

C 324.3
C 506

воп. 47



ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

В.А.Смирнов, К.Г.Четыркин

R^* -операция:
техника ренормгрупповых вычислений
и другие приложения

ДУБНА

P2-88-190

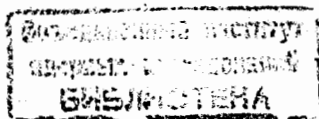
В.А.Смирнов, К.Г.Четыркин

R* -ОПЕРАЦИЯ:

ТЕХНИКА РЕНОРМГРУППОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ
И ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

С 324.3
С 506

Дубна 1988



Подробно описана R^* -операция, которая позволяет устранять из фейнмановских интегралов (ФИ) не только ультрафиолетовые (УФ), но и инфракрасные (ИК) расходимости. Эта операция дает возможность применять в случае произвольной диаграммы метод ИК-преобразования — один из наиболее мощных методов ренормгрупповых вычислений. Показано, каким образом R^* -операция используется в асимптотических разложениях. Изложение сопровождается большим количеством примеров.

I. Введение

Неотъемлемым элементом любых приложений теории возмущений к исследованию различных теоретико-полевых моделей является метод ренормализационной группы (РГ) (см. книгу /1/, в которой содержится как история создания, так и изложение самого метода РГ). Без использования РГ-уравнений невозможно корректно сформулировать понятие эффективной константы связи, зависящей от характерной энергии изучаемого процесса, и, следовательно, становится затруднительной оценка точности используемого приближения. РГ-функции (β -функции и аномальные размерности), фиксирующие явный вид РГ-уравнений, выражаются через ФИ, в большинстве случаев с трудом поддающиеся точному (и даже приближенному) вычислению.

При вычислении ФИ целесообразно по возможности ограничиваться аналитическими методами, т.е. не использующими ЭВМ. Дело в том, что во многих важных ситуациях необходимо знать именно точные результаты. Например, это нужно в рамках РГ-вычислений в теориях, обладающих высокой внутренней симметрией, когда надо знать, обращается ли в нуль

β -функция во всех порядках теории возмущений (см., например, /2/). С другой стороны, некоторые аналитические методы, развитые первоначально с чисто утилитарной целью расширения вычислительных возможностей, позволили выявить нетривиальные свойства ряда теории возмущений в целом и нашли применение в других важных задачах.

Среди эффективных аналитических методов вычисления Φ И можно выделить следующие: 1) техника полиномов Гегенбауэра в x -пространстве /3,4/, использующая симметрию евклидовых Φ И относительно группы вращения; 2) метод склеивания /5,6/, основанный на введении в диаграммы вспомогательной (склеивающей) линии; 3) метод интегрирования по час-там в размерно регуляризованных Φ И /7/; 4) метод уникальности /8-10/, использующий конформную симметрию безмассовых Φ И.

К числу наиболее мощных аналитических методов относится метод ИК-преобразования (МИП) /11,3/. Область применимости этого метода (в первоначальном виде) ограничена ситуациями, в которых не возникает ИК-расходимостей в рамках рассматриваемых преобразований Φ И. Оказалось, что можно обобщить МИП так, что стало возможным его применять в любой ситуации, если устранять возникающие ИК-расходимости с помощью \tilde{K} -операции /12,13/. Такая операция представляет собой обобщение размерной перенормировки на случай наличия ИК-расходимостей. Хотя \tilde{K} -операция и возникла в задаче о вычислении УФ-контрчленов, область ее применения этой задачей вовсе не ограничивается. Например, она оказывается эффективным средством для исследования асимптотических разложений S -матрицы, составных полей и их произведений в различных режимах, когда некоторые импульсы и (или) массы становятся большими (см. /6,14/, а также раздел 9 ниже).

Данная работа содержит подробное введение в метод \tilde{K} -операции и его приложения. Изложение будет сопровождаться большим количеством примеров. Работа построена по следующему плану. Во втором разделе обсуждается наиболее удобный для наших целей выбор регуляризации и перенормировочной схемы и описывается МИП. В третьем разделе на простом примере показывается, каким образом в рамках этого метода естественно возникает \tilde{K} -операция. В разд.4 вводятся теоретико-графические определения и обозначения, необходимые для описания \tilde{K} -операции. В следующем разделе определяется \tilde{K} -операция, устраняющая ИК-расходимости, и описываются соответствующие ИК-контрчлены. В шестом разделе дается определение \tilde{K} -операции и формулируется ключевая теорема, представляющая собой обобщение теоремы Боголюбова-Парасюка. В разд.7 описывается метод вычисления УФ- и ИК-контрчленов. Разд.8 содержит примеры, иллюстрирующие этот метод. Наконец, в разд.9 показывается, каким образом \tilde{K} -операция применяется в задачах об асимптотических разложениях.

2. Выбор регуляризации и перенормировочной схемы; метод ИК-преобразования

При вычислениях по теории возмущений можно пользоваться различными регуляризациями. Кроме того, всегда существует так называемый схемный произвол, возникающий в процессе удаления из Φ И УФ-расходимостей /1/. Подходящий выбор регуляризации и перенормировочной схемы может существенно облегчить вычисление ГГ-функций. В случае калибровочных теорий поля желательно также использовать перенормировочные процедуры, не нарушающие калибровочной инвариантности.

В настоящее время размерная регуляризация (РР) /15/ Φ И применяется практически во всех достаточно сложных теоретико-полевых расчетах в рамках теории возмущений. Причина предпочтения одного метода регуляризации всем остальным связана как с общетеоретическими соображениями (явная калибровочная инвариантность), так и с тем замечательным фактом, что размерно регуляризованные фейнмановские интегралы (РР Φ И) в максимальной степени близки по своим свойствам к сходящимся. Это дает повод проводить такие действия, как, например, сокращение одинаковых факторов, входящих в числитель и знаменатель подынтегрального выражения, формальное интегрирование по частям, разбиение интеграла от суммы на сумму интегралов и ряд других операций (более полный список приведен в /16,17/). Еще одним крайне полезным свойством РР является возможность регуляризовать одновременно УФ- и ИК-расходимости¹⁾ Φ И, причем оба типа расходимостей приводят к полюсным особенностям РР Φ И по переменной $\epsilon = (4-D)/2$, где D - размерность пространства-времени. (Математически корректное определение РР для Φ И, обладающих УФ- и ИК-расходимостями, и доказательство ее основных свойств дано в работе /17/.) В рамках РР имеет место следующая формула для вычисления однопетлевых p -интегралов:

$$\int d^D z z^{-2\alpha} (z-p)^{-2\beta} = (16\pi^2)^{-1} (\mu^2/p^2)^\epsilon G(\alpha, \beta), \quad (1)$$

$$G(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta-2+\epsilon) \Gamma(2-\alpha-\epsilon) \Gamma(2-\beta-\epsilon)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(4-\alpha-\beta-2\epsilon)},$$

где $d^D z = d^D z \mu^{2\epsilon} / (2\pi)^D$. Здесь первая из Γ -функций, стоящая в числителе, описывает УФ-полюсы, а две остальные - ИК-полюсы. С помощью

1) В данной работе мы рассматриваем только ИК-расходимости Φ И до сужения на массовую поверхность.

формулы (I) может быть вычислен широкий класс примитивных, т.е. рекурсивно I-петлевых ρ -интегралов.

Что касается перенормировочной схемы, то наиболее удобной как для вычислений, так и для феноменологических приложений оказывается схема минимальных вычитаний (МВ-схема) /18/ или ее тривиальные модификации, такие, как МВ-схема /19/ или G-схема /3/. Для определенности мы будем в дальнейшем иметь в виду МВ-схему.

Рецепт МВ-схемы, данный в работе /18/, выглядит следующим образом: считая все функции Грина размерно регуляризованными, надо подобрать константы перенормировки заряда, массы, волновой функции $\{Z_i\}$ таким образом, чтобы выполнялись равенства $K Z_i = Z_i - 1$, где K - оператор, выделяющий полюсную часть в разложении в ряд Лорана по ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Например, для (евклидовой) φ^4 -теории лагранжиан с перенормировочными константами, который приводит к конечным функциям Грина, выглядит следующим образом:

$$L(x) = \frac{1}{2} Z_2 (\partial\varphi)^2 + Z_m \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{g}{4!} Z_4 \varphi^4.$$

Для наших целей удобно задавать перенормировку с помощью R-операции /1,20,21/ и определять МВ-схему на уровне отдельных диаграмм, без каких-либо ссылок на лагранжиан. Рассмотрим перенормированный РРФИ $F_\Gamma(p, m, \mu)$, соответствующий одночастично неприводимому (ИЧН) графу Γ и зависящий от масс $m = \{m_1, m_2, \dots\}$ и внешних импульсов $p = \{p_1, p_2, \dots\}$. Для каждого независимого интегрирования по внутренним импульсам вводится фактор $\mu^{2\ell}$, где μ - единица массы; после проведения перенормировки μ служит ренормализационным параметром МВ-схемы. Отметим, что размерность F_Γ не зависит от ε .

