ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

А.Т.Филиппов

Введение в теорию суперструн

ДУБНА

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р2-88-188

А.Т.Филиппов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СУПЕРСТРУН

Дубна 1988

ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Выпуск 45

§ I. Введение

С начала 1985 года началась интенсивная разработка теории суперструн, которая в более отдаленной перспективе может привести к созданию последовательной единой теории всех взаимодействий, включая гравитацию. На сегодня существует множество работ, в которых развиваются различные физические подходы к теории суперструн и используется сложный и мало знакомый физикам математический аппарат. Попытки проникновения новичка в эту своеобразную область теоретической физики ещё более осложняются тем обстоятельством, что принципиальные основы квантовой теории струны выяснены плохо, а возможно, и не вполне установлены. Более того, попытки построить квантовую теорию струнного поля выявили определенную незавершенность основ обычной квантовой теории поля, особенно в "точке перехода" от одночастичной картины к полевой. Работа со струнами требует перестройки этих основ.

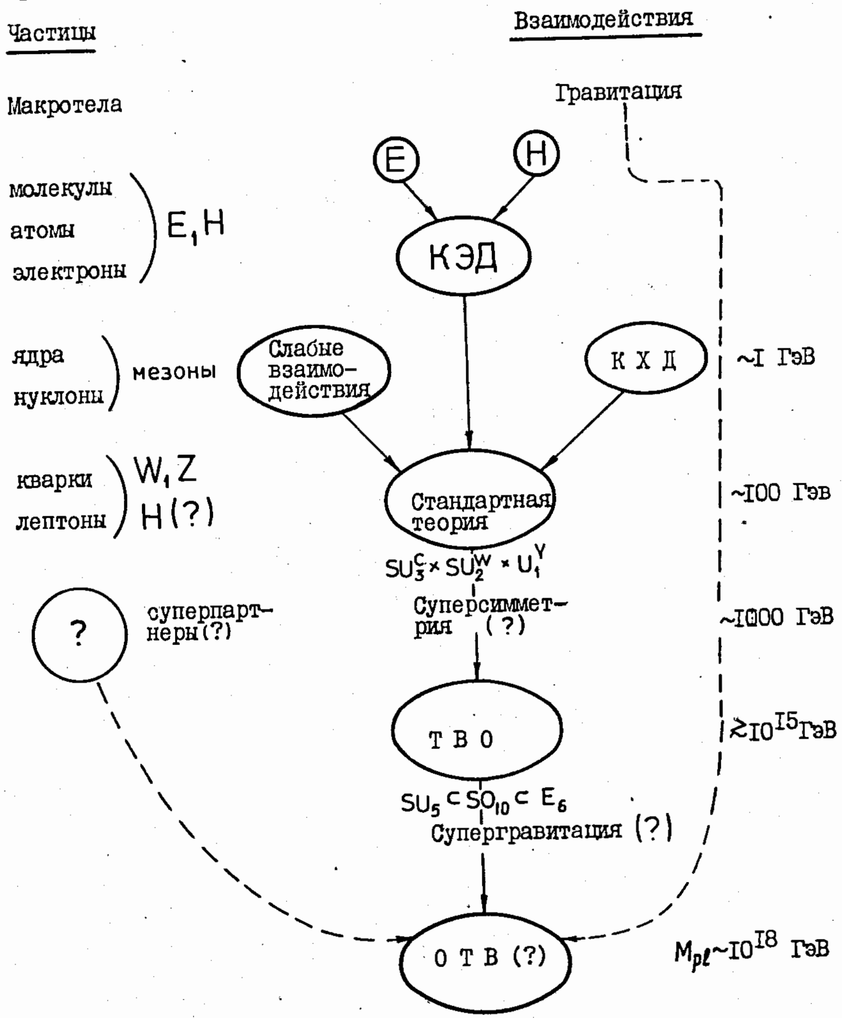
Предлагаемые лекции* в большей степени ориентированы на ознакомление с основами теории струны, притом с простейшими. Более технические аспекты и приложения нужно искать в оригинальных работах и обзорах. Краткие рекомендации к дальнейшему чтению даны в конце лекций. Автор должен также сознаться, что никакой попытки дать достаточно полное изложение предмета здесь не делается, однако, те проблемы, которые попали в эти лекции, обсуждаются относительно подробно.

Начнем с попытки очертить место, занимаемое теорией суперструны в современной физике, и попробуем объяснить, зачем её следует изучать.

В настоящее время твердо установлено, что последовательная теория частиц и их взаимодействий должна быть так или иначе связана с калибровочным принципом. Тенденция объединения различных взаимодействий в рамках более общих калибровочных теорий отображена на рисунке. Кажется весьма вероятным, что при энергиях $M_{GUT} \gtrsim 10^{15}$ ГэВ происходит объединение сильных и электромагнитно - слабых взаимодействий на основе калибровочной группы великого объединения G_{GUT}, описываемое перенормируемой, асимптотически свободной калибровочной теорией поля. Неизвестно, нет ли между областью ~ 100 ГэВ и областью $M_{GUT} \sim 10^{15}$ ГэВ

*Эти лекции были прочитаны на Международной школе физиков в Дубне /декабрь 1986 г./.

какого-то промежуточного объединения. Неясно также, какова группа G_{GUT}. Наиболее серьезные кандидаты $G_{GUT}=SU_5$, SO_{10} или E_6. В рамках этих идей совершенно непонятно, как произойдет объединение всех взаимодействий с гравитацией (в отличие от других взаимодействий гравитация связана с полем спина 2, поэтому она неперенормируема и выпадает из общей схемы великого объединения).



Объединение частиц и взаимодействий

На рисунке схематически указано, как, параллельно с объединением взаимодействий, происходило изменение представлений о фундаментальных частицах, составляющих вещество (от "корпускул" до кварков и лептонов). Дуализм "частица-взаимодействие" - один из лейтмотивов физики, и в разные периоды на первый план выдвигалось либо одно, либо другое понятие. Например, для Декарта и Максвелла главным в картине мира было взаимодействие, а для Ньютона и Лоренца - частицы. Впрочем, эти глубокие мыслители были весьма осторожны и сами не проводили резкой грани между частицами и взаимодействиями. Существовало также и стремление к единой теории частиц и взаимодействий (от Руджера Бошковича до Эйнштейна). По мере того как открывались переносчики взаимодействий, грань между частицами и взаимодействиями становилась всё более зыбкой. Сейчас, после того как суперсимметрия объединяет в единые мультиплеты фермионы (традиционные частицы) и бозоны (традиционные агенты взаимодействий), мы более подготовлены к мысли, что по-настоящему фундаментальная теория устройства Вселенной должна быть единой теорией всех взаимодействий и всех частиц, из которых построено вещество. По-видимому, понятия частиц и взаимодействий как отдельных структурных элементов реальности потеряют смысл и должны быть заменены новыми структурными единицами, порождающими знакомые нам частицы и взаимодействия лишь в некотором приближении.

Достаточно ясно, что теория великого объединения (ТВО), разрешившая многие загадки физики элементарных частиц и астрофизики, не может претендовать на место такой фундаментальной теории. Существуют, однако, и более конкретные, более "физичные" указания на её недостаточность. Перечислим некоторые проблемы, которые в принципе не могут быть решены в ТВО. Их можно подразделить на три группы.

I. Проблемы симметрий и поколений

I) Во-первых, нет теоретического принципа, по которому определяется калибровочная группа G_{GUT}. 2) Представления, в которых размещаются кварки и лептоны, также подбираются чисто эмпирически (особенно загадочна киральная асимметрия нашего мира). 3) Проблема повторения поколений кварков и лептонов не имеет никакого теоретического решения. 4) Наконец, при сопоставлении калибровочных моделей великого объединения с данными опыта приходится подгонять большое число безразмерных параметров, так как исходная симметрия при низких энергиях почти полностью разрушена (например, массы кварков не вычисляются, а подгоняются).

II. Проблемы нарушения симметрии и проблема калибровочных иерархий

I) "Спуск" от энергий $M_{GUT} \gtrsim 10^{15}$ ГэВ до экспериментально доступных энергий $M_{WE} \sim 100$ ГэВ – одна из наиболее трудных проблем современной физики. Дело не только в том, что на этом головокружительном спуске нужно придумывать какие-то механизмы разрушения симметрии G_{GUT} до $SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^Y$. Главное, непонятно само происхождение огромной "высоты" этого спуска $M_{GUT}/M_{WE} \sim 10^{13}$. Вопрос о природе происхождения подобных огромных чисел во Вселенной впервые был поставлен Дираком ("проблема больших чисел"). В контексте великого объединения это — так называемая проблема калибровочных иерархий.

2) Более технический аспект этой проблемы – как предохранить уже установленную иерархию от разрушения квантовыми поправками, неизбежно смешивающими состояния с большими и малыми массами (обмен виртуальными частицами, поляризация вакуума). Естественное, не требующее специальной точной подгонки параметров решение части этой проблемы можно получить на пути суперсимметризации ТВО.

Обсудим это немного подробней. Ясно, что, поместив хиггсовы скаляры в один супермультиплет с фермионами, можно объяснить, почему $M_H \ll M_{GUT}, M_{Pl}$, если мы уже объяснили малость массы фермионов (например, с помощью киральной симметрии). Труднее решить более тонкую проблему, которую можно пояснить на примере нарушения симметрии $G_{GUT} = SU_5$. В этой теории массы хиггсонов даются соотношением

$$M_0\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + M_1\begin{pmatrix}2\\2\\2\\-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}M_0+2M_1\\ \vdots \\ M_0-3M_1\\ \vdots\end{pmatrix} \begin{matrix}\gtrsim 10^{11}\ \text{ГэВ}\\ \cdots\cdots\cdots \\ \lesssim 100\ \text{ГэВ}.\end{matrix}$$

Можно, конечно, добиться, чтобы SU_3 - триплет был сверхтяжелым, $\gtrsim 10$ ГэВ, а SU_2 - дублет легким ($\lesssim 100$ ГэВ). Однако, для этого требуется "сверхтонкая настройка" массовых параметров M_0 и M_1:

$$\left|\frac{M_0}{M_1} - 3\right| \approx 10^{-9} \quad (!).$$

Естественного, не требующего такой настройки механизма решения этой проблемы иерархий в рамках великого (супер) объединения найти не удалось.

3) Наиболее трудная и глубокая проблема связана с энергией вакуума. Гравитация взаимодействует со всеми видами энергии, и наличие ненулевой плотности энергии вакуума определит ненулевой космологический член Λ_c в уравнении Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} - \Lambda_c g_{\mu\nu},$$

где $T_{\mu\nu}$ – тензор плотности энергии-импульса, G_N – гравитационная постоянная, $G_N \simeq 6{,}7 \times 10^{-39}$ ГэВ$^{-2}$. Разумно отождествить $\Lambda_c/8\pi G_N$ с плотностью энергии вакуума ε_0 (гравитирующие вакуумные квантовые флуктуации). С другой стороны, оценку на Λ_c можно получить, сравнивая различные космологические модели с наблюдательными данными астрономии. В частности, данные о размерах и возрасте Вселенной позволяют, как известно, получить оценку на Λ_c:

$$\Lambda_c \lesssim 10^{-56}\ \text{см}^{-2}, \quad \text{т.е.} \quad \varepsilon_0 \lesssim 10^{-46} \div 10^{-47}\ (\text{ГэВ})^4,$$

или (мы приняли за единицу длины I ГэВ$^{-1}$)

$$\Lambda_c \lesssim 10^{-121} M_{Pl}^2, \quad \varepsilon_0 \lesssim 10^{-122} M_{Pl}^4.$$

В теории свободных полей плотность энергии вакуума (вспомним о добавке $\frac{1}{2}\hbar\omega$ для бозонов и $-\frac{1}{2}\hbar\omega$ для фермионов !) можно грубо оценить:

$$\varepsilon_0 \sim \sum \tfrac{1}{2}(-)^F \int^M \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{k^2+m^2}$$

($F = 0$ для бозонов, $F = 1$ для фермионов). Если в теории есть суперсимметрия, то можно получить $\varepsilon_0 = 0$. Однако суперсимметрия должна быть спонтанно нарушенной, в силу чего, как известно (и легко доказать), плотность энергии вакуума должна быть положительной. Возникает вопрос, как сделать её меньше $10^{-46} \div 10^{-47}$ ГэВ^4? Чтобы понять масштабы необходимых сокращений, достаточно немного "поиграть" с числами, учитывая, что для характерной массы M вклад соответствующих частиц и взаимодействий в ε_0 порядка M^4. Тогда в КЭД $\varepsilon_0 \sim 10^{-15}$ ГэВ^4, в КХД $\varepsilon_0 \sim 10^{-3}$(ГэВ)^4, в теории Глэшоу – Вайнберга – Салама $\varepsilon_0 \sim 10^8$(ГэВ)^4 и т.п.

Конечно, приведенные оценки грубы, примитивны и не отличаются строгостью. Однако суть проблемы они отражают. В единой теории всех частиц и взаимодействий плотность энергии вакуума становится вычисляемой величиной и мы обязаны объяснить, почему она столь чудовищно мала. Эта проблема – одна из труднейших фундаментальных проблем современной физики. Когда у нас будет убедительное и естественное её решение, можно будет с уверенностью сказать, что мы понимаем основные принципы устройства Вселенной.

4) Ясно, что перспективы решения описанных фундаментальных проблем калибровочных иерархий определяются степенью нашего понимания механизмов, или "сценариев", нарушения симметрий. По существу единственный детально разработанный механизм нарушения симметрий в ТВО - это механизм Хиггса. В связи с проблемами возникновения иерархий и нарушения суперсимметрии, может быть, более интересны различные динамические механизмы, учитывающие простейшие непертурбативные эффекты. Если, например, M есть типичный масштаб теории (скажем, M_{Pl}), а g - типичная константа взаимодействия, то динамические механизмы (как в теории сверхпроводимости) могут породить нарушение симметрии на масштабах

$$M_H \sim \exp(-c/g^2)\,M,$$

где c - некоторая константа (например, 4π или что-то в этом роде). Ясно, что при малых значениях g можно получить чудовищно малые отношения M_H/M.

Ш. Проблемы гравитации и космологии

Уже сам масштаб M_{GUT}, на котором происходит великое объединение, говорит о том, что проблемы физики элементарных частиц и космологии (а значит, и гравитации) неразрывно переплелись. Суперсимметризация же великого объединения заставляет искать реальные пути включения в единую теорию и гравитации (в частности, суперсимметризация существенно приближает M_{GUT} к $M_{Pl} \sim 10^{-18}$ ГэВ). Первый шаг - переход к теории супергравитации (локальная суперсимметрия).

Замечательная особенность суперсимметричных теорий - смягчение ультрафиолетовых расходимостей. Ещё ярче это свойство проявляется в супергравитации. Однако надежды на то, что суперсимметричная или локально суперсимметричная теория великого объединения решат проблемы гравитационных расходимостей, в полной мере не оправдались. Оказалось необходимым двигаться в этом направлении дальше, к реальному объединению гравитации с остальными взаимодействиями.

Короче говоря, ясно, что суперсимметризация взаимодействий - шаг в правильном направлении (намек на единство частиц и взаимодействий, смягчение расходимостей, прогресс в решении проблем иерархий). Суперсимметризация гравитации позволила продвинуться дальше, поставив на реальную почву идею построения единой теории всех взаимодействий. Однако и здесь к реалистической теории подойти не удалось.

Наибольшие усилия в попытках построения объединенных теорий всех известных взаимодействий до конца 1984 года направлялись на локально

суперсимметричные теории, обобщающие 5-мерную теорию Калуцы - Клейна - Манделя - Фока (ККМФ). (Обычно говорят о теории Калуцы - Клейна. Это не вполне справедливо, так как советские физики Г.А. Мандель и В.А. Фок опубликовали подробную разработку теории Т.Ф.Э. Калуцы практически одновременно с О. Клейном). Одна из наиболее продвинутых попыток такого рода - теория супергравитации в 11-мерном пространстве-времени. Предполагается, что четырехмерная теория получается в результате спонтанной компактификации лишних семи измерений. Такая процедура в принципе должна определить и калибровочную группу (проблемы I). Однако, помимо проблем с расходимостями, в этом подходе возникают еще две серьезные трудности: 1) большая космологическая постоянная; 2) нереалистический спектр фермионов (фермионы оказываются в некиральном представлении - так называемая "теорема Виттена").

Строго говоря, возможности 11-мерных теорий супергравитации пока в полной мере не изучены. Их исследование уже породило много интересных идей и дало намёки на возможные решения некоторых из перечисленных выше проблем. К сожалению, помимо уже упомянутых, в d-мерных теориях возникают новые проблемы. Коль скоро мы решились выйти за пределы нашего естественного пространства, необходимо указать какой-то теоретический принцип, позволяющий определить значение d, а также объяснить, почему наше "некомпактное" пространство-время четырехмерно. Известно, что последовательную теорию супергравитации можно построить лишь при $d \leqslant 11$. Чисто теоретического аргумента, почему надо брать максимальное значение $d = 11$, нет, однако, существуют соображения, указывающие на то, что при $d < 11$ заведомо не удастся получить реалистическую теорию.

Далее, если мы остановимся на 11-мерной теории, необходимо объяснить, почему наш мир четырехмерен, т.е. надо естественным способом избавиться от "лишних" $(d-4)$ измерений. Простая редукция, при которой след от лишних измерений остается лишь в виде некоторой внутренней симметрии полей и их взаимодействий, оказалась недостаточной. Лишние измерения, видимо, необходимо считать вполне реальными, но "свернувшимися" на очень малое, размера $\lesssim M_{Pl}^{-1}$, компактное многообразие. В последовательной теории это компактное многообразие должно определяться "само собой", как некоторое самосогласованное решение основных уравнений. Однако пока до этого далеко - приходится осуществлять компактификацию на некоторое заданное априори многообразие.

В общем, изучение 11-мерной супергравитации и попытки компактификации лишних измерений привели к интересным результатам. Впервые выявилась хотя бы принципиальная возможность построения реалистической теории, объединяющей все взаимодействия, включая гравитацию. Обнаружилась принципиальная возможность объяснения размерности нашего мира тем обстоятельством, что разумный механизм спонтанной компактификации может действовать не в любой размерности. Короче говоря, в наши руки попала некая модель того, как мог бы быть устроен мир. Однако, по-видимому, он устроен не совсем так. Во-первых, в проблеме расходимостей никакого прогресса ожидать не приходилось. Во-вторых, упоминавшиеся выше проблемы киральности (при d = II нет речи о киральности, и получить из 11-мерной супергравитации кирально-асимметричный мир при d = 4 никому пока не удалось). Наконец, непонятно, что делать с проблемой космологической постоянной – во всех вариантах теорий ККМФ плотность энергии вакуума велика, $\varepsilon_0 \sim M_{Pl}^4$.

Для развития теории суперструны были очень важны исследования IO-мерной супергравитации. Размерность пространства-времени d = IO, видимо, не случайно выделена из других. Например, известно, что 4-мерное пространство с произвольной псевдоримановой метрикой можно локально вложить в IO-мерное псевдоевклидово пространство. В IO-мерном пространстве с одной временно́й осью на спиноры можно наложить одновременно условия Майораны (вещественность) и Вейля (эти условия совместимы при $d = 8k+2$, $k = 0,1,2,\ldots$). В общем, в d = IO можно построить реалистическую модель, однако цена оказывается большой. Так, для того, чтобы получить разумную теорию $d=4$, приходится отказаться от первоначальной идеи ККМФ – геометрического истолкования калибровочных полей как компонент метрики (напомним, что в ККМФ "лишние" компоненты метрического тензора , $g_{\mu a}$, μ = 0,I,2,3; a = 4,... d, истолковываются как калибровочные векторные бозоны, а g_{ab} – как скалярные бозоны; для получения реалистической теории в d = IO от такого способа получения калибровочных бозонов приходится отказаться). Во-вторых, в IO-мерных теориях с киральными фермионами возникают киральные аномалии, которые разрушают не только калибровочную янг-миллсову инвариантность, но и локальную лоренцеву (и общекоординатную) инвариантность.

Таким образом, эта теория, т.е. IO-мерная супергравитация (СУГРА), объединенная с суперсимметричной IO-мерной теорией Янга – Миллса (СЯМ), не может претендовать на роль фундаментальной теории. Однако оказалось, что существуют варианты такой теории, являющиеся нулевыми (низкоэнергетическими) приближениями к теории суперструны. Точнее говоря, безмассовые состояния теории суперструны в IO-мерном пространстве-времени подчиняются уравнениям IO-мерной СУГРА+СЯМ в пределе, когда струну можно считать точечным объектом (см. подробнее ниже). Мы очень кратко опишем одну из таких теорий. В d -мерном

пространстве метрический тензор g_{MN} $(M,N = 0,1,\ldots,d-1)$ имеет $[\frac{1}{2}(d-1)(d-2) - 1]$ независимых компонент (для подсчета можно принять, что независимы лишь "поперечные" компоненты, относящиеся к $(d-2)$-мерному пространству). При d = IO получаем 35 компонент. Соответственно, антисимметричный тензор B_{MN} имеет $\frac{1}{2}(d-3)(d-2)$ независимых компонент , т.е. 28 при d = IO . Таким образом, бозонных степеней свободы в супермультиплете IO-мерной СУГРА всего 35 + 28 + I = 64, где I относится к скалярному полю ("дилатон"). Для подсчета фермионных степеней свободы нужно найти число независимых компонент гравитино ψ_M^α (спин 3/2) и спинорного поля λ_α (спин I/2), удовлетворяющих условиям Майораны и Вейля. Учитывая лишь "поперечные" компоненты, рассматриваем спиноры $(d-2)$ -мерного пространства. Условие Майораны оставляет $2^{(d-2)/2}$ вещественных компонент.

Условие Вейля оставляет $2^{(d-4)/2}$ независимых компонент . При d = IO получаем, таким образом, 8 компонент. Спин-вектор ψ_M^α , описывающий гравитино, имеет $(d-2)\cdot 2^{(d-4)/2}$ вещественных компонент. Однако, как известно, не все эти компоненты независимы, так как ещё не учтено калибровочное условие $\gamma^M \psi_M = 0$, убирающее ещё 8 компонент. Таким образом, остается 8 + 56 = 64 фермионные независимые компоненты. Мы описали мультиплет IO-мерной СУГРЫ (так называемая N = I СУГРА). Супермультиплет ЯМ с группой G есть (A_M^a , χ_α^a) , где a нумерует компоненты присоединенного представления. Векторное поле (при каждом a) имеет $(d-2)$ независимых компонент, а спинорное поле ("калибрино") имеет $2^{(d-4)/2}$ независимых майорана - вейлевых компонент. (Эта теория ЯМ называется N = I супер- ЯМ, все вместе – N = I СУГРА + СЯМ).

