ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

Э. КАПУСЦИК

Нестандартные алгебры квантово-механических наблюдаемых

ДУБНА

ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Выпуск 15

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р4 - 11497

Э.Капусцик

НЕСТАНДАРТНЫЕ АЛГЕБРЫ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ НАБЛЮДАЕМЫХ

Дубна, 1978

Капусцик Э. Р4 - 11497

Нестандартные алгебры квантово-механических наблюдаемых

В квантовой механике наблюдаемые описываются с помощью операторов, подчиняющихся, как известно, ассоциативному закону умножения $A(BC) = (AB)C$. В лекциях обсуждается возможность описания квантово-механических наблюдаемых с помощью некоторых неассоциативных алгебр. Рассматриваются гейзенберговские уравнения движения для гармонического и ангармонического осцилляторов. Показывается, что эти уравнения имеют решения только при определенном выборе алгебры.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Kapuszik E. P4 - 11497

Non-Standard Algebras of Quantum-Mechanical Observables

As is well-known, in quantum mechanics the observables are described by operators with associative multiplication law $A(BC) = (AB)C$. In the lecture note the possibility of describing the observables by means of some nonassociative algebras is discussed. The Heisenberg equations of motion for harmonic and anharmonic oscillators are considered. It is shown that these equations have solutions only under a definite choice of the algebra.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

I. Введение

В стандартной квантовой механике физическим наблюдаемым сопоставляются самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве состояний рассматриваемой физической системы. Настоящие лекции посвящены алгебраическому подходу, основные идеи которого состоят в следующем. Физическим наблюдаемым сопоставляются элементы некоторой алгебры, не обязательно допускающей представление в виде алгебры операторов в гильбертовом пространстве. Конкретный вид алгебры должен определяться наблюдаемыми свойствами рассматриваемой физической системы. Различным физическим системам могут соответствовать и различные алгебры. Способ описания состояний в этом подходе близок к известному описанию в терминах матрицы плотности [1].

Потребность в алгебраическом подходе обусловлена тем, что в ряде физических задач рамки теории, использующей понятие гильбертова пространства, являются недостаточными для адекватного описания физической ситуации. Примеры можно найти в главе I книги Эмха [2].

История алгебраического подхода начинается с основополагающей работы Гейзенберга 1925 г. [3], где впервые было предложено описывать физические наблюдаемые с помощью некоторой алгебры, а именно алгебры бесконечномерных матриц. Такой подход получил дальнейшее развитие в работах Гейзенберга, Борна, Иордана [4] и Паули [5] в 1928 г., а также в более абстрактном виде в работах Дирака [6]. Однако после работ Шредингера [7] и особенно фон Неймана [8], квантовая механика начала развиваться в другом направлении, приняв в 1932 г. свой современный вид [9].

Но и после 1932 года мысль об алгебраическом подходе к квантовой механике не покидала физиков, хотя и же привлекала особенного внимания. В 1934 году попытку дать чисто алгебраическую формулировку квантовой механики предприняли Иордан, фон

Нейман и Вигнер[10]. Дальнейшее развитие этот подход нашел в работах Сигала[11] и Шермана[12]. Большую известность получил алгебраический подход благодаря его применениям к квантовой теории поля[13].

В этих лекциях под алгеброй, сопоставляемой наблюдаемым, мы будем понимать в самом общем виде некую универсальную алгебру[x)] [14]. В частности, мы допускаем, что множеству всех наблюдаемых может быть сопоставлена неассоциативная бинарная и более общая n -арная алгебра.

Неассоциативные алгебры уже встречались во многих работах по квантовой механике. Упомянем иорданову алгебру[15] и октонионную алгебру, применяемую в последнее время в работах[16].

Для того чтобы сделать наши рассуждения понятными для более широкого круга читателей, мы будем избегать применения сложных алгебраических методов. Вместо этого все время будем работать с определенным представлением рассматриваемых алгебр наблюдаемых, реализуемых с помощью бесконечномерных матриц с необычным законом умножения. Для полноты сначала вкратце напомним основные сведения о первоначальном подходе Гейзенберга в 1925 г. к квантовой механике.

В этих лекциях мы не касаемся проблемы описания состояний, а обсуждаем только алгебраическую структуру множества наблюдаемых с целью дать читателю представление о применении неоператорных алгебр для описания физических систем.

I. Квантовая механика Гейзенберга

В классической механике физические наблюдаемые (например, такие, как координата и импульс частицы) описываются с помощью функций от времени. Значения этих функций в данный момент времени и определяют значения наблюдаемых в этот же момент времени. Гейзенберг[3] показал, что в мире атомных явлений необходимо видоизменить такое описание физических наблюдаемых и предложил физическую наблюдаемую электрона Q описывать не функцией от времени, а совокупностью величин типа

$$Q=\{q_{mn}e^{i\omega_{mn}t};\ q_m\}. \qquad (I.1)$$

Здесь m и n принадлежат множеству Z всех целых положительных чисел; m и n нумеруют дискретные состояния данного атома. Числа q_m равны средним значениям наблюдаемой Q в состоянии с номером m; числа ω_{mn} равны частотам излучения, связанного с переходом атома из состояния с номером m в состояние с номером n (по определению $\omega_{mn}=-\omega_{nm}$) и, наконец, комплексные числа $q_{mn}=q^*_{nm}$ служат для вычисления высших статистических моментов наблюдаемой Q (см. ниже). Впоследствии Борн и Иордан[4] обратили внимание на то, что множество (I.I) представляет собой не что иное как бесконечномерную квадратную матрицу с элементами $q_{mn}\exp i\omega_{mn}t$, где $q_{mm}=q_m$, и показали, что все формулы в работе Гейзенберга можно удобным образом переписать в матричном виде. Мы не будем применять этих матричных обозначений и сохраним первоначальную запись представителя каждой физической наблюдаемой в виде множества (I.I). Это связано с тем, что рассматриваемые нами алгебры наблюдаемых отличаются по своей структуре от матричных алгебр, и более удобной поэтому является запись (I.I), отделяющая средние значения q_m наблюдаемой Q от других величин, представляющих данную наблюдаемую. Отметим здесь, что представители вида (I.I) всех наблюдаемых, описывающих данную физическую систему, содержат все излучаемые и поглощаемые системой частоты.

Для класса множеств (I.I) Гейзенберг определил следующие три основные операции:

1) операцию дифференцирования по времени

$$\frac{d}{dt}\{q_{mn}e^{i\omega_{mn}t};q_m\}=\{i\omega_{mn}q_{mn}e^{i\omega_{mn}t};\ 0\} \qquad (I.2)$$

2) операцию сложения

$$\alpha Q+\beta Y=\{(\alpha q_{mn}+\beta y_{mn})e^{i\omega_{mn}t};\ (\alpha q_m+\beta y_m)\}, \qquad (I.3)$$

наделяющую класс (I.I) структурой линейного пространства;

x) В универсальной алгебре, кроме операций сложения и бинарной операции умножения двух элементов, могут быть определены и другие независимые операции, затрагивающие больше чем два элемента. Это так называемые n -арные алгебраические операции, которые любым n элементам алгебры в качестве результата операции ставят в соответствие некий (n +I)-й элемент.

3) операцию умножения двух множеств типа (I.I)

$$Q\circ Y=\Big\{\Big(\sum_{k\in Z} q_{mk}y_{kn}+q_m y_{mn}+y_n q_{mn}\Big)e^{i\omega_{mn}t};\ \sum_{k\in Z} q_{mk}y_{km}+q_m y_m\Big\}, \tag{I.4}$$

превращающую класс множеств (I.I) в ассоциативное, но не в коммутативное кольцо.

Определив эти операции, Гейзенберг мог решать уравнения движения типа

$$\ddot{Q}=f(Q), \tag{I.5}$$

имеющие такой же внешний вид, что и уравнения движения классической механики, но содержащие уже совершенно другую физическую информацию. Кроме того, алгебраические операции типа (I.3) и (I.4) позволяют вычислять высшие статистические моменты данной наблюдаемой. Например, согласно (I.4), среднее квадратичное отклонение наблюдаемой Q в состоянии с номером m дается выражением

$$\overline{(Q^2-\overline{Q}^2)_m}=\sum_{k\in Z}|q_{mk}|^2. \tag{I.6}$$

Определение (I.4) операции умножения тесно связано с так называемым правилом Ридберга-Ритца для наблюдаемых частот, имеющее вид

$$\omega_{mn}=\omega_{mk}+\omega_{kn} \tag{I.7}$$

для произвольных номеров m, n и k. Действительно, легко видеть, что соотношение (I.7) необходимо и достаточно для того, чтобы операции (I.2), (I.3) и (I.4) удовлетворяли такому фундаментальному закону дифференциального исчисления, каким является закон Лейбница:

$$\frac{d}{dt}(Q\circ Y)=\frac{dQ}{dt}\circ Y+Q\circ\frac{dY}{dt}. \tag{I.8}$$

Соотношение (I.7) является следствием известной формулы Бора ($\hbar\omega_{mn}=E_m-E_n$), но не все получаемые по этой формуле частоты являются наблюдаемыми.