R-операция в МВ-схеме выглядит следующим образом /3,21-23/:

$$R F_\Gamma = \left(1 + \sum_{S=\psi\gamma_i} \Delta(\gamma_1) \dots \Delta(\gamma_n)\right) F_\Gamma \equiv R' F_\Gamma + \Delta(\Gamma) F_\Gamma, \quad (2a)$$

$$\Delta(\gamma) = -K R'(\gamma), \quad (2b)$$

где суммирование ведется по наборам $S = \psi\gamma_i$ нетривиальных (т.е. с ненулевым числом линий) попарно непересекающихся по вершинам ИЧН-подграфов графа Γ . Действие операции $\Delta(\gamma)$ сводится к вычислению УФ-контрчлена, соответствующего ФИ F_γ , и вставке последнего в диаграмму Γ/γ в качестве вершины вместо γ . Подчеркнем, что перенормировочная процедура (2) подразумевает вычитания во всех ИЧН-подграфах без исключения, в том числе и в вакуумных подграфах, дающих вклад в вакуумные ожидания составных полей, и в вакуумных вкладках в S-матрицу. В отличие от классического варианта перенормировки Боголюбова-Парасюка,

необходимо производить вычитания и в неполных подграфах, т.е. не обязательно содержащих любую линию вместе с ее концами. В случае теорий с массивными полями это определение приводит к возникновению в теории возмущений ненулевой вакуумной энергии и ненулевых вакуумных ожиданий для составных полей. Оказывается, именно отличие от нуля таких вакуумных ожиданий позволяет получать асимптотические разложения, обладающие свойством разделения больших и малых расстояний.

Замечательной особенностью МВ-схемы является полиномиальность УФ-контрчленов $\Delta(\gamma) F_\gamma$ не только по внешним импульсам (что имеет место для всех вариантов R-операции), но и по всем массам m /24/. Этот факт связан с коммутативностью операций K и R' с дифференцированием по массам. Подчеркнем, что хотя соотношение $[K, \partial/\partial m] = 0$ и очевидно, обращение в нуль второго коммутатора $[K, R']$ тесно связано с тем, что УФ-вычитания выполняются во всех ИЧН-подграфах, а не только в обобщенных блоках (полных подграфах).

Таким образом, для любого (ИЧН и нетривиального) РРФИ соответствующий УФ-контрчлен представляется в виде /23/

$$-K R' F_\Gamma = \sum_i Q_i Z_i^\Gamma, \quad (3)$$

где $Q_i(p, m)$ - мономы от своих аргументов i , возможно, констант связи с (массовой) размерностью, равной размерности F_Γ , а Z_i^Γ - перенормировочные константы, зависящие только от ε , причем $(1-K) Z_i^\Gamma = 0$. Например, для φ^4 -теории имеет место соотношение $-K R' \Gamma_4 = Z_4 - 1$; $-K R' \Gamma_2(p^2, m^2) = m^2(Z_m - 1) + p^2(Z_2 - 1)$.

Соотношение (3) показывает, что с помощью дифференцирования по внешним импульсам и (или) массам вычисление любой константы перенормировки (или, эквивалентно, любой РГ-функции /23/) может быть сведено к определению безразмерного контрчлена, отвечающего УФ-расходимости некоторого ФИ, логарифмически расходящегося как целого. Это наблюдение эффективно используется для существенного упрощения РГ-вычислений в методе ИК-преобразования, предложенном Владимиром /11/. Этот метод получил свое дальнейшее развитие в работах /3,12,13/.

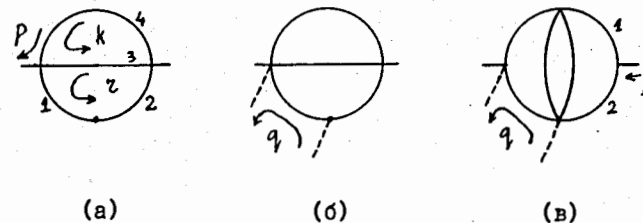


Рис. I

Проиллюстрируем идею МИП на простом примере. Рассмотрим диаграмму Γ , изображенную на рис.1а. Соответствующий контрчлен $-KR'F_{\Gamma}(\rho, m)$ дает вклад в перенормировочную константу Z_{m^2} в порядке g^2 в модели $g\varphi_{(4)}^4$. Вследствие своей безразмерности $KR'F_{\Gamma}$ не зависит ни от ρ , ни от m . Однако это не означает, что в процессе вычисления мы можем обратиться в нуль, скажем, значение m из-за ИК-расходимости, возникающей в этом случае при интегрировании по внутреннему импульсу z . Поскольку для логарифмически расходящейся диаграммы УФ-контрчлен не зависит от размерных параметров, ничто не мешает вместе с обращением в нуль всех или части первоначально присутствующих в диаграмме масс и импульсов ввести вспомогательные внешние импульсы и (или) массы таким образом, чтобы полученная диаграмма не содержала бы ИК-расходимостей и одновременно была бы более простой для вычисления. В случае рассматриваемого ФИ это предписание легко реализовать, если одновременно с обращением в нуль m и ρ ввести новый ненулевой импульс q , как это показано на рис.1б.

К сожалению, условие отсутствия ИК-расходимостей существенно ограничивает свободу выбора вспомогательного импульса, что в ряде важных случаев сильно усложняет вычисления. Например, на рис.1в изображена непримитивная диаграмма теории $g\varphi_{(4)}^4$, для которой естественное ИК-преобразование — обращение в нуль массы и импульса ρ вместе с введением вспомогательного импульса — хотя и приводит к примитивному ФИ, все же незаконно вследствие появления ИК-расходящегося подграфа, составленного из линий 1 и 2. Обобщение МИП, свободное от каких-либо ограничений такого типа, основано на R^* -операции. В следующем разделе на примере диаграммы рис.1а будет показано, каким образом возникает R^* -операция в МИП.

3. Появление R^* -операции в методе ИК-преобразования

Как уже отмечалось выше, в случае сложных диаграмм естественный, т.е. приводящий к наиболее легко вычислимому ФИ, выбор вспомогательного импульса невозможен из-за ИК-расходимостей. Возникает вопрос: нельзя ли определить операцию, которая устраняла бы ИК-полюсы вместе с УФ-полюсами так, чтобы появляющиеся в МИП ИК-расходимости автоматически ер устранялись? Положительный ответ на него был дан в работах [12, 13], в которых была построена R^* -операция, обладающая нужными свойствами. Отметим, что в случае РГ-анализа модели $g\varphi_{(4)}^4$ на пятипетлевом уровне [25, 26] единственно возможным, т.е. ведущим к вычислимым ФИ, ИК-преобразованием диаграмм, часто оказывался именно выбор внешнего импульса, порождающий ИК-расходимости.

В разделах 4-8 будет подробно описана R^* -операция. А сейчас мы

проиллюстрируем основную идею R^* -операции и ее использования для вычисления УФ-контрчленов на простом примере. Пусть $F_{\Gamma}(\rho, m)$ — это опять РРФИ, соответствующий диаграмме рис.1а. Предположим, что наша задача — вычислить УФ-контрчлен $-KR'F_{\Gamma}$, причем модифицировать внешние импульсы не разрешается. По определению,

$$KR'F_{\Gamma} = K \int d_{\mu}^D z d_{\mu}^D k [(m^2 + (k-z)^2)(m^2 + (k+\rho)^2)(m^2 + z^2)]^{-1} - Z_{\gamma} K \int \frac{d_{\mu}^D z}{(z^2 + m^2)^2}, \quad (4)$$

где $Z_{\gamma} = 1/16\pi^2 \epsilon$, а второй член в правой части соответствует вычитанию УФ-расходимости в подграфе $\gamma = (3, 4)$ (здесь и далее подграф обозначается перечислением номеров всех его линий). Если положить $m=0$, то в интегрировании по области малых z появится ИК-расходимость, отвечающая единственному ИК-расходящемуся подграфу $\gamma' = (1, 2)$. Как и следовало ожидать, прямое вычисление в такой ситуации при $m=0$ ведет к неправильному ответу, к тому же содержащему логарифмическую зависимость от импульса.

С другой стороны, легко проверить, что комбинация

$$f(z) = z^{-4} - \tilde{Z}_{\gamma'} \mu^{-2\epsilon} \delta^{(D)}(z), \quad \tilde{Z}_{\gamma'} = -1/16\pi^2 \epsilon \quad (5)$$

не приводит к ИК-полюсам после формального D -мерного интегрирования с любой функцией, гладкой в области малых z и, в частности, с функцией $(\rho-z)^{-2\epsilon}$ при $\rho \neq 0$. Последнее означает, что полюсная часть интеграла

$$R' \tilde{R} F_{\Gamma} = \int d_{\mu}^D z \left[\int (k-z)^{-2} (k+\rho)^{-2} f(z) d_{\mu}^D k - Z_{\gamma} f(z) \right] \quad (6)$$

определяется поведением подынтегрального выражения в области больших внутренних импульсов и совпадает с искомым УФ-контрчленом. В (6) символ \tilde{R} означает ИК-операцию, удаляющую ИК-расходимости с помощью ρ -локальных контрчленов и сводящуюся в рассматриваемом случае к замене z^{-4} на комбинацию $f(z)$. Минимальное вычитание в формуле (6) ИК-расходимости из ИК-расходящегося подграфа γ' можно интерпретировать как добавление ИК-контрчлена. На диаграммном языке вставка этого контрчлена соответствует удалению линий γ' с последующим умножением на ИК-перенормировочную константу $Z_{\gamma'}$.

