{12}\vec{Q}_{12})}{M_{12}(E_{12}+M_{12})},$$

$$\vec{k}_2=-\vec{k}_{12}+\frac{1}{2}\vec{Q}_{12}-\frac{\vec{Q}_{12}(\vec{k}_{12}\vec{Q}_{12})}{M_{12}(E_{12}+Q_{12})}, \tag{3.67}$$

где $M_{12}=2\varepsilon(\vec{k}_{12})$, $E_{12}=(M_{12}^2+\vec{Q}_{12}^{\,2})^{1/2}$. Величина $d\mu(int)$ в (3.65) в переменных $\vec{Q}_{12}$ и $\vec{k}_{12}$ дается формулой

$$d\mu(int)=\rho(\vec{Q}_{12},\vec{k}_{12})\,d^3\vec{Q}_{12}\,d^3\vec{k}_{12},$$

$$\rho(\vec{Q}_{12},\vec{k}_{12})=\{4E_{12}\,\varepsilon(\vec{Q}_{12})\,\varepsilon(\vec{k}_{12})\}^{-1}. \tag{3.68}$$

Аналогично можно определить переменные $(\vec{Q}_\alpha,\vec{k}_\alpha)$, где индекс α пробегает значения I2, 3I, 23; $M_\alpha=2\varepsilon(\vec{k}_\alpha)$, $E_\alpha=(M_\alpha^2+\vec{Q}_\alpha^{\,2})^{1/2}$.

Введем матрицу

$$\gamma\left(\frac{\vec{Q}_\alpha}{M_\alpha}, \frac{\vec{k}_\alpha}{m_0}, \vec{\sigma}\right)=\frac{(E_\alpha+M_\alpha)(\varepsilon+m_0)+\vec{Q}_\alpha\vec{k}_\alpha+i\vec{\sigma}\,(\vec{Q}_\alpha\times\vec{k}_\alpha)}{\{2(E_\alpha+M_\alpha)(\varepsilon+m_0)(E_\alpha\varepsilon+\vec{Q}_\alpha\vec{k}_\alpha+M_\alpha m_0)\}^{1/2}}, \tag{3.69}$$

где $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули, $\varepsilon=\varepsilon(\vec{k}_\alpha)$. Определим унитарный оператор

$$U_{12}=\gamma\left(\frac{\vec{Q}_{12}}{M_{12}}, \frac{\vec{k}_{12}}{m_0}, \vec{\sigma}_1\right)\gamma\left(\frac{\vec{Q}_{12}}{M_{12}}, -\frac{\vec{k}_{12}}{m_0}, \vec{\sigma}_2\right), \tag{3.70}$$

где $\vec{\sigma}_1$ действует по переменной σ_1, а $\vec{\sigma}_2$ – по переменной σ_2. Аналогично определяются операторы U_α при других α.

В системе трех частиц имеются каналы, когда все частицы свободны, когда есть связанное состояние двух частиц, а третья частица свободна, и, наконец, когда есть связанное состояние всех трех частиц.

Волновые функции в канале, где все частицы свободны, можно разлагать по функциям

$$|\vec{Q}', \vec{k}', \sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'\rangle=\frac{\delta^{(3)}(\vec{Q}-\vec{Q}')\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')}{\rho(\vec{Q}', \vec{k}')^{1/2}}\,\delta_{\sigma_1\sigma_1'}\delta_{\sigma_2\sigma_2'}\delta_{\sigma_3\sigma_3'}, \tag{3.71}$$

так что

$$\langle\vec{Q}'', \vec{k}'', \sigma_1'', \sigma_2'', \sigma_3''|\vec{Q}', \vec{k}', \sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'\rangle=\delta^{(3)}(\vec{Q}''-\vec{Q}')\delta^{(3)}(\vec{k}''-\vec{k}')\times$$
$$\delta_{\sigma_1''\sigma_1'}\delta_{\sigma_2''\sigma_2'}\delta_{\sigma_3''\sigma_3'}. \tag{3.72}$$

Здесь переменные $\vec{Q}, \vec{k}$ и фиксированные векторы $\vec{Q}', \vec{k}', \vec{Q}'', \vec{k}''$ могут быть взяты с любым индексом α.

Волновые функции для состояний, когда две частицы связаны (пусть это, для определенности, частицы I и 2), а третья частица свободна, должны разлагаться по функциям

$$|\vec{Q}', i', \sigma_3'\rangle=\frac{\delta^{(3)}(\vec{Q}_{12}-\vec{Q}')}{\rho(\vec{Q}', \vec{k}_{12})^{1/2}}\,U_{12}\,\varphi_{12}(\vec{k}_{12})\,\delta_{\sigma_3\sigma_3'}, \tag{3.73}$$

где i' – набор квантовых чисел, характеризующих связанное состояние, а $\varphi_{12}(\vec{k}_{12})$ – волновая функция связанного состояния, являющаяся решением уравнения (3.63) при $\mu=2m_0+\varepsilon_0$, $\varepsilon_0\ (\varepsilon_0<0)$ – энергия связи. Функции (3.73) нормированы так, что

$$\langle\vec{Q}'', i'', \sigma_3''|\vec{Q}', i', \sigma_3'\rangle=\delta^{(3)}(\vec{Q}''-\vec{Q}')\,\delta_{i''i'}\,\delta_{\sigma_3''\sigma_3'}. \tag{3.74}$$

Пусть $\widetilde{W}_\alpha$ – оператор с ядром

$$\widetilde{W}_\alpha(\vec{Q}_\alpha, \vec{k}_\alpha; \vec{Q}_\alpha', \vec{k}_\alpha')=\frac{\delta^{(3)}(\vec{Q}_\alpha-\vec{Q}_\alpha')}{[\rho(\vec{Q}_\alpha, \vec{k}_\alpha)\rho(\vec{Q}_\alpha, \vec{k}_\alpha')]^{1/2}}\,v_\alpha(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\alpha'), \tag{3.75}$$

причем ядро рассматривается как оператор по спиновым переменным, а $v_\alpha(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\alpha')$ определяется для соответствующей пары из уравнений (3.63) или (3.64). Пусть

$$W_\alpha=U_\alpha\widetilde{W}_\alpha U_\alpha^{-1}, \qquad V_\alpha=\{(M_\alpha+W_\alpha)^2+\vec{Q}_\alpha^2\}^{1/2}-$$
$$(M_\alpha^2+\vec{Q}_\alpha^2)^{1/2}. \tag{3.76}$$

Тогда массовый оператор для системы трех частиц с парными взаимодействиями равен

$$\hat{M} = M + \sum_{\alpha} V_{\alpha}, \tag{3.77}$$

где $M = E_{\alpha} + \varepsilon(\vec{Q}_{\alpha})$.

