ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

В.С.Машкевич

Индетерминистская квантовая динамика

ДУБНА

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ 5
ВВЕДЕНИЕ 5
ГЛАВА I. ПРОБЛЕМА ИНДЕТЕРМИНИЗМА 9
§ I. Проблема существования индетерминизма 9
§ 2. Проблема природы индетерминизма I4
§ 3. Проблема необратимости I6
§ 4. Проблема измерения I8
§ 5. Кошка Шредингера и друг Вигнера: проблема суперпозиции для макрообъектов 23
§ 6. Математический аспект проблемы индетерминизма 26
ГЛАВА 2. ПРИРОДА ИНДЕТЕРМИНИЗМА 27
§ I. Математический и физический континуум 27
§ 2. Принцип непрерывности вероятности 29
§ 3. δ-усреднение 32
§ 4. Субъективная и объективная случайности 33
§ 5. Определение индетерминистской динамики 34
§ 6. Детерминированность классической динамики. Динамический хаос 35
§ 7. Основной тезис: неустранимость усреднения в несепарабельном гильбертовом пространстве 37
§ 8. Несепарабельное гильбертово пространство 37
§ 9. Элементы алгебраической квантовой теории 39
§I0. ГНС-конструкция 44
§II. Система с конечным числом степеней свободы 47
§I2. Доказательство основного тезиса: неустранимость усреднения в несепарабельном гильбертовом пространстве 48
§I3. Индетерминизм и необратимость 5I
ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЯ 52
§ I. Измерение наблюдаемой с простым точечным спектром 52
§ 2. Идеальный опыт Штерна-Герлаха 54
§ 3. Реальный опыт Штерна-Герлаха 55
ГЛАВА 4. ИНДЕТЕРМИНИСТСКАЯ ДИНАМИКА 57
§ I. Рандом-симметрия 57
§ 2. Спектральная мера 58
§ 3. Обобщенная прямая сумма гильбертовых пространств 59
§ 4. Спектральный рандомизатор 60
§ 5. Глобальная динамика 60
§ 6. Инфинитезимальная динамика. Индетерминистское уравнение движения 6I

Р2-88-150

В.С.Машкевич

ИНДЕТЕРМИНИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА

Дубна 1988

§ 7. Детерминистская динамика 63
§ 8. Вероятностная интерпретация квантовой теории 64
§ 9. Точечная индетерминированность 65
ГЛАВА 5. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЯ 66
§ I. Задачи теории измерения 66
§ 2. Наблюдаемая и гипернаблюдаемая 66
§ 3. Типы измерений 67
§ 4. Прямое измерение гипернаблюдаемой 68
§ 5. Наблюдаемая как идеальная гипернаблюдаемая 72
§ 6. Прямое измерение наблюдаемой 73
§ 7. Расширенное измерение 74
§ 8. Косвенное измерение 74
ГЛАВА 6. ТЕОРИЯ НЕОБРАТИМОСТИ 75
§ I. Проблема невозмущающей достижимости 75
§ 2. Множество невозмущающей достижимости 76
§ 3. Закон возрастания индетерминированности 78
§ 4. Редуцируемая мера со счетным носителем 78
§ 5. Закон возрастания энтропии 80
§ 6. Физическая интерпретация
закона возрастания индетерминированности 80
§ 7. Непрерывная индетерминированность 8I
§ 8. Некогерентный распад 82
ГЛАВА 7. СИСТЕМЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ 84
§ I. Макроскопическая система 84
§ 2. Бесконечные тензорные произведения
гильбертовых пространств 85
§ 3. Макроскопически различные состояния 89
§ 4. Ограниченные динамические переменные 90
§ 5. Финитные динамические переменные 9I
§ 6. Топология в множестве классов эквивалентности $\Gamma(\mathfrak{C}_w)$ . . 9I
§ 7. Непрерывная вероятностная мера в пространстве $\Gamma(\mathfrak{C}_w)$ . . 92
§ 8. Некогерентность различных неполных
тензорных произведений 93
§ 9. Финитность динамических переменных 94
§I0. Некогерентность макроскопически различных состояний . 95
§II. О динамике систем с бесконечным числом
степеней свободы 96
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 97
ЛИТЕРАТУРА 97

Стройнейшие мосты, славнейшие строенья,
Увы, хотя бы раз сравнились с градом тем,
Что из небесных туч возводит Случай-Гений...
И тупились глаза, узревшие Эдем.

Шарль Бодлер
Перевод Марины Цветаевой

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие лекции для молодых ученых посвящены проблеме индетерминизма, т.е. объективной случайности в физике. Они содержат общее обсуждение этой проблемы, включающее краткий исторический очерк, и основанное на работах автора изложение индетерминистской квантовой динамики и ее приложений к квантовым измерениям и необратимости.

Хотя изложение ведется на теоретико-физическом уровне строгости, широко используются (и разъясняются) основные понятия и результаты топологии, алгебры и функционального анализа. Такое использование имеет своей целью не получение строгих доказательств и, тем более, не придание теории абстрактно математической формы. Используемые математические средства являются естественным и незаменимым языком излагаемой теории.

При изложении точек зрения классиков науки и ведущих физиков-теоретиков там, где это целесообразно, приводятся цитаты из их работ.

Автор искренне признателен Я.А.Смородинскому за многократные плодотворные обсуждения основных идей и результатов, Н.В.Махалдиани и участникам его семинара за полезные дискуссии и В.Тиммерманну за ряд важных замечаний по рукописи. Особую благодарность автор выражает Б.Ф.Костенко – организатору этих лекций и лидеру дискуссий.

ВВЕДЕНИЕ

Степень детерминированности явлений природы характеризуется такими соотносительными философскими категориями, как необходимость и случайность. Каждая из этих категорий представляет собой определенный способ превращения возможности в действительность. Необходимость – способ, при котором в данных условиях имеется только одна возможность, превращающаяся в действительность. Случайность – способ, при котором в данных условиях имеется несколько различных возможностей, причем в действительность превращается одна из них.

Проблема необходимости и случайности возникла и разрабатывалась в философии с древности.

Случайность, в свою очередь, подразделяется на субъективную и объективную. Под случайностью понимается непредсказуемость какого-либо события, в частности, - результата опыта. Субъективная случайность связана с неполнотой, недостаточностью информации, относящейся к условиям, определяющим событие. Пополнение, увеличение информации позволяет избавиться от субъективной случайности. Об объективной случайности обычно говорят, когда невозможно однозначно предсказать результат опыта даже при наличии полной информации.

Проблема объективной случайности - очень трудная проблема, связанная с одним из самых фундаментальных свойств Вселенной: являются ли управляющие ее поведением законы детерминистскими или индетерминистскими ?

Существование субъективной случайности понятно. Воспринять существование объективной случайности психологически трудно: казалось бы, если все условия известны точно, то результат должен быть однозначным. Поэтому прежде всего возникает вопрос: существует ли объективная случайность, или индетерминизм, в природе ? Таким образом, первая часть проблемы индетерминизма - это проблема существования индетерминизма.

В физике проблема необходимости и случайности обычно выступает в форме проблемы динамических и статистических закономерностей. Хотя вероятностные, статистические методы описания физических явлений широко применялись уже в рамках классической статистической физики, проблема необходимости и случайности и, в особенности, индетерминизма приобрела особую глубину и остроту после создания квантовой механики. Это связано с тем, что, согласно точке зрения подавляющего большинства физиков-теоретиков, вероятности, фигурирующие в квантовой физике, имеют фундаментальный, объективный характер и тем самым принципиально отличаются от вероятностей, используемых в классической физике и отражающих неполноту информации о системе /I-7/.

Коль скоро принимается положительный ответ на вопрос о существовании объективной случайности, возникает вторая часть проблемы индетерминизма - проблема природы индетерминизма. При рассмотрении этой проблемы в рамках физической теории, поскольку существеннейшей частью последней является ее математический аппарат, возникает математический аспект указанной проблемы. С теоретико-физической точки зрения именно этот аспект играет определяющую роль. Математический аспект может быть сформулирован в виде следующих пунктов.