Оказывается, и в общем случае можно сделать диаграмму ИК конечной с помощью введения ИК-контрчленов для некоторого множества поддиаграмм данной диаграммы. Если же объединить процедуру удаления ИК-расходимостей \tilde{R} с УФ-перенормировкой R , то в результате получится R^* -операция $R^* = \tilde{R}R$, обеспечивающая УФ- и ИК-конечность произвольной диаграммы.

Оставшаяся часть работы посвящена определению и приложениям R^* -операции.

4. Теоретико-графические определения и обозначения

Для определения операции, устраняющей ИК-расходимость, целесообразно использовать (насколько это возможно) аналогию между УФ- и ИК-расходимостями [27-31, 13], которая, прежде всего, проявляется в аналогии между соответствующими понятиями теории графов [27, 29, 30].

В случае R -операции достаточно устранять УФ-расходимости из всех ГЧН-подграфов данного графа, которые мы будем также называть УФ-неприводимыми. Аналогично, ИК-расходимости данного ФИ F_r содержатся в семействе подграфов, которые естественно называть ИК-неприводимыми [30].

Определение. Подграф γ графа Γ называется ИК-неприводимым, если редуцированный граф $\tilde{\gamma} = \Gamma / \gamma$ одновершинно неприводим.

Здесь $\tilde{\gamma} = \Gamma \setminus \gamma$ - дополнение подграфа γ в Γ , т.е. подграф, полученный из Γ удалением линий γ . Напомним, что при $\gamma_2 \geq \gamma_1$ редуцированный граф $\tilde{\gamma}_2 / \tilde{\gamma}_1$ образуется из $\tilde{\gamma}_2$ стягиванием каждой компоненты связности γ_i в точку. Кроме того, граф одновершинно неприводим, если его нельзя разбить на две несвязные части, удаляя какую-нибудь из его вершин (эквивалентное определение: любые две линии принадлежат некоторой петле). Удобно считать, что все вершины Γ принадлежат любому подграфу вида $\tilde{\gamma}$, т.е. $V(\tilde{\gamma}) = V$.

ИК-расходимости могут присутствовать не в любых ИК-неприводимых подграфах, а только в подграфах, которые мы будем называть ИК-опасными. По определению, такие подграфы γ безмассовны, а их дополнение $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_0 \cup \dots \cup \tilde{\gamma}_i \cup \dots$ содержит все внешние вершины в одной компоненте связности $\tilde{\gamma}_0$ (т.е. все ненулевые внешние импульсы втекают в $\tilde{\gamma}_0$). Кроме того, каждая из компонент связности $\tilde{\gamma}_i$ становится ГЧН после стягивания всех массивных линий и отождествления (для $\tilde{\gamma}_0$) всех вершин, в которые входят ненулевые внешние импульсы.

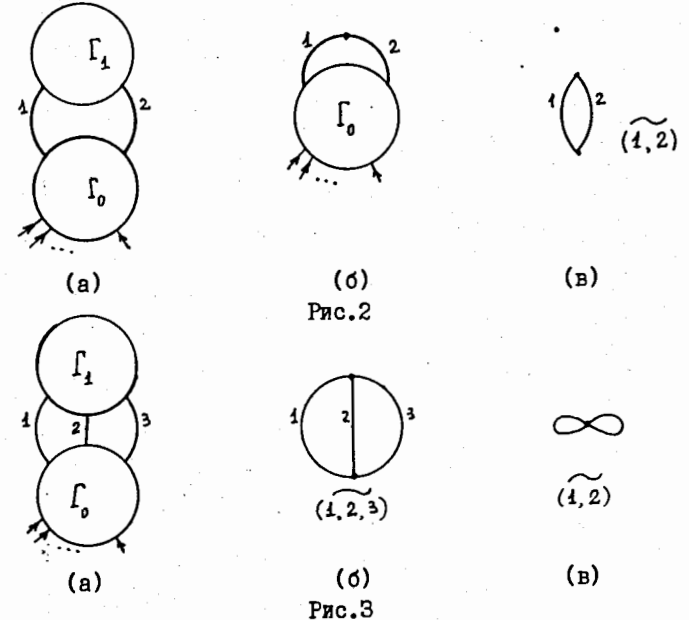
Наконец, так же, как и в УФ-случае, для ИК-неприводимых подграфов вводится понятие индекса (ИК-) расходимости, величина которого

2) Последнее условие связано с тем, что ФИ рассматриваются при неисклещительных евклидовых импульсах. Если бы ФИ рассматривались как обобщенные функции умеренного роста (т.е. фактически при всех внешних импульсах), то это условие не нужно было бы накладывать, а в определении ИК-неприводимости редуцированный граф определялся бы как $\tilde{\gamma} = \Gamma / \tilde{\gamma}$, где $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\gamma}$ получаются из Γ и $\tilde{\gamma}$ соответственно, с помощью введения дополнительной вершины, соединяющейся линиями с каждой из внешних вершин (подробнее см. [29, 30]).

показывает, расхоится ли данный подграф (в ИК-смысле), а если расхоится, то как (логарифмически, линейно, квадратично и т.д.). Для подсчета такого ИК-индекса необходимо понятие, аналогичное числу (независимых) петель $\mathcal{M} = L - V + 1$, которое играет ключевую роль при анализе УФ-расходимостей (здесь L - число линий, а V - вершин). Простой петле (циклу) соответствует ИК-понятие коцикла. Коциклом называется любой минимальный разрез, т.е. минимальный набор линий, удаление которых делает граф несвязным (минимальность означает, что таким свойством не обладает меньший набор). Число независимых коциклов графа определяется по формуле [27] $\mathcal{M} = V - 1 = L - \mathcal{M}$. Для заданного графа Γ и каждого из его ИК-неприводимых подграфов γ введем число независимых коциклов графа Γ , содержащихся в γ . Оно определяется соотношениями [29, 30]

$$\mathcal{M}^\Gamma(\gamma) = \mathcal{M}(\tilde{\gamma}) = L(\gamma) - \mathcal{M}(\tilde{\gamma}) = L(\gamma) - \mathcal{M} + \mathcal{M}(\tilde{\gamma}) = c(\tilde{\gamma}) - 1 \quad (7)$$

и служит ИК-аналогом числа петель (c - число компонент связности).



На рис.2-4 приведены примеры подграфов и соответствующих редуцированных графов. Подграф (1,2) является ИК-неприводимым для графов на рис.2а и 2б ($\tilde{\Gamma}, \tilde{2}$ изображен на рис.2в), а для графа на рис.3а он ИК-приводим (см. $\tilde{\Gamma}, \tilde{2}$ на рис.3в). ИК-неприводимым является под-

граф (1,2,3) для графа на рис.3а, а соответствующий редуцированный

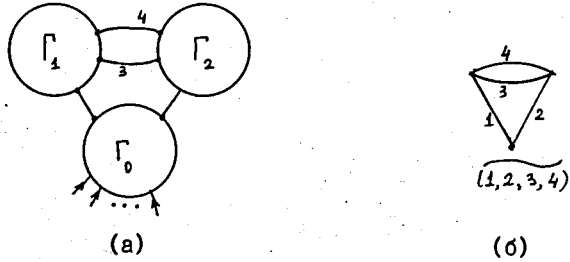


Рис.4

граф (1,2,3) изображен на рис.3б. Наконец, подграф (1,2,3,4) ИК-неприводим для графа на рис.4а, так как (1,2,3,4) на рис.4б одновершинно неприводим. Число независимых коциклов равно $\mathcal{M}^\Gamma(1,2)=1$ для рис.2, $\mathcal{M}^\Gamma(1,2,3)=1$ для рис.3 и $\mathcal{M}^\Gamma(1,2,3,4)=2$ для рис.4. Отметим, что все приведенные соотношения справедливы независимо от вида (связных) подграфов $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ на рис.2-4.