Легко дать примеры физических систем, для которых наблюдаемые частоты ω_{mn} не удовлетворяют соотношению (I.7). Самым простым примером такой системы является квантовый гармонический осциллятор. Из его уравнения движения типа (I.5) следует, что единственной наблюдаемой частотой является частота осциллятора ω, и поэтому наблюдаемые частоты не могут удовлетворять соотношению (I.7). Для того чтобы спасти положение, в обычном подходе к квантовой механике вводятся в теорию все кратные $n\omega$ осцилляторной частоты ω, что с одной стороны приводит к нарушению упомянутого нами принципа, требующего, чтобы в множествах типа (I.I) присутствовали только наблюдаемые частоты, а с другой – к значительному расширению класса наблюдаемых. Ниже, в главе 3, мы обсудим другой выход из этого положения, путем изменения операции (I.4) так, чтобы, не вводя добавочных частот и не расширяя класса наблюдаемых, не нарушать (I.8).

Другими примерами физических систем, для которых условие (I.7) не удовлетворяется, являются системы, описываемые гамильтонианами типа

$$H=\frac{1}{2M}P^2+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\lambda_\alpha Q^{2\alpha}, \tag{I.9}$$

так как для всех этих систем наблюдаются только такие частоты ω_{mn}, для которых число $|m-n|$ нечетное. Сумма двух таких частот является частотой, для которой $|m-n|$ четно, и поэтому условие (I.7) также не выполнено. Например, для ангармонического осциллятора, для которого отличными от нуля являются только λ_1 и λ_2 вместо (I.7), имеет место другое соотношение для наблюдаемых частот

$$\omega_{mn}=\omega_{mk}+\omega_{kl}+\omega_{ln} \tag{I.10}$$

для произвольных номеров m, n, k и l. В этом случае, чтобы не вводить других ненаблюдаемых частот, требуются более существенные изменения формализма Гейзенберга, заключающиеся в том, что вместо бинарной операции умножения вводится тернарная операция, определяющая произведение трех множеств типа (I.I). Пример такой квантовой алгебры рассмотрим в главе 5.

Применив формулу (I.4) к случаю $Q\circ Q$, видим, что определенная Гейзенбергом операция умножения имеет смысл только для класса наблюдаемых, для которых среднее квадратичное отклонение (I.6) конечное. Для простых физических систем это условие всегда выполняется, но последнее еще не означает его универсальности. Так, например, для систем с бесконечным числом степеней свободы условие конечности (I.6) нарушается. Рассматриваемые нами алгебры наблюдаемых не требуют конечности (I.6).

Прежде чем приступать к конкретным выкладкам, вкратце охарактеризуем путь, которому будем следовать, и укажем сходства и отличия от обычной матричной квантовой механики. Полученные Гейзенбергом в 1925 г. результаты совпали с теми результатами, которые уже раньше выводились на основе так называемой старой теории квантов, и это послужило основой для вывода о том, что принятая Гейзенбергом структура алгебры наблюдаемых является правильной с физической точки зрения. Однако остался еще вопрос о единственности определений Гейзенберга, который до сих пор так и остался нерешенным. Сам Гейзенберг писал о том, что не исключены и другие возможные виды алгебраических операций, но ему они не понадобились для вывода желаемых результатов. Это связано с тем, что во время формирования квантовой механики единственными экспериментальными данными, относящимися к микромиру, были данные, касающиеся атомных явлений. Сейчас известны ядерные, слабые и прочие взаимодействия, которые все обсуждаются в рамках той же теории. При этом, однако, появляются известные трудности. Возможно, что более адекватными новым явлениям окажутся некоторые другие альтернативные алгебры наблюдаемых.

Рассматриваемые нами в дальнейшем алгебры наблюдаемых, за исключением одной, принадлежат к тому же самому классу бинарных алгебр, что и алгебра Гейзенберга. Бинарная алгебраическая операция $A \circ B$ общего вида содержит некоторый набор априори не фиксированных структурных констант, и наша задача заключается в соответствующем выборе этих констант. Одним из возможных выборов является выбор, сделанный Гейзенбергом. Выше на примере некоторых физических систем мы показали, что такой выбор приводит к необходимости введения в теорию этих систем дополнительных, ненаблюдаемых, частот. Мы требуем, чтобы представители наблюдаемых не содержали ненаблюдаемых частот. Мы увидим, что это приводит к неассоциативности получающейся алгебры наблюдаемых. Кроме того, наблюдаемые не будут автоматически обладать многими свойствами, которыми они обладают в обычной операторной квантовой механике. Выполнение некоторых из этих свойств, однако, можно дополнительно потребовать, и мы это сделаем.

Во-первых, потребуем, чтобы канонические перестановочные соотношения можно было записывать на языке новых алгебр. Далее окажется необходимым потребовать, чтобы рассматриваемые алгебры обладали естественным единичным элементом. Наконец, последнее требование, которое в гейзенберговском случае автоматически выполняется, это требование выполнения известного соотношения Бора, связывающего наблюдаемые частоты с энергиями состояний атома.

В результате мы приходим к некоторым негейзенберговским алгебрам наблюдаемых. Эти алгебры, несмотря на их неассоциативность, не обладают той степенью универсальности, какой обладает алгебра Гейзенберга. Здесь имеется в виду то обстоятельство, что в алгебре Гейзенберга все уравнения движения (I.5), по крайней мере, в рамках теории возмущений, обладают решениями, в то время как для негейзенберговских алгебр решение данного уравнения движения существует только при определенном выборе структурных констант теории, которые оказываются разными для разных уравнений движения.

2. Обобщение квантово-механической операции умножения наблюдаемых

Рассмотрим класс всех множеств типа (I.I), представляющий все физические наблюдаемые. Для того, чтобы наделить этот класс структурой алгебры, нужно, согласно общим методам алгебры, определить правило, сопоставляющее любой паре множеств типа (I.I) третье множество того же типа. В таком случае в классе множеств типа (I.I) будет определена некоторая бинарная алгебраическая операция, называемая произведением.

Для того чтобы множество R типа (I.I) являлось произведением множеств Q и Y типа (I.I), элементы r_{mn} и r_m множества R должны билинейным образом зависеть от элементов множеств Q и Y :

$$r_{mn} = \sum_{klsu} A_{mnklsu} q_{kl} y_{su} + \sum_{kls} B_{mnkls} q_k y_{ls} + \sum_{kls} C_{mnkls} y_k q_{ls} + \sum_{kl} D_{mnkl} q_k y_l , \qquad (2.I)$$

$$r_m = \sum_{klsu} a_{mklsu}\, q_{kl}\, y_{su} + \sum_{kl} b_{mkl}\, q_k\, y_l +$$

$$+\sum_{kls} c_{mkls}\, q_k\, y_{ls} + \sum_{kls} d_{mkls}\, y_k\, q_{ls}. \tag{2.2}$$

Это необходимо и достаточно для того, чтобы выполнялось алгебраическое соотношение вида:

$$Q\circ(\alpha Y_1+\beta Y_2)=\alpha\, Q\circ Y_1+\beta\, Q\circ Y_2. \tag{2.3}$$

В представлении типа (I.I) для наблюдаемой, числа q_{mn}, y_{mn} и r_{mn} всегда умножены на $\exp i\omega_{mn}t$. Поэтому естественно потребовать, чтобы после подстановки в (2.I) и (2.2) $q_{mn}\exp i\omega_{mn}t$ и $y_{mn}\exp i\omega_{mn}t$ вместо q_{mn} и y_{mn} у чисел r_{mn} появилась бы "правильная" экспонента, т.е. $\exp i\omega_{mn}t$ с теми же номерами m и n, и чтобы не появлялся экспоненциальный фактор у чисел r_m. Это требование будет удовлетворено, если

$$d_{mkls}=c_{mkls}=D_{mnkl}=0 \tag{2.4}$$

для всех значений индексов, и

$$a_{mklsu}=a_{mkl}\,\delta_{sl}\,\delta_{uk}$$

$$B_{mnkls}=B_{mnk}\,\delta_{lm}\,\delta_{sn} \tag{2.5}$$

$$C_{mnkls}=C_{mnk}\,\delta_{lm}\,\delta_{sn},$$

где δ_{sl} обозначает обычный символ Кронекера. Кроме того, появляются и условия для коэффициентов A_{mnklsu}, которые, однако, сильно зависят от существующих соотношений между наблюдаемыми частотами. Эти условия обсудим позже, а пока примем следующий вид общей бинарной операции квантового умножения:

$$(Q\circ Y)_{mn}=\sum_{klsu} A_{mnklsu}\, q_{kl}\, y_{su} + \sum_{k} B_{mnk}\, q_k\, y_{mn} +$$

$$+\sum_{k} C_{mnk}\, y_k\, q_{mn} \tag{2.6}$$

$$(Q\circ Y)_m=\sum_{kl} a_{mkl}\, q_{kl}\, y_{lk} + \sum_{kl} b_{mkl}\, q_k\, y_l. \tag{2.7}$$

Коэффициенты $A_{mnklsu}, B_{mkl}, C_{mkl}, a_{mkl}$ и b_{mkl} в дальнейшем будем называть структурными константами теории. При этом очевидно, что эти коэффициенты должны определяться из физических соображений. Структурные константы Гейзенберга имеют следующий вид:

$$A_{mnklsu}=\delta_{mk}\,\delta_{ls}\,\delta_{un}$$

$$B_{mnk}=\delta_{mk}$$

$$C_{mnk}=\delta_{nk}$$

$$a_{mkl}=\delta_{mk} \tag{2.8}$$

$$b_{mkl}=\delta_{mk}\,\delta_{ml}.$$

Подчеркнем, что во всех случаях, когда структурные константы отличаются от (2.8), получаемые алгебры наблюдаемых не будут соответствовать никакой операторной алгебре, что сильным образом затрудняет исследование этих алгебр.