Так как массовый оператор представляется в виде суммы свободного массового оператора и операторов парных взаимодействий, то релятивистские уравнения Фаддеева могут быть написаны в полной аналогии с нерелятивистскими. Например, в случае рассеяния частицы 3 на связанном состоянии частиц I и 2 уравнения Фаддеева могут быть записаны в виде (ср. с формулой (2.10) из книги /104/)

$$\begin{aligned} \Psi_{12} &= |\vec{Q}'_{12}, i', \sigma'_3\rangle + G_o(z) T_{12}(z)(\Psi_{31} + \Psi_{23}), \\ \Psi_{31} &= G_o(z)\, T_{31}(z)(\Psi_{12} + \Psi_{23}), \\ \Psi_{23} &= G_o(z)\, T_{23}(z)(\Psi_{12} + \Psi_{31}), \end{aligned} \tag{3.78}$$

где $G_o(z) = (z - M)^{-1}$, $\vec{Q}'_{12}, i', \sigma'_3$ – квантовые числа начального состояния (см. (3.73)), а операторы $T_{\alpha}(z)$ удовлетворяют уравнениям

$$T_{\alpha}(z) = V_{\alpha} + V_{\alpha} G_o(z) T_{\alpha}(z) . \tag{3.79}$$

Важно понимать, что операторы V_{α} связаны с v_{α}, определяемыми из (3.63) или (3.64) довольно сложным образом (см. формулы (3.75) и (3.76), а равенство $V_{\alpha} = v_{\alpha}$ имеет место лишь в нерелятивистском пределе. Поэтому операторы $T_{\alpha}(z)$ не выражаются непосредственно через "внутренние" двухчастичные операторы $t_{\alpha}(z)$, такие, что

$$t_{\alpha}(z) = v_{\alpha} + v_{\alpha}\left[z - \ell\varepsilon(\vec{k}_{\alpha})\right]^{-1} t_{\alpha}(z) . \tag{3.80}$$

Если записать (3.79) как интегральное уравнение в пространстве функций от $\vec{k}_{\alpha}$, то необходимо учитывать, что ядро оператора V_{α} зависит от $\vec{Q}_{\alpha}$, как параметра (см. (3.75), (3.76)).

Мы отмечали в § I.4, что в настоящее время в литературе рассматриваются различные варианты релятивистских уравнений Фаддеева. Они отличаются друг от друга выбором выражения для $G_o(z)$ и уравнения для $T_{\alpha}(z)$. Из всех применяемых выражений для $G_o(z)$ наше является наиболее простым. Как один из вариантов редукции уравнения Бете-Солпитера, оно было получено в работе /45/. Что же касается уравнений для $T_{\alpha}(z)$, то, как отмечается в работах /62-64/, их обычно применяемые формы приводили к нежелательным следствиям. Поэтому в одной из своих последних работ Гарсилазо /63/ предлагает для $T_{\alpha}(z)$ уравнение (3.79), в которое, однако, вместо V_{α} входит v_{α}. В силу сказанного выше, возникает неясность, совместим ли такой вариант с разделимостью всех десяти генераторов представления группы Пуанкаре.

Как нам представляется, вывод релятивистских уравнений Фаддеева в рамках РКМ является более последовательным, чем исходя из диаграмм, поскольку, приняв предположение о физической адекватности РКМ при низких энергиях, мы получаем динамическое описание, из которого уравнения Фаддеева выводятся уже без дополнительных предположений. Впервые релятивистские уравнения Фаддеева в рамках РКМ были выписаны во фронтовой форме в работе /77/, и при этом было указано на отличие операторов типа V_{α} от v_{α}. В точечной форме уравнения Фаддеева обсуждались в /80/. Поскольку, как уже отмечалось, результаты для трехчастичного массового оператора в /77, 80/ можно представить в том же виде, что и в § 3.2, то соответствующие уравнения Фаддеева можно представить в том же виде, что и выше.

§ 3.7. Оператор энергии системы трех нуклонов в приближении $1/c^2$ и релятивистская поправка к энергии связи многонуклонной системы

Для построения массового оператора системы четырех и более тел необходимо знать оператор энергии для системы трех тел. Последний, в свою очередь, определяется не только операторами парных взаимодействий V_{α}, но и трехчастичными операторами $\hat{\mathcal{U}}(\vec{P})$.

Как обычно, будем считать, что трехчастичное пространство H уже реализовано в виде $H = \int \oplus H(\vec{P})\, d^3\vec{P}$. Пусть $\hat{E}$ – оператор энергии трехчастичной системы, а $\hat{E}(\vec{P})$ – его сужение на $H(\vec{P})$. Согласно результатам § 2.4 (см. формулы (2.44), (2.52), (2.53), (2.55), для нахождения оператора $\hat{E}(\vec{P})$ мы должны вначале рассмотреть оператор

$$\hat{\mathcal{E}} = E + \sum_{\alpha} V_{\alpha} \ , \tag{3.81}$$

где E - оператор энергии для системы трех невзаимодействующих частиц. Затем, сужая $\hat{\mathcal{E}}$ на $H(0)$, мы получаем трехчастичный массовый оператор $\hat{m} = \hat{\mathcal{E}}(0)$, а оператор $\hat{E}(\vec{P})$ должен быть определен как

$$\hat{E}(\vec{P}) = \hat{\mathcal{U}}(\vec{P})(\hat{m}^2 + \vec{P}^2)^{1/2}\, \hat{\mathcal{U}}(\vec{P})^{-1} . \tag{3.82}$$

Возникает следующий вопрос. Если взять оператор (3.81) и сразу сузить его на $H(\vec{P})$, то будет ли полученный таким образом оператор $\hat{\mathcal{E}}(\vec{P})$ отличаться от $\hat{E}(\vec{P})$. Иначе говоря, будет ли коммутативной следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathcal{E}} \arrow[r, "I(\vec{P})"] \arrow[d, "I(0)"'] & H(\vec{P}) \\
H(0) \arrow[ur, "\hat{\mathcal{U}}(\vec{P})"'] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 3.

Эта диаграмма показывает, что оператор $\hat{\mathcal{E}}(\vec{P})$ в $H(\vec{P})$ мы получаем, сразу применяя $I(\vec{P})$, а оператор $\hat{E}(\vec{P})$ - при помощи сужения $\hat{\mathcal{E}}$ на $H(0)$ и применения формулы (3.82). Из свойства кластерной сепарабельности ясно, что если операторы $\hat{E}(\vec{P})$ и $\hat{\mathcal{E}}(\vec{P})$ отличаются друг от друга, то разность между ними должна трактоваться, как оператор трехчастичного взаимодействия.

Для определения операторов $\hat{\mathcal{U}}(\vec{P})$ необходимо решить, как эти операторы должны быть составлены из операторов $\mathcal{U}(\vec{p}\,;\,a)$ (см. § 2.4). В данном случае у нас есть три оператора $\mathcal{U}(\vec{p};a)$. Пусть $\mathcal{U}_{12,3}(\vec{p})$ означает оператор $\mathcal{U}(\vec{p};a)$ при " a ", соответствующем разбиению на невзаимодействующие подсистемы $\{1,2\}$ и $\{3\}$.

Аналогично определим операторы $\mathcal{U}_{31,2}(\vec{p})$ и $\mathcal{U}_{23,1}(\vec{p})$. По операторам $\mathcal{U}(\vec{p};a)$ построим операторы $\mathcal{W}(\vec{p};a)$ (см. формулу (2.54). Как указывалось в § 2.4, из этих операторов должен быть построен оператор $\hat{\mathcal{W}}(\vec{p})$, а затем и оператор $\hat{\mathcal{U}}(\vec{p})$ по формуле (2.55). В общем случае задача о построении оператора $\hat{\mathcal{W}}(\vec{p})$ может быть решена многими способами (см. § 2.3). Однако если мы работаем в приближении $1/c^2$, то $\mathcal{W}(\vec{p};a)$ можно представить в виде

$$\mathcal{W}(\vec{p};a) = 1 + B(\vec{p};a) , \tag{3.83}$$

где оператор $B(\vec{p};a)$ антиэрмитов и имеет порядок $1/c^2$.
Из условий антиэрмитовости и малости операторов $B(\vec{p};a)$ следует, что оператор $\hat{\mathcal{W}}(\vec{p})$ можно составить из операторов $B(\vec{p};a)$ единственно возможным образом, считая, что в приближении $1/c^2$

$$\hat{\mathcal{W}}(\vec{p}) = 1 + B_{12,3}(\vec{p}) + B_{31,2}(\vec{p}) + B_{23,1}(\vec{p}) . \tag{3.84}$$

Операторы $B(\vec{p};a)$ однозначно определяются представлением $g \to U(g;a)$,равным тензорному произведению представлений для подсистем, соответствующим разбиению " " . В нашем случае представление $g \to U_{12,3}(g)$ равно тензорному произведению представлений, описывающих взаимодействующую систему $\{1,2\}$ и свободную частицу $\{3\}$. Оба эти представления уже описаны выше. Поэтому нахождение оператора $B_{12,3}(\vec{p})$ является лишь делом техники. Ввиду важности результата мы приведем некоторые пояснения к схеме вычисления этого оператора.