Определим ИК-индекс расходимости по формуле /29,30,13/

$$\tilde{\omega}(\gamma) = 4\mathcal{M}^\Gamma(\gamma) - 2L(\gamma) - \sum_{l \in \gamma} a_l \equiv -\omega(\tilde{\gamma}), \quad (8)$$

где $\omega(\gamma) = 4\mathcal{M}^\Gamma(\gamma) - 2L(\gamma) + \sum_{l \in \gamma} a_l$ - УФ-индекс расходимости, а a_l - степень числителя пропагатора l -ой линии. Например, для рис.2 $\tilde{\omega}(1,2)=0$, для рис.3 $\tilde{\omega}(1,2,3)=-2$, а для рис.4 $\tilde{\omega}(1,2,3,4)=0$. Как и в случае УФ-расходимостей, при $\tilde{\omega}(\gamma) < 0$ соответствующая ИК-расходимость отсутствует, т.е. подграф $\tilde{\gamma}$ в графе Γ является ИК-сходящимся.

5. \tilde{R} -операция и ИК-контрчлены

Для устранения ИК-расходимостей в произвольном ФИ мы будем применять \tilde{R} -операцию, которая задается ИК-аналогом УФ-формулы (2):

$$\tilde{R} G_\Gamma = \sum_{S = \cup \gamma_i \subset \Gamma} \tilde{\Delta}(S) G_\Gamma. \quad (9)$$

Здесь $\tilde{\Delta}(S)$ - ИК-контрчленные операции, а суммирование производится по множествам $S = \cup \gamma_i$ ИК-неприводимых, ИК-опасных, ИК-расходящихся подграфов γ_i , которые являются ИК-непересекающимися /13/: 1) не пересекаются по линиям; 2) не существует ИК-неприводимых подграфов, образованных объединением некоторых из γ_i . Отметим, что для ИК-непересекающихся подграфов γ_i имеет место равенство

$$\mathcal{M}^\Gamma(\cup \gamma_i) = \sum_i \mathcal{M}^\Gamma(\gamma_i) \quad - \text{ИК-аналог УФ-равенства } \mathcal{M}(\cup \gamma_i) = \sum_i \mathcal{M}(\gamma_i)$$

для непересекающихся по вершинам (т.е. УФ-непересекающихся) подграфов γ_i , которые дают вклад в \tilde{R} -операцию (2).

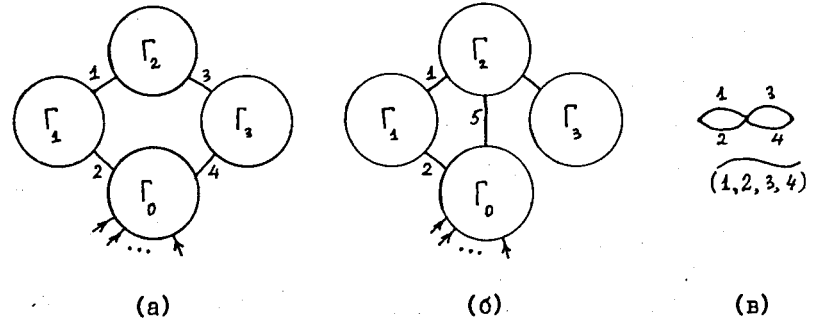


Рис.5

Например, на рис.5а подграфы (1,2) и (3,4) ИК-пересекаются, хотя и не имеют общих линий, так как их объединение является ИК-неприводимым. Однако на рис.5б подграфы (1,2) и (3,4) не являются ИК-пересекающимися; одновершинно приводимый редуцированный граф $(1,2) \cup (3,4)$ изображен на рис.5в. В результате независимо от вида связанных подграфов $\Gamma_0 - \Gamma_3$ в первом случае произведение $\tilde{\Delta}(1,2) \tilde{\Delta}(3,4)$ не дает вклада в (9), а во втором случае это произведение присутствует.

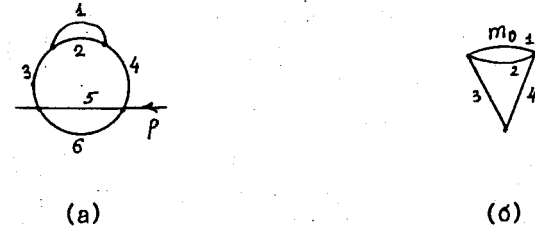
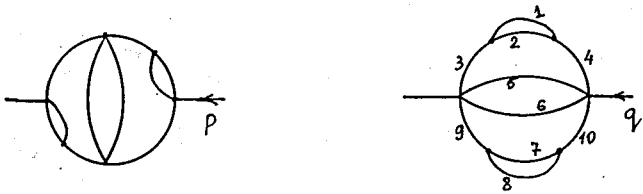


Рис.6

Приведем еще два примера. В соответствии с определением (9) \tilde{R} -операция для графа на рис.6а имеет вид $\tilde{R} = 1 + \tilde{\Delta}(3,4) + \tilde{\Delta}(1,2,3,4)$ (вычисление ИК-контрчленов см. ниже в разд.8). Для графа на рис.7а имеем $\tilde{R} = 1$, а для рис.7б $\tilde{R} = 1 + \tilde{\Delta}(3,4) + \tilde{\Delta}(1-4) + \tilde{\Delta}(9,10) + \tilde{\Delta}(7-10) + (\tilde{\Delta}(3,4) + \tilde{\Delta}(1-4)) (\tilde{\Delta}(9,10) + \tilde{\Delta}(7-10))$.

Для полного определения \tilde{R} -операции осталось охарактеризовать действие ИК-контрчленных операций $\tilde{\Delta}(S)$. При $S = \emptyset$ $\tilde{\Delta}(S) = 1$, а при $S = \cup \gamma_i$ операция $\tilde{\Delta}(S)$ действует как $\prod_i \tilde{\Delta}(\gamma_i)$. Для опреде-



(a)

(b)

Рис.7

ления действия $\Delta(\gamma)$ в случае ИК-неприводимого подграфа γ выберем петлевые импульсы графа Γ так, чтобы в ФИ F_Γ для Γ выделилось подынтегральное выражение I_γ в ФИ для редуцированного графа $\tilde{\gamma}$ и ФИ для компонент связности дополнения $\tilde{\gamma}$:

$$F_\Gamma(p, m, \mu, \varepsilon) = \int \left\{ \prod_{i=1}^{c(\tilde{\gamma})-1} F_{\tilde{\gamma}_i}(k') F_{\tilde{\gamma}_0}(p, k') \right\} I_\gamma(k') d_\mu^D k'. \quad (10)$$

Здесь $k' = (k'_1, \dots, k'_{n(\tilde{\gamma})})$ - петлевые импульсы редуцированного графа $\tilde{\gamma}$; $I_\gamma(k')$ - подынтегральное выражение в ФИ для $\tilde{\gamma}$; $F_{\tilde{\gamma}_i}$ - ФИ, сопоставленный i -й компоненте связности $\tilde{\gamma}_i$ подграфа $\tilde{\gamma} = \cup \tilde{\gamma}_i$; $\tilde{\gamma}_0$ - компонента, в которую втекают все ненулевые внешние импульсы. Действие операции $\tilde{\Delta}(\gamma)$ определяется по следующему правилу:

$$\tilde{\Delta}(\gamma) F_\Gamma = \int \prod_{i=0}^{c(\tilde{\gamma})-1} F_{\tilde{\gamma}_i} \tilde{\Delta}_{\tilde{\gamma}}(k') d_\mu^D k', \quad (11a)$$

$$\tilde{\Delta}_{\tilde{\gamma}}(k') = \tilde{\mathcal{P}}_{\tilde{\gamma}}(\partial/\partial k') \prod_{j=1}^{n(\tilde{\gamma})} (2\pi)^D \mu^{-2\varepsilon} \delta^{(D)}(k'_j). \quad (11b)$$

Здесь $\tilde{\mathcal{P}}_{\tilde{\gamma}}$ - однородный полином степени $\tilde{\omega}(\tilde{\gamma})$ по производным $\partial/\partial k'_1, \dots, \partial/\partial k'_{n(\tilde{\gamma})}$.

Итак, действие $\tilde{\Delta}(\gamma)$ сводится к вычислению контрчлена $\tilde{\Delta}_{\tilde{\gamma}}$ и вставке его специальным образом в диаграмму $\tilde{\gamma}$, вообще говоря, несвязную. Следует подчеркнуть, что значение ИК-контрчлена $\tilde{\Delta}_{\tilde{\gamma}}$ зависит только от подынтегрального выражения $I_\gamma(k')$, соответствующего графу $\tilde{\gamma}$; оно не изменится, если выбрать какие-нибудь другие Γ и γ при $\Gamma/\gamma = \tilde{\gamma}$. Пусть, например, γ расходится логарифмически (в

ИК-смысле), а $\tilde{\gamma}$ состоит из одной компоненты связности $\tilde{\gamma}_0$. Тогда ИК-контрчленная операция $\tilde{\Delta}(\gamma)$ действует, как $\tilde{\Delta}(\gamma) F_\Gamma = \tilde{Z}_{\tilde{\gamma}} F_{\tilde{\gamma}}$, где $\tilde{Z}_{\tilde{\gamma}}$ - ИК-перенормировочная константа, зависящая только от $\tilde{\gamma}$. В рамках МВ-схемы эта константа, как и любой полином $\tilde{\mathcal{P}}_{\tilde{\gamma}}$ в (11b), представляет собой сумму полюсных по ε слагаемых.