Обсудим сначала структурные константы в формуле (2.7). Класс множеств типа

$$\{q_{mn}=0\,;\ q_m\} \tag{2.9}$$

является подклассом всех рассматриваемых множеств, а также определяет не зависящие от времени наблюдаемые, т.е. все константы движения, для которых естественно требовать выполнения соотношения

$$\{q_{mn}=0;q_m\}\circ\{y_{mn}=0;y_m\}=\{(Q\circ Y)_{mn}=0\,;\ q_m y_m\}. \tag{2.10}$$

Легко видеть, что это соотношение будет выполняться только тогда, когда

$$b_{mkl}=\delta_{mk}\,\delta_{ml}. \tag{2.11}$$

Таким образом, умножение в подклассе (2.9) совпадает с умножением Гейзенберга.

Кроме операции умножения, Гейзенберг определил еще и своеобразное условие квантования в виде следующего правила сумм

$$\sum_{k\in Z} \omega_{km} |X_{mk}|^2 = \frac{\hbar}{2M}, \tag{2.12}$$

где наблюдаемая

$$X = \{x_{mn} e^{i\omega_{mn}t} ; x_m\} \tag{2.13}$$

соответствует координате электрона в атоме и M – это масса электрона. Как известно [4], правило сумм (2.12) эквивалентно каноническим соотношениям коммутации. Условие (2.12) было обнаружено в результате исследования поведения атомов во внешнем электромагнитном поле. При выводе (2.12) предполагалось, что статистические веса всех атомных состояний одинаковы. Так как этот факт экспериментально проверен только лишь для атомных систем, то мы вправе ввести некоторое обобщение условия (2.12) в виде

$$\sum_{k\in Z} \omega_{km} |X_{mk}|^2 f_k = \frac{\hbar}{2M}, \tag{2.14}$$

позволяющее учесть возможность разных статистических весов для разных состояний системы. В обычном формализме Гейзенберга такое условие квантования соответствует следующему перестановочному соотношению

$$PfX - XfP = i\hbar, \tag{2.15}$$

где f является диагональным оператором с собственными значениями f_k; P и Q – обычные операторы импульса и положения.

Следуя Гейзенбергу, потребуем теперь, чтобы левая сторона (2.14) записывалась в терминах обобщенной операции умножения. Поскольку формула (2.14) содержит только один свободный индекс m, это требование можно удовлетворить только с помощью формулы (2.7). Вычисляя по этой формуле диагональную часть коммутатора $P\circ X - X\circ P$, получаем

$$(P\circ X - X\circ P)_m = iM \sum_{kl} (a_{mkl} - a_{mlk}) \omega_{lk} |X_{kl}|^2, \tag{2.16}$$

где

$$P = M\frac{dX}{dt} = \{iM\omega_{mn} x_{mn} e^{i\omega_{mn}t} ; 0\}. \tag{2.17}$$

Что касается недиагональной части коммутатора $P\circ X - X\circ P$, то после определения остальных структурных констант надо будет его вычислить и проверить, выполняется ли равенство

$$P\circ X - X\circ P = i\hbar I, \tag{2.18}$$

где I обозначает множество

$$I = \{q_{mn} = 0 ; q_m = 1\}. \tag{2.19}$$

Сумма в (2.16) будет равна сумме в (2.14) при произвольных значениях частот ω_{mn}, если

$$a_{mkl} - a_{mlk} = f_l \delta_{mk} - f_k \delta_{ml}, \tag{2.20}$$

откуда определяется антисимметричная часть структурных констант a_{mkl}. Одним из возможных решений условия (2.20) является выбор

$$a_{mkl} = f_l \delta_{mk}, \tag{2.21}$$

сделанный Гейзенбергом для случая $f_l = 1$. Ниже увидим, что этот выбор возможен только в случае, когда все остальные структурные константы теории тоже равны структурным константам Гейзенберга.

Таким образом, мы пришли к выводу, что во всех алгебрах наблюдаемых должно быть

$$(Q\circ Y)_m = \frac{1}{2}\sum_{kl} a_{mkl}(q_{kl}y_{lk} + y_{kl}q_{lk}) + \frac{1}{2}\sum_k f_k(q_{mk}y_{km} - y_{mk}q_{km}) + q_m y_m, \tag{2.22}$$

где симметричная часть структурных констант a_{mkl} по-прежнему остается произвольной. Ниже мы покажем, что симметричные части a_{mkl} можно однозначно определить, если потребовать, чтобы собственные значения E_n гамильтониана рассматриваемой системы удовлетворяли соотношению Бора:

$$E_m - E_n = \hbar\,\omega_{mn}. \qquad (2.23)$$

Перейдем теперь к структурным константам в формуле (2.6). Первое требование для этих констант состоит в том, чтобы умножение произвольной наблюдаемой на физическую константу не меняло вида этой наблюдаемой. Так как физические константы представляются множествами (2.9), для которых

$$q_m = const,$$

то это требование равносильно тому, чтобы множество I вида (2.19) было единичным элементом рассматриваемой квантовой алгебры. Легко видеть, что таким образом получаем условия

$$\sum_k B_{mnk} = \sum_k C_{mnk} = 1 \qquad (2.24)$$

для произвольных индексов m и n. Очевидно, что существует бесконечно много способов удовлетворения соотношения (2.24).

Единственным пунктом теории, в котором существенную роль играют соотношения между наблюдаемыми частотами, является метод определения структурных констант A_{mnklsu}. Эти константы должны определяться так, чтобы после использования формулы (2.6) для элементов перемножаемых множеств с временными экспоненциальными факторами, элемент $(Q\circ Y)_{mn}$ сопровождался только фактором $\exp i\,\omega_{mn}t$. Легко убедиться в том, что в зависимости от вида соотношений между частотами получаются разные ответы для структурных констант A_{mnklsu} и поэтому мы в дальнейшем в отдельности обсудим некоторые из них.

С математической точки зрения все рассматриваемые квантовые алгебры с бинарной операцией умножения являются кольцами. В общем случае эти кольца будут неассоциативными и некоммутативными. Отсутствие ассоциативности серьезнейшим образом затрудняет исследования всех представлений получаемых колец из-за того, что эти кольца не могут быть реализованы в виде автоморфизмов векторных пространств. Поэтому мы ограничиваемся конкретными примерами квантовых алгебр, не допускающих реализаций в виде операторных теорий в гильбертовых пространствах.

3. Алгебра наблюдаемых для систем без связей между частотами

Рассмотрим сначала класс физических систем, характеризующихся отсутствием всяких связей между наблюдаемыми частотами. Подставляя в правую часть (2.6) $q_{mn}\exp i\,\omega_{mn}t$ и $y_{mn}\exp i\,\omega_{mn}t$ вместо q_{mn} и y_{mn}, получаем:

$$\sum_{klsu} A_{mnklsu}\, q_{kl}\, y_{su}\, e^{i(\omega_{kl}+\omega_{su})t} + \sum_k \left(B_{mnk}\, q_k y_{mn} + C_{mnk}\, y_k q_{mn}\right) e^{i\omega_{mn}t}, \qquad (3.1)$$

а так как наблюдаемые частоты не удовлетворяют никакому соотношению типа соотношения Ридберга-Ритца, то экспоненциальный фактор в первой сумме, при ненулевых структурных константах A_{mnklsu} никак нельзя свести к фактору $\exp i\,\omega_{mn}t$, в котором присутствует только частота ω_{mn}. Поэтому для рассматриваемых систем все структурные константы A_{mnklsu} должны исчезать. Легко также видеть, что исчезновение всех структурных констант A_{mnklsu} в рассматриваемом случае, является необходимым и достаточным условием для выполнения закона Лейбница (1.8).