Лагранжиан теории можно записать в следующем виде (зависимость от калибровочной константы g_{10} можно восстановить, положив $\varphi = g_{10}^{8/3}\varphi$, зависимость от гравитационной константы $\varkappa_{10}$ можно восстановить анализом размерностей, например, при первом и втором членах в лагранжиане надо написать множитель $\varkappa_{10}^{-2}$, а при третьем – множитель $\varkappa^2$ и т.д.):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\mathcal{L} = -\frac{1}{2}R + \frac{9}{16}\left(\frac{\partial_M \varphi}{\varphi}\right)^2 + \frac{3}{4}\varphi^{-3/2} H_{MNL} H^{MNL} -$$

$$-\frac{1}{4}\varphi^{-3/4} F_{MN} F^{MN} - \frac{i}{2}\bar{\Psi}_M \Gamma^{MNL} D_N(\omega)\psi_L +$$

$$+\frac{i}{2}\bar{\lambda}\Gamma^M D_M(\omega)\lambda + \frac{i}{2}\bar{\chi}^a \Gamma^M (D_M(\omega)\chi)^a +$$

+ (члены взаимодействия $\bar{\Psi}\lambda\varphi, \bar{\Psi}\psi H, \bar{\chi}\chi H, \bar{\chi}\psi F, \bar{\chi}\lambda F$ + четырехфермионные). Здесь Γ^M – матрицы Дирака d -мерного пространства-времени,

Γ^{MNL} – антисимметризованные произведения матриц Γ^M, например, $\Gamma^{123}=\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3$; F^a_{MN} – обычный тензор напряженности поля A, символически, $F=dA+A^2$, где $A^2\equiv A\wedge A$ и A рассматривается как I – форма: $A^a=A^a_M\,dx^M$. R – скалярная кривизна, соответствующая метрике g_{MN}, а $D_M(\omega)$ – ковариантные производные спинорных полей, зависящие от спинорной связности ω. Например,

$$D_M(\omega)\,\lambda=(\partial_M-\tfrac{1}{2}\omega_{M,AB}\,\Gamma^{AB})\lambda,\quad \Gamma^{AB}=\tfrac{1}{2}[\Gamma^A,\Gamma^B].$$

Ковариантные производные ψ_P и χ^a содержат дополнительные члены, соответствующие лоренцеву индексу P и групповому индексу a. Напомним, что спиновая связность ω аналогична потенциалу Янга – Миллса A. Её также можно рассматривать как I-форму со значениями в алгебре $SO(d-1,1)$ (или $SO(d)$): $\omega_{AB}=\omega_{M,AB}dx^M$. Через эту форму можно выразить 2-форму кривизны (тензор кривизны): $R_{AB}=\frac{1}{2}R_{MN,AB}\,dx^M\wedge dx^N=d\omega+\omega^2$, $\omega^2\equiv\omega\wedge\omega$. При этом аналогия между ω, R и A, F становится совершенно очевидной:

$$F=\tfrac{1}{2}F_{MN}\,dx^M\wedge dx^N=dA+A^2,$$

F -матрица в групповом пространстве.

Наиболее необычное и важное поле в написанном лагранжиане – антисимметричное тензорное поле H_{MNL}. С ним естественно связать 3-форму H, аналогичную 2-форме напряженности поля ЯМ. Так как H_{MNL} входит в гравитационный супермультиплет, то на нём не "висит" никаких дополнительных индексов, и, на первый взгляд, H_{MNL} должно быть связано с соответствующим потенциалом $B_{MN}=-B_{NM}$ простейшим соотношением $H=dB$, аналогичным соотношению между электромагнитным полем и потенциалом, $F=dA$ $(F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)$. Однако из A и F, так же, как из ω и R, можно построить нетривиальные 3 – формы, которые могут дать вклад в H:

$$\omega_{3Y}=tr(AF-\tfrac{1}{3}A^3),\quad \omega_{3L}=tr(\omega R-\tfrac{1}{3}\omega^3).$$

Здесь tr берется по матричным индексам. Напомним, что умножение здесь матричное и внешнее: $AF\equiv A\wedge F$ есть 3-форма с матричными значениями, получаемыми перемножением матриц A и F. Например,

$$AF=\tfrac{1}{3}(AF)^b_{a,LMN}\,dx^L\wedge dx^M\wedge dx^N=A^c_{a,L}\,\tfrac{1}{2!}F^b_{c,MN}\,dx^L\wedge dx^M\wedge dx^N.$$

Пользуясь изложенными определениями, нетрудно непосредственно проверить, что внешние дифференциалы форм ω_{3Y} и ω_{3L} выражаются через соответствующие поля F и R:

$$d\omega_{3Y}=tr\,F^2,\quad d\omega_{3L}=tr\,R^2.$$

4-форма $tr\,F^2$ – хорошо изученный в связи с киральными аномалиями инвариант; $tr\,R^2$ имеет аналогичный смысл, их иногда называют формами Черна – Саймонса. Полезно напомнить общую конструкцию членов Черна – Саймонса (Понтрягина). Определим

$$\omega_{2n+1}=(n+1)\,tr\int_0^1 dt\;A\cdot F_t^n,$$

где $F_t=tF+(t^2-t)A^2$. Тогда

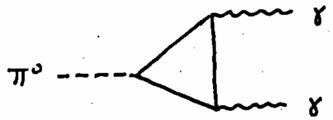
$$tr\,F^{n+1}=d\omega_{2n+1}.$$

После этих предварительных определений мы в состоянии сформулировать основной результат:

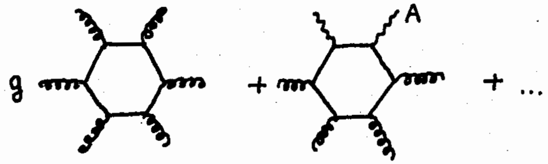
$$H=dB-\omega_{3Y}+\omega_{3L},$$
$$dH=tr\,R^2-tr\,F^2.$$

ЯМ – инвариант Черна – Саймонса был найден из требований суперсимметрии лагранжиана С-ЯМ+СУГРА. Второй член, $tr\,R^2$, был найден лишь в 1984 году в связи с развитием теории струны, о котором будет сказано ниже. Написанное представление для H требует добавления в приведенный выше лагранжиан квадратичных по R членов. Такие члены впервые были получены в теории суперструн, благодаря им, удалось найти компактификацию 6 лишних координат, приводящую к реалистической теории в 4-мерном пространстве Минковского. Подчеркнем ещё раз, что эта теория поля отравлена неустранимыми расходимостями, и без теории суперструн вообще не имеет смысла. Её значение состоит лишь в том, что она может описывать точечный предел теории струны (когда длину струны ℓ можно считать малой по сравнению со всеми существенными длинами, т.е. $\ell\ll p^{-1}$, где p – наименьший характерный импульс, $\ell\ll R$, где R – эффективный размер компактифицированного пространства).

Десятимерная теория СУГРА + СЯМ была, по-видимому, высшим достижением в попытках объединения всех взаимодействий на основе понятий о точечных частицах и обычной квантовой теории поля (хотя и в многомерном, компактифицированном пространстве). Особенно важно, что в этих теориях возникла возможность отбора калибровочной группы. На первый взгляд, серьезнейший дефект этих теорий состоит в том, что группа G совершенно произвольна. В обычной идеологии ККМФ группа G в значительной степени определяется выбором размерности пространства. Здесь, однако, поля Янга - Миллса не связаны напрямую с пространством-временем, и нужен некий новый принцип отбора G. Роль такого принципа могло бы сыграть условие отсутствия аномалий. Всем хорошо известна "треугольная" аномалия, связанная с нарушением киральной симметрии в процессе $\pi^0\to\gamma\gamma$:



В 10-мерной СУГРА-СЯМ возможны шестиугольные аномалии



Это - гравитационные (или лоренцевы), калибровочные и смешанные аномалии, связанные с тем, что в петле распространяется <u>киральный</u> фермион. Эти аномалии способны разрушить не только калибровочную симметрию, но и локальную лоренц-инвариантность. В определенном смысле эти аномалии опаснее расходимостей и непосредственно не связаны с неперенормируемостью теории. Даже если теорию регуляризовать на малых расстояниях (что, вероятно, и делается при переходе от частиц к струнам), аномалия сохранится. Формально аномалии связаны с топологическими характеристиками теории через формы Черна - Саймонса. В случае десятимерной теории - это $\mathrm{tr}\,F^6$, $\mathrm{tr}\,R^6$ и т.п. Как показали в 1984 г. М. Грин и Дж. Шварц, в теории, в которой H содержит лоренцеву и ЯМ-формы ω_{3L} и ω_{3Y}, возможно сокращение аномалий, если $G=SO_{32}$ или $G=E_8\times E_8$. Э. Виттен и др. вскоре показали, что при этом возможна и компактификация, при которой спектр безмассовых (в нулевом приближении) состояний может породить реалистическую теорию великого объединения с группой E_6 или её подгруппой (при $G=E_8\times E_8$). Последовательная, непротиворечивая интерпретация подобной теории великого объединения возможна в теории суперструны.

Закончим на этом ознакомление с проблемами и достижениями единых теорий взаимодействий, основанных на понятиях точечных частиц и локальных полей, и перейдем к основным идеям струн.

Теория суперструн обещает одним ударом разрубить весь узел описанных выше проблем. Она не только объединяет все частицы и взаимодействия, но и удивительным образом связывает в единое целое глубоко различные идеи и методы физики, математики и космологии. (Энтузиасты называют теорию суперструн Общей Теорией Всего (ОТВ). Мы предпочтем расшифровать ОТВ как "Общая теория взаимодействий"). Главная идея состоит в том, что все наблюдаемое многообразие частиц и их взаимодействий сводится к элементарным взаимодействиям первичных одномерных объектов планковского размера $L_{Pl}\sim(10^{-32}\div10^{-35})$ см.

Удивительно, что такая теория протяженных объектов вообще существует. Долгое время считалось, что непротиворечивое объединение представлений теории относительности (ТО) и квантовой механики (КМ) возможно только в том случае, когда исходный объект - точка (на языке частиц) или локальное квантовое поле (на языке квантовой теории поля (КТП)). Как мы убедились, камнем преткновения на пути объединения ТО и КМ оказалась гравитация. Глубоко и радикально мыслящие теоретики заметили это уже давно и в качестве выхода предлагали, например, отказаться от мысли объединять ТО и КМ, а вместо этого существенно переделать КМ как наиболее непонятный элемент конструкции мира. Теория суперструн предлагает менее радикальный выход, в том смысле, что ТО и КМ остаются незыблемыми, а меняются лишь элементарные объекты, из которых построен мир.

Прежде чем переходить к более последовательному описанию этих объектов, перечислим, какие проблемы решает и может решить ОТВ.

1) Представляется вероятным, что теория, основанная на суперструнах, вообще не содержит расходимостей в соответствующей струнной теории возмущений (заметим, что в отличие от перенормируемых теорий Янга -Миллса она не имеет фундаментальных безразмерных параметров). 2) В точечном (локальном) пределе, когда размерами струны можно пренебречь, ОТВ дает теорию гравитации и теорию Янга - Миллса с некоторой группой $G\supset G_{GUT}$. Таким образом, без переделок ТО и КМ решается проблема квантования гравитации. Кроме того, группа G_{GUT} фиксируется. Требование согласования КМ с локальной лоренцевой и калибровочной инвариантностью, т.е. условие отсутствия аномалий, оставляет в качестве наиболее вероятной группы G_{GUT} некоторую подгруппу E_6. 3) Квантовая гравитация и калибровочная теория появляются в суперсимметризованном виде. Замечательно, что последовательная теория струны может быть только суперсимметричной! Таким образом, всё полезное, что дают глобальная суперсимметрия и супергравитация, единая струнная теория содержит. 4) Поразительным образом требование непротиворечивости согласования ТО и КМ в теории струны фиксирует размерность пространст-

ва-времени, d = 10."Лишние" измерения должны компактифицироваться, причем структура компактного 6-мерного пространства K определяет особенности устройства спектра кварков и лептонов. Геометрия и топология пространства K в принципе определяют взаимодействия при низких энергиях. В этом смысле пространство K также доступно экспериментальному изучению. В частности, топология K определяет число поколений!

Скептики часто обвиняют теорию суперструн в чрезмерных претензиях и в отсутствии непосредственно проверяемых на опыте предсказаний. О чрезмерности претензий говорить ещё рано- теория находится в столь юном возрасте, что уместнее сказать о больших надеждах. Если же говорить об экспериментах на современных ускорителях, то реальных предсказаний, как и в суперсимметричных теориях, действительно, почти нет, но уже на следующем поколении ускорителей можно будет реально искать суперчастицы, а также определенные отклонения от стандартной теории. Заметим, что струнная теория существенно конкретизирует общие предсказания суперсимметричных теорий. Кроме того, так как в теории суперструн весьма ограничен не только выбор групп внутренней симметрии, но и выбор способов их разрушения, то в принципе можно надеяться найти проверяемые предсказания в области низких энергий ещё до того,как будет построена теория струн.Известно, что от рождения теории до её первых испытаний на опыте обычно проходит около 30 лет или более. Суперсимметричная струна родилась в 1971 году, так что у нас есть время для разработки её теории примерно до 2000 года!

Познакомимся с идеей струны чуть более подробно. Как мы уже видели, теория суперструн органически включает в себя три фундаментальные идеи.

1) Основным объектом теории является не точка, а одномерный протяженный объект -струна. Размер струны определяется характерным размерным параметром теории.

2) Последовательная релятивистская квантовая теория струны требует увеличения размерности пространства, в котором она существует. "Лишние" измерения должны быть тем или иным способом сделаны ненаблюдаемо малыми (компактификация).

3) Последовательная теория струны с необходимостью должна быть суперсимметричной, включая в себя в локальном пределе суперобобщения теории Янга - Миллса и супергравитацию.

Эти идеи, на первый взгляд, глубоко различны и имеют разную историю. Уже само по себе выявление связи между ними в теории струны представляется весьма замечательным. Рассмотрим их более пристально.

Идея перехода от нульмерного объекта (точки) к одномерному - самая старая. Впервые она была высказана Кельвином примерно в 1870 г.

("вихревые атомы"). Аналогичная идея обсуждалась и в начале нашего столетия в работах Дж. Дж. Томсона и др. (концентрация электромагнитного поля электронов в тонких "фарадеевых трубках"). После того, как в 50-60-е годы нашего века были открыты и изучены вихри в сверхпроводниках II рода и в сверхтекучих жидкостях, понятие о тонкой трубке, соединяющей кварки, было использовано в КХД. Можно ожидать, что в теории с N цветами толщина такой трубки $\sim 1/N$, и при $N \to \infty$ трубка превращается в объект, подобный струне. Наиболее важное свойство такой трубки или струны состоит в том, что натяжение её постоянно, не зависит от длины (это и дает потенциал $\sim r$). В конце 60-х годов такой объект был введен в науку из совершенно иных соображений, источником которых были правила сумм при низких энергиях и дуальная модель Венециано. Странные свойства дуальных диаграмм удалось понять лишь на языке теории струны. Основное предсказание струнной модели адронов - характерный спектр состояний, лежащих на прямолинейных траекториях Редже $J = \alpha_0 + \alpha' M^2$ с универсальным наклоном α' (в теории адронов $\alpha' \sim$ 1 ГэВ$^{-2}$ в ОТВ, естественно, $\alpha' \sim M_{Pl}^{-2}$), обратно пропорциональным натяжению струны $\alpha' \sim 1/T$. В струнной модели плотность состояний $\rho(M)$ экспоненциально растет с ростом M :

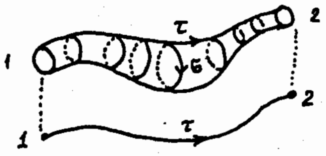
$$\rho(M) \sim M^{-b} \exp(aM), \quad aM \gg 1,$$

где $a \sim \sqrt{\alpha'}$, $b > 0$. Поэтому пропагатор струны не соответствует пропагатору какой-либо локальной полиномиальной теории поля, однако поведение его спектральной функции при $M \to \infty$ можно моделировать в теориях с неполиномиальным взаимодействием типа $\mathcal{L}_{int} \sim \exp(-\ell^2 \varphi^2)$ и т.п. Такие теории находятся на границе между так называемыми локализуемыми теориями поля и нелокализуемыми (т.е. по-настоящему нелокальными). Это обстоятельство определяет некоторые из серьезных отличий теории струн от привычных теорий поля, но в то же время подчеркивает, что идея локализации первичных объектов и взаимодействий в какой-то мере сохраняется.

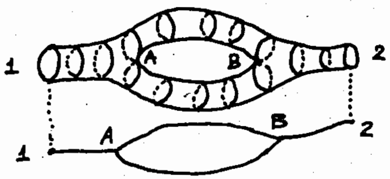
Заметим, что теория струны более тесно связана не с обычными теориями квантованных полей в четырехмерном пространстве, а с теориями поля в двумерном пространстве -времени. Пусть координаты точек струны в d -мерном пространстве-времени заданы функциями $x^\mu(\sigma,\tau)$, где μ = 0,1,..., (d -1). При этом параметр σ "нумерует" точки струны (обычно принимают соглашение., что $0 \le \sigma < 2\pi$), а параметр τ играет роль "времени", он позволяет описать эволюцию струны ($-\infty < \tau < +\infty$). Будем для определенности считать струну замкнутой, т.е.

$$x^\mu(\sigma,\tau) = x^\mu(\sigma+2\pi,\tau).$$

Эволюцию такой струны можно описать различными двумерными поверхностями, вложенными в d-мерное пространство:



а



б

На рисунке (а) изображено простейшее развитие событий, при котором начальная струна I не разрывается. На рисунке (б) начальная струна в точке A превращается в две, которые в точке B вновь сливаются в одну струну. Таким образом, в теории струны вместо траекторий частиц необходимо рассматривать двумерные поверхности. К счастью, существует весьма полная математическая теория таких поверхностей (топологическая и дифференциально геометрическая классификация, аналитический аппарат теории римановых поверхностей в комплексном анализе и т.д.), а квантовую теорию струн можно, как мы увидим ниже, связать с квантовой теорией полей $X^\mu(\sigma,\tau)$, "живущих" на этих поверхностях. При этом соответствующая квантовая теория двумерных полей $X^\mu(\sigma,\tau)$ не произвольна, а весьма специальна и обладает многими замечательными (даже уникальными) свойствами.

От теории двумерных полей можно перейти к пределу обычных частиц. Если при любом значении τ величины $x^\mu(\sigma,\tau)$ мало отличаются от средних значений

$$x^\mu_0(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma\, x^\mu(\sigma,\tau),$$

то движения струны подобны движениям обычных частиц, траектории которых изображены на рис. (а) и (б) под соответствующими поверхностями. Формально такая ситуация реализуется при бесконечно большом натяжении струны T (т.е. при $\alpha' \to 0$). Физически это означает, что в соответствующих физических процессах размерами струны можно пренебречь и считать её точечной. Подобно тому, как в теории точечных частиц формулируется динамический принцип (принцип действия или гамильтониан), позволяющий находить траектории, связывающие точки I и 2 в классической теории или вычислять пропагаторы (вероятности перехода) из I в 2 в квантовой теории, можно начать построение теории струны с задания соответствующего струнного динамического принципа.

Частицы $\qquad \delta S = 0 \qquad$ Струны

$$S = -m\int d\tau\sqrt{-\dot{x}^2} = -m\int ds \qquad S = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2A = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\sigma\, d\tau\sqrt{-g}$$

$$\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad g = \det g_{ab}\,; \quad g_{00} = \dot{x}^2$$

$$\dot{x}^2 = \dot{\vec{x}}^2 - (\dot{x}^0)^2 \equiv \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu \qquad g_{11} = x'^2,\; g_{01} = g_{10} = \dot{x}\cdot x'$$

$$x'^\mu = \partial x^\mu/\partial\sigma$$

Здесь d^2A – элемент площади на двумерной поверхности, $g_{ab}(\sigma,\tau)$ – внутренняя метрика на этой поверхности, индуцированная метрикой Минковского в объемлющем d – мерном пространстве. Уравнения, вытекающие из написанного для струны действия, описывают "минимальные" (в метрике Минковского) поверхности. Соответствующая двумерная квантовая теория поля (при $-\infty < \sigma < +\infty$) была впервые рассмотрена Барбашовым и Черниковым в I965 году для d = 3. Для описания струны конечной длины в 4-мерном пространстве-времени это действие было предложено в I969 г. Намбу и Гото. Для квантования теории частиц и теории струн более удобны другие формулировки, которые будут рассмотрены позже. Сначала необходимо познакомиться с самой обычной (нерелятивистской) струной, теорию которой мы представим в несколько непривычной форме.

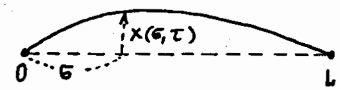
§ 2. Элементарная теория струны

I. Нерелятивистская струна

Начнем с самых простых понятий, помня, что Вселенная представлена в "каждой былинке". Представлена она и в хорошо всем известной струне Д'Аламбера, описываемой волновым уравнением

$$\frac{1}{v^2}\ddot{X}(\sigma,\tau) - X''(\sigma,\tau) = 0, \tag{2.I}$$

где $\dot{X} = \partial X/\partial\tau$, $X' = \partial X/\partial\sigma$. Функция $X(\sigma,\tau)$ описывает отклонение струны от положения равновесия,



параметр σ – координата колеблющейся точки на струне, τ параметризует эволюцию во времени. Энергия малых колебаний струны равна сумме кинетической и потенциальной энергий

$$H = \frac{T_0}{2}\int_0^L d\sigma \left(\frac{1}{v^2}\dot{x}^2 + x'^2\right), \tag{2.2}$$

где T_0 – натяжение струны. Соответствующий лагранжиан

$$L = \frac{T_0}{2}\int_0^L d\sigma \left(\frac{1}{v^2}\dot{x}^2 - x'^2\right) \tag{2.3}$$

дает при использовании принципа действия уравнение (2.I). Общее решение волнового уравнения имеет вид бегущей направо, f_R, и налево, f_L, волн

$$x(\sigma,\tau) = f_R(\sigma - v\tau) + f_L(\sigma + v\tau), \tag{2.4}$$

где f_R и f_L – произвольные функции. Это решение позволяет найти движение струны с произвольными начальными условиями $x(\sigma,0)$, $\dot{x}(\sigma,0)$ (задача Коши). Теорию струны можно проквантовать каноническим методом. Она, как известно, эквивалентна теории бесконечного набора независимых осцилляторов. Действительно, разложим x в ряд Фурье

$$x(\sigma,\tau) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(a_n e^{-i\omega_n \tau} + a_n^+ e^{i\omega_n \tau}\right)\sin(k_n\sigma), \tag{2.5}$$

где $k_n = \frac{\pi n}{L}$, $\omega_n = v k_n$ и использовано граничное условие $x(0,\tau) = x(L,\tau) = 0$. При каноническом квантовании коэффициенты a_n и a_n^+ переходят в операторы уничтожения и рождения. Из канонических перестановочных соотношений для $x(\sigma,\tau)$ и соответствующего канонически сопряженного импульса легко получить стандартные коммутаторы

$$[a_n, a_{n'}^+] = \delta_{nn'}, \quad [a_n, a_{n'}] = [a_n^+, a_{n'}^+] = 0, \tag{2.6}$$

если взять параметр λ, имеющий размерность длины, $\lambda = (\hbar v/\pi T_0)^{1/2}$. При этом энергия (I.2) равна сумме энергий независимых осцилляторов

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar\omega_n \left(a_n^+ a_n + \frac{1}{2}\right), \quad \omega_n = \frac{\pi v}{L} n. \tag{2.7}$$

Состояния строим обычным способом:

$$\Psi_{N_1 N_2 \dots} = (a_1^+)^{N_1} (a_2^+)^{N_2} \dots (a_i^+)^{N_i} \dots |0\rangle, \quad a_i|0\rangle = 0. \tag{2.8}$$

Энергия состояний, за вычетом энергии нулевых колебаний, равна

$$E_{N_1 N_2 \dots} = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar\omega_n N_n = \hbar\omega_1 \sum_{n=1}^{\infty} n N_n . \tag{2.9}$$

Оценим вырождение уровней. Эта задача сводится к известной математической проблеме вычисления числа разбиений $p(N)$ числа N на целые части. Число разбиений равно числу решений уравнения $(E_N \equiv \hbar\omega_1 N)$:

$$N = \sum_{n=1}^{N} n N_n \tag{2.10}$$

в целых неотрицательных числах. Значения $p(N)$ быстро растут, например $p(2) = 2$, $p(10) = 42$, $p(20) = 27$, $p(30) = 5604$, $p(40) = 37338$, и т.д. Построим производящую функцию коэффициентов $p(N)$:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n. \tag{2.11}$$

Нетрудно проверить, что

$$P(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1}. \tag{2.12}$$

Для практического вычисления $p(n)$ можно использовать формулу Эйлера

$$[P(x)]^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{(3n^2 - n)/2} = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \dots \tag{2.13}$$

Отсюда получаем рекуррентное соотношение

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \dots + (-1)^n p\left(n - \frac{3n^2 - n}{2}\right) + (-1)^n p\left(n - \frac{3n^2 + n}{2}\right),$$

где $p(0) = 1$, $p(n) = 0$ при $n < 0$.