6. R^* -операция и обобщение теоремы Боголюбова-Парасюка

Пусть ФИ обладает как УФ-, так и ИК-расходимостями. Применяя к нему R -операцию (2), мы получим сумму диаграмм со вставками УФ-контрчленов. Подействуем на каждое из этих слагаемых \tilde{R} -операцией (9). В результате получим ФИ $R^* F_\Gamma$, который образуется из F_Γ после применения R^* -операции:

$$R^* F_\Gamma = \sum_{S \cap S' = \emptyset} \Delta(S) \tilde{\Delta}(S') F_\Gamma = R^* F_\Gamma + \Delta(\Gamma) F_\Gamma + \tilde{\Delta}(\Gamma) F_\Gamma. \quad (12)$$

Здесь производится суммирование по множествам $S = \cup \gamma_i$ и $S' = \cup \gamma'_j$ УФ(ИК)-непересекающихся подграфов, которые не пересекаются между собой по линиям, т.е. $L(\gamma_i, \gamma'_j) = 0$ при любых $\gamma_i \in S, \gamma'_j \in S'$.

Например, для графа на рис.6а R^* -операция выглядит следующим образом: $R^* = 1 + \Delta(1,2) + \Delta(5,6) + \tilde{\Delta}(3,4) + \tilde{\Delta}(1-4) + \Delta(\Gamma) + \Delta(1,2)\Delta(5,6) + \Delta(1,2)\tilde{\Delta}(3,4) + \Delta(5,6)\tilde{\Delta}(3,4) + \Delta(5,6)\tilde{\Delta}(1-4) + \Delta(5,6)\Delta(1,2)\tilde{\Delta}(3,4)$. Для графа на рис.7б имеем $R^* = (1 + \tilde{\Delta}(3,4) + \tilde{\Delta}(1-4))(1 + \tilde{\Delta}(9,10) + \tilde{\Delta}(7,10)) \times (1 + \Delta(5,6)) + [\Delta(1,2)(1 + \tilde{\Delta}(3,4)) + \Delta(7,8)(1 + \tilde{\Delta}(9,10)) + \Delta(1,2)\Delta(7,8)(1 + \tilde{\Delta}(3,4))] \times (1 + \tilde{\Delta}(3,10)) + \Delta(1-6)(1 + \tilde{\Delta}(9,10) + \tilde{\Delta}(7-10)) + \Delta(5-10)(1 + \tilde{\Delta}(3,4) + \tilde{\Delta}(1-4)) + \Delta(\Gamma)$.

Имеет место теорема, существование которой предположил Паризи /31/ и которая обобщает теорему Боголюбова-Парасюка на случай наличия ИК-расходимостей.

Теорема. В $R^* F_\Gamma$ УФ- и ИК-расходимости отсутствуют.

Для доказательства этой теоремы целесообразно использовать представление R^* -операции не в контрчленном виде (12), а в обобщенной лесной форме

$$R^* = \sum_{F \cap F' = \emptyset} \prod_{\gamma \in F} (-K_\gamma) \cdot \prod_{\gamma' \in F'} (-\tilde{K}_{\gamma'}). \quad (13)$$

Здесь производится суммирование по обобщенным лесам $/30/ F = F \cup F'$, состоящим из непересекающегося (по линиям) объединения УФ-леса F и

ИК-леса F' . УФ-лес - это обычный лес $/I, 20, 21/$, т.е. множество частично неперекрывающихся ИЧН-подграфов, а ИК-лес - множество ИК-неперекрывающихся подграфов (т.е. они либо содержатся один в другом, либо являются ИК-непересекающимися). Вычитающие операторы K_γ и K_γ^* выделяют, соответственно, УФ- и ИК-полусы по параметру регуляризации ε , связанные с данным подграфом.

Отметим, что можно определить R^* -операцию, основываясь и на других вычитающих операторах. В качестве оператора K_γ можно, например, использовать оператор, который производит вычитания по внешним координатам диаграммы. При этом нужно аккуратно определить, что значит "внешние по отношению к данному подграфу координаты", поскольку ИК-неприводимый подграф может быть и несвязным (см. рис. 2-7). Кроме того, вычитания порядка $\tilde{\omega}(\gamma)$ при нулевых координатах неизбежно индуцируют дополнительные УФ-расходимости. Поэтому при таких вычитаниях нужно вводить вспомогательную УФ-регуляризацию. Полученная в результате \tilde{R} -операция представляет собой ИК-обобщение перенормировочной процедуры, в рамках которой вычитания в нуле по импульсам сопровождаются введением ИК-регулирующей "мягкой массы" $/32, 33/$.

Для определения ИК-контрчленов целесообразно пользоваться (как и в УФ-случае) не комбинаторно-разрешенными лесными формулами, а рекуррентными соотношениями. Эти соотношения в максимально простой форме будут получены в следующем разделе.

7. Вычисление УФ- и ИК-контрчленов

Предположим, что определены все УФ- и ИК-контрчлены $\Delta_\gamma(\rho, m)$ и $\tilde{\Delta}_\gamma(k')$ с числом петель, меньшим N_0 , т.е. для γ и γ' с $K(\gamma) < N_0$ и $K(\gamma') < N_0$. Пусть F_Γ - размерно регуляризованный N_0 -петлевой ФИ. Как уже отмечалось, полиномиальная зависимость УФ-контрчлена $\Delta_\Gamma(\rho, m)$ от ρ и m , а также коммутативность R -операции в МВ-схеме и дифференцирования по ρ и m позволяет свести вычисление полинома $\mathcal{P}_\Gamma(\rho, m)$ к нахождению УФ-контрчленов для некоторого множества логарифмически расходящихся ФИ. Таким образом, без потери общности можно считать, что $\tilde{\omega}(\Gamma) = a$. Тогда УФ-контрчлен Δ_Γ для Γ имеет вид $Z (2\pi)^\mu \mu^{-2\varepsilon} \delta^{(D)}(\sum p_i)$, где Z - безразмерный полином по ε^{-1} , не зависящий от ρ и m . Из сформулированной выше теоремы вытекает, что $K R^* F_\Gamma = 0$. Используя R^* -операцию в виде (I2), имеем

$$Z = -K \left\{ R^* F_\Gamma(\rho, m) + \tilde{\Delta}(\Gamma) F_\Gamma(\rho, m) \right\}. \quad (I4)$$

Для упрощения вычислений теперь можно обратить в нуль некоторые импульсы или массы. Если такая процедура приводит к ИК-расходимостям, то они устраняются ИК-контрчленами, входящими в правую часть соотношения (I4). Можно, например, обратить в нуль все массы и импульсы и ввести вспомогательную массу m_0 в пропагатор произвольно выбранной линии. С другой стороны, можно не вводить m_0 , а вместо этого пропустить через диаграмму внешний импульс q . Отметим, что в обоих вариантах $\tilde{\Delta}(\Gamma) F_\Gamma = 0$, поскольку либо Γ содержит массивную линию, либо внешний импульс втекает в разные компоненты $\tilde{\Gamma}$ (этот подграф состоит из изолированных вершин исходного графа Γ). В результате получаем

$$Z = -K \left\{ F_\Gamma(0, q) + \sum_{S \cap S' = \emptyset} \Delta(S) \tilde{\Delta}(S') F_\Gamma(0, q) \right\}, \quad (I5)$$

где штрих над знаком суммы означает, что она не включает члены с $S = \emptyset$ или $S' = \emptyset$. В правой части содержатся лишь контрчлены с числом петель, меньшим N_0 . Отметим, что задача вычисления УФ-контрчлена максимально упростилась, поскольку появившиеся ФИ оказываются либо пропагаторного типа, либо вакуумными ФИ с одной ненулевой массой.

Займемся теперь вычислением N_0 -петлевого ИК-контрчлена. Напомним, что этот контрчлен не зависит от графа Γ и подграфа γ , которые привели к редуцированному графу $\tilde{\gamma}$. Воспользовавшись этой свободой, будем считать, что $\Gamma = \Gamma / \tilde{\Gamma}$, т.е. $\tilde{\Gamma}$ состоит из изолированных вершин графа Γ . Сопоставляя этим вершинам полиномы $g = \{g_1, \dots, g_r\}$ по петлевым импульсам k_Γ , нетрудно свести задачу вычисления полинома $\tilde{\mathcal{P}}_\gamma$ к нахождению ИК-контрчленов для некоторого набора безмассовых логарифмически расходящихся вакуумных графов. Предположим поэтому, что $\tilde{\omega}(\Gamma) = 0$. Тогда соответствующий ИК-контрчлен приобретает вид

$$\tilde{\Delta}_\Gamma(k) = \tilde{Z} \prod_{i=1}^{N_0} (2\pi)^\mu \mu^{-2\varepsilon} \delta^{(D)}(k_i), \quad \text{где } \tilde{Z} \text{ - безразмерный полином по } \varepsilon^{-1}.$$

Учтем теперь, что в рамках размерной регуляризации любой вакуумный безмассовый ФИ обращается в нуль.³⁾ Снова используя обобщенную теорему Боголюбова-Парасюка, получаем

$$\tilde{Z} = -\Delta(\Gamma) F_\Gamma - \sum_{S \cap S' = \emptyset} \Delta(S) \tilde{\Delta}(S') F_\Gamma. \quad (I6)$$

³⁾ Тем не менее, контрчлены $\Delta(\Gamma) F_\Gamma$ и $\tilde{\Delta}(\Gamma) F_\Gamma$ могут быть отличными от нуля. Дело в том, что УФ- и ИК-контрчленные операции выделяют расходимости своего типа и не затрагивают "чужие" расходимости.