Для того чтобы быть уверенным, что для рассматриваемых физических систем в действительности нет никаких соотношений для наблюдаемых частот, необходимо ограничиться такими системами, для которых наблюдаются переходы только между соседними уровнями. В противном случае практически всегда реализуется какое-то соотношение между частотами типа соотношения (1.7) или (1.10).

Чтобы в (1.1) не появлялись частоты ω_{mn} с $m \neq n\pm 1$, необходимо, чтобы только $q_{m,m\pm 1}$ были отличны от нуля. Это означает, что будем рассматривать наблюдаемые типа

$$Q = \left\{ q_{m,m+1}\,\delta_{m+1,n}\, e^{i\omega_{m,m+1}t} + q_{n+1,n}\,\delta_{m,n+1}\, e^{i\omega_{n+1,n}t};\ q_m \right\}. \qquad (3.2)$$

Нетрудно убедиться, что для таких множеств формулы (2.6) и (2.7) для произведения приобретают вид:

$$(Q\circ Y)_{n,n+1} = \sum_k B'_{nk} q_k y_{n,n+1} + \sum_k C'_{nk} y_k q_{n,n+1} \tag{3.3}$$

$$(Q\circ Y)_{n+1,n} = \sum_k B''_{nk} q_k y_{n+1,n} + \sum_k C''_{nk} y_k q_{n+1,n} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}(Q\circ Y)_n = \frac{1}{2}\sum_k a'_{nk}\left(q_{k,k+1} y_{k+1,k} + y_{k,k+1} q_{k+1,k}\right) + \\ + \frac{1}{2} f_{n+1}\left(q_{n,n+1} y_{n+1,n} - y_{n,n+1} q_{n+1,n}\right) + \\ + \frac{1}{2} f_{n-1}\left(q_{n,n-1} y_{n-1,n} - y_{n,n-1} q_{n-1,n}\right) + q_n y_n,\end{aligned} \tag{3.5}$$

где мы ввели следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B'_{nk} &= B_{n,n+1,k} \quad ; \quad B''_{nk} = B_{n+1,n,k} \\ C'_{nk} &= C_{n,n+1,k} \quad ; \quad C''_{nk} = C_{n+1,n,k} \\ a'_{nk} &= a_{n,k,k+1} + a_{n,k+1,k} . \end{aligned} \tag{3.6}$$

С математической точки зрения квантовая алгебра с умножением (3.3)-(3.5) является неассоциативным и некоммутативным кольцом. Отсутствие свойства ассоциативности не позволяет однозначно определять нелинейные члены в уравнениях движения. К счастью, в практически важных случаях в таких нелинейных членах встречаются только степени одной наблюдаемой и поэтому нам достаточно было бы потребовать ассоциативности степеней. Оказывается, что и этому требованию нельзя удовлетворить для всех наблюдаемых типа (3.2). Поэтому мы ограничимся таким выбором структурных констант, который обеспечит выполнение следующих двух условий

$$(Q\circ Q)\circ Q = Q\circ(Q\circ Q) \tag{3.7}$$

и

$$\left[(Q\circ Q)\circ Q\right]\circ Q = (Q\circ Q)\circ(Q\circ Q) \tag{3.8}$$

для тех наблюдаемых, для которых все $q_m = 0$. Оказывается, что только для таких наблюдаемых условия (3.7) и (3.8) могут быть удовлетворены. Не очень сложные расчеты показывают, что условия (3.7) и (3.8) требуют, чтобы

$$\begin{aligned} B'_{nk} &= B''_{nk} = C'_{nk} = C''_{nk} = \delta_{nk} \\ a'_{nk} &= a_n \delta_{nk}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где a_n – произвольные константы. Таким образом, формулы (3.3)-(3.5) переходят в формулы

$$(Q\circ Y)_{n,n+1} = q_n y_{n,n+1} + y_n q_{n,n+1} , \tag{3.10}$$

$$(Q\circ Y)_{n+1,n} = q_n y_{n+1,n} + y_n q_{n+1,n} , \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}(Q\circ Y)_n = \frac{1}{2} a_n\left(q_{n,n+1} y_{n+1,n} + y_{n,n+1} q_{n+1,n}\right) + \\ + \frac{1}{2} f_{n+1}\left(q_{n,n+1} y_{n+1,n} - y_{n,n+1} q_{n+1,n}\right) + \\ + \frac{1}{2} f_{n-1}\left(q_{n,n-1} y_{n-1,n} - y_{n,n-1} q_{n-1,n}\right) + q_n y_n .\end{aligned} \tag{3.12}$$

Прежде чем перейти к некоторым примерам, заметим, что в классе множеств типа (3.2) можно явным образом решить условие квантования (2.14). Действительно, легко убедиться, что из этого условия следует, что

$$|X_{n,n+1}|^2 = \frac{\hbar}{2M\omega_{n+1,n} f_n f_{n+1}} \cdot \sum_{j=0}^{n} f_j . \tag{3.13}$$

Приступим теперь к рассмотрению примера гармонического осциллятора. Его уравнение движения

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0 \tag{3.14}$$

не зависит от принимаемой математической структуры алгебры и всегда может быть решено. Как известно /17/, это решение имеет вид (3.2), причем

$$X_n = 0$$

$$\omega_{n+1,n} = -\omega_{n,n+1} = \omega, \tag{3.15}$$

а модуль чисел $X_{n,n+1}$ получаем из формулы (3.13).

Алгебраическая структура теории вступает в игру, когда начинаем рассматривать гамильтониан системы

$$H = \frac{1}{2M} P \circ P + \frac{M\omega^2}{2} X \circ X. \tag{3.16}$$

Вычисляя правую часть этого выражения согласно формулам (3.10)--(3.12), убеждаемся, что гамильтониан является диагональным множеством, и среднее значение энергии в состоянии n равно

$$E_n = \frac{a_n \hbar\omega}{2 f_n f_{n+1}} \cdot \sum_{j=0}^{n} f_j. \tag{3.17}$$

С другой стороны, условие Бора (2.23) дает

$$E_n = E_0 + n\hbar\omega, \tag{3.18}$$

где E_0 является произвольным значением энергии основного состояния. В этом месте стоит отметить, что стандартное значение

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega,$$

как увидим ниже, является результатом принимаемого в теории закона умножения.

Из сравнения формул (3.17) и (3.18) получаем определенные значения структурных констант a_n в виде

$$a_n = 2\left(\frac{E_0}{\hbar\omega} + n\right) f_n f_{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n} f_j\right)^{-1}. \tag{3.19}$$

В обычном случае, когда все $f_n = 1$, эти структурные константы будут независимыми от n лишь только при условии, что

$$E_0 = \hbar\omega.$$

Перейдем теперь к простейшему ангармоническому осциллятору со следующим уравнением движения:

$$M\ddot{X} = -\lambda (X \circ X) \circ X. \tag{3.20}$$

Вычисляя правую сторону этого уравнения согласно формулам (3.10)--(3.12) и пользуясь условием (3.13), получим из (3.20) следующую формулу для частот:

$$\omega_{n+1,n} = \sqrt[3]{\frac{\lambda \hbar a_n}{2M^2 f_n f_{n+1}} \cdot \sum_{j=0}^{n} f_j}. \tag{3.21}$$

А требуя, чтобы гамильтониан

$$H = \frac{1}{2M} P \circ P + \frac{\lambda}{4} (X \circ X) \circ (X \circ X) \tag{3.22}$$

давал значения энергии в виде

$$E_n = E_0 + \hbar \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{j+1,j}, \tag{3.23}$$

получим значения структурных констант a_n. Слегка утомительные расчеты дают

$$a_n = \frac{8}{3} \alpha_n^3 f_n f_{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n} f_j\right)^{-1}, \tag{3.24}$$

где $\{\alpha_n\}$ является последовательностью чисел, получаемых из рекуррентного соотношения

$$\alpha_n^4 = \alpha_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \tag{3.25}$$

для $n \geqslant 1$ и

$$\alpha_0 = \frac{E_0}{\hbar} \sqrt[3]{\frac{3M^2}{4\lambda\hbar}}. \tag{3.26}$$

Подставляя (3.24) в (3.21), получаем простые формулы для частот

$$\omega_{n+1,n} = \frac{\alpha_n E_0}{\alpha_0 \hbar}. \tag{3.27}$$

Нетрудно убедиться, что рекуррентное соотношение (3.25) определяет растущую последовательность чисел, и что несколько первых членов этой последовательности имеют вид

$$\alpha_0, \sqrt[4]{2\alpha_0}, \sqrt[4]{2\alpha_0+\sqrt[4]{2\alpha_0}}, \ldots \tag{3.28}$$

из которых видно, что ненулевое решение задачи существует только для ненулевого значения энергии основного состояния E_0. Кроме этого, из выписанных формул следует, что

$$E_0 = \hbar\, \omega_{1,0}.$$

Аналогично можно рассмотреть и другие уравнения движения. Но уже на основе двух рассмотренных примеров можно видеть, что структурные константы, определяющие вид закона умножения, сильным образом зависят от системы. Этот факт является совершенно новым для нерелятивистской квантовой механики, так как с таким явлением мы встречались до сих пор исключительно в рамках квантовой теории релятивистских полей, где каждый тип взаимодействия определяет отдельную алгебраическую структуру перенормированной теории/I8/.