I. Внесение случайного элемента, или потери информации в математическую часть физической теории.

2. Математическое определение субъективной и объективной случайности.

3. Установление математической природы индетерминизма в физике, а именно, в квантовой теории.

4. Включение объективной случайности в математическую часть квантовой теории, т.е. построение индетерминистской квантовой динамики.

Важнейший аспект проблемы квантового индетерминизма, т.е. индетерминизма в квантовой физике, - это проблема измерения. Последняя возникла сразу после создания квантовой механики и оказалась самой трудной проблемой квантовой теории. Суть проблемы измерения состоит в противоречии между индетерминированностью процесса измерения и детерминированностью динамики, т.е. временной эволюции в ортодоксальной квантовой теории. Поэтому один из основных результатов, ожидаемых от индетерминистской динамики, - это построение динамической теории измерения, т.е. теории, в которой измерение рассматривается как реальный физический процесс.

Ни один из подходов к решению проблемы измерения, предложенных до начала 80-х годов, не привел к последовательной теории, описывающей процесс измерения. Обзор и анализ состояния проблемы к середине 70-х годов содержится в книге д'Эспанья /8/; на русский язык переведен обзор Такабаяси /9/, охватывающий тот же период времени.

Говоря о трудностях ортодоксальной квантовой теории, нельзя пройти мимо кошки Шредингера и друга Вигнера - известных парадоксов. Они касаются как проблемы измерения (особенно последний), так и проблемы когерентности состояний макрообъектов (особенно первый).

Наконец, уже в рамках классической физики возникла проблема необратимости, которая впоследствии оказалась связанной со случайностью вообще и с индетерминизмом в частности. Поэтому еще одно из основных приложений индетерминистской динамики должно относиться к динамической теории необратимости.

К перечисленным выше пунктам I-4, касающимся оснований теории, можно теперь добавить пункты, относящиеся к главным приложениям.

5. Построение квантоводинамической теории измерения.

6. Рассмотрение необратимых процессов.

7. Исследование свойств когерентности состояний макрообъектов.

Решение поставленных проблем I-7, предложенное в работах автора (см. /I0-I4/ и имеющиеся там ссылки), вкратце состоит в следующем.

I. Внесение случайного элемента в математическую часть физической теории основывается на следующем хорошо известном положении: значение непрерывной физической величины не может быть определено абсолютно точно. В качестве обобщения и формализации этого положения вводится принцип непрерывности вероятности, который отражает возможности физической реализации вероятностных мер на топологических пространствах. Усреднение по указанным мерам вносит случайный элемент, или потерю информации.

2. Хотя неточность определения непрерывной величины отлична от нуля, в принципе она может быть сделана сколь угодно малой. (Подчерк-

нем, что рассматриваемая неточность не имеет отношения к соотношению неопределенностей.) Это обстоятельство формализуется понятием δ-усреднения. Рассматривается последовательность (или, более обще, направленность) вероятностных мер, такая, что пересечение носителей мер представляет собой минимальное измеримое множество (в простейшем случае точку). Предельный переход в усреднении по этим мерам приводит к δ-усреднению. Таким образом, в то время как усреднение по фиксированной мере представляет собой крупноструктурное усреднение, δ-усреднение таковым не является.

Усреднение называется устранимым или неустранимым в зависимости от того, совпадает или не совпадает результат после δ-усреднения с результатом в отсутствие всякого усреднения. Случайность, соответствующая устранимому усреднению, является, по определению, субъективной, случайность, соответствующая неустранимому усреднению, - объективной.

3. Математическая природа индетерминизма в физике заключается в неустранимости усреднения по начальному состоянию и по времени в случае состояний квантовой системы, описываемых векторами несепарабельных гильбертовых пространств. (Несепарабельным называется гильбертово пространство с несчетным базисом.) Говоря короче, индетерминизм обусловлен неустранимым усреднением в несепарабельном гильбертовом пространстве. Тем самым индетерминизм является чисто квантовым эффектом.

Несепарабельные гильбертовы пространства появляются естественным образом в алгебраической квантовой теории.

Подчеркнем, что концепция индетерминизма, опирающаяся на представление о возможности абсолютно точного описания системы, т.е. возможности абсолютно полной информации, неадекватна. Природа индетерминизма связана с отсутствием такой возможности. Этот факт достаточно тривиален. Нетривиальным является то, что никакое уточнение описания, т.е. никакое пополнение информации, не устраняет случайность.

Только в классической физике, где усреднение устранимо, представление о возможности абсолютно точного описания, или абсолютно полной информации, допустимо.

4. Индетерминистская квантовая динамика строится путем привнесения неустранимого усреднения в алгебраическую квантовую теорию. Рассматривается как глобальная, так и инфинитезимальная временная эволюция. Последняя описывается уравнением движения, которое представляет собой обобщение квантового уравнения Лиувилля, или уравнения фон Неймана для статистического оператора. Индетерминистская динамика включает как частный случай обычную ("ортодоксальную") детерминистскую квантовую динамику. В случае сепарабельного гильбертова пространства усреднение устранимо и индетерминизм отсутствует.

5. На основе индетерминистской динамики строится квантоводинамическая теория измерения. Рассматриваются измерения наблюдаемой и гипернаблюдаемой (обобщенной наблюдаемой). Исследуются прямое, расширенное и косвенное измерения и измерения первого и второго рода.

6. Индетерминистская динамика естественным образом приводит к необратимым процессам. Формулируется закон возрастания индетерминированности. Его частным случаем является закон возрастания энтропии.

7. Исследуются квантовые системы с бесконечным числом степеней свободы. Рассмотрение основывается на конструкции бесконечного тензорного произведения гильбертовых пространств. Даже в случае сепарабельного гильбертова пространства каждой степени свободы гильбертово пространство всей системы является несепарабельным. Неустранимость усреднения приводит к некогерентности макроскопически различных квантовых состояний. Это решает парадокс кошки Шредингера.

Таким образом, индетерминистская квантовая динамика включает как квантовую механику с теорией измерения, так и квантовую статистику.

ГЛАВА I. ПРОБЛЕМА ИНДЕТЕРМИНИЗМА

§ I. ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНДЕТЕРМИНИЗМА

Проблема существования индетерминизма, т.е. объективной случайности в явлениях природы, возникла около двух с половиной тысяч лет тому назад. Шредингер в статье "2400 лет квантовой теории" /I5/ пишет следующее. "Впервые мыслитель столкнулся с трудно преодолеваемой проблемой, которая с тех пор в различных вариантах преследует его, никогда не отпуская: как сочетать свободу воли, требуемую нравственной ответственностью, со строгими закономерностями природы ? Кто вместе с нами разделяет мнение, что на этот вопрос не существует чисто естественнонаучного ответа, тот будет восхищаться Демокритом потому, что он не искал компромиссного решения, а бесстрашно придерживался строгого детерминизма объективного хода явлений в природе. Те, кто шли непосредственно по его следам, думали иначе. Как говорят, мысль о том, что на этом основании, т.е. ради спасения свободы воли, следует допускать небольшие, но беспрестанные нарушения абсолютной закономерности движения атомов, восходит еще к Эпикуру."

В классической физике проблема была решена в пользу детерминизма. В классической механике и электродинамике, включая теорию относительности, нет места объективной случайности. Имея достаточно полную информацию о физической системе, можно сколь угодно точно предсказать поведение этой системы. В механике это положение было явно сформулировано Лапласом (лапласовский детерминизм).