Эта формула выражает ИК-перенормировочную константу \tilde{Z} через \mathcal{N}_0 -петлевой УФ-контрчлен Z , вычисленный на предыдущем этапе с помощью формулы (15), и некоторые контрчлены с числом петель, меньшим \mathcal{N}_0 . Отметим, что суммирование в правой части (16) производится только при $S \cup S' = \Gamma$, поскольку в противном случае возникают безмассовые вакуумные РРФИ, обращаемые в нуль.

Таким образом, сформулированный выше метод вычисления контрчленов, основанный на соотношениях (15) и (16), полностью определяет R^* -операцию в МВ-схеме. С его помощью нетрудно установить ^{/13/}, что УФ- и ИК- \mathcal{N} -петлевые контрчлены содержат полюсы по ε не старше $\varepsilon^{-\mathcal{N}}$ и могут быть выражены через \mathcal{N} первых членов разложения Лорана по ε некоторых безмассовых интегралов пропагаторного типа с числом петель, меньшим \mathcal{N} .

8. Примеры

Проиллюстрируем изложенный выше метод вычисления УФ- и ИК-контрчленов на простых примерах. Рассмотрим скалярную безмассовую диаграмму, изображенную на рис.6а. Она имеет три УФ-расходящихся ГЧН-подграфа $\gamma_1 = (1,2)$; $\gamma_2 = (5,6)$; Γ , а также два ИК-расходящихся ИК-неприводимых подграфа $\gamma_3 = (3,4)$ и $\gamma_4 = (1,2,3,4)$. Однопетлевые УФ-контрчлены вычисляются непосредственно: $Z_1 = Z_2 = -1/16\pi^2\varepsilon$.

Для вычисления однопетлевого ИК-контрчлена $\tilde{Z}_{\gamma_3} = \tilde{Z}_{\gamma_4}$ используем формулу (16): $\tilde{Z}_{\gamma_3} = -Z_{\gamma_3} = 1/16\pi^2\varepsilon$. Чтобы вычислить $\tilde{Z}_{\gamma_4} = \tilde{Z}_{\gamma_4}$, необходимо знать $\tilde{P}_{\gamma_4} = Z_{\gamma_4}$. После введения вспомогательной массы m_0 , как показано на рис.6б, и использования соотношения (15) получаем

$Z_{\gamma_4} = (1-\varepsilon)/2\varepsilon^2(16\pi^2)^2$. Затем с использованием соотношения (16) находим $\tilde{Z}_{\gamma_4} = (1+\varepsilon)/2\varepsilon^2(16\pi^2)^2$. Наконец, еще раз используя (15), приходим к значению $Z_{\Gamma} = -\frac{1}{3\varepsilon^3}(1-\varepsilon-\varepsilon^2)/(16\pi^2)^3$ в согласии с результатом работы ^{/34/}.

Вычислим теперь УФ-контрчлен для пятипетлевой диаграммы теории φ^4 , изображенной на рис.7а. Сама по себе эта диаграмма, как нетрудно проверить, не имеет ИК-расходящихся ИК-неприводимых подграфов. Однако прямое вычисление соответствующего УФ-контрчлена осложняется необходимостью знать аналитическое выражение для нетривиального ФИ в достаточно высоком порядке по ε . Обратим в нуль все массы и импульс p и введем вспомогательный импульс q , как показано на рис.7б (использование вспомогательного внешнего импульса позволяет применять при вычислениях весьма удобный аппарат G -функций ^{/3/}). Полученная диаграмма обладает УФ-расходящимися ГЧН-подграфами $\gamma_1 = (1,2)$,

$\gamma_2 = (5,6)$, $\gamma_5 = (1-6)$, $\gamma_6 = (5-10)$, $\gamma_7 = (7,8)$, $\gamma_8 = \Gamma$ и ИК-

расходящимися ИК-неприводимыми подграфами $\gamma_3 = (3,4)$, $\gamma_4 = (1-4)$, $\gamma_9 = (9,10)$ и $\gamma_{10} = (7-10)$. Таким образом, все контрчлены, входящие в R^* -операцию, уже были вычислены в предыдущем примере. С использованием соотношения (15) имеем $Z_{\Gamma} = -K R^* F_{\Gamma}(q)$. Кроме того, необходимо учесть обращение в нуль слагаемых в R^* , в которых появляются безмассовые вакуумные графы, а также привести подобные члены. В результате остаются восемь отличных от нуля слагаемых:

$$Z_{\Gamma} = - (4\pi)^{-10} K \left\{ \varepsilon^{-3} G_0^3(\varepsilon) G(2+\varepsilon, \varepsilon) G(2+\varepsilon, 3\varepsilon) t^{5\varepsilon} - \right. \\ \left. - 2\varepsilon^{-3} G_0^2(\varepsilon) G(2, \varepsilon) G(2+\varepsilon, 2\varepsilon) t^{4\varepsilon} + \varepsilon^{-2} G_0(\varepsilon) G(2, \varepsilon) G(2, 2\varepsilon) t^{3\varepsilon} + \right. \\ \left. + (1+\varepsilon)\varepsilon^{-4} G_0^2(\varepsilon) G(\varepsilon, 2+\varepsilon) t^{3\varepsilon} - (1+\varepsilon)\varepsilon^{-4} G_0(\varepsilon) G(\varepsilon, 2) t^{2\varepsilon} + \right. \\ \left. + (1+\varepsilon)^2 \varepsilon^{-5} \frac{1}{4} G_0(\varepsilon) t^{\varepsilon} - \frac{2}{3} \varepsilon^{-3} (1-\varepsilon-\varepsilon^2) \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1+\varepsilon)^2}{4\varepsilon^4} \right\},$$

где $G_0(\varepsilon) = \varepsilon G(1, 1)$, $t = 4\mu^2\pi/\rho^2$, а G -функция задается соотношением (16). Используя стандартные формулы разложения G в ряд ^{/3/}, получаем окончательный результат

$$Z_{\Gamma} = - (4\pi)^{-10} \left(\frac{2}{15} \varepsilon^{-5} - \frac{4}{15} \varepsilon^{-4} - \frac{1}{6} \varepsilon^{-3} + \frac{3}{10} \varepsilon^{-2} + \frac{4}{15} \varepsilon^{-1} \right).$$

9. R^* -операция в асимптотических разложениях

Итак, R^* -операция позволяет устранять из ФИ расходимости обоих типов. Впрочем, в физически осмысленных теориях (например, в КХД) ИК-расходимости рассматриваемого вида отсутствуют. Тем не менее, R^* -операция в первую очередь предназначена для применения именно в таких теориях. В частности, соотношение (15) предоставляет метод вычисления УФ-контрчленов, основанный на R^* -операции и позволяющий для любой диаграммы свести задачу к анализу простейших ФИ. Обязанность появившейся R^* -операции - удалить ИК-расходимости, возникающие при наивном переходе к пределу нулевых масс и импульсов. Аналогично, естественным образом появляется R^* -операция и в более общих ситуациях при анализе асимптотических разложений ФИ: R^* -операция устраняет те ИК-расходимости, которые возникают при наивном разложении подынтегрального выражения в ФИ в ряд Тейлора при нулевых импульсах и массах.