Мы заканчиваем на этом обсуждение алгебры наблюдаемых для систем без соотношений между наблюдаемыми частотами. Было показано, что требование присутствия в теории только наблюдаемых частот неизбежно приводит к равенству нулю некоторых структурных констант, определяющих закон умножения наблюдаемых. Это в свою очередь влечет за собой отсутствие свойства ассоциативности умножения. Частичное восстановление этого свойства для некоторых произведений определяет вид почти всех остальных структурных констант, за исключением констант типа a_n. Эти оставшиеся структурные константы мы подбираем так, чтобы удовлетворялось соотношение Бора, связывающее наблюдаемые частоты с энергиями системы. Так как этот последний шаг использует явный вид гамильтониана системы, пришлось проверить, зависят ли полученные так структурные константы от рассматриваемой системы. Оказалось, что действительно зависят.

Конечно, мы рассмотрели здесь лишь немногие свойства новой алгебры наблюдаемых и ни в какой мере не исчерпали их.

4. Обобщение квантовой механики Гейзенберга

В этой главе мы обсудим некоторые свойства общего закона квантово-механического умножения в случае квантовой механики, в основе которой ставится обычное соотношение Ридберга-Ритца (I.7). Оказывается, что применяя такой же способ, как в начале предыдущей главы, можно получить, что

$$A_{mnklsu} = A_{mnk}\,\delta_{mk}\delta_{ls}\delta_{un} + D_{mnk}\,\delta_{ms}\delta_{uk}\delta_{ln}, \tag{4.I}$$

и закон умножения (2.6) для недиагональных элементов приобретает вид

$$(Q\circ Y)_{mn} = \sum_k \left(A_{mnk}\,q_{mk}y_{kn} + B_{mnk}\,q_k y_{mn} + C_{mnk}\,y_k q_{mn} + D_{mnk}\,y_{mk}q_{kn}\right). \tag{4.2}$$

Сравнение этой формулы с формулой (I.4) ясно показывает ограниченный характер определения Гейзенберга.

В общем случае формула (4.2) вместе с (2.22) определяет неассоциативный закон умножения. Однако, в отличие от квантовой алгебры, рассмотренной в предыдущей главе, на этот раз существует выбор структурных констант и статистических весов f_k, для которого закон умножения является ассоциативной операцией. И, как легко видно, этот выбор совпадает с выбором, сделанным в 1925 году Гейзенбергом. В результате этого, среди всех квантовых алгебр только алгебра Гейзенберга изоморфна некоторой алгебре операторов в гильбертовом пространстве. Этот факт сильнейшим образом сказался на всем развитии квантовой механики, так как он приобрел ранг универсального закона природы. Примеры других квантовых алгебр, рассматриваемых в этих лекциях, ясно свидетельствуют об ошибочности такого взгляда. На самом деле существует гораздо больше возможностей описания явлений природы, и полное их использование должно привести к более глубокому пониманию существа физических явлений. Но, как уже было сказано, отсутствие свойства ассоциативности становится существенным препятствием на этом пути. Поэтому наши настоящие рассуждения и находятся в таком зачаточном состоянии.

Для иллюстрации возможностей обобщенной квантовой механики Гейзенберга рассмотрим ангармонический осциллятор

$$\ddot{X}+\omega^2 X=-\frac{\lambda}{M}X\circ X. \qquad (4.3)$$

Такой пример вполне достаточен для наших целей. Из-за нелинейного характера уравнения (4.3) наши рассуждения ограничены методом теории возмущений, причем для краткости выпишем только члены низших порядков.

Сделаем еще три упрощающих предположения. В обычном формализме квантовой механики алгебра Ли порождена алгеброй Гейзенберга и определяет свойства симметрии рассматриваемых физических систем. Вот поэтому и потребуем совпадения алгебр Ли, порожденных алгеброй Гейзенберга и рассматриваемой нами алгебры. Это означает, что будем требовать выполнения соотношения

$$Q\circ Y-Y\circ Q=QY-YQ \qquad (4.4)$$

для всех рассматриваемых наблюдаемых, где QY обозначает обычное матричное умножение Гейзенберга (I.4). Оказывается, что такое естественное требование удовлетворяется только в случае, когда

$$\begin{aligned} f_k&=1\\ A_{mnk}&=1+D_{mnk}\\ B_{mnk}&=\delta_{mk}\\ C_{mnk}&=\delta_{nk}. \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Закон умножения (4.2) вследствие этого имеет вид

$$(Q\circ Y)_{mn}=(QY)_{mn}+\sum_k D_{mnk}(q_{mk}y_{kn}+y_{mk}q_{kn}). \qquad (4.6)$$

Предположим теперь, что поправка в формуле (4.6) универсальна и имеет место и для диагональных элементов. Это означает, что структурные константы a_{msu} в (2.22) имеют вид

$$a_{msu}=\delta_{ms}(1+D_{msu}). \qquad (4.7)$$

Наконец, для однозначности определения степеней, примем рекур-

рентное соотношение

$$:X^n:=:X^{n-1}:\circ X=X\circ :X^{n-1}: \qquad (4.8)$$

где, например, $:X^2:$ означает $X\circ X$. Из-за совпадения соответствующих алгебр Ли, условие (4.8) эквивалентно условию

$$:X^n:=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^n(X)X^j, \qquad (4.9)$$

где X^j – обычная матричная степень матрицы X, а коэффициенты $\alpha_j^n(X)$ являются однородными функциями $(n-j)$ -того порядка элементов матрицы X. Везде будем предполагать, что

$$\alpha_n^n(X)=1. \qquad (4.10)$$

Метод теории возмущений состоит в том, что решение уравнения движения (4.3) запишем в виде формального ряда

$$X=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j X(j), \qquad (4.11)$$

где

$$X(j)=\{x_{mn}(j)e^{i\omega_{mn}(j)t};\ x_m(j)\}. \qquad (4.12)$$

В нулевом порядке теории возмущений уравнение движения (4.3) совпадает с уравнением гармонического осциллятора и поэтому в этом случае можем написать

$$x_{mn}(0)=x_m\delta_{m+1,n}+x_n\delta_{m,n+1}, \qquad (4.13)$$

где, как обычно,

$$x_m^2=\frac{\hbar}{2M\omega}(m+1). \qquad (4.14)$$

Согласно принятому нами способу, потребуем теперь, чтобы гамильтониан

$$H=\frac{1}{2M}:P^2:+\frac{M\omega^2}{2}:X^2:+\frac{\lambda}{3}:X^3: \qquad (4.15)$$

определял в каждом порядке теории возмущений такие же уровни энергии, что и уравнения движения. Поэтому, в нулевом порядке

(4.I5) должен быть диагональной матрицей с собственными значениями

$$E_n = E_0 + n\hbar\omega, \tag{4.16}$$

где E_0 – произвольная энергия основного состояния. В обычном же формализме квантовой механики

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega, \tag{4.17}$$

но это, как еще увидим, следует только в случае механики Гейзенберга.

Подставляя (4.I3) в (4.I5), получаем

$$\frac{\alpha_0^2(P)}{2M} + \frac{\alpha_0^2(X)M\omega^2}{2} = E_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega. \tag{4.18}$$

С другой стороны, с использованием (4.6) следует, что

$$\alpha_0^2(X) = 2\left(D_{m,m,m+1}X_m^2 + D_{m,m,m-1}X_{m-1}^2\right)$$

$$\alpha_0^2(P) = M^2\omega^2\alpha_0^2(X), \tag{4.19}$$

в то время как условие (4.I0) дает

$$D_{m,m+2,m+1} = D_{m+2,m,m+1} = 0. \tag{4.20}$$

Отсюда имеем

$$D_{m,m,m+1} = -D_{m,m,m-1} = \frac{E_0}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \tag{4.21}$$

или

$$\alpha_0^2(X) = \langle X^2\rangle_0\left(\frac{2E_0}{\hbar\omega} - 1\right)$$

$$\alpha_0^2(P) = \langle P^2\rangle_0\left(\frac{2E_0}{\hbar\omega} - 1\right), \tag{4.22}$$

где $\langle A\rangle_0$ означает среднее значение наблюдаемой A в основном состоянии. Окончательно получаем

$$:X^2: = X^2 + \langle X^2\rangle_0\left(\frac{2E_0}{\hbar\omega} - 1\right),$$

$$:P^2: = P^2 + \langle P^2\rangle_0\left(\frac{2E_0}{\hbar\omega} - 1\right),$$

$$P\circ X = PX,$$

$$X\circ P = XP. \tag{4.23}$$

Отсюда видно, что наш закон умножения в точности совпадает с умножением Гейзенберга, если предположить (4.I7). Таким образом, мы получили важный результат, состоящий в утверждении, что необходимым и, при некоторых добавочных условиях, также и достаточным условием ассоциативности квантово-механического закона умножения является условие (4.I7).