Замечание. Тождество Эйлера (2.I2) имеет далеко идущие обобщения. Например, имеются красивые компактные формулы для $[P(x)]^{-3}$, $[P(x)]^{-8}$, $[P(x)]^{-24}$. По поводу общей теории подобных тождеств см.: Д.Б. Фукс. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли, стр. 2II-223, "Наука", М., 1984. Нетривиальная связь спектра струны с алгебрами Ли, которая просматривается в подобных тождествах, по-видимому, будет играть более существенную роль в будущей теории струны.

Функция $P(x)$ глубоко связана с теорией чисел. Одна из простейших таких связей состоит в том, что функция $\sigma(x) \equiv x\frac{d}{dx}\ln P(x)$ является производящей для арифметической функции $\sigma(n)$, равной сумме всех делителей числа n (включая I и n)

$$x\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)\, x^n . \tag{2.14}$$

Это утверждение легко проверяется и с его помощью можно оценить асимптотику $p(n)$ при $n \to \infty$, воспользовавшись легко определяемой асимптотикой $\sigma(n)$. (См.: М. Холл. Комбинаторика. "Мир", М., 1970). Таким способом получается довольно грубая оценка: $\log p(n) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}n}$. Более точная асимптотика имеет вид

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}\,n} \exp\left(\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}n}\right). \tag{2.15}$$

Для $p(n)$ известно разложение в ряд, сходящийся при больших значениях n (см. Г. Бейтман, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 3 "Наука", М., 1967, стр. 204). Нам, однако, понадобится оценка коэффициентов при степенях x в разложении более общей функции

$$[P(x)]^{-d} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_d(n)\, x^n . \tag{2.16}$$

Для $P_d(n)$ можно получить следующую асимптотическую оценку:

$$P_d(n) \sim 2\sqrt{\frac{3}{d}}\left(\frac{d}{24n}\right)^{\frac{d+3}{4}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2nd}{3}}\right). \tag{2.17}$$

Эта формула дает неплохое приближение для $p(n) \equiv P_1(n)$ уже при $n \gtrsim 10$.

В функции $[P(x)]^{-d}$ физик легко узнает записанную в других обозначениях статсумму системы невзаимодействующих осцилляторов с гамильтонианом

$$H = \hbar\omega_1 \sum_{n=1}^{\infty} n\, \overset{+}{a}{}_n^i a_n^i . \tag{2.18}$$

Действительно, рассмотрим статсумму

$$Z = Sp\, e^{-\beta H} = \sum_{n=1}^{\infty} P_d(n)\, e^{-\beta E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} P_d(n)\, e^{-\frac{\hbar\omega_1}{kT}n} . \tag{2.19}$$

С другой стороны, для одного сорта осцилляторов имеем

$$Z_i = Sp\, e^{-\beta H_i} = \sum_{(\dots N_n \dots)} \exp\left\{-\frac{\hbar\omega_1}{kT}\sum_{m=1}^{\infty} m N_m\right\}, \tag{2.20}$$

так как состояние системы есть

$$\prod_{i=1}^{d}\prod_{n=1}^{\infty} (\overset{+}{a}{}_n^i)^{N_n} |0\rangle , \tag{2.21}$$

где $|0\rangle$ – вакуум. Обозначив $z \equiv e^{-\frac{\hbar\omega_1}{kT}}$, запишем Z_i в виде

$$Z_i = \sum_{(\dots N_n \dots)} \prod_{n=1}^{\infty} z^{nN_n} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{0\le n<\infty} z^{mn}\right) = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^m} . \tag{2.22}$$

Так как $H = \sum H_i$, то $Z = Sp\, e^{-\beta\sum H_i}$. В итоге

$$Z = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega_1}{kT}}\right)^{-d} . \tag{2.23}$$

Можно без труда построить термодинамику квантовой струны; она вполне обычна (в частности, из (2.23) можно получить распределение Бозе-Эйнштейна для чисел заполнения состояний струнных осцилляторов). Все написанные нами формулы будут использованы в релятивистской теории. Однако их смысл будет совершенно иным, и весьма поучительно проследить отличия релятивистской струны от обычной. Например, в релятивистской теории формулы типа (2.7) дают не энергию системы, а квадрат её массы. Отсюда, в частности, вытекает необычное термодинамическое поведение релятивистских струн.

Прежде чем переходить к релятивистской теории струны, вернемся к обсуждению энергии нулевых колебаний (см. (2.7)), которой мы до сих пор вполне справедливо пренебрегали. В теории реальной струны, состоящей из атомов, она, естественно, конечна. Однако нас эта реальная величина не интересует. Давайте воспринимать теорию струны, определяемую лагранжианом (2.3) или гамильтонианом (2.2), просто как квантовую теорию одного скалярного поля $x(\sigma,\tau)$. Теорию поля естественно считать заданной при $-\infty < \sigma < +\infty$. Если мы рассматриваем поле $\chi(\sigma,\tau)$, ограниченное на конечный интервал $0\le\sigma\le L$, то, благодаря граничным эффектам, плотность энергии нулевых колебаний будет отличаться от соответствующей величины на неограниченном интервале (эффект Казимира).

Энергия на бесконечном интервале, как известно, равна ($\omega=kc$, $k=\pi n/L$)

$$\varepsilon(\infty)=\frac{\hbar}{2\pi c}\int_0^\infty \omega\,d\omega. \tag{2.24}$$

На конечном интервале

$$\varepsilon(L)=\frac{1}{L}\sum_{n=0}^\infty \frac{\hbar\pi c}{2L}\,n. \tag{2.25}$$

Нетрудно сообразить, что формально $\varepsilon(L)$ переходит в $\varepsilon(\infty)$ при $L\to\infty$, однако оба выражения бессмысленны из-за расходимости. Придадим им смысл с помощью некоторой разумной регуляризации $f_{\omega_0}(\omega)$, где $f_{\omega_0}(\omega)\approx1$ при $\omega\lesssim\omega_0$ и $f_{\omega_0}(\omega)\approx0$, $\omega\gtrsim\omega_0$ (при $\omega_0\to\infty$, $f_{\omega_0}(\omega)=1$):

$$\varepsilon_{\omega_0}(\infty)=\frac{\hbar}{2\pi c}\int_0^\infty\omega f_{\omega_0}(\omega)\,d\omega\approx\frac{\hbar}{2\pi c}\int_0^{\omega_0}\omega\,d\omega. \tag{2.26}$$

Наиболее естественна экспоненциальная регуляризация

$$\varepsilon_{\omega_0}(\infty)=\frac{\hbar}{2\pi c}\int_0^\infty\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_0}}d\omega, \quad \varepsilon_{\omega_0}(L)=\frac{1}{L}\sum_{n=0}^\infty\frac{\hbar\pi c}{2L}\,n\,e^{-\frac{\pi c n}{L\omega_0}}.$$

Воспользуемся формулой суммирования Эйлера – Маклорена – Абеля – Плана

$$\sum_{n=0}^\infty F(n)=\int_0^\infty F(x)\,dx + i\int_0^\infty\frac{F(it)-F(-it)}{e^{2\pi t}-1}\,dt, \tag{2.27}$$

где $F(z)$ – регулярна при $\mathrm{Re}\,z>0$ и удовлетворяет некоторым другим естественным условиям (см. М.А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции. ГИФМЛ, М., 1962, с. 42). Полагая

$$F(z)=\frac{\hbar\pi c}{2L^2}\,z f_{\omega_0}(z), \tag{2.28}$$

получим

$$\varepsilon_{\omega_0}(L)=\frac{\hbar}{2\pi c}\int_0^\infty\omega f_{\omega_0}(\omega)\,d\omega-\frac{\hbar}{\pi c}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\omega f_{\omega_0}(\omega)}{e^{\omega/\omega_L}-1}, \quad \omega_L=c/2L. \tag{2.29}$$

Таким образом, в пределе $L\to\infty$ находим

$$\varepsilon_{\omega_0}(\infty)=\frac{\hbar}{2\pi c}\int_0^\infty\omega f_{\omega_0}(\omega)\,d\omega. \tag{2.30}$$

Вычитая из $\varepsilon_{\omega_0}(L)$, получим наблюдаемую величину

$$\Delta\varepsilon_{\omega_0}(L)=-\frac{\hbar}{2\pi c}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\omega f_{\omega_0}(\omega)}{e^{\omega/\omega_L}-1}, \tag{2.31}$$

которая конечна и при снятии регуляризации ($\omega_0\to\infty$):

$$\Delta\varepsilon(L)=-\frac{\hbar}{2\pi c}\int_0^\infty d\omega\cdot\omega\left(e^{\frac{\omega}{\omega_L}}-1\right)^{-1}. \tag{2.32}$$

Правая часть выражается через ζ- функцию Римана

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty n^{-s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty dt\,\frac{t^{s-1}}{e^t-1}, \quad \mathrm{Re}\,s>0. \tag{2.33}$$

Отсюда находим

$$\Delta\varepsilon(L)=-\frac{\hbar\omega_L^2}{\pi c}\zeta(2)=-\frac{\hbar\pi c}{24L^2}. \tag{2.34}$$

Коротко говоря, регуляризация свелась к тому, что

$$\sum_{n=1}^\infty n=\lim_{s\to-1}\sum_{n=1}^\infty n^{-s}=\zeta(-1)=-\frac{\zeta(2)}{2\pi^2}=-\frac{1}{12}. \tag{2.35}$$

При других способах регуляризации получается та же самая конечная часть. В дальнейшем мы просто пользуемся ζ – регуляризацией, проявляя известную осторожность при обращении с расходящимися рядами. Для конкретных вычислений нам понадобится также обобщенная ζ -функция Римана

$$\zeta(s,q)=\sum_{n=1}^\infty(n+q)^{-s}. \tag{2.36}$$

2. Элементарная теория релятивистской струны

Мы будем, в основном, изучать замкнутую струну, наиболее важную для приложения к общей теории взаимодействий. Пространство-время имеет d измерений, метрический тензор Минковского

$$\eta_{\mu\nu}=(-1,+1,+1,\ldots,+1).$$

Координаты точек струны в этом пространстве $(0 \le \sigma < 2\pi,\ -\infty < \tau < +\infty)$

$$x^\mu(\sigma,\tau)\ ,\ \mu = 0,1,\dots,(d-1)\ ;\quad x^\mu(\sigma+2\pi,\tau) = x^\mu(\sigma,\tau)\,.$$

Выбирая параметры σ, τ должным образом, можно добиться, чтобы

$$\dot{x}x' = 0, \qquad \dot{x}^2 + x'^2 = 0 \tag{2.37}$$

(полезно рассмотреть координаты, в которых $x^0 = t = \tau$) . Заметим, что первое условие - просто условие псевдоортогональности координатной сетки на поверхности, второе заменят условия нормировки, если $\dot{x}^2 + x'^2 \neq 0$, то заменой координаты можно получить $\dot{x}^2 + x'^2 = 0$.
Уравнение струны есть просто уравнение Д' Аламбера (v = I)

$$\ddot{x} - x'' = 0\,, \quad 0 \le \sigma < 2\pi\,,\ -\infty < \tau < +\infty\,,$$
$$x^\mu(\sigma,\tau) = x^\mu(\sigma+2\pi,\tau)\,, \tag{2.38}$$

но дополнительные условия позволяют исключить две компоненты движений - временную и продольную. Физический смысл имеют лишь поперечные движения струны. Дополнительные условия не противоречат уравнению движения. Действительно,

$$x^\mu(\sigma,\tau) = f_R^\mu(\sigma-\tau) + f_L^\mu(\sigma+\tau)\,,\quad \dot{x}^\mu = -f_R'^\mu + f_L'^\mu\,,\quad x'^\mu = f_R'^\mu + f_L'^\mu\,,$$
$$\dot{x}x' = f_L'^2 - f_R'^2\quad,\quad \dot{x}^2 + x'^2 = f_L'^2 + f_R'^2\,.$$

Если в начальный момент $\dot{x}x' = \dot{x}^2 + x'^2 = 0$, то

$$f_L'^2(\sigma) = 0\,,\quad f_R'^2(\sigma) = 0\,,$$

а значит, и

$$f_L'^2(\sigma+\tau) = f_R'^2(\sigma-\tau) = 0\,,$$
$$\dot{x}x'(\sigma,\tau) = \dot{x}^2 + x'^2 = 0.$$

Метрика d -мерного пространства индуцирует на двумерной поверхности, заметаемой струной, метрический тензор

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} \dot{x}^2 & \dot{x}x' \\ \dot{x}x' & x'^2 \end{pmatrix}, \quad ds^2 = \eta_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu = g_{ab}\,d\xi^a d\xi^b . \tag{2.39}$$

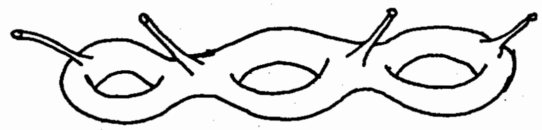
Заметим, что $g = \det g_{ab} < 0$, так как на поверхности в любой её точке можно выделить как пространственное направление, так и временное.
Как показано в курсах геометрии двумерных поверхностей, выбором координат σ , τ можно добиться, чтобы метрика была (псевдо) конформной, т.е.

$$g_{ab} = e^{\varphi(\sigma,\tau)}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Отсюда и следует, что на движения струны всегда можно наложить рассмотренные выше дополнительные условия. Переходя к евклидовой теории заменой $\tau \to i\tau$, можно убедиться, что наши уравнения струны соответствуют хорошо изученным в математике уравнениям минимальной поверхности, т.е.

$$\Delta x^\mu(\sigma,\tau) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)x^\mu(\sigma,\tau) = 0\,. \tag{2.41}$$

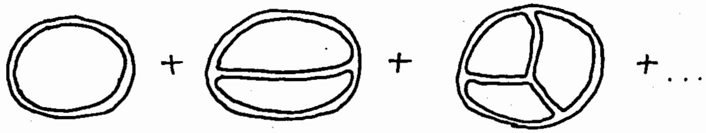
Отсюда вытекает связь теории струны с теорией римановых поверхностей, на которой мы не можем останавливаться. Заметим только, что произвольному процессу соответствует "диаграмма"



с h петлями и n "хвостами" (на рисунке h = 3, n = 4).
Особенно просто классифицируются и изучаются вакуумные диаграммы ,

которым в обычной теории поля соответствуют петли

Эти петли можно получить непрерывной деформацией струнных диаграмм

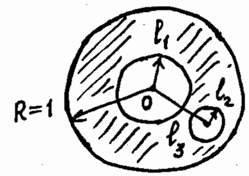


и предельным переходом, при котором трубочки становятся бесконечно тонкими. Это позволяет увидеть, что в теории замкнутых струн основной процесс взаимодействия сводится к превращению одной струны в две. На диаграммах с тонкими трубочками это очевидно. В общем случае легко проверить, что произвольную поверхность с h петлями можно разрезать на $(h+1)$ диаграмм типа "панталон".

Поверхность тора $(h=1)$ одним разрезанием можно превратить в трубку, а поверхность "кренделя" превращается тремя разрезаниями в два экземпляра "панталон".

При таком подходе квантовая теория струны сводится к квантовой теории свободных полей $X^{\mu}(\sigma,\tau)$,"живущих" на двумерных римановых поверхностях. Так как поля подчиняются двумерному уравнению Лапласа, их можно рассматривать как аналитические функции комплексного переменного $z=\tau+i\sigma$, что позволяет применить хорошо разработанную теорию функций, аналитических на римановых поверхностях. Фундаментальная простота теории струны определяется тем, что уравнения струнных "полей" инвариантны относительно произвольных конформных преобразований $z\to f(z)$. В результате физические амплитуды будут зависеть не от конкретного вида римановой поверхности (с заданной топологической структурой), а лишь от её конформного класса (две поверхности принадлежат одному конформному классу, если они переводятся друг в друга конформным преобразованием). Поясним это на простых примерах. Конформный класс римановой поверхности, топологически эквивалентной цилиндру, определяется одним вещественным параметром. Действительно, как известно из комплексного анализа, поверхность цилиндра можно конформно отобразить на комплексную плоскость так, что одна из границ перейдет в окружность радиуса $R=1$, а другая – в концентрическую окружность радиуса $l<1$.

При этом точки поверхности цилиндра переходят в точки кольца, а поля $x^{\mu}(z)$ можно теперь считать заданными в кольцевой области плоскости. Никаким конформным преобразованием величину l изменить нельзя, так что поверхности с разными значениями l принадлежат различным конформным классам. Вся зависимость пропагатора струны от вида римановой поверхности (определяемого бесконечным числом параметров) сводится тем самым к зависимости от одного вещественного параметра. "Панталоны" можно конформно отобразить на область z-плоскости,



определяемую тремя вещественными параметрами l_1 , l_2 , l_3 , которые и задают их конформный класс (вращение этой картинки вокруг точки 0 несущественно). Для замкнутой римановой поверхности (вакуумные диаграммы) при $h\geq 2$ имеется $6h-6$ вещественных параметров,задающих её конформный класс, а класс поверхности тора $(h=1)$ определяется двумя вещественными параметрами.

Эти параметры, называемые параметрами Тейхмюллера,или модулями римановой поверхности,в какой-то мере аналогичны параметрам, возникающим при вычислении обычных диаграмм Фейнмана в теории поля. Однако в случае струны их значение куда более важно. Чтобы прочувствовать это немного лучше, познакомимся с более точной формулировкой теории струны.

Выше мы сформулировали теорию струны на основе уравнения Д'Аламбера, дополненного связями. Формально это можно выразить, записав действие в виде

$$S\sim\int d\sigma\, d\tau\left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2-x'^2)+\lambda(\dot{x}x')+\frac{\mu}{2}(\dot{x}^2+x'^2)\right], \tag{2.42}$$

где $\lambda(\sigma,\tau)$, $\mu(\sigma,\tau)$ – множители Лагранжа. Это действие можно переписать в виде

$$S\sim\int d\sigma\, d\tau\,\sqrt{-g}\,g^{ab}\partial_a x^{\mu}\partial_b x_{\mu}, \tag{2.43}$$

где

$$g^{ab}=\begin{pmatrix}1+\mu & \lambda\\ \lambda & \mu-1\end{pmatrix},\quad g_{ab}=\begin{pmatrix}\mu-1 & -\lambda\\ -\lambda & \mu+1\end{pmatrix}(\mu^2-\lambda^2-1)^{-1}, \tag{2.44}$$

причем

$$g=\det g_{ab}=\frac{1}{\det g^{ab}}=(\mu^2-\lambda^2-1)^{-1}. \tag{2.45}$$

Будем считать теперь множителями Лагранжа g_{ab}. Заметим, что самая общая "метрика" g_{ab} имеет вид

$$g_{ab}=\frac{\nu}{\mu^2-\lambda^2-1}\begin{pmatrix}\mu-1 & -\lambda\\ -\lambda & \mu+1\end{pmatrix}. \tag{2.46}$$

Однако произведение $\sqrt{-g}\,g^{ab}$ не зависит от ν. Пользуясь новой записью, можно дать теории струны геометрическое истолкование, рассматривая g_{ab} как настоящий метрический тензор на двумерной поверхности. Если считать, что метрика g_{ab} индуцируется метрикой псевдоевклидова объемлющего пространства, т.е.

$$g_{ab}=\begin{pmatrix}\dot{x}^2 & \dot{x}x'\\ \dot{x}x' & x'^2\end{pmatrix}=\partial_a x^\mu\partial_b x_\mu, \tag{2.47}$$

то мы получаем действие

$$S\sim\frac{1}{2}\int d\sigma d\tau\sqrt{-g}\,g^{ab}g_{ab}=\int d\sigma d\tau\sqrt{-g}= \tag{2.48}$$

$$=\int d\sigma d\tau\left[(\dot{x}x')^2-\dot{x}^2x'^2\right]^{1/2}.$$

В этой форме действие приобретает ясный геометрический смысл $S\sim\int d^2A$, и принцип действия требует, чтобы площадь поверхности, заметаемой струной, была экстремальной. Площадь очевидно не зависит от выбора координат σ, τ. Поэтому действие (2.48) инвариантно относительно произвольных преобразований (диффеоморфизмов)

$$\tau\to f(\sigma,\tau),\quad \sigma\to g(\sigma,\tau). \tag{2.49}$$

Легко найти, что лагранжевы уравнения для действия (2.48) имеют вид

$$\partial_\tau P^\mu_\tau+\partial_\sigma P^\mu_\sigma=0, \tag{2.50}$$

$$P^\mu_\sigma=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'_\mu},\quad P^\mu_\tau=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\mu}.$$

Вариации на концах дают (для открытой струны положим $0\le\sigma\le\pi$)

$$P^\mu_\sigma(\tau,0)=P^\mu_\sigma(\tau,\pi)=0. \tag{2.51}$$

(В случае замкнутой струны эти граничные условия заменяются условием периодичности). Легко проверить, что P^μ_τ, P^μ_σ удовлетворяют условиям

$$(2\pi\alpha' P_\tau\pm x')^2=0, \tag{2.52a}$$

$$(2\pi\alpha' P_\sigma\pm\dot{x})^2=0. \tag{2.52}$$

Используя инвариантность действия (2.48) относительно преобразований Пуанкаре, можно найти полный импульс

$$P^\mu=\int_0^\pi d\sigma\, P^\mu_\tau \tag{2.53}$$

и полный момент струны:

$$M^{\mu\nu}=\int_0^\pi d\sigma\,(x^\mu P^\nu_\tau-x^\nu P^\mu_\tau). \tag{2.54}$$

В "ортогональной" калибровке, когда $(\dot{x}\pm x')^2=0$, имеем

$$2\pi\alpha' P^\mu_\tau=\dot{x}^\mu,\quad 2\pi\alpha' P^\mu_\sigma=-x'^\mu, \tag{2.55}$$

а $x^\mu(\sigma,\tau)$ подчиняется уравнению Д'Аламбера

$$\ddot{x}-x''=0,\quad x'_\mu(0,\tau)=x'_\mu(\pi,\tau)=0. \tag{2.56}$$

При переходе к квантовой теории основное отличие от теории нерелятивистской струны связано с тем, что возникли дополнительные условия, нелинейные по x^μ. С помощью дополнительных условий (связей) можно исключить "лишние" компоненты x^μ. Тогда для оставшихся компонент можно воспользоваться стандартным нерелятивистским квантованием. Обычно выбирают координаты σ и τ следующим образом.

Определим для любого вектора V^μ компоненты $V^\pm$:

$$V^\pm=\frac{V^0\pm V^{d-1}}{\sqrt{2}},\quad V^0=\frac{V^++V^-}{\sqrt{2}},\quad V^{d-1}=\frac{V^+-V^-}{\sqrt{2}}. \tag{2.57}$$

Тогда для скалярного произведения имеем

$$U\cdot V = \vec{U}\cdot\vec{V} - U^{+}V^{-} - U^{-}V^{+}. \tag{2.58}$$

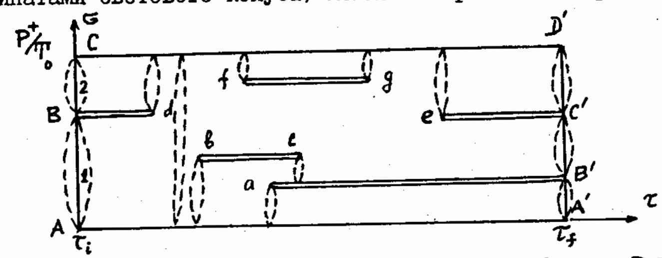
Компоненты $\vec{V}$ будем называть поперечными, а $V^{\pm}$ – продольными. Разобьём $x^{\mu}(\sigma,\tau)$ и $P^{\mu}_{\tau}(\sigma,\tau)$ на поперечные и продольные компоненты и воспользуемся произволом (2.49) для фиксации координат σ и τ:

$$x^{+}(\sigma,\tau) = \tau\,, \quad P^{+}_{\tau}(\sigma,\tau) = T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'}\,, \quad P^{+}_{\sigma} = 0. \tag{2.59}$$

Заметим, что второе условие несовместимо с выбором интервала $0 \le \sigma \le \pi$, вместо этого возьмем $0 \le \sigma \le \sigma_0$. Тогда из (2.53) получим $P^{+} = T_0\sigma_0$, т.е.

$$0 \le \sigma \le \frac{P^{+}}{T_0}. \tag{2.60}$$

Такая параметризация очень удобна для описания взаимодействия струн так как "длина" струны пропорциональна её импульсу. Например, произвольный процесс взаимодействия струн в этих координатах (называемых координатами светового конуса) можно изобразить диаграммой.