Для нахождения действия оператора $\mathcal{U}_{12,3}(\vec{p})$ на функцию $\chi(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3) \in H(0)$ (спиновые индексы опускаем) мы должны взять некоторую функцию $\Psi(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)$,такую, что $I(0)\Psi = \chi$, затем вычислить действие оператора $\hat{U}(\vec{p})$ (см. (2.30)) на Ψ и определить $\mathcal{U}_{12,3}(\vec{p})$ при помощи (2.31). В операторе $\hat{U}(\vec{p})$ надо учитывать, что трехчастичный массовый оператор зависит от взаимодействия между частицами 1 и 2 , $\hat{M} = M(\hat{M}_{12})$, где $\hat{M}_{12}$ - массовый оператор для взаимодействующей системы $\{1,2\}$. Будем обозначать через M_{12} - свободный массовый оператор для системы $\{1, 2\}$, а через $M = M(M_{12})$ - свободный трехчастичный массовый оператор. При вычислении $\mathcal{U}_{12,3}(\vec{p})$,как и при вычислении оператора $\mathcal{U}(\vec{p})$ в § 3.1, встречаются множители типа $\left(1+\frac{\vec{p}^2}{\hat{M}^2}\right)^{1/4}$ и γ - матрицы. Поскольку эти величины отличаются от единицы на члены порядка $1/c^2$, при вычислении с точностью $1/c^2$ мы можем пренебречь взаимодействием частиц 1 и 2 в этих членах, и, следовательно, результат для них будет такой же, как и при вычислении оператора $\mathcal{U}(\vec p)$. Для краткости члены такого типа будем обозначать как (...). Поскольку $U_{12,3}(g)=\hat U_{12}(g)U_3(g)$ то символически с учетом (1.12) можно написать

$$\hat U\Big(\alpha\Big(\frac{\vec P}{\hat M}\Big)\Big)\Psi(\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3)=(\dots)\left[1+\frac{i\vec j_{12}(\vec p\times\vec P_{12})}{2MM_{12}}\right](\dots)\Psi(\vec p_1(\vec P'_{12},\vec k),\vec p_2(\vec P'_{12},\vec k),\vec p_3'), \tag{3.85}$$

где $\vec j_{12}$ - оператор (3.14) для двухчастичной системы,

$$\vec p_3'=\vec p_3-\frac{\vec P}{\hat M}\varepsilon_3(\vec p_3)+\frac{\vec p(\vec p\vec p_3)}{2M^2},$$

$$\vec P_{12}'=\vec P_{12}-\frac{\vec P}{\hat M}(\hat M_{12}^2+\vec P_{12}^2)^{1/2}+\frac{\vec p(\vec p\vec P_{12})}{2M^2}, \tag{3.86}$$

причем мы работаем в приближении $1/c^2$, и зависимость от оператора, как обычно, понимаем в смысле спектрального разложения. Кроме того, $\vec P$ и $\vec k$ - это импульсы, определенные выше для системы $\{1,2\}$, а $\vec p_1(\vec P_{12},\vec k)$ и $\vec p_2(\vec P_{12},\vec k)$ - выражения импульсов $\vec p_1,\vec p_2$ через $\vec P_{12},\vec k$.

Ясно, что члены со спинами в $\vec j_{12}$ можно включить в (...), а член с $\vec l(\vec k)$ приводит к замене $\vec k$ на

$$\vec k'=\vec k+\frac{(\vec p\times\vec P_{12})\times\vec k}{2MM_{12}}. \tag{3.87}$$

Поэтому формулу (3.85) можно представить в виде

$$\hat U\Big(\alpha\Big(\frac{\vec P}{\hat M}\Big)\Big)\Psi(\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3)=(\dots)\Psi(\vec p_1(\vec P'_{12},\vec k'),\vec p_2(\vec P'_{12},\vec k'),\vec p_3'). \tag{3.88}$$

Теперь, для нахождения $\mathcal U_{12,3}(\vec p)$, мы должны, согласно (3.8), выразить $\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3$ через $\vec P,\vec k_1,\vec k_2,\vec k_3$, а затем положить $\vec P=\vec p$. Учтем то, что (с точностью $1/c^2$)

$$\vec p_1(\vec P_{12},\vec k)=\vec k+\frac{\varepsilon_1(\vec k)}{M_{12}}\vec P_{12}+\frac{(\vec k\vec P_{12})\vec P_{12}}{2M^2},$$

$$\vec p_2(\vec P_{12},\vec k)=-\vec k+\frac{\varepsilon_2(\vec k)}{M_{12}}\vec P_{12}-\frac{(\vec k\vec P_{12})\vec P_{12}}{2M^2}. \tag{3.89}$$

и то, что формулу (3.13) можно представить в виде $\mathcal U(\vec p)\chi(\vec k_1,\vec k_2,\vec k_3)=(\dots)\chi(\vec k_1,\vec k_2,\vec k_3)$. Тогда, с учетом (3.86), (3.88), (3.89) мы имеем

$$\mathcal U_{12,3}(\vec p)\chi(\vec k_1,\vec k_2,\vec k_3)=(\dots)\chi\Big(\vec k_1-\frac{m_1\vec p}{m_1+m_2}\Big(\frac{\hat E_{12}}{\hat M}-\frac{E_{12}}{M}\Big),\ \vec k_2-\frac{m_2\vec p}{m_1+m_2}\Big(\frac{\hat E_{12}}{\hat M}-\frac{E_{12}}{M}\Big),\ \vec k_3-m_3\vec p\Big(\frac{1}{\hat M}-\frac{1}{M}\Big)\Big) \tag{3.90}$$

и с точностью $1/c^2$ мы можем записать символически, что

$$\mathcal U_{12,3}(\vec p)\chi(\vec k_1,\vec k_2,\vec k_3)=(\dots)\chi\Big(\vec k_1-\frac{m_3m_1\vec p}{(m_1+m_2)M_0^2}\tilde v_{12},\ \vec k_2-\frac{m_3m_2\vec p}{(m_1+m_2)M_0^2}\tilde v_{12},\ \vec k_3+\frac{\vec p\, m_3\tilde v_{12}}{M_0^2}\Big), \tag{3.91}$$

где $\tilde v_{12}$ - сужение v_{12} на трехчастичное пространство $H(0)$, $M_0=m_1+m_2+m_3$. Наконец, перейдя от $\vec k_1,\vec k_2,\vec k_3$ к переменным $\vec Q_{12}$ и $\vec k_{12}$, мы видим, что из (3.91) следует, что

$$B_{12,3}(\vec p)=-\frac{m_3\vec p}{M_0^2}\tilde v_{12}\frac{\partial}{\partial\vec Q_{12}}. \tag{3.92}$$

Для большей ясности мы привели схему вычисления, не предполагая, что $m_1=m_2$. Надо иметь в виду, однако, что при $m_1\neq m_2$ двухчастичные операторы $\hat U(\vec p)$, вообще говоря, не должны совпадать с $\mathcal U(\vec p)$ (см. § 3.3).