Вероятности, используемые в классической физике, не связаны органически с соответствующими динамическими теориями, т.е. с механикой и электродинамикой. Указанные вероятности отражают неполноту наших знаний о системе и в этом смысле носят субъективный характер. Фон Нейман пишет по этому поводу /4/: "Классическая механика представляет собой причинную дисциплину, т.е. если состояние описываемой ею системы известно со всей подробностью, – для чего в случае k степеней свободы необходимо задать $2k$ чисел..., – то значение любой физической величины... можно определить единственным образом и численно точно. Несмотря на это, существует и статистический метод исследования классической механики, но он является, так сказать, лишь роскошью или приправой. А именно, если нам известны не все $2k$ фиксирующих состояние параметра..., но лишь часть из них (причем даже эти последние могут быть известны не точно), то можно, усредняя каким-нибудь способом по параметрам, оставшимся неизвестными, сделать по крайней мере статистические утверждения относительно всех физических величин. Это же справедливо и для прошлых или будущих состояний системы..."

Во второй половине девятнадцатого века, несмотря на существование только классической физики, сформировались философские идеи, основанные на признании объективной случайности /16/. Здесь прежде всего следует назвать Курно, который считал, что самой физической реальности присуща контингентность (случайность). В дальнейшем философия естествознания, основанная на понятии контингентности, развивалась в трудах Ренувье, Бутру, Кьеркегора, Гёффдинга. Отказ от классического детерминизма характерен также для философской системы Пирса (теория тихизма, т.е. случайности).

До возникновения квантовой механики эти идеи не получили поддержки среди физиков. Исключением был Экснер, который говорил о вероятностных процессах на субмикроскопическом уровне.

Джеммер в книге /16/ подчеркивает принципиальный характер понятия контингентности: "Как совершенно очевидно, вероятностные концепции, подобные выдвигавшимся Бутру или Экснером, в корне отличаются от традиционного понятия вероятности, используемого, например, в классической статистической механике. В классической физике вероятностные утверждения были всего лишь выражением нашего незнания всех деталей отдельного события, будь это незнание обусловлено недостаточно высокой разрешающей способностью измерительной аппаратуры или огромным числом подлежащих рассмотрению событий; но отдельный физический процесс всегда считался строго подчиняющимся причинно-следственному закону, а исход его – однозначно определенным. Напротив, новая концепция вероятности не только принимала, что макроскопический детерминизм является статистическим эффектом, но и полагала, что отдельное микроскопическое или субмикроскопическое событие является чисто контингентным."

В квантовой механике проблема существования индетерминизма решается положительно. Многократное повторение одного и того же опыта с мик-

рочастицей в одинаковых условиях дает различные результаты. Для каждого отдельного возможного результата теория предсказывает его вероятность. Эти вероятностные, или статистические предсказания теории точно совпадают с опытом.

Согласно точке зрения подавляющего большинства физиков-теоретиков – как эпохи возникновения и развития квантовой механики, так и современных – вероятности, фигурирующие в квантовой физике, носят фундаментальный, объективный характер и, составляя интерпретационную часть теории, неразрывно связаны с математической частью соответствующих динамических теорий, т.е. квантовой механики и квантовой теории поля. Немногочисленными противниками такой точки зрения являются приверженцы идеи скрытых параметров. Обрисованное положение вещей обсуждалось ведущими физиками-теоретиками. Приведем здесь ряд высказываний.

Борн /1/: "Физика считается самой точной наукой, образцом установления точных законов, управляющих ходом событий природы.

Тем не менее, уже сто лет, как в физике начали играть важную роль статистические методы... Тела состоят из молекул и атомов... Бесконечное число частиц делает невозможным никакое детерминистическое описание и вынуждает нас применять статистические методы.

Раньше эти методы были довольно слабо связаны с построением механических и электродинамических теорий. Сегодня квантовая теория привела нас к более глубокому пониманию: она установила более тесную связь между статистикой и основами физики.

Это является событием в истории человеческого мышления, значение которого выходит за пределы самой науки...

Вероятность – это фундаментальное понятие физики. Законы статистики являются законами природы, как и всякие другие."

Гейзенберг /2/: "Наиболее важным было введение вероятности в качестве нового вида "объективной" физической реальности. Это понятие вероятности тесно связано с понятием возможности ("потенции") в натурфилософии таких античных философов, как Аристотель; оно является в известном смысле превращением старого понятия "потенции" из качественного представления в количественное."

Бор /3/: "Повторение одного и того же опыта... дает, вообще говоря, разные отсчеты...; этот факт непосредственно приводит к выводу о том, что обобщающая формулировка полученных из опыта результатов в этой области должна выражаться в форме статистических (вероятностных) законов. Едва ли нужно особо подчеркивать, что мы имеем здесь дело отнюдь не с чем-либо аналогичным обычному применению статистики к описанию физических систем, чересчур сложных для того, чтобы можно было практически дать полное определение их состояния, достаточное для детерминистского описания."

Фон Нейман /4/: "... хотя мы считаем,... что задание φ полностью определяет состояние, оно тем не менее делает возможным лишь статистические утверждения о значениях физических величин...

Если желать объяснить акаузальный характер связи между φ и значениями физических величин по примеру классической механики, то, очевидно, естественно понимать его следующим образом: на самом деле φ вовсе не определяет состояния во всех деталях, напротив, чтобы узнать его полностью, необходимо задать дополнительные числа. Иными словами, у системы, помимо φ , имеются еще и другие характеризующие ее параметры или координаты...

Обычно эти гипотетические дополнительные координаты называют "скрытыми параметрами" или "скрытыми координатами"... Объяснение с помощью скрытых параметров уже свело в классической механике некоторые, казалось бы, статистические, соотношения к причинным основаниям механики: характерным примером является кинетическая теория газов...

Вопрос о том, возможно ли объяснение этого типа с помощью скрытых параметров в квантовой механике, обсуждался не один раз. Тот взгляд, что на этот вопрос когда-нибудь будет получен положительный ответ, имеет и сейчас выдающихся представителей...

Ниже будет показано..., что введение скрытых параметров заведомо невозможно, во всяком случае без фундаментальных изменений существующей теории...

Это понимание квантовой механики, принимающее ее статистические утверждения за истинную форму законов природы и отказывающееся от принципа причинности, и есть так называемая статистическая интерпретация."

Заметим, что термины "акаузальный" и "принцип причинности" здесь эквивалентны терминам "индетерминистский" и "детерминизм" соответственно. Вообще, в прежних работах говорили о нарушении причинности, а теперь обычно говорят об индетерминизме; это более адекватно.

Паули /5/: "Только волновая, или квантовая, механика позволила утверждать о существовании в законах природы <u>первичных вероятностей</u>, не сводимых с помощью вспомогательных гипотез к детерминистским законам, в отличие, например, от термодинамических вероятностей классической физики. Подавляющее большинство физиков-теоретиков... считает этот вывод окончательным.

Этому выводу всегда существовала оппозиция, но она бесплодно застряла на стадии регрессивных надежд."

Фок /6/: "Понятие вероятности рассматривалось и в классической физике, но оно имело там другой смысл. В классической физике вероятности вводились тогда, когда условия задачи были не полностью известны, и по неизвестным параметрам приходилось производить усреднение. При этом,

однако, предполагалось, что в принципе усреднение необязательно и что всегда возможно такое доуточнение условий, которое бы позволило утверждать, что один из возможных результатов наступит с достоверностью, а другие не наступят совсем. Таким образом, в классической физике вероятности отражали неполноту формулировки задачи, неполноту, быть может, практически неизбежную, но в принципе устранимую.

Совсем другой характер имеют вероятности в квантовой физике. Там они необходимы по существу, и введение их отражает не неполноту условий, а объективно существующие при данных условиях потенциальные возможности."

Яух /7/: "Вероятности, которые встречаются в классической физике, интерпретируются как обусловленные неполной детализацией исследуемых систем, вызванной наличием ограниченности нашего знания о детальной структуре и развитии этих систем. Таким образом, эти вероятности должны быть интерпретированы как имеющие <u>субъективную</u> природу.

В квантовой механике эта интерпретация вероятностных утверждений теряет силу в любом своем понимании, потому что не существует возможностей определить инфраструктуру, знание которой объяснило бы появление вероятностей на уровне наблюдений. Хотя такие теории со "скрытыми параметрами" рассматривались многими физиками, их попытки не дали полезных результатов. Следовательно, мы принимаем здесь противоположную точку зрения, согласно которой вероятности в квантовой механике имеют фундаментальный характер, глубоко коренящийся в объективной структуре реального мира. Мы можем поэтому назвать их <u>объективными</u> вероятностями."