Здесь в момент $\tau = \tau_i$ имеется две струны: AB и BC, при этом $AB = P_1^{+}/T_0$, $BC = P_2^{+}/T_0$, где P_1^{+} и P_2^{+} – компоненты вектора энергии-импульса для каждой струны, причем $P^{+} = P_1^{+} + P_2^{+}$. Разрезы fg и bc соответствуют петлям, и т.д.

Если струны замкнутые, то необходимо подложить ещё один экземпляр листа $ACD'A'$ с разрезами и произвести соответствующие отождествления краев разрезов и границ – $C'D'$, $A'B'$,... (пунктир). Заметим, что этой простой картинке можно придать вполне точный смысл и сопоставить ей определенные аналитические выражения для амплитуд рассеяния струн.

Точная теория основывается на том, что при указанном выборе координат действие можно представить в форме

$$S = \frac{T_0}{2}\int d\tau \int_0^{P^+/T_0} d\sigma\,(\dot{\vec{x}}^{2} - \vec{x}'^{2}), \tag{2.61}$$

а дополнительные условия выражают координату x^{-} через поперечные координаты:

$$\dot{x}^{-} = \frac{1}{2}(\dot{\vec{x}}^{2} + \vec{x}'^{2})\,, \quad x^{-\prime} = \vec{x}'\cdot\dot{\vec{x}}. \tag{2.62}$$

Таким образом, мы пришли в точности к струне Д'Аламбера, с тем, на первый взгляд, небольшим дополнением, что "длина" струны связана с (+) -компонентой вектора энергии и импульса. В этом формализме (−) – компонента отождествляется с гамильтонианом ($\vec{P}_{\tau} = T_0\dot{\vec{x}}$):

$$P^{-} = \int_0^{P^+/T_0} d\sigma\, P^{-}_{\tau} = \frac{1}{2}\int_0^{P^+/T_0} d\sigma\left(\frac{1}{T_0}\vec{P}_{\tau}^{2} + T_0\vec{x}'^{2}\right) = H_0\,, \tag{2.63}$$

этот гамильтониан имеет обычный вид, но условие, что компоненты P^{+}, P^{-}, $\vec{P}$ должны образовывать d -мерный вектор, ведет к нетривиальным следствиям. В частности, если воспользоваться компонентами P^{+}, P^{-}, $\vec{P}$ для построения оператора полного момента струны (генератора лоренцевых вращений) по формуле (2.54), то можно убедиться в том, что все перестановочные соотношения для операторов $M^{\mu\nu}$ выполняются автоматически, за исключением коммутатора

$$[M^{i-}, M^{j-}]\,,$$

в котором появляются аномальные, нарушающие лоренц-инвариантность члены. Эти члены обращаются в нуль лишь при $d = 26$, что обычно кратко и выражают утверждением о возможности последовательной теории релятивистской бозонной струны лишь в 26-мерном пространстве – времени. Вычисления коммутаторов операторов $M^{\mu\nu}$ весьма громоздки (см. литературные указания в конце этих лекций). Однако, если не требовать особой строгости, природу этого замечательного условия можно понять, воспользовавшись более простыми рассуждениями.

Рассмотрим для определенности замкнутую струну. Заметим, что формулы (2.6I) – (2.63) применимы во всех случаях, отличаются лишь граничные условия

$$x'(0,\tau) = x'(\sigma_0,\tau) = 0 \qquad \text{(открытая)},$$

$$x(0,\tau) = x(\sigma_0,\tau) \qquad \text{(замкнутая)}.$$

Квантование координат $\vec{x}$ теперь можно провести совершенно стандартно. Заметим только, что в теории релятивистской струны вместо стандартных операторов рождения и уничтожения используют операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = \delta^{ij} n \delta_{m+n,0} = [\tilde\alpha_n^i, \tilde\alpha_m^j], \qquad (2.64)$$

причем

$$\vec\alpha_n^{+} = \vec\alpha_{-n}, \quad \tilde{\vec\alpha}_n^{+} = \tilde{\vec\alpha}_{-n}. \qquad (2.65)$$

Нулевая компонента $\vec\alpha_0$ связывается с вектором полного импульса $\vec P$. Помимо этого есть вектор, описывающий положение центра масс струны $\vec q$, и канонически сопряженные друг другу величины P^+ и q^-. Как ясно из предыдущего, остальные переменные выражаются через перечисленные.

Приведем разложение $\vec x$ и $H_0 = P^-$ в шредингеровской картине (фиксируем $\tau = 0$)

$$\vec x(\sigma) = \vec q + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} \left(\vec\alpha_m e^{im\sigma/(\alpha' P^+)} + \tilde{\vec\alpha}_m e^{-im\sigma/(\alpha' P^+)}\right), \qquad (2.66)$$

$$H = P^- = \frac{1}{2P^+}\left\{\vec P^2 + \frac{2}{\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\vec a_n^+ \vec a_n + \tilde{\vec a}_n^+ \tilde{\vec a}_n\right) - \frac{d-2}{6\alpha'}\right\}. \qquad (2.67)$$

Здесь $\vec a_n = i\vec\alpha_n/\sqrt{n}$, $n > 0$, а последний член в (2.67) равен регуляризованной энергии нулевых колебаний (как в нерелятивистском случае), возникающей при нормальном упорядочении операторов a_n и a_n^+:

$$\mathrm{Reg}\left\{\frac{2}{\alpha'}(d-2)\sum_{n=1}^{\infty} n\right\} = \frac{2}{\alpha'}(d-2)\lim_{s\to -1}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} =$$

$$= \frac{2}{\alpha'}(d-2)\zeta(-1) = \frac{2}{\alpha'}(d-2)\left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{d-2}{6\alpha'} \qquad (2.68)$$

(напомним, что $(d-2)$ -это число независимых поперечных осцилляторов). Основное состояние струны $|0,\vec P\rangle$ определяется обычными условиями

$$\vec a_n |0,\vec P\rangle = \tilde{\vec a}_n |0,\vec P\rangle = 0, \quad \hat{\vec P}|0,\vec P\rangle = \vec P|0,\vec P\rangle. \qquad (2.69)$$

Возбужденные состояния строятся точно так же, как и в нерелятивистском случае. Например, $a^+|0,\vec P\rangle$, и т.д. С помощью (2.67) легко определить массы этих состояний:

$$M^2 = -P^2 = 2P^+P^- - \vec P^2 =$$
$$= \frac{2}{\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\vec a_n^+ \vec a_n + \tilde{\vec a}_n^+ \tilde{\vec a}_n\right) - \frac{d-2}{6\alpha'}. \qquad (2.70)$$

Можно показать, что в случае замкнутой струны числа правых и левых поперечных возбуждений должны быть равными. Поэтому первое возбужденное состояние есть $\overset{+}{a}{}_1^i \overset{+}{\tilde a}{}_1^j|0\rangle$. Легко показать, что

$$M^2|0\rangle = -\frac{d-2}{6\alpha'}|0\rangle, \quad M^2 \overset{+}{a}{}_1^i \overset{+}{\tilde a}{}_1^j|0\rangle = \left(\frac{4}{\alpha'} - \frac{d-2}{6\alpha'}\right) \overset{+}{a}{}_1^i \overset{+}{\tilde a}{}_1^j|0\rangle. \qquad (2.71)$$

Таким образом, основное состояние - это скалярный тахион (при $d>2$), возбужденное состояние распадается на состояния, неприводимые по "поперечной" группе $SO(d-2)$: бесшпуровый симметричный тензор, антисимметричный тензор и скаляр, т.е.

$$d_\perp^2 = \left[\left(\tfrac{1}{2}d_\perp(d_\perp+1) - 1\right) + \tfrac{1}{2}d_\perp(d_\perp-1) + 1\right], \quad d_\perp = d-2. \qquad (2.72)$$

Симметричный тензор с $[\frac{1}{2}d_\perp(d_\perp+1) - 1]$ компонентами в d-мерном пространстве может быть только безмассовым состоянием со спином 2, т.е. гравитоном (например, при $d = 4$ имеем $d(d-3)/2 = 2$). В случае открытой струны мы получили первое возбужденное состояние в виде $(d-2)$ - компонентного вектора группы $SO(d-2)$, который в d-мерном пространстве может описывать лишь безмассовую частицу со спином I (фотон). При этом

$$M^2 \overset{+}{a}{}_n^i|0\rangle = \left(\frac{1}{\alpha'} - \frac{d-2}{24\alpha'}\right)\overset{+}{a}{}_n^i|0\rangle. \qquad (2.73)$$

Оба условия безмассовости могут быть выполнены лишь при $d = 26$. Мы видим, что это условие возникает в силу требования релятивистской инвариантности спектра. Хотя наш анализ может показаться неполным и нестрогим, его можно достаточно чётко обосновать. Мы предоставим это читателю в качестве упражнения.

Конечно, эти поразительные факты - появление безмассовых частиц со спином 2 и I и возникновение условия $d = 26$ - анализировались с многих сторон. В частности, в геометризованном формализме, использующем лагранжевы множители g_{ab}, всё это выглядит несколько иначе. Лагранжиан (2.43) имеет, помимо симметрий относительно (2.49) и преобразований Пуанкаре, ещё специальную симметрию Вейля.

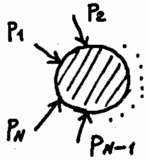
$$g_{ab} \to e^{\varphi} g_{ab}\,, \quad g^{ab} \to e^{-\varphi} g^{ab}\,, \quad x \to x,$$

связанную с тем, что лагранжевых множителей всего 2, а тензор g_{ab} зависит от трех произвольных функций. В этой формулировке ключевой оказывается именно симметрия Вейля. Условие сохранения её в квантовой теории дает d = 26 и все остальные особенности релятивистской струны. В g_{ab} -формализме естественно считать g_{ab} новыми независимыми переменными и определять средние как континуальные интегралы по всем переменным (используем евклидову метрику):

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \int [\mathcal{D}x][\mathcal{D}g]\, \mathcal{F}\{x;g\} \exp\left(-S\{x;g\}\right). \tag{2.74}$$

Если $\mathcal{F} \equiv 1$, то мы получаем вакуумный функционал $\mathcal{Z}$. Для вычисления амплитуд S -матрицы необходимо сначала построить соответствующие вершинные операторы. Например, амплитуда рассеяния для N тахионов

$$A(p_1 \cdots p_N) =$$



выражается через вершинные операторы

$$V(x) = \int d\sigma\, d\tau \sqrt{g}\; \delta^{(d)}(x - x(\sigma,\tau)),$$

$$A(p_1 \cdots p_N) = \langle \prod_{i=1}^{N} V(p_i) \rangle$$

или в импульсном представлении:

$$V(p) = \int d\sigma\, d\tau \sqrt{g}\; e^{-ipx(\sigma,\tau)}. \tag{2.75}$$

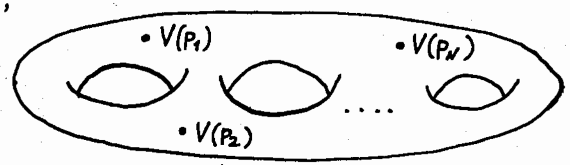
Гравитонный вершинный оператор есть

$$V^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d\sigma\, d\tau \sqrt{g}\; g^{ab}\, \partial_a x^{\mu} \partial_b x^{\nu}\, e^{-ipx}. \tag{2.76}$$

Аналогично строятся вершинные операторы для других частиц, содержащихся в спектре струны. Необходимое число лоренцевых индексов набирается с помощью произведений двумерно-ковариантных (относительно преобразований (2.49)) производных от x^{μ}, что обеспечивает инвари-

антность по отношению к трансляциям $x^{\mu} \to x^{\mu} + a^{\mu}$. Двумерные индексы сворачиваются с помощью двумерных тензоров g^{ab} и $\varepsilon_{ab}/\sqrt{g}$, что обеспечивает инвариантность вертекса $V^{\mu_1\mu_2\cdots}(\sigma,\tau)$ относительно (2.49).

Гораздо труднее построить вершинные операторы, описывающие рождение струн (т.е. бесконечный набор состояний частиц с произвольно большими спинами и массами). Эта задача пока по существу не решена. Тем не менее для описания процессов, в начальных и конечных состояниях которых имеются только частицы, этого вполне достаточно. Амплитуду N – частичного процесса с h петлями можно изобразить картинкой,



где выколотые на поверхности точки соответствуют вершинным операторам.

Как уже говорилось выше, континуальные интегралы сводятся к обычным многомерным интегралам по параметрам Тейхмюллера. Этого можно достичь двумя способами. I) Выполним интегрирование по лагранжевым множителям $\sqrt{g}\, g^{ab}$ и перейдем к координатам светового конуса $x^{\pm}$. Преимущество такого подхода состоит в том, что остаются лишь физические поперечные степени свободы. Недостатки – потеря явной лоренцевой инвариантности и некоторые технические неудобства в работе с переменными светового конуса при числе петель $h \geq 2$.

2) Зафиксируем метрику поверхности в виде $g_{ab} = e^{\varphi} g^{(0)}_{ab}$, где метрика $g^{(0)}_{ab}$ зависит от нескольких параметров, характеризующих поверхность. Интегрирование $[\mathcal{D} g_{ab}]$ в результате сводится к интегрированию по этим параметрам и к интегрированию $[\mathcal{D}\varphi]$, которое, как впервые показал Поляков, оказывается тривиальным лишь при выполнении полученных выше условий (d = 26 и безмассовый "гравитон"). Заметим, что при этом состояния с отрицательной метрикой (непоперечные "осцилляторы") отщепляются от физических амплитуд (наиболее удобный формализм связан с введением духов Фаддеева – Попова, см. ниже).

В заключение отметим, что задача о построении многопетлевых струнных амплитуд с частицами в начальных и конечных состояниях в принципе решена, но явные выражения написаны лишь до 4 петель. Используемый при этом аппарат комплексного анализа пока мало знаком физикам, и для его изложения требуется отдельный курс лекций. В соответствии с элементарным, вводным характером этих лекций, мы посвятили последний их раздел прояснению основ теории релятивистской струны.

Чтобы наше изложение приобрело некоторую законченность, приведем всё же общее выражение для вакуумного функционала и конкретный результат для однопетлевого вклада. Напомним определение Z:

$$Z = \int [\mathcal{D}x][\mathcal{D}g] \exp(-S\{x,g\}),$$

где наиболее общее выражение для $S\{x,g\}$ имеет вид

$$S = \int d\sigma\, d\tau \sqrt{g} \left\{ g^{ab} \partial_a x\, \partial_b x + \frac{\lambda_0}{4\pi} R_g + \mu_0^2 \right\}. \tag{2.77}$$

Здесь λ_0 и μ_0 – некоторые параметры, R_g – кривизна двумерной поверхности. В силу теоремы Гаусса - Бонне для замкнутой поверхности

$$\frac{1}{4\pi} \int_M d\sigma\, d\tau \sqrt{g}\, R_g = 2 - 2h \equiv \chi(M),$$

где h - число петель,или топологический род поверхности M, $\chi(M)$ - её эйлерова характеристика. Таким образом, второй член полностью определяется топологией поверхности. Третий член пропорционален площади поверхности M и явно нарушает вейлеву инвариантность. При d = 26 можно, однако, так выбрать значение параметра μ_0, что вклад этого члена сокращает нарушающие вейлеву инвариантность факторы, возникающие при интегрировании по x^μ. Обозначив первый член в (2.77) через S_0, нетрудно показать, что

$$\int [\mathcal{D}x^\mu] e^{-S_0\{x;g\}} = \left\{ \frac{2\pi}{\int d\sigma\, d\tau \sqrt{g}} \det{}' \Delta_g \right\}^{-d/2}, \tag{2.78}$$

где Δ_g - лапласиан на поверхности M с метрикой g, а штрих означает, что его нулевые моды при вычислении детерминанта отбрасываются. Не учитываются также нулевые моды в X^μ, описывающие движение центра масс струны (используется инвариантность относительно трансляций $X^\mu \to X^\mu + a^\mu$). Определение меры $[\mathcal{D}x^\mu]$ основано на естественном лоренц-инвариантном и двумерно-инвариантном определении нормы в пространстве малых смещений δx^μ :

$$\| \delta x^\mu \|^2 = \int d\sigma\, d\tau \sqrt{g}\, \delta x^\mu \delta x_\mu . \tag{2.79}$$

Эта норма не инвариантна относительно преобразований Вейля. Естественная норма в пространстве малых деформаций метрики, $g \to g + \delta g$, есть

$$\| \delta g_{ab} \|^2 = \int_M d\sigma\, d\tau \sqrt{g}\, g^{ac} g^{bd} \delta g_{ab} \delta g_{cd} . \tag{2.80}$$

Она также инвариантна относительно двумерных диффеоморфизмов (2.49), но не инвариантна относительно преобразований Вейля.

Общее определение Z при d = 26 можно записать теперь в виде

$$Z = \sum_h Z_h = \sum_h \int [\mathcal{D}g_{ab}][\mathcal{D}x^\mu] \frac{\exp\{-S\{x;g\}\}}{Vol_g(Diff_+ M)\, Vol_g(Weyl)}, \tag{2.81}$$

где суммирование проводится по всем топологиям замкнутых двумерных поверхностей, т.е. по числу петель h, а символы $Vol_g(Diff_+ M)$ и $Vol_g(Weyl)$ обозначают бесконечные объемы соответствующих бесконечных групп. Деление на них и оставляет в итоге конечнократные интегралы по параметрам Тейхмюллера.Для одной петли результат можно выразить в очень простом виде

$$Z_1 = \int \frac{dt_1\, dt_2}{4\pi t_2^2} (2\pi t_2)^{-12} e^{4\pi t_2} \left| \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n t}) \right|^{-48}, \tag{2.82}$$

где $t = t_1 + i t_2$, а интегрирование выполняется по области: $t_1^2 + t_2^2 \geq 1$, $-1/2 \leq t_1 \leq 1/2$. В бесконечном произведении легко узнать производящую функцию спектра простого осциллятора. Степень 48 связана с тем, что имеется $26 - 2 = 24$ осциллятора. Этот результат был получен лет пятнадцать назад совершенно элементарными, но довольно громоздкими вычислениями. Преимущество подхода, описанного здесь в самых общих чертах, заключается в том, что его, в принципе, можно применить для вычисления Z_h при любом h.

§ 3. Калибровочная формулировка теории релятивистских частиц и струн

Теория релятивистской струны выглядит существенно отличной от теории релятивистских частиц. В первую очередь это связано с тем, что теория релятивистских частиц обычно формулируется на языке квантовой теории поля, а не на языке траекторий. Поэтому, на первый взгляд, в теории частиц нет прямых аналогов столь важных в теории струны понятий,как репараметризационная инвариантность (2.49), симметрия Вейля и т.п. К тому же попытки построить квантовую теорию поля струн по аналогии с обычной квантовой теорией поля пока не привели к полному успеху. Весьма возможно, что для начала следовало бы пересмотреть, по крайней мере, некоторые из основных конструкций обычной квантовой теории поля.

Здесь предлагается несколько необычный подход к теории релятивистских частиц, который легко переносится на теорию струн. Основная цель - написать обе теории в стандартной калибровочной форме и в определенном смысле "вывести" теорию струны, опираясь на принцип калибровочной инвариантности. Сначала рассмотрим теорию частиц.

В стандартном подходе в её основу можно положить действие

$$S = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{-\dot{x}^2} \;, \quad \dot{x}^2 = \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu \,. \tag{3.1}$$

Вводя обобщенные импульсы

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \,, \tag{3.2}$$

получаем связь

$$p^2 + m^2 = 0 . \tag{3.3}$$

Уравнения движения имеют тривиальный вид $\dot{p} = 0$. Эти уравнения движения вместе со связью можно получить из другого вариационного принципа, используя в качестве переменных p и x. Вычислим формально плотность гамильтониана

$$\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L} = \frac{1}{m}\sqrt{-\dot{x}^2}\,(p^2 + m^2) \tag{3.4}$$

и вспомним, что $\dot{x}^2$ есть индуцированная на траектории частицы "метрика" $g_{00} = \dot{x}^2$ (ср. с (2.39)). При этом $\sqrt{-\dot{x}^2}$ можно рассматривать как $\sqrt{-g}$, где $g = \det g = g_{00} = \dot{x}^2$. Как и в случае струны, будем поэтому считать $\ell = 2\sqrt{-\dot{x}^2}/m$ новой переменной. При диффеоморфизмах, $\tau = f(\bar{\tau})$, $\ell(\tau)$ преобразуется

$$\ell(\tau) = \bar{\ell}(\bar{\tau}) / \dot{f}(\bar{\tau}) \,, \quad \dot{f}(\bar{\tau}) > 0 , \tag{3.5}$$

так что $\ell(\tau)d\tau$ инвариантно. Так как импульс p инвариантен, то инвариантен и гамильтониан

$$H = \int d\tau \mathcal{H} = \frac{1}{2}\int d\tau \; \ell(\tau)\,(p^2 + m^2) . \tag{3.6}$$

Переходя преобразованием Лежандра

$$\mathcal{L} = p\dot{x} - \mathcal{H}(p,\ell) = p\dot{x} - \tfrac{1}{2}\ell(p^2 + m^2) \tag{3.7}$$

к новому лагранжиану, в котором p, x, ℓ – независимые переменные, получаем теорию, полностью эквивалентную (3.1). Если исключить $p = \dot{x}/\ell$, получим лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2\ell} - \frac{\ell}{2} m^2 . \tag{3.8}$$

Исключив $\ell = \sqrt{-\dot{x}^2}/m$, можно вернуться к исходному лагранжиану (3.1). Действие, соответствующее (3.7) или (3.8), инвариантно относительно диффеоморфизмов $\tau = f(\bar{\tau})$. Кроме того, соответствующие уравнения движения линейны по p и x. Дополнительное преимущество новой формулировки - возможность описывать безмассовые частицы (в (3.7) и (3.8) можно просто положить $m = 0$).

Для целей обобщения удобно рассмотреть бесконечно малые диффеоморфизмы

$$\bar{\tau} = \tau - h(\tau) \,, \quad \tau = \bar{\tau} + h(\bar{\tau}) . \tag{3.9}$$

Так как $\bar{x}(\bar{\tau}) = x(\tau)$, то

$$\delta x = \bar{x}(\tau) - x(\tau) = h\dot{x} . \tag{3.10}$$

Аналогично преобразуется $p(\tau)$:

$$\delta p = \bar{p}(\tau) - p(\tau) = h\dot{p} . \tag{3.11}$$

Однако $\ell(\tau)$, как следует из (3.5), преобразуется иначе:

$$\delta\ell = \bar{\ell}(\tau) - \ell(\tau) = (h\ell)^{\cdot} . \tag{3.12}$$

Этим преобразованиям можно придать очень простой вид, заметив, что при $\delta\ell = 0$, в силу тождества

$$\delta\mathcal{L} = \delta p \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} + \delta x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} , \tag{3.13}$$

лагранжиан (3.7) инвариантен относительно преобразования

$$\delta x = -h\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \,, \quad \delta p = h\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} . \tag{3.14}$$

Так как

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = (\dot{x} - \ell p) \,, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\dot{p} , \tag{3.15}$$

то, выполняя преобразования (3.10)-(3.12) и (3.14), получим

$$\delta p = 0, \quad \delta x = h\ell p, \quad \delta \ell = (h\ell)^{\cdot}. \tag{3.16}$$

Заменяя $h\ell \to h$, приходим к абелеву калибровочному преобразованию

$$\delta p = 0, \quad \delta x = hp, \quad \delta \ell = \dot{h}. \tag{3.17}$$

Если объединить p и x в $\Psi^T = (p, x)$, то преобразование имеет вид

$$\Psi + \delta\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \Psi, \quad \ell + \delta\ell = \ell + \dot{h}. \tag{3.18}$$

Легко видеть, что действие, соответствующее лагранжиану (3.7), инвариантно не только относительно бесконечно малых преобразований (3.18), но и относительно конечных преобразований, т.е. $h(\tau)$ можно считать совершенно произвольной дифференцируемой функцией.