Применим теперь результат (3.92) для вычисления оператора энергии трехнуклонной системы в приближении $1/c^2$. С учетом (3.81) - (3.84) легко видеть, что

$$\hat{E}(\vec{P}) = \hat{\mathcal{E}}(\vec{P}) + V_{123}(\vec{P}),$$

$$V_{123}(\vec{P}) = -\frac{\vec{P}}{9m_0} \sum_{\alpha \neq \beta} \left[\tilde{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \vec{Q}_\alpha}, \tilde{v}_\beta \right]. \tag{3.93}$$

Поскольку оператор $V_{123}(\vec{P})$ уже имеет малость $1/c^2$, то из (3.93) следует, что в приближении $1/c^2$

$$\hat{E} = E + \sum_\alpha V_\alpha + V_{123},$$

$$V_{123} = -\frac{\vec{P}}{9m_0} \sum_{\alpha \neq \beta} \left[v_\alpha \frac{\partial}{\partial \vec{Q}_\alpha}, v_\beta \right]. \tag{3.94}$$

Мы видим, что даже если между частицами имеются лишь парные взаимодействия, т.е. никакого трехчастичного взаимодействия в массовый оператор не вводится (см. формулу (3.25), то в операторе энергии появляется в общем случае трехчастичное взаимодействие, которое определяется формулами (3.93) и (3.94). Если мы не выходим за рамки трехчастичной задачи, то это взаимодействие несущественно, так как $V_{123}(0) = 0$. Однако если мы рассматриваем задачу четырех и более тел, то трехчастичные взаимодействия становятся существенными (ср. с Замечанием в § 2.5). Возникновение трехчастичных взаимодействий в многочастичной системе впервые отмечалось в /84/ (см. также /39/.

В приближении $1/c^2$, в качестве операторов v_α, входящих в (3.94), можно взять обычные нерелятивистские операторы взаимодействия. В квантовой электродинамике эти операторы локальны и не зависят от спинов. Следовательно, все операторы v_α коммутируют друг с другом и с операторами $i\partial/\partial\vec{Q}_\beta$, поскольку последние являются операторами умножения на соответствующий координатный вектор. Поэтому в квантовой электродинамике трехчастичных сил указанного типа не возникает. По тем же причинам, их нет и в ОТО. Разумеется, это не противоречит тому, что трехчастичный массовый оператор может содержать трехчастичные взаимодействия. Например, в случае ОТО вид этого взаимодействия ясен из формулы (106,17) в книге /18/.

В случае нуклон-нуклонного взаимодействия операторы v_α, вообще говоря, нелокальны и зависят от спинов. Поэтому при вычислении релятивистских поправок в многонуклонных задачах операторы типа V_{123}, вообще говоря, нетривиальны и имеют порядок $1/c^2$. Если операторы v_α локальны, но зависят от спинов, то в (3.93), (3.94) можно вынести $\partial/\partial\vec{Q}_\alpha$ за знак коммутатора, и тогда мы придем к формуле, используемой в работе /83/ для расчета релятивистской поправки к энергии связи ядра ^4He. Ясно также, что операторы V_{123} должны входить в расчеты многокварковых систем в рамках моделей типа релятивистских составных кварков, поскольку операторы v_α в этом случае действуют нетривиально по цветным индексам.

В случае четырех взаимодействующих частиц мы, по аналогии с трехчастичным случаем, должны вначале составить

$$\hat{\mathcal{E}} = E + \sum_\alpha V_\alpha + \sum_\gamma V_\gamma, \tag{3.95}$$

где E - оператор энергии четырех невзаимодействующих частиц, индекс α нумерует все пары частиц (он пробегает значения 12, 13, 14, 23, 24, 34), а индекс γ - все тройки частиц (он пробегает значения 123, 124, 134, 234). Пусть $\hat{\mathcal{E}}(\vec{P})$ - сужение оператора $\hat{\mathcal{E}}$ на пространство $H(\vec{P})$ для четырех частиц, а $\hat{E}(\vec{P})$ - сужение на это пространство четырехчастичного оператора энергии. Оператор $\hat{E}(\vec{P})$, как и в трехчастичном случае, получается при помощи сужения $\hat{\mathcal{E}}$ на $H(0)$ и применения формулы (3.82). Из свойства кластерной сепарабельности следует, что разность между $\hat{E}(\vec{P})$ и $\hat{\mathcal{E}}(\vec{P})$ является оператором четырехчастичного взаимодействия. Можно убедиться в том, что четырехчастичное взаимодействие будет существенным лишь в приближении более высоком, чем $1/c^2$. Аналогично, в задаче многих тел в приближении $1/c^2$ не будут существенными пятичастичные и т.д. взаимодействия. Поэтому в приближении $1/c^2$ оператор энергии для системы из любого числа частиц может быть представлен формулой (3.95), где E - оператор энергии соответствующей свободной системы, индекс α нумерует все пары частиц, а индекс γ - все тройки частиц.

Для системы из заданного числа взаимодействующих нуклонов оператор энергии в приближении $1/c^2$, как следует из формул (3.53), (3.94), (3.95), представляется в виде

$$\hat{E} = Nm_0 + T^{\text{нер}} + T' + \sum_\alpha v_\alpha^{\text{нер}} - \sum_\alpha \Big\{ \frac{v_\alpha^{\text{нер}\,2}}{4m_0} + \frac{1}{16m_0^2}\{v_\alpha^{\text{нер}}, (4\vec{q}_\alpha^{\,2} + \vec{P}_\alpha^{\,2})\} +$$

$$+ \frac{1}{8m_0^2}\Big[(\vec{P}_\alpha \vec{q}_\alpha)(\vec{P}_\alpha \frac{\partial}{\partial \vec{q}_\alpha}), v_\alpha^{\text{нер}}\Big] - \frac{i}{8m_0^2}\Big[\vec{\sigma}_\alpha(\vec{P}_\alpha \times \vec{q}_\alpha), v_\alpha^{\text{нер}}\Big]\Big\} -$$

$$- \frac{1}{9m_0}\sum_{\gamma,\alpha\neq\beta} \vec{P}_\gamma \Big[v_\alpha^{\text{нер}} \frac{\partial}{\partial \vec{Q}_\alpha}, v_\beta^{\text{нер}}\Big], \tag{3.96}$$

где N - число нуклонов, $T^{\text{нер}}$ - нерелятивистский оператор кинетической энергии, T' - релятивистская поправка к нему, α и β в последней сумме нумеруют пары, возможные для данного γ, а если α означает пару частиц i и k, то

$$\vec{P}_\alpha = \vec{p}_i + \vec{p}_k; \quad \vec{q}_\alpha = \frac{1}{2}(\vec{p}_i - \vec{p}_k); \quad \vec{\sigma}_\alpha = \vec{\sigma}_i - \vec{\sigma}_k. \tag{3.97}$$

Пусть φ - нерелятивистская волновая функция связанного состояния многонуклонной системы, которая удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\Big(T^{\text{нер}} + \sum_\alpha v_\alpha^{\text{нер}}\Big)\varphi = \varepsilon_0 \varphi, \tag{3.98}$$

где ε_0 - нерелятивистское значение энергии связи ($\varepsilon_0 < 0$). Тогда, как следует из (3.96) и (3.53), релятивистская поправка к энергии связи в приближении $1/c^2$ дается формулой

$$\Delta\varepsilon = \langle \varphi | T' + \sum_\alpha V_\alpha' + \sum_\gamma V_\gamma | \varphi \rangle, \tag{3.99}$$

причем здесь и далее мы предполагаем, что все операторы уже сужены на пространство $H(0)$ для N - частичной системы. Как и в случае трех частиц, можно вместо (3.98), рассмотреть систему уравнений для фаддеевских компонент

$$(T^{\text{нер}} - \varepsilon_0)\varphi_\alpha = -v_\alpha \varphi; \quad \varphi = \sum_\alpha \varphi_\alpha. \tag{3.100}$$