Изложение будет неполным, если не остановиться на отношении Эйнштейна к проблеме существования индетерминизма. Эйнштейн неоднократно высказывал точку зрения, согласно которой статистическая интерпретация квантовой механики свидетельствует о неполноте последней. Процитируем Борна /I7/: "Когда в 1926 году была развита квантовая механика, я надеялся, конечно, что Эйнштейн придет к согласию с принятым толкованием квантовой механики, но был разочарован. Привожу выдержку из его письма от 12 декабря 1926 года:

"Квантовая механика - теория, внушающая большое уважение. Но внутренний голос говорит мне, что это еще не настоящий Иаков. Эта теория дает много, но едва ли она подводит нас ближе к тайне предков. Во всяком случае я убежден, что никто не играет в кости..."

... Первая часть только что процитированного письма относится к отказу Эйнштейна принять статистические законы в физике как окончательные; он говорит об образе играющего в кости бога - выражение, которое он позднее очень часто применял в дискуссиях и письмах."

Хотелось бы подчеркнуть, однако, что позиция Эйнштейна была менее категоричной, чем это обычно принято считать. Об этом свидетельствует выдержка из его статьи 1940 года /18/: "Как убедительно показал Гейзенберг, всякое утверждение о строго детерминистской структуре природы с эмпирической точки зрения окончательно исключается из-за атомистического строения приборов, применяемых в наших экспериментах. По-видимому, никакое будущее познание не сможет заставить физиков оказаться от нашего современного статистического основания физики в пользу детерминистского основания, которое имело бы дело непосредственно с физической реальностью." Впрочем, дальше в этой же статье Эйнштейн снова возвращается к критической позиции: "Некоторые физики, в том числе и я сам, не могут поверить, что мы раз и навсегда должны отказаться от идеи прямого изображения физической реальности в пространстве и времени или что мы должны согласиться с мнением, будто явления в природе подобны азартным играм."

§ 2. ПРОБЛЕМА ПРИРОДЫ ИНДЕТЕРМИНИЗМА

Согласно сказанному выше, есть самые веские основания считать, что индетерминизм, т.е. объективная случайность, - неотъемлемое свойство Вселенной. Однако имеются очень большие трудности в обосновании существования объективной случайности в рамках физической теории. Здесь мы сталкиваемся с проблемой физической и математической природы индетерминизма.

На первый взгляд решение проблемы тривиально: так устроена Вселенная. Но для физики этот ответ неудовлетворителен: что значит "так" ? Необходима математическая модель. Чтобы подчеркнуть этот момент, процитируем Эйнштейна /18/: "То, что мы называем физикой, охватывает группу естественных наук, основывающих свои понятия на измерениях, причем представления и утверждения физики могут быть сформулированы математически. Следовательно, ее областью является та часть общей суммы нашего знания, которую можно выразить в математических терминах."

Физическая теория состоит из математической части, содержащей некоторые величины и связывающие их уравнения, и интерпретационной части, соотносящей эти величины с реальным миром. Трудности в обосновании индетерминизма обусловлены тем, что математическая часть ортодоксальной квантовой теории детерминистична. Вот что пишет об этом Вигнер /19/: "... нельзя получить полного описания наблюдения, поскольку квантовомеханические уравнения движения причинны и не содержат статистического элемента, в то время как измерение содержит его."

Обычно индетерминистский характер квантовой физики связывается с возможностью превращения чистого состояния замкнутой системы в смешанное, которое редуцируется к одному из составляющих его чистых состояний. Однако указанное превращение не может быть выведено в математи-

ческом формализме ортодоксальной квантовой динамики, где допускаются лишь унитарные преобразования. Этот момент обсуждал Юкава /20/: "Говорят, что в момент измерения расплывшаяся волна вероятности сильно сжимается...

Разве не удивительно такое мгновенное сжатие ? Мне кажется, очень. Эта сложная проблема сводится в конце концов к тому, что измерения вносят сильные скачкообразные изменения в состояние системы. Получается, что уравнение Шредингера как бы страдает незавершенностью и не позволяет интерпретировать реальность в рамках непрерывных процессов. Наблюдение вносит разрывы в непрерывное течение природных явлений, вызывая быстрые изменения в удаленных местах. Можно ли сказать, что таким образом мы познаем природу ? Если да, то это познание через чувственное восприятие, посредством ощущений. Даже если считать, что мы ее познаем, надо отметить отсутствие адекватного описания с помощью математических формул этого чувственного восприятия природы. В конце концов, здесь мы сталкиваемся с проблемой измерения...

... Эйнштейн был человеком номер один в науке, и он утверждал, что квантовая механика еще не полна. Я лично, учитывая ее индетерминистский статистический характер, не считаю квантовую механику неполной теорией. Но все же в этом вопросе остается какая-то неясность, и меня тоже не покидает ощущение, что где-то на новой стадии появится завершенная и полная, во всяком случае, несколько иная теория."

Недостаточность, неудовлетворительность простой констатации существования квантового индетерминизма подчеркивает Уилер /21/: "Нужно ли спрашивать, имеет ли квантовый принцип какое-либо отношение к строению мира ? В настоящее время мы привыкли к использованию метода Гамильтона для атомов, частиц и полей и настолько хорошо знакомы с применением стандартных методов квантовой механики, извлекающих следствия из соответствующих гамильтонианов, что легко можно подумать, будто мир физических законов и гамильтонианов "уже здесь", а квантовая механика служит "смазкой" для этого уже существующего механизма. Однако для более внимательного рассмотрения ситуации удобно перенести внимание с квантовомеханического формализма на нечто более глубокое - на квантовый принцип. Он говорит о том, что может быть измерено, а что нет. Это рассказ о дополнительности и индетерминизме. Это наиболее странная особенность этой странной Вселенной.

Мы знаем, как резюмировать всякую другую великую идею физики несколькими простыми словами, но только не идею кванта. Для многих даже сегодня идея кванта представляется странной и нежелательной и кажется привносимой извне против нашей воли. Напротив, если кто-либо действительно понял ее сущность и необходимость для построения мира, он должен быть в состоянии сформулировать ее в виде одного ясного и простого предложения. Пока мы не увидим квантовый принцип во всей его простоте, мы можем считать, что не знаем самого главного о Вселенной, о нас самих и о нашем месте во Вселенной."

§ 3. ПРОБЛЕМА НЕОБРАТИМОСТИ

Проблема необратимости возникла уже в рамках классической физики. Существование необратимости было сформулировано в виде второго начала термодинамики, или закона возрастания энтропии. По поводу истории сошлемся на Гуггенгейма /22/: "Второй закон термодинамики предчувствовал уже Карно (1824); впервые этот закон был ясно сформулирован Клаузиусом (1850), которому мы обязаны и самим понятием энтропии. Абсолютная шкала температур введена Кельвином (1848), который провозгласил второй закон термодинамики независимо от Клаузиуса (1851)."

Связь необратимости со случайностью ведет свое начало от работ Максвелла и Больцмана. В 1859 г. Максвеллом получено равновесное распределение скоростей молекул газа. В 1872 г. Больцманом доказана H-теорема, в 1877 г. установлена связь энтропии с вероятностями. Термин статистическая механика впервые появился у Максвелла в 1878 г.

В обычной формулировке проблема необратимости состоит в согласовании макроскопической необратимости с микроскопической обратимостью или, более общё, во введении понятия необратимости в динамику. При этом основную роль играет крупноструктурное усреднение. Остановимся на нем.