Заметим, что преобразования (3.17) или (3.18) эквивалентны произвольным диффеоморфизмам $\tau = f(\bar{\tau})$, однако их смысл несколько иной. Мы избавились от изменения параметра τ, оставив лишь вариации динамических переменных $p(\tau)$, $x(\tau)$ и $\ell(\tau)$. Заметим также, что до сих пор мы не обращали внимания на граничные условия и считали, что действие инвариантно, если $\delta\mathcal{L}$ есть полная производная. При учёте граничных условий обнаружится, что структура калибровочной группы (3.18) не столь тривиальна, как это кажется на первый взгляд.

Легко найти, что при преобразовании (3.10) действие, соответствующее (3.7), строго говоря, не инвариантно, а приобретает добавку

$$\delta S = \frac{1}{2}(p^2 - m^2)\, h(\tau) \Big|_0^1. \tag{3.19}$$

(Здесь и в дальнейшем мы полагаем $\tau_i = 0$, $\tau_f = 1$. Это не ограничивает общности, так как параметризация траектории произвольна). Единственный способ обратить δS в нуль состоит в том, чтобы потребовать

$$h(0) = h(1) = 0. \tag{3.20}$$

Отсюда сразу следует, что

$$\int_0^1 d\tau\, (\ell + \delta\ell) = \int_0^1 d\tau\, \ell(\tau) + h(1) - h(0) = \int_0^1 d\tau\, \ell(\tau),$$

т.е.

$$\ell_0 \equiv \int_0^1 d\tau\, \ell(\tau) \tag{3.21}$$

при калибровочных преобразованиях не меняется. Таким образом все калибровки распадаются на классы, нумеруемые значением параметра ℓ_0. Принадлежащие одному и тому же классу функции $\ell(\tau)$ и $\bar{\ell}(\tau)$ можно перевести друг в друга калибровочным преобразованием, достаточно взять

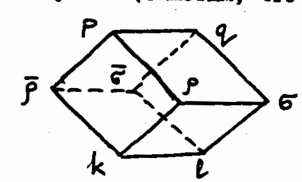
$$h(\tau) = \int_0^\tau d\tau' \left(\bar{\ell}(\tau') - \ell(\tau') \right).$$

Если же ℓ_0 и $\bar{\ell}_0$ различны, то калибровочного преобразования, удовлетворяющего условиям (3.20), не существует, т.е. калибровки $\ell(\tau)$ и $\bar{\ell}(\tau)$ неэквивалентны. Таким образом, параметр ℓ_0 аналогичен параметрам Тейхмюллера в теории струны. На ℓ_0 накладывается естественное ограничение $\ell_0 > 0$ (по смыслу $\ell(\tau)$ в классической теории следовало бы считать $\ell(\tau) > 0$, однако в квантовой теории это ограничение может оказаться слишком сильным, и мы от его использования воздержимся).

Итак, мы пришли к простой калибровочной теории. Для её квантования, как известно, необходимо зафиксировать калибровку, но в то же время позаботиться, чтобы физические результаты были калибровочно-инвариантными. Один из способов квантования, как и в теории струны, состоит в том, что все нефизические переменные исключаются. Это неизбежно приводит к потере явной лоренц-инвариантности. Для её сохранения введем, как в любой калибровочной теории, духи Фаддеева – Попова (ФП). Сделаем это, пользуясь формализмом Баталина – Вилковыского – Фрадкина (БВФ). У нас есть одна связь и нужно ввести одно калибровочное условие. Достаточно общее условие, фиксирующее калибровку, можно записать в виде:

$$\dot{\ell} - F(x, p, \ell) = 0. \tag{3.22}$$

Заметим, что самое простое условие получается при $F \equiv 0$. Это, конечно, дает $\ell = const$, однако взять полностью фиксированное значение ℓ, скажем, $\ell \equiv 1$, мы не можем из-за требования сохранения ℓ_0. Калибровочное условие введем в лагранжиан с помощью лагранжева множителя $k(\tau)$. Сверх этого введем грассмановы переменные ρ, $\bar{\rho}$, σ, $\bar{\sigma}$. Все переменные изобразим с помощью "кубика духов" (заметим, что $q^\mu \equiv x^\mu$)



$Q_{gh}(\rho, \sigma) = +1$, духи

$Q_{gh}(p, q, k, \ell) = 0$

$Q_{gh}(\bar{\rho}, \bar{\sigma}) = -1$, антидухи

(Q_{gh} – аддитивный "духовый" заряд). В верхней части – исходные динамические переменные реального фазового пространства. Под ними – вспомогательные переменные расширенного фазового пространства БВФ. Грассмановы (ферми – статистика) переменные обозначены греческими буквами, а бозонные переменные – латинскими. На левой грани – обобщенные импульсы, на правой обобщенные координаты. Обозначения напоминают об этом (пары p, q; $\rho, \bar\sigma$; $\bar\rho \sigma$; k, ℓ). Лагранжиан (3.7) обладает очевидной симметрией относительно преобразований

$$\delta p = 0, \quad \delta q = i\varepsilon\sigma p, \quad \delta\ell = i\varepsilon\dot{\bar\sigma}, \tag{3.23}$$

которые получаются из (3.16) заменой $h = i\varepsilon\sigma(\tau)$. При этом ε -постоянный грассманов параметр, $\dot\varepsilon = 0$, $\varepsilon^2 = 0$, который антикоммутирует с σ и остальными грассмановыми переменными. Множитель i взят для того, чтобы параметр $i\varepsilon\sigma$ был эрмитовым

$$(i\varepsilon\sigma)^+ = -i\sigma^+\varepsilon^+ = -i\sigma\varepsilon = i\varepsilon\sigma.$$

При фиксации калибровки к лагранжиану добавляется член

$$k\left(\dot\ell - F(p,q,\ell)\right).$$

Новый лагранжиан уже не инвариантен относительно преобразований (3.23). Поэтому фиксация калибровки осуществляется так, чтобы лагранжиан был инвариантен при преобразованиях (3.23), дополненных преобразованиями других переменных.

Общий метод конструирования такого лагранжиана основан на определении БРС – заряда Ω. Чтобы определить его на классическом уровне, определим суперскобки Пуассона, которые при квантовании перейдут в коммутаторы или антикоммутаторы

$$\{X,Y\} \to i[X,Y\} \tag{3.24}$$

для произвольных функций динамических переменных $\mathcal{P}_i = \{p_\mu, \rho, \bar\rho, k\}$ и $Q_i = \{q^\mu, \bar\sigma, \sigma, \ell\}$. Положим

$\varepsilon_X = 0$, если X – бозе-переменная,

$\varepsilon_X = 1$, если X – ферми-переменная,

и определим суперскобки Пуассона (ССП)

$$\{X,Y\} = \sum_i\left(\frac{\partial^R X}{\partial\mathcal{P}_i}\frac{\partial^L Y}{\partial Q_i} - (-1)^{\varepsilon_X\varepsilon_Y}\frac{\partial^R Y}{\partial\mathcal{P}_i}\frac{\partial^L X}{\partial Q_i}\right). \tag{3.25}$$

Это определение для бозе-переменных совпадает с обычным. Оно удовлетворяет коммутационному условию

$$\{X,Y\} = -(-1)^{\varepsilon_X\varepsilon_Y}\{Y,X\} \tag{3.26}$$

и супертождеству Якоби

$$(-)^{\varepsilon_1\varepsilon_3}\{\{X_1,X_2\},X_3\} + (-)^{\varepsilon_2\varepsilon_1}\{\{X_2,X_3\},X_1\} + (-)^{\varepsilon_3\varepsilon_2}\{\{X_3,X_1\},X_2\} = 0. \tag{3.27}$$

Полезно при вычислениях использовать соотношение

$$\{X,YZ\} = \{X,Y\}Z + (-)^{\varepsilon_X\varepsilon_Y}Y\{X,Z\}. \tag{3.28}$$

С помощью написанных определений легко получить ССП для основных динамических переменных:

$$\{p_\mu, q^\nu\} = \delta_\mu^\nu, \quad \{k,\ell\} = 1, \quad \{\bar\rho,\sigma\} = 1, \quad \{\rho,\bar\sigma\} = 1, \tag{3.29}$$

$$\{\mathcal{P}_i, Q_j\} = \delta_{ij}, \quad \mathcal{P}_i = \{p_\mu, \rho, \bar\rho, k\}, \quad Q_i = \{q^\mu, \bar\sigma, \sigma, \ell\}. \tag{3.30}$$

БРС – заряд или генератор духовой симметрии, определяется так, чтобы он порождал преобразования (3.23), имел $Q_{gh} = +1$ и удовлетворял условию нильпотентности

$$\{\Omega,\Omega\} = 0. \tag{3.31}$$

Из второго условия следует, что Ω линейно зависит от ρ и σ. Первое требует, чтобы в Ω содержался член $\sigma(p^2+m^2)$. Тогда преобразование, которое в общем виде можно определить как

$$\delta X = \frac{i}{2}\{\varepsilon\Omega, X\}, \quad \Omega^+ = \Omega, \quad \varepsilon^+ = \varepsilon, \quad (\varepsilon\Omega)^+ = -(\varepsilon\Omega), \tag{3.32}$$

дает $\delta p = 0$, $\delta q = i\varepsilon\sigma p$. Чтобы было $\delta\ell \neq 0$, в Ω должен быть член, линейный по k. Естественно поэтому положить

$$\Omega = ik\rho + \sigma(p^2+m^2). \tag{3.33}$$

При этом $\delta\ell = \frac{1}{2}i\varepsilon\rho$, что не совпадает буквально с (3.23). Мы, однако, ожидаем, что обобщенный импульс будет пропорционален $\dot{\bar\sigma}$. Сейчас мы увидим это, но сначала доведем дело до конца.

Легко видеть, что для (3.33) условие $\{\Omega,\Omega\} = 0$ выполнено. Это значит, что преобразование (3.32) нильпотентно. Пользуясь тождеством Якоби и (3.26), отсюда можно вывести, что

$$\delta\{\Omega, X\} = 0 \tag{3.34}$$

для любой функции переменных $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$. В частности, если в качестве гамильтониана взять

$$\mathcal{H} = \{\Omega, \bar{\Omega}_1\}, \quad \bar{\Omega}_1^+ = -\bar{\Omega}_1, \tag{3.35}$$

где $\bar{\Omega}_1$ имеет $Q_{gh} = -1$ ($\varepsilon_{\bar{\Omega}_1} = 1$), то этот гамильтониан будет инвариантным при любом выборе $\bar{\Omega}_1$, т.е.

$$\{\Omega, \mathcal{H}\} = 0. \tag{3.36}$$

Конструкция действия теперь ясна:

$$S = \int_0^1 d\tau\{p\dot{q} + k\dot{\ell} + \dot{\sigma}\bar{\rho} + \dot{\bar{\sigma}}\rho - \mathcal{H}\} = \int_0^1 dt\,(\dot{Q}\mathcal{P} - \mathcal{H}), \tag{3.37}$$

где $\mathcal{H}$ определяется в (3.37). Заметим, что для эрмитовости действия необходима антиэрмитовость антикоммутирующих импульсов ρ, $\bar{\rho}$. Инвариантность кинетической части действия из всего предыдущего не очевидна. Чтобы проверить её, найдем преобразование всех переменных

$$\delta q = i\varepsilon\sigma p, \; \delta p = 0, \; \delta\ell = -\tfrac{1}{2}\varepsilon\rho, \; \delta\bar{\rho} = \tfrac{i}{2}\varepsilon(p^2+m^2), \; \delta\bar{\sigma} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon k. \tag{3.38}$$

Остальные переменные не получают приращений. Вычислив вариацию действия, находим

$$\delta S = \frac{i}{2}\varepsilon\left[\sigma(p^2 - m^2)\right]_0^1, \tag{3.39}$$

откуда следуют граничные условия для $\sigma(\tau)$:

$$\sigma(0) = \sigma(1) = 0, \tag{3.40}$$

соответствующие граничным условиям для $h(\tau)$. До сих пор явный вид гамильтониана не использовался. Простейший получится, если взять

$$\bar{\Omega}_1 = \tfrac{1}{2}\ell\bar{\rho}, \quad \mathcal{H} = \{\Omega, \bar{\Omega}_1\} = \frac{i}{2}\rho\bar{\rho} + \frac{1}{2}\ell(p^2+m^2). \tag{3.41}$$

Действие тогда имеет вид

$$S = \int_0^1 d\tau\left[\dot{q}p + \dot{\ell}k + \dot{\sigma}\bar{\rho} + \dot{\bar{\sigma}}\rho - \frac{i}{2}\rho\bar{\rho} - \frac{\ell}{2}(p^2+m^2)\right]. \tag{3.42}$$

Можно исключить ρ и $\bar{\rho}$, пользуясь уравнениями

$$\rho = -2i\dot{\bar{\sigma}}, \quad \bar{\rho} = 2i\dot{\sigma}, \tag{3.43}$$

и получить обычный лагранжиан с ФП – духами и калибровочным условием $\frac{d}{d\tau}\ell = 0$.

Может возникнуть вопрос, почему выбран данный порядок расстановки $\dot{\sigma}\bar{\rho}$, а не противоположный $\bar{\rho}\dot{\sigma}$. Этот порядок связан с определением ССП. При таком упорядочении гамильтоновы уравнения движения имеют стандартный вид:

$$\dot{\bar{\rho}} = \{\mathcal{H}, \bar{\rho}\} = -\frac{\partial^L\mathcal{H}}{\partial\sigma}, \qquad \dot{\sigma} = \{\mathcal{H}, \sigma\} = \frac{\partial^R\mathcal{H}}{\partial\bar{\rho}}.$$

Кроме того, преобразование (3.32), (3.33) дает для q, p и ℓ правильное выражение (3.23). Может, конечно, возникнуть и более общий вопрос – а зачем всё это нужно? Нельзя ли обойтись без духов и лишних переменных ? Конечно, можно, однако приведенная здесь процедура построения обобщенного фазового пространства очень облегчает жизнь при решении более трудных задач, до предела автоматизируя процедуру квантования. В действии (3.42) все переменные совершенно независимы, и мы можем выполнить квантование, просто заменив ССП на коммутаторы или антикоммутаторы, умноженные на i. Для отбора физических состояний достаточно наложить условия

$$\hat{\Omega}\,|\,phys\rangle = 0,$$

где $\hat{\Omega}$ – оператор, соответствующий классической функции Ω. Условие $\{\Omega, \Omega\} = 0$ переходит в квантовом случае в $\hat{\Omega}^2 = 0$. При этом возникает проблема упорядочения операторов в $\hat{\Omega}$. В нашем простом случае эта проблема решается тривиально, однако в более общем случае из $\{\Omega, \Omega\} = 0$ не обязательно следует, что $\hat{\Omega}^2 = 0$. В частности, в теории бозонной струны условие $\hat{\Omega}^2 = 0$ выполнено лишь при $d = 26$. Нильпотентность оператора $\hat{\Omega}$ имеет, таким образом, фундаментальное значение. Только при условии нильпотентности можно последовательно исключить все нефизические степени свободы при сохранении унитарности. Более подробное обсуждение этого вопроса, а также далеко идущие обобщения изложенной процедуры можно найти в литературе, приведенной в конце этих лекций.

Здесь мы получим действие (3.42) ещё одним, более коротким способом, который поясняет происхождение расширенного фазового пространства. Исходное действие

$$\int d\tau\,[p\dot{q} - \tfrac{1}{2}\ell(p^2+m^2)]$$

инвариантно относительно преобразования (3.23). Простой способ сохранить эту инвариантность при фиксации калибровки состоит в том, чтобы добавить к лагранжиану член

$$-\hat{\delta}\,[2\bar{\sigma}(\dot{\ell}-F)], \quad (\delta \equiv \varepsilon\hat{\delta}).$$

Если операцию δ определить так, что она нильпотентна, т.е. $\delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2}=0$ (это соответствует нильпотентности Ω), то добавка к действию будет автоматически инвариантна, и мы получаем БРС-инвариантное действие. Положим $\delta\bar{\sigma}=-\frac{1}{2}\varepsilon k$, $\delta\ell = i\varepsilon\dot{\sigma}$. Тогда добавка равна

$$k\dot{\ell} - 2i\dot{\bar{\sigma}}\dot{\sigma}.$$

Вводя обобщенные импульсы (ср. (3.43))

$$\bar{\rho} = \frac{\partial^L\mathcal{L}}{\partial\dot{\sigma}} = 2i\dot{\bar{\sigma}}, \quad \rho = \frac{\partial^L\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\sigma}}} = -2i\dot{\sigma},$$

найдем гамильтониан

$$\mathcal{H} = \dot{q}p + \dot{\ell}k + \dot{\sigma}\bar{\rho} + \dot{\bar{\sigma}}\rho - \mathcal{L} = \frac{i}{2}\rho\bar{\rho} - \frac{1}{2}\ell(p^2+m^2),$$

по которому сразу восстанавливается действие (3.37). При таком подходе мы, однако, не знаем генератора преобразования δ, у нас есть лишь условие нильпотентности, $\delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2}=0$. Нильпотентность на q, ℓ и $\bar{\sigma}$ дает $\delta\sigma=\delta\rho=\delta k=0$. С помощью (3.42) можно найти и $\delta\bar{\rho}$, для этого нужно воспользоваться уравнением движения

$$\dot{k} = -\frac{1}{2}(p^2+m^2).$$

Таким образом, мы восстановили все преобразования (3.38) и можем найти подходящий генератор Ω. Конечно, такой способ трудно применить в более сложном случае, но подход, связанный с построением Ω, легко обобщается.

Пока отложим эти обобщения и покажем как вычислить пропагатор частицы. Стандартное выражение для пропагатора на языке континуальных

интегралов можно записать сразу:

$$G(q_f,q_i)=\int[\mathcal{D}x^\mu][\mathcal{D}p^\mu][\mathcal{D}\ell][\mathcal{D}k][\mathcal{D}\sigma][\mathcal{D}\bar{\rho}][\mathcal{D}\bar{\sigma}][\mathcal{D}\rho]\,e^{iS}. \qquad (3.44)$$

Интегрирование проводится по всем функциям, удовлетворяющим необходимым граничным условиям. Мы их не обсуждали. Заметим лишь, что $q(0)=q_i$, $q(1)=q_f$, $\dot{p}(0)=\dot{p}(1)=0$ и что граничные условия не должны нарушать БРС - инвариантность. Для вычисления интеграла удобно разложить все переменные в ряды Фурье

$$\ell = \ell_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\ell_n\sin(\pi n\tau),$$

$$q^\mu = q_i^\mu + (q_f^\mu - q_i^\mu)\tau + \sum_{n=1}^{\infty} q_n^\mu \sin(\pi n\tau), \ \dots \qquad (3.45)$$

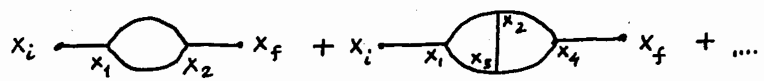
Все интегралы вычисляются тривиально, и получаем

$$G(q_f,q_i) \sim \int d^{(d)}p_0^\mu \int_0^\infty d\ell_0\,\exp\{-ip_0^\mu(q_f-q_i)_\mu - \frac{i}{2}\ell_0(p^2+m^2)\}. \qquad (3.46)$$

Полагая $m^2 \to m^2 - i\varepsilon$, находим стандартное выражение для пропагатора

$$G(x) \sim \int d^{(d)}p_0\,\frac{e^{-ip_0x}}{p_0^2+m^2-i\varepsilon}. \qquad (3.47)$$

Нетрудно понять, как получить радиационные поправки. Например,



При этом нужно договориться, что вершинам диаграмм соответствует один и тот же фактор g. Ниоткуда, однако, не следует, что в вершинах встречаются только три частицы или что вершинный фактор не должен содержать производных по x_i. Внутри самой теории не возникает существенных ограничений на вид взаимодействия (требования сходимости или перенормируемости, которые сильно ограничивают выбор вершин, не связаны с основами теории, являются внешними). В теории струн, в отличие от этого, вершины определяются почти однозначно, но пока достаточно простую конструкцию вершины получить не удалось.

Понятие о БРС - заряде обобщается на неабелевы симметрии. Для его определения достаточно знать коммутационные соотношения между генераторами калибровочной группы (алгебру связей)

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = f_{ij}^k \hat{L}_k \qquad (3.48)$$

(ради простоты ограничимся обычными коммутаторами, нетрудно обобщить построение на случай супералгебры). Введем духи $\hat{\sigma}^i$, антидухи $\hat{\bar{\mathcal{P}}}_i$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\{ \hat{\sigma}^i, \hat{\bar{\mathcal{P}}}_j \} = \delta^i_j \, , \tag{3.49}$$

где $\hat{\bar{\mathcal{P}}}_i$ будем теперь считать эрмитовыми, $\hat{\bar{\mathcal{P}}}_i^+ = \hat{\bar{\mathcal{P}}}_i$. Нетрудно показать, что оператор

$$\hat{\Omega} = \sigma^i L_i - \frac{1}{2} f_{ij}^k \hat{\bar{\mathcal{P}}}_k \hat{\sigma}^i \hat{\sigma}^j \tag{3.50}$$

нильпотентен (при доказательстве надо использовать тождество Якоби для f_{ij}^k). Структура второго члена в (3.50) также очень проста. Определим "духовые" генераторы

$$\hat{\tau}_i \equiv \hat{\bar{\mathcal{P}}}_m f_{in}^m \hat{\sigma}^n \, , \qquad [\hat{\tau}_i, \hat{\tau}_j] = f_{ij}^k \tau_k \, . \tag{3.51}$$

Тогда $\hat{\Omega}$ можно представить в виде суммы двух членов

$$\hat{\Omega} = (\hat{L}_i + \frac{1}{2} \hat{\tau}_i) \hat{\sigma}^i , \tag{3.52}$$

т.е. связи $\hat{L}_i$ как бы приобретают чисто "духовую" добавку. Легко обобщаются БРС-преобразования духа σ и "антидуха" $\bar{\mathcal{P}}$:

$$\delta \hat{\sigma}^k = \{ \hat{\Omega}, \hat{\sigma}^k \} = -\frac{1}{2} f_{ij}^k \hat{\sigma}^i \hat{\sigma}^j , \quad \delta \hat{\bar{\mathcal{P}}}_k = \{ \hat{\Omega}, \hat{\bar{\mathcal{P}}}_k \} = \hat{L}_k + \hat{\tau}_k \equiv \hat{J}_k \, . \tag{3.53}$$

Нетрудно проверить, что

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_k] = f_{ik}^\ell J_\ell \, , \quad [\Omega, \hat{J}_k] = 0 . \tag{3.54}$$

Все эти определения и результаты не зависят от динамики. Если у нас есть желание пользоваться расширенным фазовым пространством и общими калибровочными условиями типа (3.22), это легко сделать, введя переменные k_i, ℓ^i, $\bar{\sigma}_i$, ρ^i и добавив к $\hat{\Omega}$ $i k_i \rho^i$. Напомним, что для поднятия и опускания групповых индексов можно использовать стандартную групповую метрику

$$g_{ij} = f_{in}^m f_{jm}^n \, . \tag{3.55}$$

Для теории фермионной струны нужна более общая конструкция БВФ. Пусть $\hat{L}_i$ – связи (генераторы симметрий), удовлетворяющие коммутационным или антикоммутационным соотношениям

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j \} = f_{ij}^k \hat{L}_k \, . \tag{3.56}$$

Говорят, что $\hat{L}_i$ образуют градуированную алгебру Ли, если каждому генератору $\hat{L}_i$ соответствует число $\varepsilon_i \equiv \varepsilon(\hat{L}_i) = 0$ или I, причем $\varepsilon([\hat{L}_i, \hat{L}_j\}) = \varepsilon_i + \varepsilon_j$, $mod\ 2$, и

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j \} = \hat{L}_i \hat{L}_j - (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} \hat{L}_j \hat{L}_i \, , \tag{3.57}$$

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j \} = -(-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} [\hat{L}_i, \hat{L}_j \} \, . \tag{3.58}$$

Легко получить тождество Якоби

$$\sum_{\text{перест.}} (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} [\hat{L}_i, [\hat{L}_j, \hat{L}_k\}\} = 0 \tag{3.59}$$

и аналог соотношения (3.28). Короче, все свойства операции (3.56) в точности соответствуют свойствам суперскобок Пуассона. На равных основаниях можно пользоваться теми и другими. Пусть гамильтониан имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \ell^i \hat{L}_i \, . \tag{3.60}$$

Тогда можно построить БРС – заряд

$$\hat{\Omega} = \hat{\sigma}^i \hat{L}_i - \frac{1}{2} (-1)^{\varepsilon_i} f_{ij}^k \hat{\mathcal{P}}_k \hat{\sigma}^i \hat{\sigma}^j , \qquad \hat{\Omega}^2 = 0 , \tag{3.61}$$

и БРС- инвариантный гамильтониан

$$\hat{\mathcal{H}} = [\hat{\Omega}, \hat{\Omega}_1] \, , \quad [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\Omega}] = 0 . \tag{3.62}$$

Эрмитовы операторы $\hat{\sigma}^i$, $\hat{\bar{\mathcal{P}}}_i$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\hat{\sigma}^i, \hat{\bar{\mathcal{P}}}_j \} = \delta^i_j \, , \tag{3.63}$$

т.е. $\hat{\sigma}, \hat{\bar{\mathcal{P}}}$ – фермионы, если $\varepsilon_i = 0$, и бозоны, если $\varepsilon_i = $ I. Как указано выше, эту конструкцию можно расширить, добавив переменные $\bar{\sigma}_i$, ρ^i, k_i.