Однако, как известно (см., например, работы /105, 106, 104/), при $N \geq 4$ введение компонент φ_α еще не обеспечивает фредгольмовости системы, и для получения фредгольмовой системы необходимо, в свою очередь, представить каждую из функций φ_α в виде суммы некоторых функций $\varphi_{\alpha a}$. Если мы решим какую-либо систему уравнений для функций $\varphi_{\alpha a}$, то нам будут известны и функции φ_α, а тогда, как следует из (3.96), (3.99), и (3.100), релятивистская поправка к энергии связи в приближении $1/c^2$ может быть представлена в следующем виде

$$\Delta\varepsilon = \langle\varphi|T'|\varphi\rangle + \frac{1}{4m_0^2}\sum_\alpha \{ Re\langle\varphi|(T^{\text{нер}} - \varepsilon_0)(2\vec{q}_\alpha^{\,2} + \vec{Q}_\alpha^{\,2})|\varphi_\alpha\rangle -$$

$$- m_0\langle\varphi_\alpha|(T^{\text{нер}} - \varepsilon_0)^2|\varphi_\alpha\rangle + Im\langle\varphi|\vec{\sigma}_\alpha(\vec{Q}_\alpha \times \vec{q}_\alpha)(T^{\text{нер}} - \varepsilon_0)|\varphi_\alpha\rangle +$$

$$+ Re\langle\varphi|(\vec{Q}_\alpha \vec{q}_\alpha)(\vec{Q}_\alpha \frac{\partial}{\partial \vec{q}_\alpha})(T^{\text{нер}} - \varepsilon_0)|\varphi_\alpha\rangle - \tag{3.101}$$

$$- \frac{2}{9m_0}\sum_{\gamma,\alpha\beta} \vec{Q}_\gamma Re\langle\varphi_\alpha|(T^{\text{нер}} - \varepsilon^0)\frac{\partial}{\partial \vec{Q}_\alpha}(T^{\text{нер}} - \varepsilon_0)|\varphi_\beta\rangle,$$

где $\vec{Q}_\gamma$ - импульс тройки γ в с.ц.и. системы N частиц. Формально, формула (3.101) совпадает с (3.62), за исключением того, что в ней имеется последняя сумма, связанная с вкладом трехчастичных взаимодействий, обсуждавшихся выше.

Из формулы (3.101) следует, что, проведя нерелятивистский расчет энергии связи и фаддеевских компонент, можно, как и в трехчастичном случае, вычислить релятивистскую поправку к энергии связи при помощи обычного интегрирования. Необходимо иметь в виду, однако, что при переходе от случая $N=3$ к $N \geq 4$ сложность расчетов в фаддеевском подходе значительно возрастает, в то время, как при расчетах другими методами (например, методом сферических гармоник) случай $N=4$ ненамного сложнее, чем $N=3$. Поэтому в общем случае релятивистская поправка к энергии связи в приближении $1/c^2$ может быть вычислена при помощи формулы (3.99).

ГЛАВА 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Перечислим вкратце основные результаты настоящей работы. В главе 2 проведен подробный анализ проблемы сложения взаимодействий в рамках метода пакующих операторов Соколова. Показано, что в мгновенной форме имеется естественное решение. Оно согласуется с квантовой теорией поля в том смысле, что в последней сложение взаимодействий также соответствует варианту $A(a)=1$ и линейной композиции массовых операторов (см. формулы (2.6) и (2.7)). В § 3.3 мы обсудили общий вид оператора энергии двухнуклонной системы в приближении $1/c^2$ и привели аргументы в пользу естественного выбора выражения для этого оператора. Затем этот результат был обобщен на случай произвольного числа нуклонов. Мы описали также релятивистские трехчастичные уравнения и обсудили, в чем их основные отличия от нерелятивистских.

С учетом полученных результатов, нам представляется, что задача об описании многонуклонной системы в приближении $1/c^2$ теперь обоснована почти так же надежно, как и обычная нерелятивистская задача. Если учитывать лишь парные взаимодействия между нуклонами, то изложенная выше теория предписывает, каким образом оператор нуклон-нуклонного взаимодействия должен быть определен из двухчастичных данных в приближении $1/c^2$ и как он входит в гамильтониан многонуклонной системы в этом приближении. При этом используются лишь самые общие свойства унитарных представлений группы Пуанкаре и свойство разделимости. Что же касается чисто трехчастичных взаимодействий (входящих в массовый оператор трехнуклонной чистемы), то в большинстве подходов они имеют релятивистское происхождение и также дают вклад порядка $1/c^2$ (см., например, работы /107,33/). В отличие от найденных выше "кинематических" членов в многонуклонном гамильтониане трехчастичные взаимодействия могут быть определены, исходя лишь из какой-либо конкретной динамической схемы.

На основании сказанного § 1.1 и из результатов настоящей работы представляется важным выяснить, может ли проблема недосвязки, хотя бы частично, объясняться вкладом релятивистских эффектов. В проведенных до сих пор расчетах релятивистской поправки к энергии связи ядер ^3H и ^3He (см., например, работы /108 - 112/ и обзор /113/) эта величина, как правило, не превышала значение порядка 0,2 МэВ, и поэтому, возможно, сложилось впечатление, что роль релятивистских эффектов в проблеме недосвязки незначительна. При этом отмечалось, что поправки в кинетической и потенциальной энергии сами по себе существенны, но, вследствие их сильного сокращения, результирующий

эффект оказывается малым. Это же было отмечено и в работах /101,102/, где проводился расчет релятивистской поправки к энергии связи как трех, так и четырех нуклонов. При этом оказалось, что для ядра ^4He результирующий эффект не превышает - 0,5 МэВ. В работе /83/ было сообщено о расчете, в котором релятивистская поправка к энергии связи ядра ^3H составила около 1,5 МэВ, а к энергии связи ядра ^4He - около 6 МэВ. Однако в дальнейшем, в работе /103/ (в которой участвовал один из авторов работы /83/) утверждается, что количественно релятивистские эффекты являются малыми, и, кроме того, их нельзя вычислять при помощи разложения по степеням $1/c^2$.

В указанных только что работах учитывалось лишь полностью симметричное S - состояние в волновой функции и не учитывались спиновые эффекты. Между тем, как следует из формул (3.62) и (3.101) (выведенных в работах автора /114,115/), вклад высокоимпульсной компоненты волновой функции должен быть существенным и, следовательно, должен быть существенным вклад высших парциальных волн. Недавно Л.А. Кондратюк, В.В. Соловьев и автор провели расчет релятивистской поправки к энергии связи тритона в модели Рида с мягким кором. Использовалось аналитическое выражение для фаддеевских компонент в пятиканальном приближении, данное в работе /116/. При этом величина ΔE в (3.62) оказалась равной - 0,1 МэВ в двухканальном приближении, - 0,5 МэВ в трехканальном и - 0,54 МэВ в пятиканальном (нерелятивистское значение энергии связи в этой модели составляет примерно 7,0 Мэв). Следовательно, релятивистская поправка оказывается существенной и при этом, в пятиканальном приближении, основной вклад дает D - волна. В этой связи отметим, что в релятивистской поправке к магнитному моменту дейтрона, вычисленной ранее Кондратюком и Стрикманом /10/, как указано авторами, основной вклад также дает D - волна, хотя ее полная вероятность в дейтроне не превышает значения порядка 6%.