Более того, квантовая механика с условием (4.I7) всегда предсказывает бесконечное значение энергии основного состояния для систем с бесконечным числом степеней свободы. И это бесконечное значение приходится устранять с помощью процедуры перенормировок. Легко показать, что этого можно избежать в случае нашей обобщенной формулировки квантовой механики, и тем самым выясняется преимущество такого подхода. Действительно, рассматривая вышеуказанным способом систему, составленную из N гармонических осцилляторов, мы придем к тем же формулам, но только в формулах (4.23) будет находиться фактор

$$\frac{2E_0}{N\hbar\omega} - 1,$$

где E_0 – полная энергия основного состояния. В пределе, когда $N\to\infty$, для конечного значения E_0 получаем, что

$$:X^2: = X^2 - \langle X^2\rangle_0,$$

т.е. точно так же, как и в случае нормального упорядоченного по Вику произведения. Точно такой же результат получим, если с самого начала положим $E_0=0$. Последнее указывает на то, что только нулевое значение полной энергии основного состояния системы с бесконечным числом степеней свободы является допустимым.

Полученные значения структурных констант (4.20) и (4.2I) позволяют вычислить правую часть уравнения (4.3) в первом порядке теории возмущений и решить это уравнение в этом порядке. Расчеты дают следующий ответ:

$$X_{mn}(1) = -\frac{\hbar}{M^2\omega^3}\left(m+\frac{E_0}{\hbar\omega}\right)\delta_{mn} + \\ + \frac{1}{3M\omega^2}\left(X_m X_{m+1}\delta_{m+2,n} + X_n X_{n+1}\delta_{m,n+2}\right),$$

$$\omega_{m+2,m}(1) = 2\omega\,, \\ \omega_{m+1,m}(1) = \omega_{m,m+1}(1). \tag{4.24}$$

Подставляя (4.24) в (4.I5), получаем значения других структурных констант:

$$D_{n,n+3,n+1} = D_{n,n+3,n+2} = D_{n,n+1,n-1} = D_{n,n+1,n+2} = 0 \tag{4.25}$$

и

$$D_{n,n+1,n+1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2E_0}{\hbar\omega}\right), \tag{4.26}$$

а вычисленная с помощью этих структурных констант третья степень имеет вид

$$:X^3: = X^3 + 3\langle X^2\rangle_0\left(\frac{2E_0}{\hbar\omega}-1\right)X, \tag{4.27}$$

что опять сводится к произведению Вика в случае $E_0 = 0$.

Аналогичным способом можем рассмотреть и высшие порядки теории возмущений и получить значения других структурных констант. С ростом порядка теории возмущений растет и сложность вычислений. Поэтому ограничимся здесь выпиской лишь четвертой степени:

$$:X^4: = X^4 + 6\langle X^2\rangle_0\left(\frac{2E_0}{\hbar\omega}-1\right)X^2 + \\ + 3\langle X^2\rangle_0^2\left(\frac{2E_0}{\hbar\omega}-1\right). \tag{4.28}$$

5. Тернарная операция умножения наблюдаемых

В основе всех до сих пор рассмотренных нами алгебр квантовых наблюдаемых была некоторая бинарная операция умножения, определенная формулами типа (2.6) и (2.7). Для физических систем, для которых вместо соотношения Ридберга-Ритца для наблюдаемых частот реализуются другие соотношения, бинарная алгебраическая операция уже недостаточна для того, чтобы информацию об этих соотношениях включить в алгебраическую структуру множества наблюдаемых. Конечно, мы имеем здесь в виду только линейные соотношения между наблюдаемыми частотами, так как для нелинейных соотношений подход Гейзенберга вообще неприменим.

Выход за рамки предыдущих алгебраических построений необходим, в частности, в случае систем, для которых реализуется соотношение типа (I.IO). Это соотношение утверждает, что сумма трех наблюдаемых частот, взятых в определенном порядке, является наблюдаемой частотой, но никакая сумма двух частот не наблюдается. Для того чтобы информацию о таком соотношении для частот включить в алгебраическую структуру множества наблюдаемых, нам нужно ввести в квантовую механику понятие тернарной алгебраической операции. Эта операция определяет "произведение" трех сомножителей, не сводимое к бинарным произведениям. Стоит отметить, что во время формирования стандартной квантовой механики считалось обязательным для всех алгебраических операций быть бинарными. Сегодня положение изменилось, так как в математике достаточно развита теория универсальных алгебр /I4/, в которой рассматриваются алгебраические операции любой арности, причем любая n -арная операция понимается в смысле отображения, ставящего в соответствие любому набору n элементов некий ($n+1$)-й элемент. Поэтому вполне естественно поставить вопрос о применимости небинарных алгебр в физике. По-видимому, то, что будет изложено ниже, является первым примером применения таких алгебр в теоретической физике.

Нетрудно написать общий вид тернарной алгебраической операции. Рассуждая так же, как и в начале главы 2, приходим к следующему виду этой операции:

$$(Q(1)\circ Q(2)\circ Q(3))_{mn}=\sum_{S(123)}\sum_{kl}\Big\{A^{(123)}_{mnkl}\,q_{mk}(1)q_{kl}(2)q_{ln}(3)+$$

$$+B^{(123)}_{mnkl}\,q_{k}(1)q_{l}(2)q_{mn}(3)+C^{(123)}_{mnkl}\,q_{kl}(1)q_{lk}(2)q_{mn}(3)\Big\},\quad (5.1)$$

$$(Q(1)\circ Q(2)\circ Q(3))_{m}=\sum_{S(123)}\sum_{sul}a^{(123)}_{msul}\,q_{su}(1)q_{us}(2)q_{l}(3)+$$

$$+q_{m}(1)q_{m}(2)q_{m}(3),\qquad (5.2)$$

где $\sum\limits_{S(123)}$ обозначает суммирование по всем перестановкам индексов (I,2,3). Таким образом, такое определение квантовой алгебры требует здесь задания 24 сортов структурных констант и так же, как в предыдущих примерах, можно ожидать, что для различных физических систем эти константы могут быть разными. Общим свойством этих структурных констант является то, что они будут отличными от нуля только тогда, когда $|m-n|$ – нечетное число. Это вызвано тем, что все элементы q_{mn}, рассматриваемых множеств, должны зануляться для четных $|m-n|$, так как иначе будет реализовываться соотношение (I.7) для рассматриваемых частот ω_{mn}. К сожалению, кроме такого свойства структурных констант, трудно усмотреть какое-либо другое общее для них свойство.

Рассмотрим теперь пример ангармонического осциллятора с уравнением движения

$$\ddot{X}+\omega^2 X=-\lambda X\circ X\circ X \qquad (5.3)$$

и на этом примере обсудим один из способов определения структурных констант.

Ясно, что каждый способ определения правой части уравнения (5.3) содержит некоторую априорную информацию о процессах, описываемых этим уравнением. Например, обычное матричное правило умножения тесно связано с априорным равноправием всех возможных промежуточных состояний. И этот факт является препятствием для нахождения точных решений уравнения (5.3). С другой стороны, любой приближенный метод решения нарушает такое равноправие. Для того чтобы избежать такой ситуации, предположим, что структурные константы A_{mnkl} отличны от нуля только тогда, когда значения индексов k и l находятся между значениями индексов m и n. Такое предположение означает, что в процессе перехода от начального состояния α к конечному состоянию β достигаются только те промежуточные состояния, которые лежат между состояниями α и β. С интуитивной точки зрения такое предположение об "экономии" в процессах перехода кажется вполне естественным.

Для простоты рассмотрим только те решения (5.3), у которых все диагональные элементы X_m равны нулю, так как эти решения не зависят от структурных констант типа B и a. Принятое нами предположение о механизме переходов означает, что

$$A_{m,m\pm 1,k,l}=0 \qquad (5.4)$$

для всех значений k и l. Из уравнения движения (5.3) получаем, что числа $X_{m,m+1}$ (или $X_{m+1,m}$) будут отличны от нуля только тогда, когда

$$\omega^2_{m+1,m}=\omega^2+\lambda\sum_{kl}C_{m+1,m,k,l}\,X_{kl}X_{lk}. \qquad (5.5)$$

Числа $X_{m,m+1}$ и $X_{m+1,m}$ не определяются из уравнения движения. Естественно теперь потребовать, чтобы частоты $\omega_{m+1,m}$ не зависели от других чисел X_{mn}, кроме тех, для которых $m=n+1$ или $m+1=n$. Последнее означает, что отличными от нуля среди структурных констант $C_{m+1,m,k,l}$ являются только константы $C_{m+1,m,m,m+1}$ и $C_{m+1,m,m+1,m}$. Обозначив их сумму через C_m, получим из (5.5), что

$$\omega^2_{m+1,m}=\omega^2+\lambda C_m|X_{m+1,m}|^2. \qquad (5.6)$$

Таким образом, знание чисел $X_{m+1,m}$ и частот $\omega_{m+1,m}$ (например, из эксперимента) позволяет определить структурные константы C_m.