В классической статистической механике фигурирует функция распределения $f(x,t)$, где x - точка фазового пространства, t - время. Микроскопическая энтропия

$$\sigma_{micro} = -\int f(x,t)\ln f(x,t)\,dx \qquad (I.3.1)$$

не зависит от времени. С целью "исправления" положения вводится огрубленная (крупноструктурная) функция распределения /23/

$$f^{\Delta}(x,t) = \sum_i f_i^{\Delta}(t)\,\Delta_i(x), \qquad (I.3.2)$$

где

$$f_i^{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta x_i}\int_{\Delta x_i} f(x,t)\,dx, \qquad \Delta_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x\in\Delta x_i \\ 0 & \text{при } x\notin\Delta x_i \end{cases}, \qquad (I.3.3)$$

Δx_i - объем i-й ячейки фазового пространства. Макроскопическая энтропия

$$\sigma_{macro} = -\int f^{\Delta}(x,t)\ln f^{\Delta}(x,t)\,dx = -\sum_i f_i^{\Delta}(t)\,\Delta x_i \ln f_i^{\Delta}(t) \qquad (I.3.4)$$

уже зависит от времени и, например, для перемешивающего движения растет со временем.

В квантовом случае роль функции распределения играет статистический оператор (матрица плотности)

$$\rho(t) = \sum_m w_m\, p_m(t), \quad p_m(t) = |m,t\rangle\langle m,t|. \qquad (I.3.5)$$

Проектор p_m описывает чистое состояние с амплитудой $|m,t\rangle$, множество $\{w_m\}$ описывает распределение вероятности по чистым (микроскопическим) состояниям. Микроскопическая энтропия

$$\sigma_{micro} = -\mathrm{Tr}\{\rho(t)\ln\rho(t)\} = -\sum_m w_m \ln w_m \qquad (I.3.6)$$

не зависит от времени. Крупноструктурное усреднение вводится следующим образом /4/. Пусть $\{\mathcal{P}_i\}$ - множество проекторов, таких, что $\sum_i \mathcal{P}_i = I$, $\mathrm{Tr}\,\mathcal{P}_i = s_i \gg 1$. Здесь I - единичный оператор; неравенство отражает макроскопичность проектора $\mathcal{P}_i$, играющего роль ячейки Δx_i. Можно записать $\mathcal{P}_i = \sum_j^{(s_i)} p'_j$, $\mathrm{Tr}\,p'_j = 1$, $\sum_j p'_j = I$. Крупноструктурное распределение вводится согласно

$$w_j^{\Delta}(t) = \sum_i w_i^{\Delta(1)}(t)\,\Delta_i(j), \qquad (I.3.7)$$

где

$$w_i^{\Delta(1)} = \frac{1}{s_i}\mathrm{Tr}\{\rho(t)\mathcal{P}_i\}, \qquad \Delta_i(j) = \mathrm{Tr}\{\mathcal{P}_i p'_j\} = \begin{cases} 1 & \text{при } j\in(s_i) \\ 0 & \text{при } j\notin(s_i). \end{cases} \qquad (I.3.8)$$

Макроскопическая энтропия

$$\sigma_{macro}(t) = -\sum_j w_j^{\Delta}(t)\ln w_j^{\Delta}(t) = -\sum_i w_i^{\Delta(1)}(t)\,s_i \ln w_i^{\Delta(1)}(t); \qquad (I.3.9)$$

ее возрастание рассмотрено в /4/.

Физический смысл крупноструктурного усреднения состоит в том, что оно отражает ограниченность возможностей макроскопического наблюдателя. Указанное усреднение может привести к хаотичности поведения уже простейших классических механических систем (динамический хаос) /24-26/.

Концепция крупноструктурного усреднения подвергалась и продолжает подвергаться критике. Приведем высказывание Пригожина /27/: "... часто утверждают, что понятие необратимости можно ввести в динамику только в том случае, если в дополнение к известным законам динамики допустить справедливость о "грубом зернении системы". Мне всегда было трудно согласиться со справедливостью этого заключения, в особенности вследствие конструктивной роли, играемой необратимыми процессами. Могут ли диссипативные структуры быть результатом ошибок ?"

В книге Ландау и Лифшица /28/ при обсуждении закона возрастания энтропии отмечаются следующие моменты: "... связывание физических законов со свойствами наблюдателя, разумеется, совершенно недопустимо.

Вряд ли сформулированный таким образом закон возрастания энтропии вообще мог бы быть выведен на основе классической механики...

... Вопрос о физических основаниях закона монотонного возрастания энтропии остается, таким образом, открытым."

Обычно понятие необратимости ассоциируется с законом возрастания энтропии. Однако применение этого закона ограничено двумя обстоятельствами. Первое состоит в том, что возрастание энтропии представляет собой лишь необходимое условие возможности перехода из одного состояния в другое в случае адиабатического процесса. Второе обстоятельство заключается в существовании состояний, для которых энтропия равняется бесконечности. Так, пусть статистический оператор

$$\rho=\sum_{m=0}^{\infty} w_m |m\rangle\langle m|, \quad w_m=\frac{C}{(m+a)\ln^2(m+a)}, \; a>1, \qquad (I.3.10)$$

где C – константа нормировки. При этом $\sigma=-\sum_{m=0}^{\infty} w_m \ln w_m=\infty$.

Поэтому желательно найти более общий закон, который представлял бы собой критерий (т.е. необходимое и достаточное условие) возможности перехода между любыми парами состояний, фигурирующих в проблеме необратимости.

§ 4. ПРОБЛЕМА ИЗМЕРЕНИЯ

Проблема индетерминизма в квантовой механике возникла сразу после создания последней, причем возникла в форме проблемы измерения. Поскольку измерение представляет собой реальный физический процесс, полная теория должна описывать измерение в рамках динамики, т.е. математической части теории, – по крайней мере, на концептуальном уровне. Другими словами, теория измерения должна быть динамической. В ортодоксальной квантовой теории это требование не выполняется: измерение описывается в рамках интерпретационной части теории. Более того, ортодоксальная квантовая динамика является детерминистской, а квантовое измерение представляет собой вероятностный, индетерминированный процесс. Именно это противоречие приводит к проблеме измерения.

Описание измерения как физического процесса было дано Гейзенбергом в книге /29/: "Измерение некоторой физической величины η состоит, вообще говоря, в том, что мы наблюдаемую систему, которой величина η перед измерением сопоставлена с неточностью $\Delta_1\eta$, изменяем так, что после измерения эта величина может быть ей сопоставлена с меньшей неточностью $\Delta_2\eta<\Delta_1\eta$. Этот процесс измерения, согласно сказанному, должен быть разделен на два строго различаемые акта. Первый шаг измерения состоит в том, что система подвергается внешнему, физически реальному, изменяющему ход событий воздействию, например: освещение светом или включение поля. Это воздействие приводит к тому, что наблюдаемая система переходит в "смесь" состояний, вообще говоря, бесконечно многих, но для которых остается то, что величина η может быть им сопоставлена с неточностью $\Delta_2\eta$.

Второй акт измерения выбирает из бесконечно большого числа состояний смеси некоторое вполне определенное, как действительно реализованное. Этот второй шаг представляет собой процесс, который сам не воз-

действует на ход событий, но который только изменяет наше знание реальных соотношений."

Проблема состоит в построении адекватной этому описанию теории. При этом первый шаг измерения должен описываться динамикой. Решающая трудность заключается в переходе от чистого состояния к смешанному, т.е. в исчезновении интерференционных членов. Различные подходы к решению проблемы измерения отличаются способами "избавления" от интерференционных членов.

Ни один из подходов, предложенных до начала 80-х годов, не привел к последовательной теории, описывающей процесс измерения. Подробный обзор и тщательный анализ состояния проблемы к середине 70-х годов провел д'Эспанья в книге /8/. Можно рекомендовать также обзор Такабаяси /9/, охватывающий тот же период времени. Остановимся на основных подходах.