В связи с проблемой недосвязки, было проведено много расчетов энергии связи тритона с учетом трехнуклонных взаимодействий, для описания которых чаще всего выбирается механизм двухпионного обмена. В работах /2, 3/ такие расчеты проводились для случая 34-х каналов. При этом, с учетом трехнуклонных сил, тритон оказывается даже пересвязанным, однако результат сильно зависит от выбора параметра обрезания формфактора в πNN - вершине. Весьма существенным оказалось и то, что для вклада трехчастичных взаимодействий вклады последних каналов сравнимы с вкладами первых. Поэтому и в расчете релятивистской поправки вклады высоких каналов, по-видимому, существенны. Что же касается учета кварковых степеней свободы, то, насколько известно автору, в СССР расчеты энергии связи трех- и четырехнуклонной системы для реалистических взаимодействий и с учетом многих каналов проводятся в настоящее время группой Народецкого в ИТЭФ и группой Кукулина в НИИЯФ МГУ. В частности, на прошлогоднем международном совещании по физике малочастичных систем в Дубне Народецким было доложено о результате 8,I МэВ в пятиканальном расчете для тритона.

Нисколько не умаляя важности исследования вкладов трехнуклонных взаимодействий и кварковых степеней свободы, автор , тем не менее, представляет , что в теоретическом анализе релятивистских поправок имеются меньшие неопределенности. Поэтому представляется весьма важным проведение расчетов низкоэнергетических трех- и четырехнуклонных параметров в приближении $1/c^2$, исходя из результатов, изложенных в этой работе. При этом первоочередной задачей мы считаем проведение расчета релятивистской поправки к энергии связи трех- и четырехнуклонной системы по формулам §§ 3.5, 3.7 для нерелятивистских волновых функций, вычисленных с реалистическими потенциалами при учете большого числа каналов. Весьма важным представляется также расчет вклада релятивистских эффектов в длины Nd - рассеяния, особенно с учетом малости длины дублетного рассеяния. Здесь, так же как и в случае энергии связи, важно учитывать высшие парциальные волны. В принципе, для расчета длин рассеяния можно использовать уравнения (3.78), однако технические трудности здесь, по-видимому, гораздо более значительные, чем в нерелятивистском случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Браун Дж.Е., Джексон А.Д. Нуклон-нуклонные взаимодействия. М.: Атомиздат, 1979.
2. Chen C.R., Payne G.L., Friar J.L., Gibson B.F. Phys. Rev., 1985, C31, 2266; 1986, C33, 1740.
3. Ishikawa S., Sasakawa T. Few Body Systems, 1986; 1,3; 1,143.
4. Machleidt R., Holinde K., Elster C. Phys. Rep., 1987, 149, 1.
5. Coon S.A., Friar J.L. Phys. Rev., 1986, C34, 1060.
6. Sasakawa T. Nucl. Phys., 1987, A463, 327c.
7. Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L., Chen C.R. Phys. Rev.,1986,C34,14
8. Katayama T., Sakai M. Few Body Probl. Phys. Proc. 10 Int. IUPAP Conf. 1984, 2, 437.
9. Chen C.R.,Payne G.L.,Friar J.L.,Gibson B.F. Phys.Rev.,1986, C33, 401.
I0. Kondratyuk L.A., Strikman M.I. Nucl. Phys., 1984, A426,575.
II. Азиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука.
I2. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория, часть I - 1968 г., часть II - 1971 г. М.: Наука.
I3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука.
I4. Barnes T., Ghandour G.I. Phys.Lett., 1982, 118B, 411.
I5. Olsson M.G., Miller K.J. Phys.Rev., 1983, D28, 674.
I6. Jacobs S., Olsson M.G., Suchyta III J. Phys. Rev., 1987, D35, 2448.
I7. Gupta S.N., Radford S.F. Phys. Rev., 1981, D24, 2309.
I8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973.
I9. Glockle W., Muller L. Phys. Rev., 1981, C23, 1183.
20. Okubo S. Progr. Theor. Phys., 1954, 12, 603.
2I. Kummel H. Phys.Rev., 1983, C27, 765.
22. Schutte D. Z.Phys., 1987, A326, 383.
23. Simonov Yu.A. Nucl. Phys., A416, 109c.
24. Народецкий И.М. В книге "Нуклон-нуклонные и адрон-ядерные взаимодействия при промежуточных энергиях", с. 426. Л: ЛИЯФ, 1986.
25. Кукулин В.И., Краснопольский В.М., Померанцев В.Н., Сазонов П.Б. ЯФ, 1986, 43, 559.
26. Basdevant J.L., Boukra S. Z.Phys., 1985, C28, 413; 1986,C30, 103.
27. Schwarz J.H. Phys. Rep., 1982, 89, 223.

28. Соколов С.Н. Т М Ф, 1975, 23, 355.
29. Соколов С.Н. Т М Ф, 1978, 36, 193.
30. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения, части I,2 . М: Мир, 1980.
31. Coester F., Polyzou W.N. Phys. Rev., 1982, D26, 1348.
32. Mutze U. Habilitationssrift Univ. Munchen, 1982; Phys.Rev., 1984, D29, 2255.
33. Dirac P.A.M. Rev. Mod. Phys., 1949, 21, 392.
34. Sokolov S.N. Coordinates in Relativistic Hamiltonian mechanics. В книге: "Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля" . Протвино, 1984, I, 85.
35. Владимиров Ю.С., Турыгин А.Ю. Теория прямого межчастичного взаимодействия М: Энергоатомиздат, 1986.
36. Гайда Р.П., Ключковский Ю.Б., Третяк В.И. ТМФ, 1980, 44,194.
37. Клепиков Н.П., Шатний А.Н. ТМФ, 1981, 46, 50.
38. Клепиков Н.П.,Шатний А.Н. Развитие концепции прямого взаимодействия в релятивистской физике. Деп. в ВИНИТИ, №3335-81, Москва, 1981.
39. Гайда Р.П. ЭЧАЯ, 1982, 13, 427.
40. Майоров А.А., Соколов С.Н., Третяк В.И. Препринт ИФВЭ, ОТФ 86-243, Серпухов, 1986.
41. Relativistic Action at a Distance: Classical and Quantum Aspects. Proceedings Barselona, Spain 1981- Lect. Not. Phys., 1982, 162.
42. Salpeter E.E., Bethe H.A. Phys. Rev., 1951, 84, 1232.
43. Logunov A.A. Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, 29, 380.
44. Kadyshevsky V.G. Nucl. Phys., 1968, B6, 125.
45. Blankenbecler R., Sugar S. Phys.Rev., 1966, 142, 1051.
46. Gross F. Phys. Rev., 1969, 186, 1448.
47. Todorov I.T. Phys. Rev., 1971, D10, 2351.
48. Weinberg S. Phys. Rev., 1966, 150, 1313.
49. Lepage G.P., Brodsky S.J. Phys. Rev., 1980, 22, 2157.
50. Namyslowski J.M. Progr. Part. Nucl. Phys. 1984, 14, 2.
51. Frankfurt L.L., Strikman M.I. Phys. Rep., 1981, 76, 215.
52. Кондратюк Л.А., Терентьев М.В. ЯФ, 1980, 31, 1087.
53. Кадышевский В.Г. ЖЭТФ, 1964, 46, 654, 872.
54. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. ЯФ, 1969,9. 219, 462.
55. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б., ЭЧАЯ, 1972, 2, 635.