Из соотношения (I.10) получаем соотношение

$$\omega_{m+2\alpha+1,m}=\sum_{j=0}^{2\alpha}\omega_{m+j+1,m+j}, \qquad (5.7)$$

позволяющее вычислить все частоты по известным частотам $\omega_{m+1,m}$. После этого из уравнения движения можем вычислить остальные ненулевые числа X_{mn}. В частности, получаем

$$X_{m+3,m}=\frac{\lambda A_{m+3,m,m+2,m+1}\, X_{m+3,m+2}\, X_{m+2,m+1}\, X_{m+1,m}}{\omega^2_{m+3,m}-\omega^2-\sum\limits_{kl} C_{m+3,m,k,l}\, X_{kl} X_{lk}} . \tag{5.8}$$

Из этой формулы видно, что можно без потери общности занулить все структурные константы $C_{m+2\alpha+1,m,k,l}$ для $\alpha>0$, так как достаточно констант $A_{m+2\alpha+1,m,k,l}$ для подгонки значений чисел $X_{m+2\alpha+1,m}$. Таким образом, получаем следующие формулы:

$$X_{m+3,m}=\lambda A_{m+3,m,m+2,m+1}\frac{X_{m+3,m+2}\, X_{m+2,m+1}\, X_{m+1,m}}{\omega^2_{m+3,m}-\omega^2} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} X_{m+5,m}=\frac{\lambda}{\omega^2_{m+5,m}-\omega^2}\Big\{ & A_{m+5,m,m+4,m+3}\, X_{m+5,m+4}\, X_{m+4,m+3}\, X_{m+3,m}+ \\ & +A_{m+5,m,m+4,m+1}\, X_{m+5,m+4}\, X_{m+4,m+1}\, X_{m+1,m}+ \\ & +A_{m+5,m,m+2,m+1}\, X_{m+5,m+2}\, X_{m+2,m+1}\, X_{m+1,m}+ \\ & +A_{m+5,m,m+2,m+3}\, X_{m+5,m+2}\, X_{m+2,m+3}\, X_{m+3,m}\Big\}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Видно, что длина получаемых формул быстро растет. Однако стоит здесь отметить сходство получаемых формул для X_{mn} с формулами теории возмущений обычной квантовой механики. Это, по-видимому, объясняет кажущийся парадоксальным факт, что расходящийся ряд теории возмущений может хорошо описывать экспериментальные данные.

До сих пор мы не использовали условие квантования (2.14). Нетрудно убедиться, что из этого условия следует соотношение

$$|X_{m+2\alpha+1,m}|^2=\frac{h_\alpha \hbar \sum\limits_{j=0}^{m-(2\alpha+1)j\geq 0} f_{m-(2\alpha+1)j}}{2M\omega_{m+2\alpha+1,m}\, f_{m+2\alpha+1}\, f_m} \tag{5.11}$$

с произвольной последовательностью чисел h_α, удовлетворяющей условию

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} h_\alpha = 1. \tag{5.12}$$

Соотношение (5.11) для $\alpha=0$ вместе с (5.5) предоставляет нам уравнение третьей степени для частот $\omega_{m+1,m}$ в виде

$$\omega^3_{m+1,m}=\omega^2\omega_{m+1,m}+\alpha_m, \tag{5.13}$$

где

$$\alpha_m=\frac{\lambda h_0 \hbar}{2M}\, C_m\, \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} f_j}{f_m\, f_{m+1}} . \tag{5.14}$$

Из (5.13) и (5.14) видно, что знание частот $\omega_{m+1,m}$ и весов f_k позволяет определить структурные константы C_m. И наоборот, зная C_m и f_k, можно вычислить $\omega_{m+1,m}$. В итоге получаем

$$\omega_{m+1,m}=\sqrt[3]{\frac{\alpha_m\pm\sqrt{\alpha_m^2-\frac{4\omega^6}{27}}}{2}}+ \frac{\omega^2}{3\sqrt[3]{\frac{\alpha_m\pm\sqrt{\alpha_m^2-\frac{4\omega^6}{27}}}{2}}} . \tag{5.15}$$

Из этой формулы можно получить очень важное условие самосогласованности теории в виде

$$\alpha_m^2 \geqslant \frac{4\omega^6}{27} \tag{5.16}$$

для всех значений $\lambda\neq 0$. А из него следует, что решения ангармонического осциллятора неаналитичны в точке $\lambda=0$. Поэтому применение методов теории возмущений является незаконным. Кроме того, из (5.15) следует, что

$$\omega_{m+1,m}\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\,\omega, \tag{5.17}$$

и поэтому в пределе $\lambda\to 0$, $\omega_{m+1,m}$ не переходит в ω.

Зная все частоты $\omega_{m+2\alpha+1,m}$, из (5.II) можем определить все числа $X_{m+2\alpha+1,m}$ с точностью до выбора чисел h_α (независимых от m). С другой стороны, формулы типа (5.9) и (5.I0) тоже определяют эти числа, и поэтому теория будет самосогласованной только при одном выборе структурных констант A_{mnkl}.

Обсудим теперь метод определения структурных констант типа B и a. Согласно теории универсальных алгебр, всякая алгебраическая операция определяет ряд вторичных операций/I4/. В частности, с помощью тернарной операции можем определить бинарную операцию, зафиксировав один из аргументов тернарной операции. В нашем случае будет наиболее естественным взять в качестве такого зафиксированного аргумента единичную матрицу I и положить, что

$$Q\circ Y \equiv Q\circ Y\circ I = Q\circ I\circ Y = I\circ Q\circ Y. \tag{5.I8}$$

Применяя к (5.I8) формулы (5.I) и (5.2), можно убедиться в том, что бинарная операция (5.I8) совпадает с бинарной операцией, рассмотренной в главе 3. И это легко понять, так как переходя от данной тернарной операции к бинарной, мы на самом деле теряем информацию о существовании соотношения (I.I0).

Для получения вида структурных констант типа B и a можем применить ту же процедуру, что и в главе 3. В частности, придерживаясь предположения об исключительной роли чисел $X_{m+1,m}$ и $X_{m,m+1}$, можно выбрать константы a_{msul} так, чтобы только эти числа давали вклад в выражение для гамильтониана. Тогда получим

$$a_m = \frac{8\,\omega_{m+1,m}\left(E_0 + \hbar\sum_{j=0}^{m-1}\omega_{j+1,j}\right)f_m f_{m+1}}{h_0\hbar\left(3\,\omega^2_{m+1,m}+\omega^2\right)\sum_{j=0}^{m} f_j}, \tag{5.I9}$$

где частоты $\omega_{m+1,m}$ даются формулой (5.I5).

Все, что было сказано о рассматриваемой алгебре наблюдаемых, носит исключительно фрагментарный характер, не позволяющий еще судить о всех возможностях обсуждаемого формализма. Сделанный нами выбор структурных констант преследовал только иллюстративную цель. И не исключена возможность, что в практически важных случаях этот выбор должен делаться иначе.

6. Обобщенное описание инерции тел в рамках квантовой механики

До сих пор мы почти исключительно обсуждали квантово-механический закон умножения. Конечно, это не единственное место теории, которое можно обобщить. Обсудим теперь другого рода обобщение, допускаемое формализмом квантовой механики. А именно, обобщим способ описания инерциальных свойств объектов. Чтобы четко видны были видоизменения результатов, вызванные таким обобщением, предположим, что работаем в обычной алгебраической квантовой схеме Гейзенберга. Более того, ограничимся только примером простого гармонического осциллятора, что вполне достаточно для наших целей.

Задача нерелятивистского гармонического осциллятора вполне определена двумя предположениями:

I. Импульс тела линейно зависит от его скорости

2. Сила, действующая на тело, линейно зависит от отклонения тела от состояния равновесия.