Того, что сказано здесь о духах и БРС- симметрии, вполне достаточно для технических приложений в теории струн и в калибровочных теориях поля. Может быть, стоит остановиться еще раз на полезности и даже необходимости введения этих понятий. Обычно считают, что введение духов – это чисто вспомогательный математический приём, без которого можно было бы обойтись, выбирая, например, калибровку, в которой нет нефизических степеней свободы.

I) Заметим, что такие калибровки далеко не всегда удается найти, даже в обычной электродинамике. Если мы, например, вычисляем квантовые флуктуации в задаче с источниками или с нетривиальными границами (эффект Казимира), исключить все нефизические степени свободы, по меньшей мере, затруднительно.

2) БРС- симметрия в любой калибровочной теории позволяет получить тождества Уорда – Славнова для функций Грина и тем самым найти все основные физические следствия калибровочной инвариантности. Можно сказать, что в квантовой теории БРС-симметрия полностью заменяет калибровочную симметрию. Хотя это и не общепринятая точка зрения, я решусь утверждать, что БРС – симметрия столь же фундаментальна как и калибровочная.

3) В подтверждение этой точки зрения можно добавить, что с помощью БРС -симметрии удается получить весьма полную классификацию аномалий в калибровочных теориях.

4) Наконец, как мы видели, БРС -симметрия полностью формулируется и на языке классической теории. Более того, расширив обычное пространство – время добавлением грассмановых координат, можно придать духам и БРС-симметрии геометрический смысл.

Очень кратко опишем эту интерпретацию. Рассмотрим $(d+2)$-мерное пространство $(x^\mu, \theta, \bar\theta)$, где $x^\mu \in \mathbb{R}_d;\ \theta, \bar\theta$ – вещественные грассмановы координаты $(\theta^2 = \bar\theta^2 = \theta\bar\theta + \bar\theta\theta = 0)$, и введем I-форму связности

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu dx^\mu + A_\theta d\theta + A_{\bar\theta} d\bar\theta, \tag{3.64}$$

где

$$A_\mu = A^a_\mu \lambda_a\,, \quad A_\theta = A^a_\theta \lambda_a\,, \quad A_{\bar\theta} = A^a_{\bar\theta} \lambda_a\,,$$

λ_a – генераторы некоторой компактной алгебры Ли. Базисные формы dx^μ антикоммутативны относительно внешнего умножения, $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$, а $d\theta$, $d\bar\theta$ – коммутативны, так как $\theta, \bar\theta$ -грассмановы (это важно!). Обычно калибровочная теория

рассматривается как теория связности $A = A_\mu dx^\mu$ на главном расслоении с группой G и базой $\mathbb{R}_d\,(M_d)$. При этом поле F есть форма кривизны, $F = dA + \frac{1}{2}[A,A]$. Внешнее дифференцирование $d = dx^\mu \partial_\mu$ связано со смещениями в x -пространстве. Горизонтальное смещение в пространстве расслоения определяется ковариантным дифференцированием $D = d + A$. Операция d нильпотентна, $d^2 = 0$. Если кривизна равна нулю, $F = 0$, то нильпотентна и операция D (условие $D^2 = 0$ эквивалентно соотношению $dA = -\frac{1}{2}[A,A]$; выражение для F или это соотношение иногда называют структурным уравнением Маурера – Картана). Формы $c = A_\theta d\theta$ и $\bar c = A_{\bar\theta} d\bar\theta$ естественно связать с духами и антидухами (поля A^a_θ и $A^a_{\bar\theta}$ скалярны, но подчиняются статистике Ферми). Смещениям по направлениям θ и $\bar\theta$ соответствуют нильпотентные операторы "дифференцирования" $\delta = d\theta\,\partial_\theta$, $\bar\delta = d\bar\theta\,\partial_{\bar\theta}$, а соответствующие ковариантные производные равны $D_\theta = \delta + c$ и $D_{\bar\theta} = \bar\delta + \bar c$. Полный оператор дифференцирования в суперпространстве равен $\Delta = d + \delta + \bar\delta$, а соответствующий ковариантный оператор есть $\mathcal{D} = \Delta + \mathcal{A}$. Используя введенные понятия, можно попытаться построить калибровочную теорию поля как теорию связности в суперпространстве. При этом естественно потребовать, чтобы полное "поле Янга – Миллса" $\mathcal{F} = \Delta\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A},\mathcal{A}]$ не зависело от смещений по нефизическим направлениям θ, $\bar\theta$, т.е. $\mathcal{F}(\mathcal{A}) = F(A)$. Это и приводит к БРСТ – симметрии

$$\delta A_\mu = D_\mu c\,, \quad \delta c = -\frac{1}{2}[c,c]\,, \ldots \tag{3.65}$$

Например, последнее условие получается как следствие обращения в нуль нефизических (в θ -направлении) компонент формы кривизны суперпространства. Заметим, что в такой интерпретации духи c и антидухи $\bar c$ входят в теорию симметрично, и соответственно можно ввести два БРСТ - заряда, Ω и $\bar\Omega$ (это операторы, соответствующие преобразованиям δ и $\bar\delta$).

Возможно, что описанная конструкция обобщения калибровочной теории, позволяющая с самого начала ввести духи, не единственна. Математиками это построение, по-видимому, не изучено, и точный смысл утверждения, что БРСТ – симметрия эквивалентна обычной калибровочной, пока не вполне ясен. Физическое истолкование теории с такими "изначальными" духами также требует дополнительных размышлений. Их роль в переходе от теории частиц к теории поля и от обычной теории струны к струнной теории поля кажется несколько мистической. Впрочем, не исключено, что трудность закопана глубже, так как связь между квантовой теорией частиц ("первично" квантованная теория) и квантовой теорией поля ("вторичное" квантование) так и не была до конца выяснена со времени основополагающих работ Гайзенберга, Паули, Дирака, Фока и др. в 30-е годы.

Файнман, Швингер и Томонага в 50-е годы попытались глубже разобраться в этой связи, и это помогло впоследствии построить квантовую теорию неабелевых калибровочных полей (напомним, что духи были открыты в фейнмановском представлении теории с помощью континуальных интегралов). Струна устраивает новый экзамен нашему пониманию этой проблемы или, в более общем плане, нашему пониманию нетривиальных связей между симметриями и квантовыми условиями. На этот раз мы вооружены знанием теории духов и теории аномалий[x)], которые, вероятно, сыграют ключевую роль в построении непротиворечивой квантовой теории поля струны. Описанный только что формализм, по-видимому, удастся перенести в струнную теорию поля, во всяком случае, сделаны первые шаги в этом направлении. Возможно также, что духи и БРСТ позволят совершенно по-новому понять фермионную струну и её суперсимметрию. Не исключено, что в теории, содержащей грассмановы измерения, фермионные степени свободы, связанные с бозонными, могут появиться весьма естественно.

Вернемся теперь к классической теории релятивистской частицы. Придадим ей явно калибровочно-инвариантный вид, а затем обобщим на случай частиц со спином. Мы сделаем даже несколько больше – получим релятивистскую теорию из нерелятивистской, применив принцип локализации к канонической симметрии исходного действия. Простейший квадратичный по скоростям лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu , \tag{3.66}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ – некая постоянная матрица. Используя линейные преобразования и исключая лишние переменные, можно привести $\eta_{\mu\nu}$ к диагональному виду $\eta_{\mu\nu}=(-1,-1,..,-1,+1,...,+1)$:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu \equiv \frac{1}{2}\dot{x}^2 . \tag{3.67}$$

Переходя, как и выше, к формализму первого порядка, перепишем $\mathcal{L}_0$ в виде $(q^\mu \equiv x^\mu)$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(p\dot{q}-\dot{p}q) - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(pq)^{\cdot}. \tag{3.68}$$

С точностью до граничных условий, которые нас сейчас не интересуют,

x) Сами названия "духи" и аномалии для столь фундаментальных понятий представляются сегодня неудачными.

полную производную $\frac{1}{2}(pq)^{\cdot}$ можно отбросить. Рассмотрим преобразования, относительно которых действие инвариантно. Как известно, их можно представить в форме

$$\delta p = -\frac{\partial G}{\partial q}, \quad \delta q = \frac{\partial G}{\partial p}, \quad G = G(p,q;a). \tag{3.69}$$

Здесь a_i – некоторые параметры, которые сначала предполагаются не зависящими от τ. Их зависимость от τ приведет к нарушению инвариантности, причем

$$\delta\mathcal{L}_0 = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(p\partial_p + q\partial_q)G - G\right] + \dot{a}_i\frac{\partial G}{\partial a_i}. \tag{3.70}$$

В частном случае однородных канонических преобразований (относительно которых инвариантна и форма $\frac{1}{2}(p\dot{q}-\dot{p}q)$), размерность G равна 2, так что

$$(p\partial_p + q\partial_q)G = 2G, \quad \delta\mathcal{L}_0 = \dot{a}_i\frac{\partial G}{\partial a_i}. \tag{3.71}$$

Сосредоточимся теперь на линейных преобразованиях. Они порождаются квадратичной по p и q функцией G, её общий вид

$$G = \frac{1}{2}a_1p^2 + a_2(pq) + \frac{1}{2}a_3q^2. \tag{3.72}$$

Соответствующее инфинитезимальное каноническое преобразование есть

$$\delta p = -a_2p - a_3q, \quad \delta q = a_1p + a_2q. \tag{3.73}$$

Если положить $\Psi^T = (p,q)$, то это преобразование можно записать в матричном виде

$$\delta\Psi = F\Psi, \quad F = \begin{pmatrix} -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}. \tag{3.74}$$

Здесь F – произвольная вещественная бесследная матрица. Такие генераторы порождают группу $SL(2,R)\sim SU(1,1)$. Легко видеть, что лагранжиан $\mathcal{L}_0$ инвариантен лишь относительно её абелевой подгруппы, определяемой условием $\delta p = 0$, т.е.

$$\delta p = 0, \quad \delta q = a_1p. \tag{3.75}$$

Если теперь предположить, что a_1 зависит от τ, то, согласно (3.70), получим $\delta\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\dot{a}_1p^2$. Для компенсации этой добавки введем калибровочное поле ℓ_1. Новый лагранжиан

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}(p\dot{q}-\dot{p}q) - \frac{1}{2}\ell_1p^2 \tag{3.76}$$

инвариантен относительно преобразований (3.75) с произвольной функцией $a_1(\tau)$, если при этом

$$\delta \ell_1 = \dot{a}_1 . \tag{3.77}$$

Процедуре перехода от лагранжиана (3.68) к калибровочно-инвариантному лагранжиану (3.76) посредством локализации преобразования (3.75) можно придать совершенно стандартную форму, переписав кинетическую часть лагранжиана $\mathcal{L}_0$ в виде

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4}\left(\overset{T}{\Psi} i\sigma_2 \frac{d\Psi}{d\tau} - \frac{d\Psi^T}{d\tau} i\sigma_2 \Psi \right) + \ldots \quad , i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.78}$$

где σ_2 – стандартная матрица Паули. Так как генератор преобразования (3.75) есть матрица $F_1 = a_1\sigma_-$, где $\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)$, то, вводя калибровочное поле $A = \ell_1\sigma_-$ и "удлиняя" производную в (3.78), получим калибровочно-инвариантный лагранжиан

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{4}\left\{ \overset{T}{\Psi} i\sigma_2 \left(\frac{d}{d\tau} - A\right)\Psi - \left[\left(\frac{d}{d\tau} - A\right)\Psi\right]^T i\sigma_2 \Psi \right\}, \tag{3.79}$$

совпадающий с (3.76). Калибровочные преобразования теперь имеют также стандартный вид. Для линейных канонических преобразований $\Psi' = U\Psi$ имеем $U^T i\sigma_2 U = i\sigma_2$. Отсюда следует, что лагранжиан (3.79) инвариантен относительно этих преобразований, если

$$A' = UAU^{-1} + \dot{U}U^{-1}. \tag{3.80}$$

В нашем простом случае конечное преобразование совпадает с (3.75), и его матрицу $U = U_1$ легко написать:

$$U_1 = 1 + a_1\sigma_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_1^{-1} = 1 - a_1\sigma_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что лагранжиан (3.77) дает теорию релятивистской скалярной частицы с нулевой массой. Легко также понять, что процесс локализации глобальных симметрий в этом случае можно продолжить. Действительно, лагранжиан (3.76) инвариантен относительно ещё одной подгруппы группы $SL(2,R)$, если допустить линейное преобразование калибровочного "потенциала" ℓ_1:

$$\delta p = -a_2 p, \quad \delta q = a_2 q, \quad \delta \ell_1 = 2a_2\ell_1 . \tag{3.81}$$

В этом преобразовании легко узнать растяжения, относительно которых p, q и ℓ_1 имеют соответственно размерности -I, +I, +2. Локализация этого преобразования приводит в итоге к теории с калибровочным полем

$$A = \ell_1\sigma_- - \ell_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} -\ell_2 & 0 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix}, \tag{3.82}$$

которое преобразуется согласно общему правилу (3.80) с матрицей

$$U = e^{-a_2\sigma_3}(1 + a_1 e^{-a_2}\sigma_-) = \begin{pmatrix} e^{-a_2} & 0 \\ a_1 & e^{a_2} \end{pmatrix}. \tag{3.83}$$

Легко найти, что лагранжиан (3.79) сводится к

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{p}q) - \frac{1}{2}\ell_1 p^2 - \ell_2 (pq). \tag{3.84}$$

Как видно из (3.83), эта теория неабелева, просто преобразуется лишь калибровочный потенциал ℓ_2: $\delta\ell_2 = \dot{a}_2$, $\delta\ell_1 = \dot{a}_1 + 2(a_2\ell_1 - a_1\ell_2)$.

Неабелеву калибровочную теорию (3.84) можно квантовать стандартными методами. Наиболее удобно воспользоваться описанным выше квантованием в расширенном фазовом пространстве. Ввиду возможности появления аномалий, такая теория заслуживает отдельного рассмотрения. Предложенный подход можно попытаться использовать для описания массивных релятивистских частиц, а также для калибровочной формулировки релятивистской задачи двух тел (например, если добавить к (3.68) член $\frac{1}{2}kx^2$, можно прийти к калибровочной теории релятивистского осциллятора, естественно обобщаемой на случай двух частиц). Так как наша основная цель – струна, мы оставляем эти возможности в стороне.

Сформулированный выше подход легко применить к теории частиц со спином. Простейший лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{p}q) - \frac{i}{2}\psi\dot{\psi} - \frac{1}{2}p^2, \tag{3.85}$$

где ψ^μ – грассмановы переменные (однокомпонентные или двухкомпонентные). Группа линейных канонических преобразований в этом случае есть $OSp(1,1|2)$ x). Локализация преобразований выполняется точно так же, как и в случае скалярной частицы. Введем $\Psi^T = (p, q, \psi)$ или $\Psi^T = (p, q, \psi_1, \psi_2)$ и заменим в (78) матрицу $i\sigma_2$ на матрицу

$$\Gamma = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i1 \end{pmatrix}.$$

---

x) Алгебра этой группы играет чрезвычайно важную роль в новых конструкциях перехода от теории частиц к теории поля.

Построив суперматрицу преобразований симметрии лагранжиана (3.85) и введя соответствующее калибровочное поле A, можно получить суперкалибровочно-инвариантный лагранжиан. В простейшем случае, когда ψ – однокомпонентная грассманова переменная, находим лагранжиан

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{p}q) - \frac{i}{2}\psi\dot{\psi} - \frac{1}{2}\ell p^2 - \frac{i}{2}\chi(p\psi), \tag{3.86}$$

где χ – грассманова часть калибровочного поля. Аналогично строится и более общая суперкалибровочная теория для двухкомпонентных грассмановых величин ψ^μ. Квантовую теорию можно построить описанным в лекциях методом. Теорию с фермионными степенями свободы можно обобщить на случай большего числа грассмановых компонент ψ_i^μ, $i = 1, \ldots, N$. Гамильтониан можно написать в виде

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\ell_1 p^2 + \ell_2(pq) + i\chi_n(p\psi_n) - \frac{i}{2}\psi_m \ell_{mn}\psi_n. \tag{3.87}$$

Здесь ℓ_1, ℓ_2, $\ell_{mn} = -\ell_{nm}$ – бозонные компоненты калибровочного поля, а χ_n – его фермионные компоненты. Само калибровочное поле по-прежнему не имеет кинетических членов (одномерность!). При росте N число динамических переменных ψ_i^μ растет как $\sim N$, а число связей растет как $\sim N^2$. Ясно, что при достаточно большом значении N все динамические переменные "съедаются" связями. Забавно, что в $d = 4$ это происходит при $N = 8$. Напомним, что (3.87) есть "одномерная" супергравитация, метрика $\eta_{\mu\nu}$ – плоская. Любопытно, что структура квантовой теории, соответствующей (3.87), зависит от сигнатуры метрики. В теории струны аналогичная зависимость ещё более существенна. Возможно, что сигнатуру как и размерность объемлющего пространства, можно зафиксировать требованием внутренней непротиворечивости квантовой теории струны.

Вернемся, наконец, к струнам. Действуя по аналогии с нашим подходом к релятивистским частицам, начнем с лагранжиана Д'Аламбера

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x'^2) = p\dot{x} - \frac{1}{2}(p^2 + x'^2), \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}. \tag{3.88}$$

Не представляет труда найти линейные симметрии этого лагранжиана

$$\delta p = (f_1 p + f_2 x')', \quad \delta x = f_2 p + f_1 x'. \tag{3.89}$$

Полагая $\psi^T = (\psi_1, \psi_2) = (p, x)$, $\partial = \partial/\partial\sigma$, запишем эти преобразования в виде

$$\delta\psi = \partial_+ F_\delta \partial_-, \quad \partial_+ = \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}, \tag{3.90}$$

$$F_\delta = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}. \tag{3.91}$$

Пока f_1 и f_2 рассматриваются как параметры, не зависящие от τ и σ, указанный в (3.89) и (3.90) порядок расстановки производной ∂ несущественен. Чтобы зафиксировать его в том случае, когда f_1 и f_2 – функции τ и σ, наложим на операцию δ групповое условие в виде требования замыкания двух последовательных преобразований: коммутатор преобразований δ и $\bar{\delta}$, соответствующих функциям f_1, f_2 и $\bar{f}_1, \bar{f}_2$, должен представлять собой преобразование того же вида. Для (3.90) легко показать, что

$$[\delta, \bar{\delta}] = \partial_+ F_{[\delta,\bar{\delta}]} \partial_-, \quad F_{[\delta,\bar{\delta}]} = F_{\bar{\delta}} F'_\delta - F_\delta F'_{\bar{\delta}}, \tag{3.92}$$

причем матрица $F_{[\delta,\bar{\delta}]}$ имеет такой же вид как (3.91):

$$(F_{[\delta,\bar{\delta}]})_{00} = (\bar{f}_1 f_1' - f_1 \bar{f}_1') + (\bar{f}_2 f_2' - f_2 \bar{f}_2') = (F_{[\delta,\bar{\delta}]})_{11},$$

$$(F_{[\delta,\bar{\delta}]})_{01} = (F_{[\delta,\bar{\delta}]})_{10} = (\bar{f}_1 f_2' - f_2 \bar{f}_1') + (\bar{f}_2 f_1' - f_1 \bar{f}_2'). \tag{3.93}$$

При другой расстановке оператора ∂ в (3.89) алгебра преобразований (3.89) не замыкается.

Естественно ввести калибровочный потенциал

$$\mathcal{A} = \partial_+ A \partial_-, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}. \tag{3.94}$$

Калибровочно-инвариантный лагранжиан и калибровочные преобразования записываются теперь в компактном виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\psi^T \Gamma(\partial_\tau + \mathcal{A})\psi, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.95}$$

$$\delta\mathcal{A} = \dot{\mathcal{F}} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}], \quad \mathcal{F} = \partial_+ F \partial_-. \tag{3.96}$$

Лагранжиан (3.95) можно переписать в обычной форме

$$\mathcal{L} = p\dot{x} + A_1(px') + \frac{1}{2}A_2(p^2 + x'^2). \tag{3.97}$$

Введя "импульсы" $p^a=(p^0,p^1)$, где $p^0=p$, $p^1=\partial\mathcal{L}/\partial x'$, можно привести это действие к симметричному квазигамильтонову виду $(\partial_a=(\partial_\tau,\partial_\sigma))$:

$$\mathcal{L}_s = p^a\partial_a x - \frac{1}{2} G_{ab}\, p^a p^b, \tag{3.98}$$

где

$$G_{ab}=\frac{1}{A_2}\begin{pmatrix}(A_1^2-A_2^2) & -A_1\\ -A_1 & 1\end{pmatrix}, \quad \det G_{ab}=-1. \tag{3.99}$$

Удобно ввести также обратную матрицу

$$G^{ab}=-\frac{1}{A_2}\begin{pmatrix}1 & A_1\\ A_1 & (A_1^2-A_2^2)\end{pmatrix}, \quad G^{ac}G_{cb}=\delta^a_b. \tag{3.100}$$

Лагранжиану (3.98) можно дать инвариантное геометрическое истолкование, положив

$$G^{ab}=\sqrt{-g}\,g^{ab}, \quad G_{ab}=\frac{1}{\sqrt{-g}}g_{ab}, \quad \det g_{ab}=g. \tag{3.101}$$

Детерминант симметричной матрицы g_{ab} произволен, и она зависит от трех произвольных функций, например, от A_1, A_2 и g или от A_1, A_2 и g_{11}. Заметим, что

$$\frac{g_{00}}{g_{11}}=\det A, \quad \frac{g_{01}}{g_{11}}=-\frac{1}{2}\operatorname{Sp} A. \tag{3.102}$$

Матрицу g_{ab} можно выразить через $\sqrt{-g}$ и инварианты матрицы A относительно произвольных несингулярных преобразований $(A\to LAL^{-1})$:

$$\frac{g_{00}}{\sqrt{-g}}=\frac{2d}{\sqrt{s^2-4d}}, \quad \frac{g_{11}}{\sqrt{-g}}=\frac{2}{\sqrt{s^2-4d}}, \quad \frac{g_{01}}{\sqrt{-g}}=-\frac{s}{\sqrt{s^2-4d}}, \tag{3.103}$$

где

$$s=\operatorname{Sp} A=2A_1, \quad d=\det A=A_1^2-A_2^2. \tag{3.104}$$

Происхождение симметрии Вейля теперь стало в какой-то степени понятным. Мы локализовали линейные канонические симметрии лагранжиана (3.88) и получили таким способом калибровочно-инвариантную теорию струны. Симметрия Вейля теперь связана просто с добавлением лишних переменных (три функции g_{ab}, вместо двух, A_1 и A_2). Таким образом, симметрия Вейля есть просто следствие калибровочной инвариантности теории. Для квантования струны можно теперь воспользоваться аппаратом квантования неабелевых калибровочных теорий поля, в частности, можно стандартным способом ввести дух и БРС – симметрию.