56. Karmanov V.A. Nucl. Phys.,1980, B166, 378; 1981, A362, 331.
57. Fuda M.G. Phys. Rev., 1987, C35, 226.
58. de Groot E.H., Ruijgrok Th.W. Nucl. Phys., 1975, B101, 95.
59. Ruijgrok Th.W. In: Jancewicz B., Lukierski J (eds): "Quantum Theory of Particles and Fields". World Scientific, 1983, 117.
60. Ahmadzadeh A., Tjon J.A. Phys. Rev., 1966, 147, 1111.
61. Aaron R., Amado R.D., Young J.E. Phys.Rev., 1968, 174, 2022.
62. Сафронов А.Н. В книге "Нуклон-нуклонные и адрон-ядерные взаимодействия при промежуточных энергиях". Л: ЛИЯФ, 1986, 530.
63. Garcilazo H. J.Math. Phys., 1986, 27, 2576.
64. Garcilazo H. Phys. Rev., 1987, C35, 1804.
65. Morioka S., Afnan I.R. Phys. Rev., 1981, C23, 852.
66. Лев Ф.М. ЯФ, 1983, 37, 1058.
67. Celenza L.S., Shakin C.M. Relativistic nuclear physics: Theories of structure and scattering. World Scientific Lecture Notes, 1986, 2.
68. Боголюбов П.Н., Дорохов А.Е., ЭЧАЯ, 1987, 18, 917.
69. Serot B.D., Walecka J.D. Advances in Nuclear Physics. Negele J.W., Vogt E. (eds), 1985, 16. New-York: Plenum Press.
70. Bakamjian B., Thomas L.H. Phys. Rev., 1953, 92, 1300.
71. Fong R., Suher J. J.Math.Phys., 1964, 5, 456.
72. Osborn H. Phys. Rev., 1968, 176, 1514.
73. Coester F. Helv. Phys. Acta, 1965, 38, 7.
74. Соколов С.Н. ДАН СССР, 1977, 233, 575
75. Терентьев М.В., ЯФ, 1976, 24, 207.
76. Берестецкий В.Б., Терентьев М.В. ЯФ, 1976, 24, 1044.
77. Bakker B.L.G., Kondratyuk L.A., Terent'ev M.V. Nucl. Phys., 1979, B158, 497.
78. Лев. Ф.М. Проблема трех тел в релятивистской квантовой механике. Депонировано в ВИНИТИ, 1981, № 2492.
79. Соколов С.Н. Шатний А.Н., ТМФ, 1978, 37, 291.
80. Lev F.M. Fortschr. Phys., 1983, 31, 75.
81. Кондратюк Л.А. Релятивизм нуклонов и кварковые степени свободы в легких ядрах.,- В сб.: Элементарные частицы. М., Атомиздат, 1982, вып. 3, 49-80.
82. Gross F. Nucl. Phys., 1984, A416, 387c.
83. Coester F., Wiringa R.B. Few Body Probl. Phys., Proc. 10 Int. IUPAP Conf., 1984, 2, 343.

84. Foldy L.L., Krajcik R.A. Phys. Rev., 1975, D12, 1700.
85. Lev F.M. J.Phys., 1984, A17, 2047.
86. Mutze U. Private communication, 25.01.1986.
87. Новожилов Ю.В. Введение в теорию элементарных частиц. М: Наука, 1972.
88. Виленкин Н.Я., Комбинаторика. М: Наука, 1965.
89. Mutze U. J.Math. Phys. 1978, 19, 231.
90. Mutze U. J.Phys., 1978, A11, 665.
91. Наймарк М.А. Нормированные кольца. М: Наука, 1968.
92. Kato T., Kuroda S.T. Rocky Mount. J.Math., 1971, 1, 127.
93. Dixmier J. Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien. Paris: Gauthier-Villars, 1969.
94. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М: Наука, 1976.
95. Lev F.M. Nucl. Phys., 1985, A433, 605.
96. Lev F.M. J.Phys., 1985, A18, 1975.
97. Шапиро И.С. ДАН АН СССР, 1956, 106, 647, ЖЭТФ, 1962,43, 1727.
98. Широков Ю.М. ЖЭТФ, 1959, 36, 474.
99. Фаддеев Л.Д. УФН, 1982, 136, 435.
100. Sokolov S.N. Rep. Math. Phys., 1984, 20, 235.
101. Kondratyuk L.A., Fogelzang J., Fanchenko M.S. Phys. Lett., 1981, B98, 405.
102. Веселов А.И., Кондратюк Л.А., ЯФ, 1982, 36, 343.
103. Glockle W., Lee T. S-H., Coester F. Phys.Rev., 1986, C33, 709.
104. Беляев В.Б. Лекции по теории малочастичных систем, М: Энергоатомиздат, 1986.
105. Якубовский О.А. ЯФ, 1967, 5, 1312.
106. Меркурьев С.П., Яковлев С.Л. ДАН СССР, 1982, 262, 591.
107. Coelho H.T., Das T.K., Robilotta M.R. Phys.Rev., 1983, C28, 1812.
108. Живописцев Ф.А., Переломов А.М., Широков Ю.М., ЖЭТФ, 1959, 36, 478.
109. Bhasin V.S., Jacob H., Mitra A.N. Phys.Rev., 1970, D1, 3496.
110. Jackson A.D., Tjon J.A. Phys. Lett., 1970, B32, 9.
111. Hammel E., Baier H., Rinat A.S. Phys. Lett., 1979, B85, 193.
112. Garcilazo H. Phys. Rev., 1981, C23, 559.
113. Tjon J.A. Nucl. Phys., 1987, A463, 157c.
114. Лев Ф.М. ЯФ, 1987, 45, 26
115. Лев Ф.М. ЯФ, 1988, 47, 1571.
116. Hajduk Ch., Green A.M., Sainio M.E. Preprint Univ Helsinki, 1979, TFT.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 ноября 1988 г.

ПЕРЕЧЕНЬ
лекций, вышедших с 1974 в ОИЯИ

Фаустов Р.Н. Связанная система частиц в квантовой электродинамике. Вып.1. ОИЯИ, Дубна, 1974.

Синаев А.Н. Современные аппаратурные системы модульной структуры, используемые при создании измерительно-вычислительных комплексов /КАМАК, ВЕКТОР/. Вып.2. ОИЯИ, 8507, Дубна, 1975.

Волков Д.В. Кварки как следствие дуальности. Вып.3. ОИЯИ, Р2-8765, Дубна, 1975.

Пальчик М.Я., Фрадкин Е.С. Введение в теорию конформно-инварнантных квантовых полей. Вып.4. ОИЯИ, 2-8874, Дубна, 1975.

Замори З. Микропроцессоры. Вып.5. ОИЯИ, Р10-8852, Дубна, 1975.

Биленький С.М. Вопросы физики нейтрино высоких энергий. Вып.6. ОИЯИ, 2-9026, Дубна, 1975.

Малкин И.А., Манько В.И. Инварианты, когерентные состояния и динамические симметрии квантовых систем. Вып.7. ОИЯИ, Р2-9228, Дубна, 1975.

Волков М.К., Первушин В.Н. Квантовая теория поля с киральным лагранжианом и физика мезонов низких энергий. Вып.8. ОИЯИ, Р2-9390, Дубна, 1976.

Басиладзе С.Г. Интегральные схемы с эмиттерной связью и их применение в наносекундной ядерной электронике. Вып.9. ОИЯИ, 13-9744, Дубна, 1976.

Аникин С.А. и др. Перенормированные составные поля в квантовой теории поля. Вып.10. ОИЯИ, Р2-10528, Дубна, 1977.

Шляпников П.В. Множественные процессы и инклюзивные реакции. Вып.11. ОИЯИ, Р2-10681, Дубна, 1977.

Капусцик Э. Галилеева инвариантность в теории поля. Вып.12. ОИЯИ, Р2-10677, Дубна, 1977.

Бутцев В.С. Явление возбуждения высокоспиновых ядерных состояний и механизм поглощения отрицательных π-мезонов. Вып.13, ОИЯИ, Р15-10847, Дубна, 1977.