Исторически первый и до сих пор наиболее популярный подход – это так называемая копенгагенская интерпретация квантовой механики (Бор, Гейзенберг). Идея состоит в следующем. Индетерминизм проявляется в измерениях, проводимых над микрочастицей. Измерение осуществляется с помощью прибора. Прибор описывается в терминах классической физики (в этом суть идеи), из чего следует невозможность точного учета его воздействия на микрообъект, подчиняющийся квантовым законам. Это приводит к вероятностному характеру результатов измерения. Реализация одного из возможных результатов происходит за счет того, что прибор всегда находится в определенном классическом состоянии. Хотя до сих пор копенгагенская интерпретация считается "ортодоксальной", она вызывает серьезные возражения. Измерение представляет собой физический (а не умозрительный) процесс, который в последовательной полной теории должен описываться не на словесном уровне, а в математической части теории. Кроме того, "сосуществование" квантовых и классических объектов в рамках одной теории недопустимо: такая теория внутренне противоречива /30/. В самом деле, если допустить существование классической диафрагмы, то измерив с ее помощью координату x электрона, имеющего определенный импульс p , а также определив по отдаче диафрагмы изменение импульса электрона, можно получить состояние последнего со сколь угодно малым значением произведения неопределенностей $Dx\cdot Dp$.

Второй подход был предложен фон Нейманом. Рассмотрение этого подхода особенно полезно потому, что оно позволяет уточнить, о каких интерференционных членах идет речь в проблеме измерения. Математическая часть теории фон Неймана состоит в следующем. Обозначим систему, в которой проводится измерение, прибор и их объединение через m , a и Σ соответственно. Отнесем начальное состояние к моменту времени $t=0$, тогда

$$|\Sigma, t=0\rangle = |m, t=0\rangle \otimes |a, t=0\rangle,$$

$$|m\rangle \in \mathcal{H}^m, \quad |a\rangle \in \mathcal{H}^a, \quad |\Sigma\rangle \in \mathcal{H}^\Sigma = \mathcal{H}^m \otimes \mathcal{H}^a, \tag{I.4.1}$$

$\mathcal{H}$ - гильбертово пространство. Пусть измеряемой величине X^m с собственными значениями x_j^m соответствует полная ортонормированная система собственных векторов

$$\{|mj\rangle : j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \tag{I.4.2}$$

Введем полную ортонормированную систему для прибора

$$\{|a\kappa\rangle : \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \tag{I.4.3}$$

причем будем считать

$$|a, t=0\rangle = |a\,0\rangle. \tag{I.4.4}$$

Пусть первый акт измерения по Гейзенбергу происходит на интервале времени $(0,t)$, тогда

$$|\Sigma, t\rangle = U(t,0)|\Sigma, t=0\rangle, \tag{I.4.5}$$

где $U(t,0)$ - унитарный оператор временной эволюции. Определим последний согласно

$$U(t,0)|mj\rangle \otimes |a\kappa\rangle = |mj\rangle \otimes |a\,\kappa+j\rangle, \quad j,\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{I.4.6}$$

Разложим вектор начального состояния исследуемой системы по базису (I.4.2): $|m, t=0\rangle = \sum_j c_j |mj\rangle$, $c_j = \langle mj|m, t=0\rangle$. Ввиду (I.4.6),(I.4.4) получаем из (I.4.5)

$$|\Sigma, t\rangle = \sum_j c_j |mj\rangle \otimes |aj\rangle. \tag{I.4.7}$$

Формула (I.4.7) представляет собой основной результат математической части теории измерения фон Неймана. Эта формула устанавливает взаимно-однозначное соответствие между состояниями исследуемой системы и прибора. Если окажется, что прибор находится в состоянии с амплитудой $|aj\rangle$, это будет означать, что исследуемая система находится в состоянии с амплитудой $|mj\rangle$, а измеряемая величина X^m имеет значение x_j^m. Этот результат можно сформулировать еще и так. Пусть $|a\kappa\rangle$ - собственный вектор величины Y^a, принадлежащий собственному значению y_κ^a. Тогда показанию прибора y_j^a соответствует значение измеряемой величины x_j^m.

Но если система Σ находится в чистом состоянии с амплитудой (I.4.7), прибор не находится в состоянии с определенным значением величины Y^a. Для перехода прибора в такое состояние прежде всего необходимо, чтобы состояние системы Σ было смешанным.

Введем представление о состоянии как о функционале на множестве операторов в гильбертовом пространстве. Такое представление используется в алгебраической теории. В дираковской формулировке состояние, описываемое амплитудой $|\rangle$, обозначается $\rho = |\rangle\langle|$ и представляет собой проектор. Состояние как функционал обозначим $\omega = \langle|\cdot|\rangle$. При этом среднее значение оператора A в состоянии ω есть $\omega(A) = \langle|A|\rangle$. В случае

смешанного состояния

$$\rho = \sum_j w_j |j\rangle\langle j|, \quad \omega = \sum_j w_j \langle j|\cdot|j\rangle, \quad \rho \leftrightarrow \omega; \tag{I.4.8}$$

среднее значение $\omega(A) = \sum_j w_j \langle j|A|j\rangle = \mathrm{Tr}\{\rho A\}$.

Согласно сказанному выше, результатом первого акта измерения должно быть не чистое состояние

$$\langle \Sigma, t|\cdot|\Sigma, t\rangle = \sum_{jj'} \overset{*}{c}_{j'} c_j \langle mj'|\cdot|mj\rangle \otimes \langle aj'|\cdot|aj\rangle, \tag{I.4.9}$$

как это получается в ортодоксальной динамике, а смешанное состояние

$$\omega^\Sigma = \sum_j |c_j|^2 \langle mj|\cdot|mj\rangle \otimes \langle aj|\cdot|aj\rangle. \tag{I.4.10}$$

Тогда второй акт измерения состоит в том, что реализуется (выбирается из смеси) некоторое состояние $\omega_j^\Sigma = \langle mj|\cdot|mj\rangle \otimes \langle aj|\cdot|aj\rangle$ с вероятностью $w_j = |c_j|^2 = |\langle mj|m, t=0\rangle|^2$ - в соответствии со статистической интерпретацией квантовой механики.

Смешанное состояние (I.4.10) получается из чистого состояния (I.4.9) вычеркиванием недиагональных, или интерференционных членов $j' \neq j$. В теории фон Неймана считается, что уничтожение интерференционных членов происходит за счет сознания наблюдателя. Можно ввести систему C - сознание. Аналогично предыдущему получается амплитуда состояния системы $\Sigma' = m + a + c$

$$|\Sigma', t\rangle = \sum_j c_j |mj\rangle \otimes |aj\rangle \otimes |cj\rangle \tag{I.4.11}$$

(это простейший вариант так называемой иерархии фон Неймана). Далее считается, что для сознания члены $\langle cj'|\cdot|cj\rangle$, $j' \neq j$ отсутствуют.

Однако использование сознания в качестве элемента физической теории вызывает серьезные возражения. Напомним выдержку из книги Ландау и Лифшица /28/, приведенную в предыдущем параграфе. Целесообразно также привести цитату из статьи Леггетта /31/, включенной в книгу "Энциклопедия незнания": "Большинство ученых-естественников, вероятно, имеет глубоко укоренившуюся веру, что должно быть возможным дать полное описание законов природы без явной ссылки на человеческое сознание или человеческое вмешательство. Однако в самом сердце физики - надолго образце для естественной науки - лежат две проблемы, где это допущение до сих пор подвергается яростным дебатам. Одна - это вопрос о "стреле времени", или, более точно, очевидная асимметрия физических процессов относительно времени, другая - это проблема измерения в квантовой механике."

Третий подход, предложенный Эвереттом, основан на идее "ветвящейся вселенной". Предполагается, что в любом опыте одновременно реализуются все возможные результаты, причем каждому из них отвечает своя собственная вселенная. Другими словами, при всяком измерении происходит расщепление вселенной на множество отдельных экземпляров. По мнению Такабаяси /9/, такая интерпретация квантовой механики могла возникнуть только от полного отчаяния перед трудностями проблемы измерения.