Например, разложение произведения составных полей на малых расстояниях, предложенное Вильсоном ^{/35/}, а в явном виде выведенное впервые в рамках перенормировки Боголюбова-Парасюка ^{/36/}, связано с поведением ФИ в асимптотическом режиме, когда разность координат, сопоставленных двум выделенным (токовым) вершинам, становится малой. Такой режим непосредственно связан с асимптотическим поведением при стремлении к нулю всех масс и остальных внешних импульсов. При прямолиней-

ном разложении подынтегрального выражения в ряд Тейлора по этим параметрам индуцируются ИК-расходимости, которые при правильном разложении устраняются R^* -операцией. Точнее говоря, разложение Вильсона в MB-схеме имеет вид

$$R J_1(x) J_2(0) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} R^* \tau \langle J_1(x) J_2(0) \tilde{\varphi}_1^{(\lambda)}(0) \dots \tilde{\varphi}_l^{(\lambda)}(0) \rangle^{x\text{-prop}} R J_{\lambda}(0). \quad (I7)$$

Здесь c_{λ} - известный комбинаторный множитель, $\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \tau^i$, а τ^i - оператор, который выделяет члены i -ого порядка в тейлоровском разложении по массам теории; $R J_{\lambda}$ - MB-перенормированное составное поле, которое соответствует асимптотическому in-образу, представляющему собой произведение $\varphi_1^{(\lambda)}(0) \dots \varphi_l^{(\lambda)}(0)$ асимптотических полей и их производных $\varphi_i^{(\lambda)} = \partial^{\lambda_{i1}} \dots \partial^{\lambda_{il}} \varphi_i$; $\langle J_1(x) J_2(0) \tilde{\varphi}_1^{(\lambda)}(0) \dots \tilde{\varphi}_l^{(\lambda)}(0) \rangle^{x\text{-prop}}$

- функции Грина составных полей J_1 и J_2 , по внешним S -матричным концам которых произведено преобразование Фурье, а затем после дифференцирования порядка (λ_i) соответствующие импульсы положены равными нулю; символ $x\text{-prop}$ означает вклад диаграмм, которые являются ИЧН после совмещения вершин x и 0 . Эти функции Грина перенормируются в (I7) с помощью R^* -операции, ИК-часть которой устраняет полюсы, возникающие после дифференцирования в нуле по массам и импульсам.

Разложение (I7) можно получить в рамках метода склеивания /5,6/. Кроме того, его можно вывести и следуя методу работ /36,37/ с помощью некоторого предвычитающего оператора. Этот оператор производит предвычитания, которые заблаговременно устраняют УФ-расходимости, появляющиеся при стремлении двух выделенных вершин друг к другу. Например, в случае перенормировки Боголюбова-Парасюка такой предвычитывающий оператор производит вычитания в нуле по всем внешним импульсам, за исключением импульса, протекающего из одной токовой вершины в другую /36,37,20/. Оказывается, аналогичный предвычитывающий оператор можно явно определить и в рамках MB-схемы.

Отметим, что разложение (I7) имеет весьма простой вид и отличается от разложения Вильсона в перенормировке Боголюбова-Парасюка /37/ только наличием дифференцирования в нуле по массам и введением R^* -операции. Подчеркнем также, что коэффициентные функции в разложении (I7) выражены через безмассовые диаграммы.

Аналогичным образом возникает R^* -операция и в других асимптотических режимах и, в частности, в разложении при больших массах. Можно вывести явную формулу для разложения эффективного лагранжиана низкоэнергетической теории, содержащей только легкие поля (с легкими массами).

В этой формуле эффективный лагранжиан записывается в виде ряда по обратным степеням тяжелой массы (с точностью до логарифмических поправок), причем члены ряда представляют собой легкие поля с увеличивающейся размерностью, коэффициенты при которых разлагаются по вакуумным диаграммам исходной теории, продифференцированным в нуле по легким массам. Появившиеся в результате ИК-расходимости устраняются R^* -операцией.

Вывод разложения Вильсона (I7) с помощью предвычитывающего оператора, а также вывод разложения при больших массах основан на контрольной технике /38,20,39/ и будет изложен в ближайших публикациях. Можно надеяться, что область применения R^* -операции далеко не исчерпана. Среди последних ее применений укажем на работу /40/, в которой РГ-анализ суперсимметричной нелинейной G -модели сводился к вычислению двумерных безмассовых ФИ в ИК-опасной ситуации.

Литература

- /1/ Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей, Наука, М., 1984.
- /2/ Avdeev L.V., Tarasov O.V., Vladimirov A.A. Phys. Lett., 1980, 96B.
- /3/ Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V. Nucl. Phys., 1980, BI74 p. 345.
- /4/ Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V. Phys. Lett., 1979, 85B, p. 277.
- /5/ Chetyrkin K.G., Gorishny S.G., Tkachov F.V. Phys. Lett., 1982, II9B, p. 407.
- /6/ Chetyrkin K.G. Phys. Lett., 1983, I26B, p. 371.
- /7/ Tkachov F.V. Phys. Lett., 1981, I00B, p. 65.
Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. Nucl. Phys., 1981, BI92, p. 159.
Ткачев Ф.В. ТМФ, 1983, 56, с. 350.
- /8/ Васильев А.Н., Письмак Ю.М., Хонконен Ю.Р. ТМФ, 1981, 47, с. 291.
- /9/ Kazakov D.I. Phys. Lett., 1983, I33B, p. 406.
Казakov Д.И. ТМФ, 1984, 58, с. 343.
- /10/ Усыкина Н.И. ТМФ, 1983, 54, с. 124. Belokurov V.V., Ussyukina N.I. J. Phys. A: Math. Gen., 1983, I6, p. 2811.
- /11/ Владимиров А.А. ТМФ, 1980, 43, с. 210.
- /12/ Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. Phys. Lett., 1982, II4B, p. 340.
- /13/ Смирнов В.А., Четыркин К.Г. ТМФ, 1985, 63, с. 208.
- /14/ Tkachov F.V. Phys. Lett., 1983, I24B, p. 212; INR preprint P-0332, Moscow, 1984; INR preprint P-0358, Moscow, 1984.
Pivovarov G.B., Tkachov F.V. INR preprint P-0370, Moscow, 1984.
- /15/ 't Hooft G., Veltman M. Nucl. Phys., 1972, B44, p. 189.

- /16/ Владимирова А.А. ТМФ, 1978, 35, с. 392.
- /17/ Смирнов В.А., Четыркин К.Г. ТМФ, 1983, 56, с. 206.
- /18/ 't Hooft G. Nucl. Phys., 1973, 61, p. 455.
- /19/ Bardeen W.A. et al. Phys. Rev., 1978, D18, p. 3998.
- /20/ Завьялов О.И. Перенормированные диаграммы Фейнмана, Наука, М., 1979.
- /21/ Collins J.C. Renormalization, Cambr. Univ. Press, Cambridge, 1984.
- /22/ Collins J.C. Nucl. Phys., 1975, B92, p. 477.
- /23/ Владимирова А.А. ТМФ, 1978, 36, с. 271.
- /24/ Collins J.C. Nucl. Phys., 1974, B80, p. 341.
- /25/ Chetyrkin K.G., Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachov F.V. Phys. Lett., 1983, 132B, p. 351.
- /26/ Горюшин С.Г., Ларин С.А., Ткачев Ф.В., Четыркин К.Г. Препринт ИЯИ АН СССР, П-0453, Москва, 1986.
- /27/ Nakanishi N. Graph Theory and Feynman Integrals, Gordon and Breach, New York, 1971.
- /28/ Bergère M.C., David F. J. Math. Phys., 1979, 20, p. 1244.
- /29/ Смирнов В.А. ТМФ, 1980, 44, с. 307; 1981, 46, с. 199.
- /30/ Смирнов В.А. ТМФ, 1984, 59, с. 373.
- /31/ Smirnov V.A. Fortschr. Phys., 1985, 33, p. 495.
- /32/ Parisi G. Nucl. Phys., 1979, B150, p. 163.
- /32/ Gomes M., Lowenstein J.H., Zimmermann W. Commun. Math. Phys., 1974, 39, p. 81. Lowenstein J.H., Zimmermann W. Nucl. Phys., 1975, B86, p. 77.
- /33/ Аникин С.А., Завьялов О.И., Карчев Н.И. ТМФ, 1980, 44, с. 291.
- /34/ Владимирова А.А., Казаков Д.И., Тарасов О.В. ЖЭТФ, 1979, 77, с. 1035.
- /35/ Wilson K.G. Phys. Rev., 1969, 179, p. 1499.
- /36/ Zimmermann W. Ann. Phys., 1973, 77, p. 570.
- /37/ Аникин С.А., Завьялов О.И. ТМФ, 1976, 27, с. 425.
- Аникин С.А., Zavalov O.I. Ann. Phys., 1978, 116, p. 135.
- /38/ Аникин С.А., Завьялов О.И. ТМФ, 1976, 26, с. 162.
- Аникин С.А., Polivanov M.C., Zavalov O.I. Fortschr. Phys., 1977, 27, p. 459.
- /39/ Смирнов В.А., Четыркин К.Г. ТМФ, 1985, 64, с. 370.
- /40/ Grisaru M.T., Kazakov D.I., Zanon D. Preprint HUTP-86 A076 BRX TH-214, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 марта 1988 года.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	стр.
I. Введение	3
2. Выбор регуляризации и перенормировочной схемы; метод ИК-преобразования	5
3. Появление R^* -операции в методике ИК-преобразования	8
4. Теоретико-графические определения и обозначения	10
5. \tilde{R} -операция и ИК-контрчлены	12
6. R^* -операция и обобщение теоремы Боголюбова-Парасюка	15
7. Вычисление $U\Phi$ - и ИК-контрчленов	16
8. Примеры	18
9. R^* -операция в асимптотических разложениях	19
10. Литература	21