Валуев Б.Н. Применение алгебры Клиффорда к решению задачи Изинга - Онсагера. Вып.14. ОИЯИ, Р17-11020, Дубна, 1977.

Капусцик Э. Нестандартные алгебры квантово-механических наблюдаемых. Вып.15. ОИЯИ, Р4-11497, Дубна, 1978.

Блохинцев Д.И. Квантовая механика. Лекции по избранным вопросам. Вып.16. ОИЯИ, Р2-11728, Дубна, 1978.

Ширикова Н.Ю. Начинающим работать на ЭВМ CDC-6500. Вып.17. ОИЯИ, Р11-11739, Дубна, 1978.

Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Непрерывные симметрии в теории поля. Вып.18. ОИЯИ, Р2-12029, Дубна, 1978.

Некоторые проблемы физики высоких энергий /сборник/. Вып.19. ОИЯИ, Р2-12080, Дубна, 1978.

Басиладзе С.Г. Электронная регистрирующая аппаратура физического эксперимента. Вып.20. ОИЯИ, Р13-12151, Дубна, 1979.

Ефремов А.В., Радюшкин А.В. Партоны, жесткие процессы и квантовая хромодинамика. Вып.21. ОИЯИ, Р2-12803, Дубна, 1979.

Говорков А.Б. Введение в теорию кварков. Вып.22, ОИЯИ, Р2-12803, Дубна, 1979.

Говорков А.Б. Цветные кварки и глюоны. Вып.23. ОИЯИ, Р2-80-6, Дубна, 1980.

Исаев П.С. Глубоконеупругое рассеяние лептонов на нуклонах. Партонная модель нуклона. Вып.24. ОИЯИ, Р2-80-325, Дубна, 1980.

Казаков Д.И., Ширков Д.В. Суммирование асимптотических рядов в квантовой теории поля. Вып.25. ОИЯИ, Р2-80-462, Дубна, 1980.

Ососков Г.А. Применение методов распознавания образов в физике высоких энергий. Вып.26. ОИЯИ, Р10-83-187, Дубна, 1983.

Малышев В.А. Элементарное введение в математическую физику бесконечно-частичных систем. Вып.27. ОИЯИ, Р17-83-363, Дубна, 1983.

Савушкин Л.Н., Фоменко В.Н. Введение в мезонную теорию ядерных взаимодействий и ядерных систем. Вып.28. ОИЯИ, Р4-83-369, Дубна,1983.

Биленький С.М. Осцилляции нейтрино. Вып.29. ОИЯИ, Р2-83-441, Дубна, 1983.

Бужек В. Введение в метод стохастического квантования. Вып.30. ОИЯИ, Р2-84-419, Дубна, 1984.

Шумовский А.С., Юкалов В.И. Фазовые состояния и переходы. Вып.31. ОИЯИ, Р17-85-676, Дубна, 1985.

Владимиров А.А. Введение в квантовые интегрируемые системы. Метод R-матрицы. Вып.32. ОИЯИ, Р17-85-742, Дубна, 1985.

Осипов В.А., Федянин В.К. Полиацетилен и двумерные модели квантовой теории поля. Вып. 33. ОИЯИ, Р17-85-809, Дубна, 1985.

Шуян Ш. Стохастичность в динамических системах. Вып. 34. ОИЯИ, Р17-86-211, Дубна, 1986.

Ефремов А.В. Введение в квантовую хромодинамику. Вып. 35. ОИЯИ, Р2-86-212, Дубна, 1986.

Нестеренко В.В., Червяков А.М. Сингулярные лагранжианы. Классическая динамика и квантование. Вып. 36. ОИЯИ, Р2-86-323, Дубна, 1986.

Пепёлышев Ю.Н. Регистрация нейтронов /современное состояние и перспективы развития/ Вып. 37. ОИЯИ, Р13-86-719, Дубна, 1986.

Боголюбов Н.Н./мл./, Шумовский А.С. Светоизлучение. Вып. 38. ОИЯИ, Р17-87-176, Дубна, 1987.

Пушкаров Д.И. Дефектоны в кристаллах. /Метод квазичастиц в квантовой теории дефектов/. Вып. 39. ОИЯИ, Р17-87-177, Дубна, 1987.

Никитюк Н.М. От современной алгебры к специализированным процессорам. Вып. 40. ОИЯИ, Р10-87-401, Дубна, 1987.

Дубничкова А.З. Непрерывные группы для физиков. Вып. 41, ОИЯИ, Р2-87-197, Дубна, 1987.

Никитюк Н.М. Электронные методы экспериментальной физики высоких энергий. Вып. 42, ОИЯИ, Р1-87-909, Дубна, 1987.

Балдин А.М., Диденко Л.А. Асимптотические свойства адронной материи в пространстве четырехмерных относительных скоростей.Вып. 43, ОИЯИ, Р1-87-912, Дубна, 1987.

Машкевич В.С. Индетерминистская квантовая динамика. Вып. 44, ОИЯИ, Р2-88-150, 1988.

Филиппов А.Т. Введение в теорию суперструн. Вып. 45, ОИЯИ, Р2-88-188, 1988.

Бардин Д.Ю. Прецизионные проверки стандартной теории. Вып. 46, ОИЯИ, Р2-88-189, 1988.

Смирнов В.А., Четыркин К.Г. R^*-операция: техника ренормгрупповых вычислений и другие приложения. Вып.47, ОИЯИ, Р2-88-190, 1988.

Добролюбов М.И., Игнатьев А.Ю., Шапошников М.Е. Элементарные частицы и космология. Вып. 48, ОИЯИ, Р2-88-654, 1988.

Ambjørn J. Non-Perturbative Field Theory / Field Theory on a Lattice. Вып.49, ОИЯИ, Е2-88-655, 1988.

Горбатов А.М. Гиперсферический базис в квантовой теории многих тел. Вып.50, ОИЯИ, Р6-88-656, 1988.

Бельков А.А., Первушин В.Н., Эберт Д. Низкоэнергетические предсказания современных киральных лагранжианов, основанных на динамике кварков. Вып.51, ОИЯИ, Р2-88-657, 1988.

Требования, предъявляемые к серии брошюр
"Лекции для молодых ученых ОИЯИ"

Серия брошюр "Лекции для молодых ученых ОИЯИ" издаётся с целью повышения научно-профессионального кругозора и уровня молодых ученых и специалистов ОИЯИ в актуальных областях исследований, ведущихся по тематике Института. Выпуски должны представлять собой законченные циклы лекций, прочитанные в ОИЯИ и ориентированные прежде всего на молодых сотрудников Института.

Лекции должны иметь характер учебного пособия, предназначенного для первого ознакомления с рассматриваемой проблемой, а также содержать обзор её современного состояния. Они должны быть снабжены подробным оглавлением и основной литературой. Большие параграфы рекомендуется разбивать на подпараграфы с вынесенными в оглавление подзаголовками.

Весь текст, включая отдельные главы и параграфы, следует печатать, заполняя каждую страницу целиком.

Рукопись должна быть напечатана на специальных бланках, предназначенных для прямого репродуцирования, которые можно получить в издательском отделе. Все формулы и схемы должны быть вписаны аккуратно и ясно тушью или чернилами черного цвета. Разметка формул не производится, их нумерация должна находиться в конце строки справа в круглых скобках. Текст лекций печатается на машинке с черной (не серой) лентой через I,5 интервала. Объём лекций не должен превышать IOO страниц машинописного текста.

Рукопись представляется в Редакционный совет серии брошюр "Лекции для молодых ученых ОИЯИ" Советом молодых ученых и специалистов ОИЯИ и Советами молодых ученых и специалистов лабораторий Института. Редакционный совет принимает окончательное решение о целесообразности ее публикации.

Редакционный совет