К фермионной струне можно применить совершенно аналогичный подход. Сначала введем на струне новые переменные, описывающие распределение вдоль неё спина. По аналогии с теорией релятивистской частицы со спином введем с этой целью грассмановы двухкомпонентные переменные ψ_i^μ, $i=1,2$. Рассмотрим "затравочный" лагранжиан

$$\mathcal{L}_0=-\frac{1}{2}\partial_a x\cdot\partial^a x-\frac{i}{2}\bar\psi\gamma^a\partial_a\psi, \quad a=0,1. \tag{3.105}$$

Здесь $\bar\psi=\psi^+\gamma^0$,

$$\gamma^0=-i\sigma_2, \quad \gamma^1=\sigma_1, \quad \gamma_{"5"}=-\gamma^0\gamma^1=\sigma_3. \tag{3.106}$$

В соответствии с выбором вещественного (майорановского) представления для двумерных γ-матриц компоненты поля $\psi_i^\mu(\sigma,\tau)$ можно взять вещественными, т.е. $\overset{+}{\psi}{}^\mu=\overset{T}{\psi}{}^\mu$. Перепишем лагранжиан (3.105) в более привычной для нас форме:

$$\mathcal{L}_0=\frac{1}{2}(\dot x^2-x'^2)+\frac{i}{2}(\overset{T}{\psi}\dot\psi+\overset{T}{\psi}\sigma_3\psi'). \tag{3.107}$$

Заметим, что если перейти к переменным $u_\pm=\sigma\pm\tau$, то, как и в случае чисто бозонной струны, динамика распадается на два независимых сектора – левых и правых возбуждений. Это же относится и к калибровочно-инвариантному лагранжиану струны.

Искать симметрии этого лагранжиана можно методом, изложенным выше. Чтобы не делать лишних вычислений, полезно помнить о размерностях

$$[p]=L^{-1}, \quad [x]=L^0, \quad [\mathcal{L}]=L^{-2}, \quad [\psi]=L^{-1/2}. \tag{3.108}$$

В качестве упражнения предлагается показать, что лагранжиан (3.107) инвариантен (с точностью до полной производной) относительно преобразований

$$\delta p=-i(\nu^T\sigma_3\psi'), \quad \delta\psi=-p\nu+x'\sigma_3\nu, \quad \delta x=i\overset{T}{\nu}\psi. \tag{3.109}$$

Можно также убедиться, что сохраняется инвариантность относительно бозонного преобразования (3.89). Однако условие замыкания преобразований (3.89) и (3.109) требует небольшого расширения (3.89), включающего преобразования (3.89). Те же условия замыкания определяют порядок расстановки производных ∂. Соответствующие вычисления достаточно громоздки, и мы их здесь не приводим. Введя калибровочные поля A_1, A_2, χ_1, χ_2, соответствующие калибровочным функциям f_1, f_2, ν_1, ν_2, и удлиняя производную ∂_τ, как это делалось выше, можно в конце концов получить калибровочно-инвариантный лагранжиан. Он совпадает с лагранжианом модели Неве – Шварца – Рамана (НШР).

Спектр состояний струны НШР существенно зависит от граничных условий на $\psi^\mu(\sigma,\tau)$, которые могут быть для фермионной переменной периодическими

$$\psi^\mu(\sigma,\tau) = \psi^\mu(\sigma+\pi,\tau) \qquad \text{(Рамон)}$$

или антипериодическими

$$\psi^\mu(\sigma,\tau) = -\psi^\mu(\sigma+\pi,\tau) \qquad \text{(Неве – Шварц)}.$$

Для случая Рамона основное состояние имеет полуцелый спин, а для НШ – целый. Соответственно все возбужденные состояния будут бозонными или фермионными. Легче всего понять этот важный факт на простой модели одномерного антиферромагнетика.

а б

В случае чётного числа спинов (рис. а), основное состояние, очевидно, имеет целый спин. Переворачивание любого числа спинов оставляет состояние бозонным. В случае нечетного числа спинов в цепочке основное состояние и все возбужденные имеют полуцелый спин. Граничные условия для такой цепочки соответствуют условию Невё– Шварца в случае (а) и условию Рамона в случае (б). Заметим, что аналогия с антиферромагнетиком заслуживает более подробного изучения.

В секторе Невё – Шварца имеется тахион, для которого $\alpha' M^2 = -\frac{d-2}{16}$. Из условия релятивистской инвариантности следует также, что $\frac{1}{2} = \alpha_0 = -\alpha' M^2 = \frac{d-2}{16}$, т.е. d = 10. Было показано, что релятивистская квантовая теория моделей Н – Ш и Рамона существует лишь при d = 10. При этом, при совместном рассмотрении фермионного и бозонного секторов, часть спектра, содержащая тахион, может быть отброшена (отщепляется), а полученная в результате теория не содержит тахионов и является суперсимметричной. На основе этого результата Грин и Шварц позднее построили модель явно суперсимметричной струны, вообще не содержащей тахионного сектора, её и назвали суперструной. Как и модель Невё – Шварца – Рамона, суперструна Грина – Шварца существует

лишь при d = 10. Вероятно, что струны Н – Ш и Г – Ш могут быть получены из некоторой более общей теории. В частности, не исключено, что теория суперструн может быть получена из теории бозонной струны с помощью соответствующей компактификации 16 измерений.

Заканчивая обзор элементарной теории струны, стоит сказать несколько слов о возможности чисто алгебраического подхода к её построению. До сих пор мы больше подчеркивали геометрические аспекты струны. Геометрическая трактовка струны, конечно, очень важна для более глубокого понимания её природы. Однако, с точки зрения задачи построения струнной теории поля, алгебраический подход не менее важен. К тому же исторически он предшествовал геометрической теории. Сначала были придуманы дуальные амплитуды, затем были найдены для них осцилляторные представления, и только после этого удалось заметить, что эти осцилляторы описывают возбуждения релятивистской струны. Отличия релятивистской струны от нерелятивистской наиболее ясно видны в калибровочном подходе. Релятивистская струна отличается от нерелятивистской наличием связей $\dot{x}x' = 0 = \dot{x}^2 + x'^2$ (или же $(\dot{x} \pm x')^2 = 0$), калибровочных полей A_1, A_2 и духов. Если положить (в дальнейшем мы положим $2\alpha' = 1$)

$$\begin{aligned} P_u^\mu &= (\dot{x}+x')^\mu = \partial_u x^\mu, \\ P_v^\mu &= (\dot{x}-x')^\mu = \partial_v x^\mu, \end{aligned} \tag{3.110}$$

где $u = \tau+\sigma$, $v = \tau-\sigma$, то связи можно записать в такой же форме, как для безмассовой релятивистской частицы: $P_u^2 = P_v^2 = 0$. Как неоднократно подчеркивалось, левые и правые возбуждения можно изучать совершенно независимо. Рассмотрим одни левые возбуждения, зависящие только от u :

$$\begin{aligned} x^\mu(u) &= x_0^\mu + P_0^\mu \tau + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-inu}, \\ P_u^\mu &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n^\mu e^{-inu}, \quad \alpha_0^\mu = P_0^\mu, \end{aligned} \tag{3.111}$$

(аналогично – для правых возбуждений, отмечаемых иногда тильдой). Выразив P_u^2 через операторы α_n, найдем фурье-коэффициенты оператора P_u^2 :

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_{m-n}\cdot\alpha_n. \tag{3.112}$$

Их обычно называют операторами Вирасоро, хотя впервые они были введены Барбашовым и Черниковым в 1965 году, в работе по нелинейной теории поля, эквивалентной геометрической теории струны бесконечной длины, движущейся в трехмерном пространстве.

Напомним, что α_n удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = n\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}, \quad \alpha_n^+ = \alpha_{-n}.$$

При $n>0$ это операторы уничтожения, а при $n<0$ -рождения. Операторы L_m, $m>0$, легко записываются в упорядоченной форме (операторы уничтожения справа). При упорядочении оператора L_0 возникает расходящаяся сумма, которую можно регуляризовать методом § 2. Мы, однако, просто примем в качестве определения

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}\cdot\alpha_m. \tag{3.113}$$

Нетрудно убедиться, что

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{d}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}. \tag{3.114}$$

Для вычисления последнего члена (аномалии) проще всего подсчитать выражение

$$\langle 0|\, L_m L_{-m}\,|0\rangle,$$

вклад в которое дают лишь конечные суммы от $n=1$ до $n=m-1$. Если забыть об аномальной добавке в коммутатор, то алгебра операторов L_n имеет стандартный вид алгебры Ли, но с бесконечным числом генераторов. Её структурные константы, очевидно, равны

$$f_{mn}^{k} = (m-n)\,\delta_{k,m+n}. \tag{3.115}$$

Нетрудно показать, что это есть алгебра группы диффеоморфизмов окружности, $Diff(S^1)$. Положим $e^{iu}=z$ и рассмотрим гладкие отображения $S^1 \to S^1$ $(z \to g(z))$ с законом композиции

$$g_1 \circ g_2(z) = g_1(g_2(z)). \tag{3.116}$$

Определим представление $Diff(S^1)$ на функциях $f(z)$

$$\mathcal{D}_g f = f(g(z)), \quad \mathcal{D}_{g_1}\mathcal{D}_{g_2} f = f(g_1\circ g_2(z)). \tag{3.117}$$

Представив отображение, близкое к единичному, в виде

$$g(z) = z\,e^{i\varepsilon(z)} = z(1 + i\varepsilon(z) + \dots), \tag{3.118}$$

получаем

$$\mathcal{D}_g f(z) = f(z) + i\varepsilon(z)\, z\frac{d}{dz}f(z) + \dots \,. \tag{3.119}$$

Полагая

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\varepsilon_n z^{-n} = \sum \varepsilon_{-n} z^n, \quad \varepsilon_n^* = \varepsilon_{-n}, \tag{3.120}$$

получим представление $\mathcal{D}_g$ в виде

$$\mathcal{D}_g f(z) = \Big[1 - i\sum_n \varepsilon_{-n}\Big(-z^{1+n}\frac{d}{dz}\Big)\Big] f(z). \tag{3.121}$$

Таким образом, генераторы $Diff(S^1)$ в этом представлении равны

$$L_n = -z^{1+n}\frac{d}{dz} = ie^{inu}\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.122}$$

Эти генераторы, как легко видеть, удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры Вирасоро без аномальной добавки, обычно называемой центральным расширением (центральным, так как добавка коммутирует со всеми L_n).

У алгебры Вирасоро есть важная подалгебра, нечувствительная к расширению. Её образуют генераторы L_0, L_1, L_{-1}, которые удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры $su(1,1)\sim sl(2)$. Эта алгебра связана с подгруппой специальных дробно-линейных преобразований в группе $Diff(S^1)$:

$$g(z) = \frac{az+b}{b^* z + a^*}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1, \tag{3.123}$$

которая играла важную роль уже в старой дуальной теории. Тесно связанные с ней группы

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}; \quad \begin{array}{l} SL(2,\mathbb{C}):\ a,b,c,d \in \mathbb{C};\ (ad-bc)=1 \\ SL(2,\mathbb{Z}):\ a,b,c,d \in \mathbb{Z}; \end{array} \tag{3.124}$$

играют фундаментальную роль в современной геометрической теории струны. Любопытно, что в нашем подходе калибровочная группа частицы и струны получилась локализацией подгрупп линейных канонических (или их суперобобщений) симметрий $SU(1,1)$. Возможно, что это обстоятельство имеет какой-то глубокий смысл, пока не расшифрованный.

Вернемся к алгебре Вирасоро. По общему правилу введем духи σ_n, антидухи $\bar{\rho}_n$ и построим оператор БРС - заряда (здесь духи определены так, что $\sigma_n^+ = \sigma_{-n}$, $\rho_n^+ = -\rho_n$, $\{\sigma_m, \bar{\rho}_n\} = \delta_{m+n,0}$):

$$\Omega = \sum_m \sigma_m L_{-m} - \frac{1}{2}\sum_{k,m,n} f_{mn}^{\ k}\, \sigma_{-m}\sigma_{-n}\bar{\rho}_k . \tag{3.125}$$

В классической теории $\Omega^2 = 0$, однако в квантовой теории условие $\Omega^2=0$ выполняется не всегда. Сначала доопределим Ω, упорядочив операторы, и введем произвольную пока константу c_0:

$$\Omega = \sum_m \sigma_{-m}\left(L_m - c_0\delta_{m,0}\right) - \frac{1}{2}\sum_{m,n}(m-n):\sigma_{-m}\sigma_{-n}\bar{\rho}_{m+n}: \tag{3.126}$$

Прямыми, но достаточно громоздкими вычислениями можно показать, что

$$\Omega^2 = \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(d-26)n^3 + (2-d+24c_0)n\right]\sigma_n^+\sigma_n ,$$

т.е. $\Omega^2=0$ при условиях $d=26$, $c_0=1$. Напомним, что вакуум $|0\rangle$ определен условиями

$$\alpha_n|0\rangle = 0,\ \sigma_n|0\rangle=0,\ \bar{\rho}_n|0\rangle=0,\ n>0;\ \bar{\rho}_0|0\rangle=0, \tag{3.127}$$

выбор условий аннигиляции вакуума духовыми операторами, принятый здесь, не единственен, возможны другие: при данном выборе получается $c_0 = 1$. Определяя физические состояния условием $\Omega|физ.\rangle=0$, можно показать, что произвольное физическое состояние представимо в виде

$$|физ.\rangle = |попер.\rangle + \Omega|\ldots\rangle, \tag{3.128}$$

где $|попер.\rangle$ – состояние, в котором есть только поперечные возбуждения, а состояние $\Omega|\ldots\rangle$ имеет нулевую норму, так как $\Omega^2 = 0$. В физические величины эти состояния вклада не дают. Вспоминая, что Ω генерирует БРС-преобразования, заменяющие в квантовой теории калибровочные, можно попытаться рассматривать (3.128) как аналог калибровочного преобразования в пространстве состояний. Эта мысль лежит в основе некоторых новых подходов к построению струнной теории поля.

Отметим ещё одно замечательное обстоятельство: при $d = 26$ и $c_0 = 1$ можно определить обобщенные операторы Вирасоро, зависящие от духовых переменных и удовлетворяющие классической алгебре Вирасоро (без аномалии!). По общему определению (3.53) построим операторы

$$\mathcal{J}_m = \{\Omega, \bar{\rho}_m\} = (L_m - c_0\delta_{m,0}) + \sum(m-n):\bar{\rho}_{m+n}\sigma_{-n}: \tag{3.129}$$

Вычисляя коммутаторы, находим (на самом деле надо вычислить лишь аномалию при $m+n=0$)

$$[\mathcal{J}_m, \mathcal{J}_n] = (m-n)\mathcal{J}_{m+n} + \left\{\frac{d}{12}m(m^2-1) + \frac{1}{6}m(1-13m^2) + 2c_0 m\right\}\delta_{m+n,0} \tag{3.130}$$

Первый член в аномалии остался от операторов L_m, а новые возникли от добавок к L_m. При $d = 26$ и $c_0 = 1$ аномалия обращается в нуль и операторы $\mathcal{J}_m$ можно считать представлением генераторов классической группы диффеоморфизмов окружности.

Выше упоминалось о связи теории струн с комплексным анализом, в частности, о связи струнных диаграмм с теорией римановых поверхностей и аналитических функций, определенных на них. В соответствии с этим полезна несколько иная интерпретация операторов L_m и $\mathcal{J}_m$, очень важная также для истолкования теории струны как конформно-инвариантной теории поля в двумерном пространстве-времени. В соотношении $z=e^{iu}=e^{i(\tau+\sigma)}$ сделаем переход к евклидовой метрике $\tau\to -i\tau$, и будем рассматривать функции комплексной переменной $z=e^{\tau+i\sigma}$. Аналогично перейдем от $z=e^{iv}$ к $\bar{z}=e^{\tau-i\sigma}$. Тогда ясно, что $L_m=-z^{1+m}d/dz$ можно считать генераторами конформных преобразований, т.е. преобразований, производимых голоморфными (аналитическими) отображениями $z\to f(z)$ (аналогично используются антиголоморфные отображения $\bar{z}\to f(\bar{z})$ с генераторами $\tilde{L}_m$). В этой интерпретации можно поставить вопрос об определении алгебры Вирасоро на римановых поверхностях, однако присутствие аномалий значительно осложняет дело. Возможно, что в духовом варианте представления алгебры Вирасоро (т.е. генераторами $\mathcal{J}_m$) подобную задачу поставить и решить не только легче, но и полезней. Пока алгебра операторов $\mathcal{J}_m$ мало использовалась как физиками, так и математиками. Отметим, что $\mathcal{J}_0$ можно рассматривать как гамильтониан струны с духами. При этом, как и должно быть, вклады духов компенсируют вклады непоперечных осцилляторов. Например, вычислим "статсумму" для гамильтониана $\mathcal{J}_0$, которая, в частности, дает плотность числа промежуточных состояний в однопетлевой диаграмме

$$Z(q) = \mathrm{Sp}(q^{\mathcal{J}_0}) = \frac{1}{q}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-26+2}. \tag{3.131}$$

Здесь q^{-1}–от $c_0=1$, 2 – вклад духов, 26 – вклад d-мерных осцилляторов при $d = 26$. Мы видим, что остался лишь вклад поперечных состояний; в связи с этим иногда говорят об "отрицательной размерности" духовых переменных.

Все, что сказано о бозонных струнах, можно перенести на фермионные струны. Как и в случае бозонной струны, ограничимся левыми возбуждениями. Тогда вместо условия $p_u^2 = 0$ надо записать условие

$$p_u^2 + i\psi\partial_u\psi = 0. \tag{3.132}$$

Кроме того, появляется ещё одно условие, аналогичное связи в теории частиц:

$$p_u \cdot \psi = 0. \tag{3.133}$$

При этом $\psi = \psi_R$ или $\psi = \psi_{NS}$:

$$\psi_R = \sum_{n\in Z} \alpha_n e^{-inu} \ ; \quad \psi_{NS} = \sum_{p\in(Z+\frac{1}{2})} \beta_p e^{-ipu}. \tag{3.134}$$

Определяя генераторы L_n , F_n и G_n как фурье-образы связей (3.132) и (3.133) (F для R и G для NS), можно получить суперобобщения алгебры Вирасоро в случае Невё – Шварца:

$$\begin{gathered}[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{d}{8}n(n^2-1)\,\delta_{n+m,0}\ ;\\ \{G_r, G_p\} = 2L_{r+p} + \frac{d}{2}(r^2-\frac{1}{4})\,\delta_{r+p,0}\ ;\\ [L_n, G_r] = (\frac{n}{2}-r)G_{n+r}\ ;\quad p, r\in(Z+\frac{1}{2});\ m,n\in Z;\end{gathered} \tag{3.135}$$

и в случае Рамона:

$$\begin{gathered}[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{d}{8}n^3\,\delta_{n+m,0}\ ;\\ \{F_n, F_m\} = 2L_{n+m} + \frac{d}{2}n^2\,\delta_{n+m,0}\ ;\\ [L_n, F_m] = (\frac{n}{2}-m)F_{n+m}\ ;\quad m,n\in Z.\end{gathered} \tag{3.136}$$

Операторам L_n ставятся в соответствие фермиевские духи, а операторам G и F – бозевские духи $c_p, \bar{b}_p$ и $c_n, \bar{b}_n$. По алгебрам (3.135) и(3.136) легко построить соответствующие операторы Ω . Например, для (3.135)

$$\begin{gathered}\Omega = \sum \sigma_n(L_{-n} - c\delta_{n,0}) + \sum c_p G_{-p} - \frac{1}{2}\sum(m-n):\sigma_{-n}\sigma_{-n}\bar{\rho}_{m+n}: \\ + \sum(\frac{3}{2}n+p):\bar{b}_{-p}c_{n+p}\sigma_{-n}: - \sum c_r c_p \bar{b}_{-r-p}.\end{gathered} \tag{3.137}$$

Напомним, что $\bar{b}, c$ – бозевские операторы :

$$[c_p, c_q] = [\bar{b}_p, \bar{b}_q] = 0,\quad [c_p, \bar{b}_q] = \delta_{p+q,0}. \tag{3.138}$$

Условие $\Omega^2 = 0$ выполнено при d = I0, c = I/2. При этом операторы

$$J_n = \{\Omega, \bar{\rho}_n\}\ ,\quad \hat{G}_p = \{\Omega, \bar{b}_p\} \tag{3.139}$$

удовлетворяют алгебре (3.135) без аномалий. Алгебра (3.136) становится, при соответствующем определении J_n и F_n, не аномальной, если d = I0 и c = 0. Заметим, что основное состояние в секторе Рамона имеет нулевую массу, а в секторе Н – Ш – тахион (так как c =I/2). Всем состояниям струны Н – Ш можно приписать определенное значение мультипликативно-сохраняющегося квантового числа "G – чётности". Для основного состояния $|0\rangle_{NS}$ $G=-1$, для следующего состояния $G=+1$ ($\beta^{\mu}_{-1/2}|0\rangle$ в открытой струне или $\beta^{\mu}_{-1/2}\tilde{\beta}^{\nu}_{-1/2}|0\rangle$ замкнутой) и т.д.

Замечательное обстоятельство состоит в том, что: а) состояния с G = –I полностью "отщепляются" и их можно выбросить из спектра; б) спектр состояний струны Н – Ш–P с G = +I (бозонные) и возбуждениями Рамона (фермионные) суперсимметричен. Это и позволяет сформулировать теорию суперструны, не содержащей в спектре тахион. Часто суперструной или суперструной Грина – Шварца называют другую модель, в которой имеется явная I0-мерная суперсимметрия.На уровне древесных диаграмм струны Н – Ш – Р и Г – Ш эквивалентны, однако доказательство того, что они полностью эквивалентны,пока не найдено. Трудность состоит в том, что не удалось найти ясную геометрическую формулировку теории Г – Ш . Эта трудность, как и многие другие проблемы теории струны, по-видимому,связана с нашим недостаточным пониманием связей между двумерной геометрией поверхностей,заметаемых струной,и геометрией d-мерного пространства, в котором они "живут". Эти связи,несомненно,существуют, с их проявлениями мы сталкиваемся на каждом шагу, но истинная их природа остается невыясненной.

§ 4. Заключение и рекомендации к дальнейшему чтению

Теория струн – физическая теория, хотя она и связана с современной математикой неизмеримо сильнее и глубже, чем любая другая. Поэтому главный критерий её правильности – не внутренняя согласованность и математическая красота, а её согласие с данными опыта. В самом грубом приближении теория струн прошла первые испытания успешно. На сегодня она – единственная теория, в принципе способная дать непротиворечивое описание всех взаимодействий и решить проблемы, обсуждавшиеся в первых лекциях. Здесь мы попытаемся совсем кратко набросать,на каком пути можно надеяться спуститься с немыслимо высоких энергий и немыслимо абстрактных математических понятий к вещам, доступным эксперименту в недалёком будущем.