В адрес теории Эверетта напрашивается следующее замечание. Можно использовать выражение (I.4.7). Как вектор $|\Sigma, t\rangle$, так и отдельные векторы $|m_j\rangle \otimes |a_j\rangle$, принадлежат одному и тому же гильбертову пространству $\mathcal{H}^{\Sigma} = \mathcal{H}^{m} \otimes \mathcal{H}^{a}$, описывающему состояния системы Σ в рамках одной вселенной. Поэтому расщепление гильбертова пространства и вместе с ним вселенной весьма произвольно.

Три рассмотренных подхода пытаются решить проблему измерения в рамках интерпретационной части теории. Всем подходам такого рода присущи следующие два принципиальных недостатка. Во-первых, в рамках теории не может быть решен вопрос, в каком случае временная эволюция должна быть детерминистской и в каком – индетерминистской. (Измерение относится ко второму случаю.) Во-вторых, в случае индетерминистской эволюции теория не может однозначно указать, в какое смешанное состояние превращается исходное чистое состояние; тем самым нет однозначного рецепта для определения множества возможных конечных состояний.

Предпринимались также попытки описать процесс измерения в рамках математической части квантовой теории, т.е. построить динамическую теорию измерения. В них исходным пунктом является макроскопичность прибора, т.е. то, что он состоит из огромного числа частиц. Однако "изгнать" детерминизм, присущий математическому аппарату ортодоксальной квантовой теории, не удалось /8/. В дополнение к /8/ отметим здесь теорию Мачида-Намики /32,33/, которая представляется неадекватной по следующей причине. Учитываются только макроскопические наблюдаемые прибора, которые подчиняются правилу суперотбора и условию гладкости. Поскольку последнее условие не может быть формализовано (нет физической границы для возможных вариаций), при $t \to \infty$ недиагональные элементы (т.е. интерференционные члены) стремятся к нулю неравномерно относительно множества наблюдаемых. Поэтому при любом $t < \infty$ интерференционные члены остаются.

Наконец, предпринимались и продолжают предприниматься попытки построить детерминистскую теорию квантовых систем. Эти попытки связаны с введением скрытых параметров и построением на этой основе теории измерения. Этот подход получил наиболее детальное развитие в работах Бома. Однако построить логически последовательную теорию со скрытыми параметрами не удалось /8,9/.

В заключение обзора по проблеме измерения следует отметить, что само существование этой проблемы не является общепризнанным. Предоставим слово д'Эспанья /8/: "Проблема измерения в квантовой механике считается несуществующей или тривиальной внушительным числом физиков-теоретиков и представляющей почти непреодолимые трудности несколько меньшим, но постоянно растущим числом их коллег."

§ 5. КОШКА ШРЕДИНГЕРА И ДРУГ ВИГНЕРА: ПРОБЛЕМА СУПЕРПОЗИЦИИ ДЛЯ МАКРООБЪЕКТОВ

Как при возникновении квантовых идей, так и при создании и развитии квантовой теории решающую роль играло рассмотрение как микроскопических, так и макроскопических объектов. Сама идея квантового описания осциллятора, т.е. системы с одной степенью свободы, была введена Планком с целью получения правильных свойств равновесного излучения, т.е. системы с бесконечным числом степеней свободы. Квантовая механика была создана Гейзенбергом и Шредингером прежде всего для описания простейших микросистем; одними из важнейших ее достижений явились теории теплоемкости твердых тел, сверхпроводимости и сверхтекучести, т.е. теории свойств макроскопических систем.

При описании макрообъектов квантовая теория идет по тому же пути, что и классическая теория: свойства макрообъектов выводятся из свойств составляющих их микрообъектов. В связи с этим естественно возникает следующий вопрос: остаются ли в силе общие принципы, лежащие в основе теории микрообъектов, при переходе к макрообъектам ? Одной из наиболее важных и острых проблем в этом плане является проблема принципа суперпозиции для макроскопически различных квантовых состояний, т.е. таких состояний макрообъектов, которые отличаются с макроскопической точки зрения.

Одним из фундаментальных положений ортодоксальной квантовой теории является принцип суперпозиции. Состояние квантовой системы описывается с помощью амплитуды состояния – вектора ψ гильбертова пространства. (Здесь для разнообразия не используются дираковские обозначения; в дальнейшем обозначения, принятые в математике, будут более удобны.) Принцип суперпозиции состоит в утверждении, что если система может находиться в каждом из двух состояний с амплитудами ψ_1 и ψ_2 соответственно, то она может находиться в состоянии с амплитудой

$$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2, \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1, \tag{I.5.I}$$

где c_1, c_2 – комплексные числа. В такой формулировке принцип суперпозиции относится к произвольной квантовой системе – как микроскопической, так и макроскопической. Поэтому в рамках ортодоксальной квантовой теории не представляется возможным подвергать сомнению применимость этого принципа к макрообъектам. С другой стороны, практика не дает примеров проявления этого принципа в макромире. Таким образом, есть основания считать, что имеется противоречие между предсказаниями ортодоксальной квантовой теории и наблюдаемыми на опыте свойствами макрообъектов.

Обозначим $\omega_\psi = (\psi, \cdot\, \psi)$ состояние с амплитудой ψ. При этом среднее значение $\omega_\psi(A) = (\psi, A\psi)$. Заметим, что здесь и всюду в дальнейшем скалярное произведение (ψ_2, ψ_1) линейно по ψ_1 и антилинейно по ψ_2 :

$$(\psi, \alpha'\psi' + \alpha''\psi'') = \alpha'(\psi, \psi') + \alpha''(\psi, \psi''),$$
$$(\alpha'\psi' + \alpha'\psi'', \psi) = \overset{*}{\alpha}{}'(\psi', \psi) + \overset{*}{\alpha}{}''(\psi'', \psi). \qquad (I.5.2)$$

Состояние с амплитудой (I.5.I)

$$\omega_\psi = |c_1|^2 \omega_{\psi_1} + |c_2|^2 \omega_{\psi_2} + \overset{*}{c}_1 c_2 (\psi_1, \cdot\, \psi_2) + \overset{*}{c}_2 c_1 (\psi_2, \cdot\, \psi_1). \qquad (I.5.3)$$

В отсутствие принципа суперпозиции

$$\omega_\psi = |c_1|^2 \omega_{\psi_1} + |c_2|^2 \omega_{\psi_2} . \qquad (I.5.4)$$

Переход от (I.5.3) к (I.5.4) означает вычеркивание интерференционных членов. Поэтому рассматриваемая проблема относится к тому же кругу вопросов, что и проблемы измерения, необратимости и индетерминизма вообще.

Указанное выше противоречие было рассмотрено в 1935 г. Шредингером в работе /34/, относящейся к периоду "первой волны" критики ортодоксальной квантовой механики. Шредингер описал ситуацию, получившую впоследствии название парадокс кошки Шредингера. Эта ситуация такова.

Живая кошка заключена в стальную камеру, и вместе с ней в камеру помещена адская машина, устроенная следующим образом. В счетчике Гейгера находится ничтожное количество радиоактивного вещества, так что на протяжении целого часа распадается, быть может, только один из атомов, но с такой же вероятностью не распадается ни одного атома. Если хоть один атом подвергнется распаду, счетчик отметит этот распад, и через посредство реле молоточек упадет на колбочку с синильной кислотой и разобьет ее. Если предоставить эту систему самой себе в течение одного часа, то можно сказать, что кошка будет еще жива, если за этот срок не распадется ни один радиоактивный атом; распад хотя бы только одного атома уже отравил бы ее.

Если кошка рассматривается как квантовая система и описывается волновой функцией, то конечное состояние описывается амплитудой, представляющей собой квантовую суперпозицию амплитуд состояний живой и мертвой кошки. Такое положение дел продолжается до тех пор, пока внешний наблюдатель не откроет камеру и не заглянет внутрь, так как только последний процесс приводит к редукции волновой функции. Эта редукция приводит к тому, что в одном из двух случаев кошка оказывается убитой.

Такое описание, действительно, представляется парадоксальным, так как даже перед тем, как в игру вступает внешний наблюдатель, имеется существо, для которого наблюдаемая "кошка живая" или "кошка мертвая" имеет вполне определенное значение, по крайней мере, в половине случаев. Это существо, разумеется, - сама кошка.