ПЕРЕЧЕНЬ
лекций, вышедших с 1974 в ОИЯИ

- Фаустов Р.Н. Связанная система частиц в квантовой электродинамике. Вып.1. ОИЯИ, Дубна, 1974.
- Синаев А.Н. Современные аппаратные системы модульной структуры, используемые при создании измерительно-вычислительных комплексов /КАМАК, ВЕКТОР/. Вып.2. ОИЯИ, 8507, Дубна, 1975.
- Волков Д.В. Кварки как следствие дуальности. Вып.3. ОИЯИ, P2-8765, Дубна, 1975.
- Пальчик М.Я., Фрадкин Е.С. Введение в теорию конформно-инвариантных квантовых полей. Вып.4. ОИЯИ, 2-8874, Дубна, 1975.
- Замори Э. Микропроцессоры. Вып.5. ОИЯИ, P10-8852, Дубна, 1975.
- Биленький С.М. Вопросы физики нейтрино высоких энергий. Вып.6. ОИЯИ, 2-9026, Дубна, 1975.
- Малкин И.А., Манько В.И. Инварианты, когерентные состояния и динамические симметрии квантовых систем. Вып.7. ОИЯИ, P2-9228, Дубна, 1975.
- Волков М.К., Первушин В.Н. Квантовая теория поля с киральным лагранжианом и физика мезонов низких энергий. Вып.8. ОИЯИ, P2-9390, Дубна, 1976.
- Басиладзе С.Г. Интегральные схемы с эмиттерной связью и их применение в наносекундной ядерной электронике. Вып.9. ОИЯИ, 13-9744, Дубна, 1976.
- Аникин С.А. и др. Перенормированные составные поля в квантовой теории поля. Вып.10. ОИЯИ, P2-10528, Дубна, 1977.
- Шляпников П.В. Множественные процессы и инклюзивные реакции. Вып.11. ОИЯИ, P2-10681, Дубна, 1977.
- Капусцик Э. Галилеева инвариантность в теории поля. Вып.12. ОИЯИ, P2-10677, Дубна, 1977.
- Бутцев В.С. Явление возбуждения высокоспиновых ядерных состояний и механизм поглощения отрицательных p -мезонов. Вып.13. ОИЯИ, P15-10847, Дубна, 1977.
- Валуев Б.Н. Применение алгебры Клиффорда к решению задачи Изинга - Онсагера. Вып.14. ОИЯИ, P17-11020, Дубна, 1977.
- Капусцик Э. Нестандартные алгебры квантово-механических наблюдаемых. Вып.15. ОИЯИ, P4-11497, Дубна, 1978.

- Блохинцев Д.И. Квантовая механика. Лекции по избранным вопросам. Вып.16. ОИЯИ, P2-11728, Дубна, 1978.
- Ширикова Н.Ю. Начинаям работать на ЭВМ CDC-6500. Вып.17. ОИЯИ, P11-11739, Дубна, 1978.
- Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Непрерывные симметрии в теории поля. Вып.18. ОИЯИ, P2-12029, Дубна, 1978.
- Некоторые проблемы физики высоких энергий /сборник/. Вып.19. ОИЯИ, P2-12080, Дубна, 1978.
- Басиладзе С.Г. Электронная регистрирующая аппаратура физического эксперимента. Вып.20. ОИЯИ, P13-12151, Дубна, 1979.
- Ефремов А.В., Радкишин А.В. Партоны, жесткие процессы и квантовая хромодинамика. Вып.21. ОИЯИ, P2-12803, Дубна, 1979.
- Говорков А.Б. Введение в теорию кварков. Вып.22. ОИЯИ, P2-12803, Дубна, 1979.
- Говорков А.Б. Цветные кварки и глюоны. Вып.23. ОИЯИ, P2-80-6, Дубна, 1980.
- Исаев П.С. Глубоконеупругое рассеяние лептонов на нуклонах. Партоновая модель нуклона. Вып.24. ОИЯИ, P2-80-325, Дубна, 1980.
- Казаков Д.И., Ширков Д.В. Суммирование асимптотических рядов в квантовой теории поля. Вып.25. ОИЯИ, P2-80-462, Дубна, 1980.
- Ососков Г.А. Применение методов распознавания образов в физике высоких энергий. Вып.26. ОИЯИ, P10-83-187, Дубна, 1983.
- Мальшев В.А. Элементарное введение в математическую физику бесконечно-частичных систем. Вып.27. ОИЯИ, P17-83-363, Дубна, 1983.
- Савушкин Л.Н., Фоменко В.Н. Введение в мезонную теорию ядерных взаимодействий и ядерных систем. Вып.28. ОИЯИ, P4-83-369, Дубна, 1983.
- Биленький С.М. Осцилляции нейтрино. Вып.29. ОИЯИ, P2-83-441, Дубна, 1983.
- Бужек В. Введение в метод стохастического квантования. Вып.30. ОИЯИ, P2-84-419, Дубна, 1984.
- Шумовский А.С., Фкалов В.И. Фазовые состояния и переходы. Вып.31. ОИЯИ, P17-85-676, Дубна, 1985.
- Владимиров А.А. Введение в квантовые интегрируемые системы. Метод R -матрицы. Вып.32. ОИЯИ, P17-85-742, Дубна, 1985.
- Осипов В.А., Федянин В.К. Полиацетилен и двумерные модели квантовой теории поля. Вып. 33. ОИЯИ, P17-85-809, Дубна, 1985.

Шуан Ш. Стохастичность в динамических системах. Вып. 34. ОИЯИ, Р17-86-211, Дубна, 1986.

Ефремов А.В. Введение в квантовую хромодинамику. Вып. 35. ОИЯИ, Р2-86-212, Дубна, 1986.

Нестеренко В.В., Червяков А.М. Сингулярные лагранжианы. Классическая динамика и квантование. Вып. 36. ОИЯИ, Р2-86-323, Дубна, 1986.

Пепельшев Г.Н. Регистрация нейтронов /современное состояние и перспективы развития/ Вып. 37. ОИЯИ, Р13-86-719, Дубна, 1986.

Боголюбов Н.Н./мл./, Шумовский А.С. Светоизлучение. Вып. 38. ОИЯИ, Р17-87-176, Дубна, 1987.

Пушкаргов Д.И. Дефектоны в кристаллах. /Метод квазичастиц в квантовой теории дефектов/. Вып. 39. ОИЯИ, Р17-87-177, Дубна, 1987.

Никитюк Н.М. От современной алгебры к специализированным процессорам. Вып. 40. ОИЯИ, Р10-87-401, Дубна, 1987.

Дубничкова А.З. Непрерывные группы для физиков. Вып. 41, ОИЯИ, Р2-87-197, Дубна, 1987.

Никитюк Н.М. Электронные методы экспериментальной физики высоких энергий. Вып. 42, ОИЯИ, Р1-87-909, Дубна, 1987.

Балдин А.М., Диденко Л.А. Асимптотические свойства адронной материи в пространстве четырехмерных относительных скоростей. Вып. 43, ОИЯИ, Р1-87-912, Дубна, 1987.

Машкевич В.С. Индетерминистская квантовая динамика. Вып. 44, ОИЯИ, Р2-88-150, 1988.

Филиппов А.Т. Введение в теорию суперструн. Вып. 45, ОИЯИ, Р2-88-188, 1988.

Бардин Д.Ю. Прецизионные проверки стандартной теории. Вып. 46, ОИЯИ, Р2-88-189, 1988.

Требования, предъявляемые к серии брошюр "Лекции для молодых ученых ОИЯИ"

Серия брошюр "Лекции для молодых ученых ОИЯИ" издаётся с целью повышения научно-профессионального кругозора и уровня молодых ученых и специалистов ОИЯИ в актуальных областях исследований, ведущихся по тематике Института. Выпуски должны представлять собой законченные циклы лекций, прочитанные в ОИЯИ и ориентированные прежде всего на молодых сотрудников Института.

Лекции должны иметь характер учебного пособия, предназначенного для первого ознакомления с рассматриваемой проблемой, а также содержать обзор её современного состояния. Они должны быть снабжены подробным оглавлением и основной литературой. Большие параграфы рекомендуется разбивать на подпараграфы с вынесенными в оглавление подзаголовками.

Весь текст, включая отдельные главы и параграфы, следует печатать, заполняя каждую страницу целиком.

Рукопись должна быть напечатана на специальных бланках, предназначенных для прямого репродуцирования, которые можно получить в издательском отделе. Все формулы и схемы должны быть вписаны аккуратно и ясно тушью или чернилами черного цвета. Разметка формул не производится, их нумерация должна находиться в конце строки справа в круглых скобках. Текст лекций печатается на машинке с черной (не серой) лентой через 1,5 интервала. Объем лекций не должен превышать 100 страниц машинописного текста.

Рукопись представляется в Редакционный совет серии брошюр "Лекции для молодых ученых ОИЯИ" Советом молодых ученых и специалистов ОИЯИ и Советами молодых ученых и специалистов лабораторий Института. Редакционный совет принимает окончательное решение о целесообразности ее публикации.

Редакционный совет