Начнем с перечисления основных типов известных на сегодня струн.

I) Бозонная струна в $d = 26$ (открытая и замкнутая). В её спектре есть только бозонные возбуждения, а основное состояние - тахион. С точки зрения объяснения свойств наблюдаемого мира она совершенно бесперспективна. Однако существуют достаточно серьезные основания считать, что посредством компактификации, фермионизации и т.п. из нее можно получить все остальные типы струн.

2) Суперструна Н - Ш - Р в $d = 10$ (открытая и замкнутая). Её суперсимметричная версия (речь идет о $d = 10$ суперсимметрии; на двумерной поверхности, заметаемой струной, с самого начала есть локальная суперсимметрия) не содержит в спектре тахиона. Открытая струна может быть связана с калибровочной группой $SO(32)$. В этом и только в этом случае происходит сокращение аномалий, о котором шла речь в § I.

3) Замкнутые суперструны в $d = 10$. В точечном пределе они дают $N = 2$ СУГРА в двух вариантах: А) векторноподобные фермионы, Б) киральные фермионы. В случае А получается СУГРА, которая возникает из $d = 11$ СУГРА тривиальной размерной редукцией. Хотя в этих теориях нет аномалий, прямого отношения к наблюдаемому на опыте миру, они, по-видимому, не имеют.

4) Наиболее важная для приложений - теория гибридной (или гетероидной) струны с калибровочной симметрией $E_8 \times E_8$ или $SO(32)$. Мы сейчас познакомимся с ней чуть подробней, но сначала закончим перечисление изученных на сегодня типов струн.

5) Упомянутая гибридная струна суперсимметрична. В $d = 10$ существуют гибридные струны другого типа, не обладающие суперсимметрией, с калибровочной группой $O(16) \times O(16)$. Из-за отсутствия суперсимметрии в таких моделях космологическая постоянная очень велика и поэтому пока не видно, как их можно использовать для описания реального мира. Известны различные типы гибридных струн, живущие в различных размерностях. В частности, можно построить теории в $d = 4$. Пока в них не удалось описать взаимодействия струн. Видимо, необходимо искать более общий подход к теории струн, в котором все упомянутые струнные модели возникали бы как различные "вакуумы" одной фундаментальной теории струны.

Сосредоточимся теперь на гибридной струне с калибровочной группой $E_8 \times E_8$, которая наиболее привлекательна с точки зрения описания реальности. В калибровке светового конуса её лагранжиан можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \partial_a x^i \partial^a x^i + \partial_a x^I \partial^a x^I + i\, \bar{S} \gamma^- (\partial_\tau + \partial_\sigma) S, \qquad (3.140)$$

где $i = 1, \ldots, 8$; $I = 1, \ldots, 16$; S — 8-компонентный правый майорана - вейлевский спинор, X^I зависят лишь от $\tau + \sigma$. Таким образом, правый сектор теории - замкнутая фермионная струна в $d = 10$, а левый сектор - замкнутая бозонная струна в $d = 26$. Координаты X^I компактифицируются на 16-мерный тор T^{16} планковского размера. На первый взгляд, это дает калибровочную группу $[U_1]^{16}$. Оказывается, однако, что на замкнутой струне, "навивающейся" на тор T^{16}, существуют 480 безмассовых векторных возбуждений солитонного типа. Их происхождение наглядно связано с тем, что струна может обвивать тор различными способами, нумеруемыми дискретным индексом, который оказывается связанным с определенной компактной группой Ли. Вместе с 16 безмассовыми векторными (относительно 10-мерного пространства) мезонами Калуцы - Клейна, они образуют 496 векторных мезонов, преобразующихся по присоединенному представлению группы $E_8 \times E_8$ или $SO(32)$. Эта конструкция в высшей степени интересна и красива. Особую роль в ней играют размерности 26 и 10 и то, что 26 = 10 + 16. Работающие в этой конструкции нетривиальные связи между двумерной и многомерной математикой несомненно заслуживают более глубокого осмысления. Пока многое выглядит как ряд чудесных совпадений, но за этими совпадениями, вероятно, скрываются ещё бо́льшие чудеса.

Физический спектр гибридной струны образуют прямые произведения состояний правой фермионной струны и левой бозонной $|\alpha\rangle_R \otimes |\beta\rangle_L$. При этом импульсы, соответствующие компактифицированным координатам, принимают дискретные значения, принадлежащие целочисленной решетке:

$$P^I = \sum_{i=1}^{16} n_i e_i^I, \quad I = 1, \ldots, 16, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad (P^I)^2 \in (2\mathbb{Z}).$$

При учёте некоторых дополнительных ограничений, на которых мы не можем останавливаться, в итоге получается, что наинизшие состояния в спектре имеют массу нуль. Эти состояния включают 128-плет $d = 10$ СУГРА и супермультиплет калибровочных бозонов и калибрино (по 8 независимых лоренцевых компонент), принадлежащих присоединенному представлению, (1,248) + (248,1), группы $E_8 \times E_8$. В низкоэнергетическом пределе, когда струны можно считать точечными частицами, для описания этих безмассовых состояний можно пользоваться лагранжианом, приведенным в § I. Однако эффекты конденсации, дающие нарушения различных симметрий, компактификация и аномалии определяются взаимодействиями на разных масштабах, в том числе и на расстояниях $\sim M_{Pl}^{-1}$. Все эти эффекты не удается описать каким-либо одним эффективным полевым лагранжианом. Поэтому не следует удивляться, что в литературе при обсуждении разных проблем используются разные эффективные лагранжианы, каждый из которых имеет весьма ограниченную область применения. Более того, может оказаться, что низкоэнергетический предел нельзя полностью последовательно описать не только на языке эффективной теории поля, но и с помощью конечного числа струнных диаграмм. Иными словами, возможно, что для описания наблюдаемых эффектов в области $E \lesssim 1$ ТэВ необходимо учесть непертурбативные эффекты в струнной теории поля. В частности, весьма вероятно, что все основные масштабы, определяющие в конечном счёте устройство низкоэнергетического спектра и взаимодействий, примерно равны

$$M_{GUT} \sim M_{comp.} \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \sim M_{Pl},$$

и что основное состояние с 6 компактными измерениями существует лишь в режиме сильной связи. Существующие феноменологические модели основаны на предположении, что $M_{comp.} \ll \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \sim M_{Pl}$, и предполагают слабую связь.

В наиболее популярной модели за основу берут d = 10 СУГРА + СЯМ с калибровочной группой $E_8 \times E_8$, в которой возможно сокращение аномалий (см. § I). Механизм компактификации подбирается из требования, чтобы при низких энергиях получалась разумная 4-мерная теория. Что это значит? Вспоминая обсуждения § I, можно сформулировать следующие требования (пожелания).

I) Десятимерное пространство-время должно распадаться в прямое произведение компактного 6-мерного пространства K_6 и пространства Минковского M_4.

2) При этом должны выживать безмассовые поля, входящие в суперсимметричные мультиплеты.

3) После компактификации должна выжить N = I суперсимметрия, нарушение которой происходит лишь на масштабах $\lesssim 1$ ТэВ.

4) Спектр безмассовых фермионов должен быть кирально асимметричным.

5) Космологическая постоянная должна оставаться равной нулю. В частности, скаляр кривизны многообразия K_6 должен обращаться в нуль (так как он равен нулю для M_{10} и M_4).

Эти требования оказываются очень сильными и в значительной степени фиксируют вид многообразия K_6. Оказывается, что K_6 должно быть:

а) риччи - плоским, т.е. тензор Риччи $R_{ij}(K_6)$ равен нулю,

б) келеровым, т.е. K_6 можно считать комплексным многообразием с заданной на нём келеровой метрикой,

в) с группой голономии SU_3 (при параллельном переносе касательного вектора по замкнутой петельке он переходит в другой вектор, соответствующая группа преобразований, действующая в касательном пространстве K_6, называется группой голономии; для K_6 максимальная группа голономии есть $SO(6) \sim SU(4)$, ограничение этой группы до SU_3 - очень сильное требование).

Существование многообразий, удовлетворяющих всем этим условиям, было доказано лишь недавно (гипотеза, высказанная Э. Калаби, была доказана в работах С. Яу, поэтому такие многообразия называют пространствами Калаби - Яу). Эти многообразия весьма сложны, например, глобально определенная на них риманова метрика неизвестна. Однако многие результаты, интересные с физической точки зрения, можно получить из геометрических групповых и топологических соображений. Например, число поколений фермионов N_g определяется эйлеровой характеристикой многообразия

$$N_g = \frac{1}{2} \left| \chi(K_6) \right|.$$

Общие свойства механизма компактификации определяют и G_{GUT}. Минимальный вариант - $G_{GUT} = E_6$, т.е. при компактификации $E_8 \times E_8$ разрушается до $E_6 \times E_8$, а фермионы входят в N_g 27 -плетов группы E_6. Существуют и другие варианты разрушения симметрии до какой-либо подгруппы E_6, например $SU_3 \times SU_2 \times U_1 \times U_1$ или $SU_3 \times SU_2 \times (U_1)^3$. Топологические свойства K_6 позволяют предсказать и некоторые другие принципиально наблюдаемые величины, например юкавские константы связи. Подчеркнем, однако, что эти предсказания пока, по существу, не выведены из теории струн. Они говорят лишь о некотором мыслимом, возможном устройстве нашего мира, и тем самым имеют грубо предварительный и в значительной степени спекулятивный характер. Например, теоретические соображения не позволяют вычислить величину $\chi(K_6)$, а значит, и однозначно предсказать N_g. Пока удалось лишь указать механизм, делающий значение приемлемо малым (не больше 4). Этот механизм связан с конденсацией калибровочных полей, которая приводит к топологической неодносвязности многообразия K_6. Чрезвычайно интересно, что при попытках получить K_6 с приемлемым значением числа поколений N_g, калибровочная группа E_6 разрушается почти до стандартной.

Очень интересен также подсказываемый теорией механизм нарушения суперсимметрии при низких энергиях. Вторая группа E_8 остается неразрушенной, и наблюдаемые нами частицы по ней не заряжены (синглеты). Заряженные по этой "призрачной" группе E_8 частицы могут взаимодействовать с нашим (синглетным) миром только гравитационно ("призрачная Вселенная"). Однако само существование призрачного мира, со сверхсильным взаимодействием внутри него, может оказать существенное влияние на устройство нашего, наблюдаемого мира. Конденсация призрачных калибрино и гравитационное взаимодействие конденсата может привести к образованию массы у гравитино, скажем, $\sim$ I ТэВ, а значит, и к нарушению суперсимметрии при энергиях $\lesssim$ I ТэВ. Замечательное свойство такого механизма нарушения суперсимметрии состоит в том, что его можно естественно согласовать с $\Lambda_{cosm}=0$. Конечно, высшие струнные приближения могут разрушить это приятное свойство теории, но это уже отдельный вопрос, сначала нужно научиться их вычислять.

Самая трудная проблема на сегодня - найти проверяемые на опыте предсказания теории струн. Общих теоретических соображений, говорящих о том, что струнный подход к объединению частиц и взаимодействий, к объяснению устройства наблюдаемой Вселенной в принципе правилен, предостаточно. Более того, по амбициям у теории струн вообще нет конкурентов. Ни одна другая теория не может претендовать на то, что сулит нам струнная наука. Однако конкретных, проверяемых предсказаний пока очень мало. Скажем, существование дополнительных нейтральных токов при энергиях $\sim$ I ТэВ, следы суперсимметрии, может быть, какие-то (пока не полученные) чисто струнные эффекты в распаде протона (пока не наблюдавшемся). Это не густо, и тем не менее внутренняя красота, всеобъемлющий характер теории, неожиданные и необычные подходы к "непробиваемым" с других направлений проблемам дают надежду на то, что эта теория - реальный шаг на пути к объяснению устройства Вселенной, о котором мечтали многие поколения физиков.

В заключение попытаемся кратко сформулировать основные достижения и проблемы суперструны.

<u>Достижения</u>: I) Возможность построения сходящейся теории всех взаимодействий, в особенности, включение в единую схему гравитации.

Подчеркнем, что расходимости в теории струны имеют инфракрасный характер, и устраняются правильным выбором основного состояния. От ультрафиолетовых расходимостей теория струн, вероятно, свободна. 2/Возможность однозначного предсказания группы симметрий в объединенной теории всех взаимодействий, объяснение повторения поколений и нарушения симметрий. 3) Открываются совершенно новые связи между разными взаимодействиями и симметриями. "Калибровочная" группа теории струны столь обширна, что она потенциально содержит не только группы внутренних и локально-лоренцевых симметрий, но и суперсимметричную связь между бозонами и фермионами. При этом фермионы можно, в принципе, получить из бозонов. В теории гибридной струны внутренние симметрии получаются

за счет солитонных возбуждений струны (в духе идей Кельвина). Короче, теория струны объединяет не только частицы и взаимодействия, но и совершенно разные (часто глубоко различные) математические и физические концепции. Уже сейчас видно, что эта теория исключительно глубокая и её настоящее исследование только начинается.

<u>Проблемы</u>: I) Центральная проблема - последовательное и строгое объяснение компактификации. Хотя, как говорилось выше, можно ожидать, что проблемы иерархий и космологической постоянной будут поняты в теории струны, до практического решения пока далеко, особенно с космологической постоянной. 2) Последовательное решение этих проблем, скорее всего, окажется невозможным в теории возмущений, которая на сегодня составляет основу теории струны. Заметим, что, строго говоря, пока не сделана и теория возмущений. Разумеется, необходимо научиться вычислять многопетлевые диаграммы, однако не следует надеяться, что это позволит решить наиболее трудные проблемы. 3) Чтобы существенно оторваться от понятия невзаимодействующих струн, на котором пока всё держится, необходимо построить последовательную теорию струнного поля. После этого можно было бы поставить вопрос о нетривиальных основных состояниях струнного поля. В основе такой теории, по-видимому, должен скрываться новый и весьма глубокий геометрический принцип, содержащий в себе калибровочный принцип, (локальную) лоренцеву инвариантность и многое другое. Теория возмущений опирается на двумерную геометрию и топологию поверхностей, вложенных в плоское многомерное пространство. Можно вкладывать эти поверхности в искривленное пространство с фиксированной геометрией. Этого, однако, мало. В настоящей теории геометрия этого пространства, вероятно, сама определяется струнным полем. Такая "струнная" геометрия может оказаться непохожей на известные нам геометрии (даже геометрия невзаимодействующих струн достаточно своеобразна, с ней связаны не обычные алгебры Ли, а алгебры Вирасоро или Каца - Муди). 4) Ясно, что теория струнного поля будет некоторой калибровочной теорией. Однако калибровочная группа этой теории пока до конца не выявлена. Имея калибровочно-инвариантную теорию струнного поля, можно было бы попытаться строить непертурбативные решения и искать проверяемые на опыте предсказания теории, не дожидаясь пока математики объяснят нам геометрию струн. Теория суперструн - физическая теория, и её судьбу в конце концов решит лишь эксперимент. До этого, однако, надо пройти долгий и трудный путь.

В этих лекциях не затронуты или рассказаны вскользь многие вопросы, совершенно необходимые для понимания теории струн. Здесь я приведу лишь избранные, наиболее доступные обзоры и работы*. Со старой теорией струны полезно познакомиться по обзорам /1-5/ (в прекрасном обзоре Шерка /2/ довольно много мелких опечаток, но зато все вычисления выполнены подробно). С теорией великого объединения, суперсимметрией и супергравитацией можно познакомиться по лекциям Огиевецкого, Сокачева и Рубакова и др. на предыдущей школе /6/ (см. также /7/). Хорошим введением в физические проблемы суперсимметрии и теории КМКФ могут послужить работы Виттена /8/. Полезно познакомиться со старыми работами по компактификации /9/. Об аномалиях см. /10-12/. О десятимерной СУГРА см. работы /13,14/. Хорошее изложение общей теории квантования систем со связями можно найти в работе Фаддеева /15/ и в обзоре Вилковыского и Фрадкина /16/. Об использовании духов в теории струны см. /17,18/. Общему духовому подходу к теории квантования посвящены обзоры /19,20/. Вывод полного лагранжиана фермионной струны можно найти в работе /21/. Теория квантования струны НШР подробно изложена в /22/. Доступное и обстоятельное изложение теории струны в подходе Полякова можно найти в работе /23/. Связанные с теорией струны вопросы двумерных конформных теорий поля обсуждаются в работах /24-26/. О новой теории струнных диаграмм см. /27-29/. Теория гибридной струны подробно изложена в работах /30/. Компактификация на пространства Калаби-Яу и механизмы нарушения симметрий предложены в работах /31,32/. О феноменологических моделях, основанных на теории суперструн, см., например, /33-35/. Эффективное низкоэнергетическое действие теории струны рассматривается в работах /36,37/. Струнная теория поля в лекциях не затрагивалась, приведем лишь некоторые ссылки /38-40/. Новые типы струн и компактификации обсуждаются в работах /44,45/. Явные выражения для некоторых многопетлевых диаграмм приведены в работе /46/. Дальнейшие литературные указания можно найти в цитированных работах.

Эти лекции выросли из доклада автора /47/, в котором дан более полный список литературы. После того, как эти лекции были прочитаны, были опубликованы лекции Морозова, Кудрявцева и Липатова в школе ЛИЯФ /48/, лекции Морозова особенно близки к данным лекциям по содержанию и построению. Появилась также книга по теории струн Барбашова и Нестеренко /49/, в которой весьма подробно излагается классическая теория струн.

Калибровочный подход к теории релятивистских частиц и струн впервые изложен автором в этих лекциях, см. также работу /50/, в ней можно найти ссылки на более ранние статьи, в которых поля были введены в теорию релятивистских частиц для обеспечения параметризационной инвариантности, но связи не выводились, а угадывались. Наиболее близко подошли к формулировке калибровочного принципа в теории струны Дезер и Зумино /21/.

Наконец, в тексте лекций упомянуты малоизвестные работы Манделя /51/ и Фока /52/, а также Барбашова и Черникова /53/. С историей развития теории КМКФ можно также познакомиться по книге Румера /54/. Ранняя история струны отражена в книге /49/. Об истории теории вихрей, послуживших физическим прообразом струны и об истории разработки математической теории колебаний струны можно прочесть в популярной книжке /55/, там же можно познакомиться с основными представлениями о солитонах. Для серьезного понимания теории струн необходимо некоторое знакомство с понятиями современной геометрии, топологии и комплексного анализа. Доступно для физиков написана книга /56/ (см. также классическое руководство /57/). Математически ориентированного читателя может заинтересовать основополагающая работа /58/ по теории пространств Калаби - Яу. Наконец, необходимо заметить, что формулировка теории струны, изложенная в этих лекциях, близка по форме к гамильтоновой теории, предложенной в /59/.

*Обзор литературы составлен весной 1987 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mandelstam S.-Phys.Rep., 1974, v.13, p.259.
2. Scherk J.-Rev. Mod. Phys., 1975, v.47, p.123.
3. Schwarz J.M.-Phys.Rep. 1973, v.8, p.269; ibid, 1982, v.89, p.223.
4. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В.-ЭЧАЯ, 1978, т.9, в.5, с. 709.
5. Пронько Г.П. и др.-ЭЧАЯ, 1983, т.14, в. 3, с.558.
6. Труды 14 Международной школы молодых ученых, ОИЯИ, Д2, 4-83-179, Дубна, 1983.
7. Итоги науки и техники. Мат.анализ, т.22, ВИНИТИ, М., 1984.
8. Witten E.-Nucl.Phys. 1981, B185, p.513; ibid. B186, p.412.
9. Cremmer E., Scherk J.-Nucl. Phys., 1976, B108, p.409; ibid, 1977, B118, p.61.
10. Alvarez-Gaumé L., Witten E.-Nucl. Phys., 1983, B234, p.269.
11. Alvarez-Gaumé L., Ginsparg P.-Ann. Phys., 1985, 161, p.423.
12. Zumino B. et. al.-Nucl. Phys., 1984, B239, p.477.
13. Bergshoeff et.al.-Nucl. Phys., 1982, B195, p.97.

14. Chapline G.F., Manton N.S.-Phys.Lett., 1983, 120B, p.103.
15. Фаддеев Л.Д.-ТМФ, 1969, I, с.3.
16. Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля, ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976.
17. Kato M., Ogawa K.-Nucl. Phys. 1983, B212, p.443.
18. Hwang S.-Phys. Rev., 1983, 28, p.2614.
19. Baulieu L.-Phys. Rep., 1985., 129, p.l.
20. Henneaux M.-Phys. Rep., 1985, 126, p.l.
21. Deser S., Zumino B.-Phys.Lett., 1976, 65B, 369.
22. Gliozzi F. et.al.-Nucl. Phys., 1977, B122, p.253.
23. Alvarez O.-Nucl. Phys., 1983, B216, p.125.
24. Belavin A. et. al.-Nucl. Phys. 1984, B241, p. 333.
25. Friedan D. et.al.-Nucl. Phys. 1986 , B271, p.93.
26. Knizhnik V., Zamolodchikov A. -Nucl.Phys.,1984,B247,p.83.
27. Белавин А.А., Книжник В.Г.-Письма в ЖЭТФ, 1986,т.43, с.319
28. Moore G., Nelson P.-Nucl. Phys., 1986, B266, p.58.
29. D'Hoker E., Phong D.H. -Nucl. Phys. 1986, B269, p.205.
30. Gross D. et.al.-Nucl. Phys., 1985, B256, p.253, ibid., 1986, B267, p.75.
31. Candelas P. et.al.-Nucl. Phys., 1985, B258, p.46
32. Dine M. et.al.-Phys.Lett., 1985, 156B, p.55.
33. Witten E.-Nucl. Phys. 1985, B258, p.75.
34. Dine M. et.al.-Nucl. Phys., 1985, B259, p.519.
35. Derendinger J. P. et.al.-Nucl. Phys., 1986, B267, p.365.
36. Fradkin E.S., Tseytlin A.A.-Nucl. Phys., 1985, B261, p.l.
37. Callan C.G. et.al.-Nucl. Phys., 1985, B262, p.593.
38. Kaku M., Kikkawa K.-Phys. Rev., 1974, D10, p.1110, 1823.
39. Marshall C., Ramond P.-Nucl. Phys., 1975, B85, p.375.
40. Green M.B. et.al.-Nucl. Phys. 1983, B218, p.43; ibid.
41. Witten E.-Nucl. Phys., 1986, B268, p.253.
42. Арефьева И.Я., Волович И.В.-ТМФ, 1986, 67, с.320, 474.

43. Neveu A. West P.-Nucl. Phys. 1986, B278, p. 601.
44. Narain K.S.-Phys.Lett., 1986, 169B, p. 41.
45. Dixon L. et.al.-Nucl. Phys. 1985, B261, p.678; ibid. 1986, B274, p.285.
46. Morozov A. Prepr. ITEP 86-88, Moscow, 1986.
47. Филиппов А.Т. Сообщение ОИЯИ, Р2-86-545, Дубна, 1986.
48. Физика элементарных частиц (материалы 22 зимней школы ЛИЯФ), ЛИЯФ, Ленинград, 1987.
49. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Модель релятивистской струны в физике адронов . Энергоатомиздат, М., 1987.
50. Филиппов А.Т. Краткие сообщения ОИЯИ, №3 (23), Дубна, 1987.
51. Mandel G.A.-Zs. Phys., 1926, 39, 136.
52. Fock V.A.-Zs. Phys., 1926, 39, 226.
53. Барбашов Б.М., Черников Н.А.-ЖЭТФ, 1966, 50, с. 1296.
54. Румер Ю.Б. Исследования по 5-оптике. ГИТТЛ, М., 1951.
55. Филиппов А.Т. Многоликий солитон. Наука, М., 1985.
56. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Наука , М., 1979.
57. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. Наука, М., 1968.
58. Yau S.T.-Comm. Pure and Applied Math., 1978, 31, p.339.
59. Исаев А.П.-ТМФ, 1983, 54, с. 209; ТМФ, 1987, 71, с.395.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 марта 1988 года.