В рамках классической физики эти предположения реализуются хорошо известным единственным способом. В рамках механики Гейзенберга нет такой единственности, так как кроме обычного способа можем эти предположения реализовать также в виде:

$$P = \frac{1}{2}(MV+VM) \tag{6.I}$$

$$F = -\frac{1}{2}(KX+XK), \tag{6.2}$$

где M и K – матрицы, описывающие соответственно инерциальные и упругие свойства осциллятора. В общем случае эти матрицы не обязаны быть кратными единичной матрице, как это обычно необоснованно предполагается. Тот факт, что инерциальные и упругие свойства должны описываться константами движения, в нашем случае означает:

$$[E,M]=[E,K]=0, \tag{6.3}$$

где E – матрица энергии. Соотношение

$$[M,K]=0 \tag{6.4}$$

не следует из фундаментальных принципов, и поэтому в общем случае матрицы M и K не обязательно должны быть одновременно диагональными матрицами. Для простоты, однако, предположим, что соотношение (6.4) выполняется. В этом случае матрицы E, M и K одновременно можно диагонализовать, в результате чего значительно упростятся рассуждения.

Уравнение движения

$$\dot{P} = F \tag{6.5}$$

определяет вид матрицы X в виде

$$X_{mn} = x_m \delta_{m+1,n} + x_n \delta_{m,n+1} \tag{6.6}$$

с произвольными числами x_m. Оно определяет также собственные значения энергии в виде

$$E_n = E_1 + \hbar \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{\frac{K_j + K_{j+1}}{M_j + M_{j+1}}}\,, \tag{6.7}$$

где K_j и M_j – соответствующие диагональные элементы матриц K и M.

Для определения чисел x_m нам нужно еще одно соотношение, связывающее матрицу X с другими матрицами. Таким соотношением является функциональная зависимость матрицы энергии от матриц X и V. В нашем случае такую естественную зависимость дает выражение

$$E = \frac{1}{8}\left(MV^2 + V^2M + 2VMV + \right.$$
$$\left. + KX^2 + X^2K + 2XKX\right). \tag{6.8}$$

Подставляя сюда матрицы X и V, видим, однако, что это выражение не является диагональной матрицей, и поэтому нужно накладывать добавочное условие исчезновения недиагональных элементов. Это условие имеет следующий вид:

$$\frac{K_n + 2K_{n+1} + K_{n+2}}{M_n + 2M_{n+1} + M_{n+2}} = \sqrt{\frac{(K_n + K_{n+1})(K_{n+1} + K_{n+2})}{(M_n + M_{n+1})(M_{n+1} + M_{n+2})}}\,. \tag{6.9}$$

В этом месте начинается интересная часть обсуждаемого обобщения квантовой механики, так как оказывается, что условие (6.9) имеет два решения. Первое решение заключается в том, что отношение

$$\frac{K_n + K_{n+1}}{M_n + M_{n+1}} \equiv \omega^2 \tag{6.10}$$

не зависит от индекса n, и поэтому его постоянное значение мы обозначили через ω^2. Тогда вместо (6.7) получаем обычную формулу

$$E_n = E_1 + (n-1)\hbar\omega, \tag{6.11}$$

хотя матрица M имеет произвольные собственные значения. Отличие между нашим обобщенным и обычным гармоническим осциллятором появляется в выражениях для чисел x_m, получаемых из диагональных элементов матрицы (6.8). У нас получается

$$x_n^2 = \frac{n\hbar}{(M_{n+1} + M_n)\omega} \tag{6.12a}$$

для n четных, и

$$x_n^2 = \frac{2}{(M_{n+1} + M_n)\omega^2}\left(E_1 + \frac{n-1}{2}\hbar\omega\right) \tag{6.12в}$$

для n нечетных. Интересно отметить, что для больших значений n выражения (6.12) совпадают с выражениями для обычного осциллятора, и поэтому в обоих случаях выполняется обычный принцип соответствия.

Вычисляя коммутатор $[P, X]$, убеждаемся, что он не кратный единичной матрице. Требование канонических соотношений коммутации может быть удовлетворено только тогда, когда

$$M_n = M_{n+2}$$

для всех n. Таким образом, все формулы переходят в формулы обычной квантовой механики с тем только отличием, что вместо обычной массы M у нас появляется среднее значение

$$M = \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

Описываемая нами механика отличается от обычной тем, что массовая матрица не коммутирует с матрицами положения и импульса, но нелегко указать вытекающие отсюда следствия.

Рассмотрим теперь второе решение условия (6.9), заключающееся в том, что произведение

$$(K_n + K_{n+1})(M_n + M_{n+1}) \equiv 4\omega^2 M^2 \tag{6.13}$$

должно быть постоянным, не зависящим от n. Тогда получаем следующее выражение для уровней энергии:

$$E_n = E_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2\omega M\hbar}{M_j + M_{j+1}}, \tag{6.14}$$

а числа X_n даются формулами:

$$X_n^2 = \frac{M_n + M_{n+1}}{\omega M} \sum_{j=1}^{n/2} \frac{\hbar}{M_{2j-1} + M_{2j}} \tag{6.15а}$$

для четных n и

$$X_n^2 = \frac{M_n + M_{n+1}}{\omega M} \left(\frac{E_1}{2\omega M} + \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\hbar}{M_{2j} + M_{2j+1}} \right) \tag{6.15в}$$

для нечетных n. Коммутатор $[X,P]$ является диагональной матрицей, но не кратной единичной матрице. Его собственные значения равны

$$-2i\omega M (X_n^2 - X_{n-1}^2).$$

Еще в 1950 году Э.Вигнер обратил внимание на это обстоятельство в рамках обычной квантовой механики/19/. В таких случаях коммутатор $[P,X]$ не эквивалентен условию квантования (2.6).

Формула (6.14) показывает, что обобщая в рамках квантовой механики понятие массы, при соответствующих собственных значениях M_n, можно получить любой энергетический спектр. Интересно здесь то обстоятельство, что этот результат не требует рассмотрения каких-то сложных взаимодействий. В частности, нам кажется, что формула (6.14) может быть очень полезна для выяснения вопроса о запирании кварков, т.е. об отсутствии в природе свободных кварков. Как правило, кваркам приписывают точно такие свойства, как и другим наблюдаемым частицам. Формула (6.14) указывает на следующий возможный механизм запирания кварков: энергия, сообщаемая системе связанных кварков, может затрачиваться на увеличение массы кварков, а не на разрушение системы.

Может показаться, что рассматриваемое обобщение квантовой механики обладает малой предсказуемостью. Но это не так, поскольку любая физическая теория должна использовать некую экспериментальную информацию, получаемую от одних физических систем, чтобы можно было ожидать каких-то предсказаний для других систем. Точно такая же ситуация имеется и у нас, так как из наблюдений определяем значения масс M_n и потом пользуемся этими значениями в других вычислениях. Поэтому способность предсказания обобщенной квантовой механики в точности такая же, как и обычной.

Заключение

Целью настоящих лекций являлось желание показать, что кроме обычной квантовой механики существует широкий класс квантовых алгебр с существенно отличными структурами. Наше доказательство элементарно и по существу опирается только на работу Гейзенберга. Существование других квантовых алгебр означает значительное расширение возможностей квантового описания природы. Но на этом пути, как было показано, существует ряд технических трудностей математического характера. Следует здесь выразить надежду, что в будущем эти трудности будут успешно преодолены. И тогда у нас появится возможность исследовать физическое содержание обсуждавшихся нами обобщений квантовой механики.

В заключение выражаю свою благодарность М.И.Широкову за помощь в подготовке текста.

Литература:

1. Д.И.Блохинцев. Основы квантовой механики, Москва, "Наука", 1976.
2. Ж.Эмх. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля, Москва, "Мир", 1976.
3. W.Heisenberg. Z.Physik 33, 879 (1925).
4. M.Born, P.Jordan. Z.Physik 34, 858 (1925).
5. W.Pauli. Z.Physik 36, 336 (1926).
6. P.A.M.Dirac. Proc. Roy. Soc. A109, 642 (1926).
7. E.Schroedinger. Ann. d. Phys. 79, 361, 489 (1926);
   81, 109 (1926).
8. J. von Neumann. Math. Ann. 104, 570 (1931).
9. И. фон Нейман. Математические основы квантовой механики, Москва, 1964.
10. P.Jordan, J. von Neumann, E.Wigner. Ann. Math. 35, 29 (1934).
11. I.E.Segal. Ann. Math. 48, 930 (1947).
12. S.Sherman. Ann. Math. 64, 593 (1956).
13. R.Haag, D.Kastler. J. Math. Phys. 5, 548 (1964).
14. P.M.Cohn. Universal Algebras, N.Y., 1965.
15. P.Jordan, Z.Physik 80, 285 (1933).
16. M.Günaydin, F.Gürsey. Phys. Rev. D9, 3387 (1974),
    Nuovo Cim. Lett. 6, 401 (1973).
17. Х.Грин. Матричная квантовая механика, Москва, 1968.
18. K.Wilson. Phys.Rev. 179, 1499 (1969).
19. E.Wigner.Phys. Rev. 77, 711 (1950).

Рукопись поступила в издательский отдел
18 апреля 1978 года.