Парадокс кошки Шредингера является одним из самых знаменитых парадоксов в основаниях квантовой теории. Чаще всего от этого парадокса отмахиваются с улыбкой. Иногда возражают, что кошку следует описывать не волновой функцией, а статистическим оператором, поскольку она находится в смешанном состоянии. Однако, как показали фон Нейман /4/ и Вигнер /19/, в ортодоксальной квантовой механике смешанность начального состояния прибора не приводит к требуемой статистике результатов измерения. Таким образом, учет смешанности начального состояния кошки не приводит к решению парадокса.

В начале 60-х годов Вигнером была поднята "вторая волна" критики ортодоксальной квантовой механики в связи с проблемой измерения. В частности, в работе /35/ он придал несколько иную форму парадоксу кошки.

Пусть m - квантовомеханическая система, в которой проводится измерение величины X , $\mathcal{O}$ - наблюдатель, f - прибор или друг наблюдателя, которого последний попросил выполнить измерение. Пусть X имеет два собственных значения x_0 , x_1 , которым соответствуют собственные векторы ψ_0^m, ψ_1^m. Характер измерения таков, что в случае x_1 система f регистрирует сигнал, в случае x_0 регистрация отсутствует. Амплитуда начального состояния системы f есть ψ_0^f , амплитуда конечного - ψ_1^f или ψ_0^f соответственно. Если амплитуда начального состояния системы m есть ψ_j^m, $j = 0, 1$, тогда амплитуда конечного состояния системы $m+f$ есть $\psi_j^m \otimes \psi_j^f$. Поэтому можно сказать, что система f либо зарегистрировала, либо не зарегистрировала сигнал или в качестве друга последний либо видел сигнал, либо не видел. Когда наблюдатель $\mathcal{O}$ смотрит на f или слушает сообщение f , он просто получает информацию о соответствующем факте. Но если начальное состояние системы m имеет амплитуду $\psi^m = c_0 \psi_0^m + c_1 \psi_1^m$, амплитуда конечного состояния системы $m + f$ есть $\psi^{m+f} = c_0 \psi_0^m \otimes \psi_0^f + c_1 \psi_1^m \otimes \psi_1^f$. Теперь наблюдатель $\mathcal{O}$ не может утверждать, что системой f сигнал либо зарегистрирован, либо не зарегистрирован. Только после того, как $\mathcal{O}$ посмотрит на f или как друг выслушает его, $\mathcal{O}$ может использовать такое описание.

Пусть f - друг, а не прибор. Тогда $\mathcal{O}$ может спросить его, что он (друг) чувствовал, когда взаимодействовал с системой m . Если f той же самой природы, что и $\mathcal{O}$, он должен был до этого вопроса иметь вполне определенное ощущение. Он чувствовал, что либо видел сигнал, либо не видел. Но если $\mathcal{O}$ верит в справедливость принципа суперпозиции, он не может допустить, что его друг f , подобно ему самому, во всех случаях получает определенные впечатления от окружающего мира. Это заключение представляет собой некий вариант солипсизма.

Для того, чтобы избежать такого заключения, указывает Вигнер, необходимо модифицировать квантовую механику, а именно, отказаться от линейности временной эволюции. (Речь идет о линейности по амплитуде.) Это могло бы привести к уничтожению интерференционных членов. Каковы явления, нарушающие линейность ? Чисто физические явления такого рода неизвестны. Поэтому Вигнер предполагает, что линейность нарушается сознанием. Это соответствует рассмотренной в предыдущем параграфе точке зрения фон Неймана, которая была высказана им еще раньше /4/.

Парадокс "Друга' Вигнера" подчеркивает связь проблемы суперпозиции с проблемой измерения и затрагивает глубокие философские вопросы, относящиеся к роли сознания в процессе измерения. Таким образом, парадоксы "Кошки Шредингера" и "Друга Вигнера" имеют самое прямое отношение к фундаментальным проблемам физики и философии.

Из новых публикаций, касающихся роли мыслящего наблюдателя, назовем книгу Девиса /36/.

Неоднократные попытки решения проблемы макроскопической суперпозиции не привели к успеху. Обзор имеется в книге д'Эспанья /8/, а обсуждение философских аспектов проблемы - также в его книге /37/.

В последние годы на ряд аспектов проблемы суперпозиции в макромире обратил внимание Леггетт /38/. Он подчеркнул, что такие макроскопические квантовые явления, как сверхпроводимость и сверхтекучесть, не имеют отношения к этой проблеме. В указанных явлениях фигурирует амплитуда состояния вида $\Psi = \bigotimes_j (c'_j \psi'_j + c''_j \psi''_j)$, где j нумерует степень свободы, в то время как проблема связана с амплитудой вида $\Psi = c' \bigotimes_j \psi'_j + c'' \bigotimes_j \psi''_j$. Кроме того, Леггетт обсудил некоторые относящиеся к проблеме экспериментальные возможности.

§ 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ПРОБЛЕМЫ ИНДЕТЕРМИНИЗМА

Требование описания индетерминизма в рамках математической части физической теории приводит к математическому аспекту проблемы индетерминизма. Этот аспект может быть сформулирован в виде следующих пунктов.

1. Внесение случайного элемента, или потери информации в математическую часть физической теории.
2. Математическое определение субъективной и объективной случайности.
3. Установление математической природы индетерминизма в физике, а именно, в квантовой теории.
4. Включение объективной случайности в математическую часть квантовой теории, т.е. построение индетерминистской квантовой динамики.
5. Построение квантоводинамической теории измерения.
6. Рассмотрение необратимых процессов.
7. Исследование свойств когерентности состояний макрообъектов.

Эти проблемы существенно отличаются по трудности. Подход к решению первых двух из них достаточно очевиден.

Случайный элемент вносится в математическую часть физической теории путем некоторого усреднения. Так, в динамике речь может идти об усреднении по начальным условиям и по времени. В общем случае усреднение представляет собой интегрирование по вероятностной мере. Поэтому решение первой проблемы сводится к введению некоторого физического ограничения на вероятностные меры.

В основе решения второй проблемы лежат следующие соображения. Интегрирование по фиксированной вероятностной мере представляет собой крупноструктурное усреднение, отражающее неполноту информации о физической системе. Поэтому отвечающая такому усреднению случайность является субъективной. Увеличению информации соответствует уменьшение носителя меры, т.е. множества, на котором сосредоточена мера. Для полного устранения субъективного элемента следует рассматривать предельный переход к минимальному носителю. В простейшем случае таковым является точка. Случайность, остающаяся после такого предельного перехода, должна интерпретироваться как объективная.

С третьей проблемой дело обстоит иначе. Здесь необходим анализ конкретных физических теорий - в смысле влияния описанного усреднения и предельного перехода.

Решение четвертой проблемы должно опираться на решение третьей.

Наконец, решение последних трех проблем состоит в развитии теории.

Таким образом, центральной проблемой является третья - проблема математической природы индетерминизма. Основным же результатом должно явиться решение четвертой проблемы - построение динамики.

ГЛАВА 2. ПРИРОДА ИНДЕТЕРМИНИЗМА

§ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ КОНТИНУУМ

Обоснование внесения случайного элемента в математическую часть физической теории может быть получено путем анализа представлений о математическом и физическом континууме. Такой анализ был проведен Пуанкаре /39/. Остановимся на основных моментах. Центральным здесь является вопрос, не заимствовано ли понятие математической непрерывности непосредственно из опыта. На первый взгляд, если основываться на законе Фехнера, согласно которому ощущение пропорционально логарифму раздражения, ответ является положительным. Но на самом деле результаты опытов Фехнера приводят к совершенно противоположному заключению.

Пусть A , B , C - три веса, равные 10, 11, 12 граммам соответственно. Было замечено, что A и B производят тождественные ощущения, равно как и B и C. Другими словами, A нельзя отличить от B, а B – от C. В то же время A легко отличить от C. Таким образом, непосредственные результаты опыта можно записать в виде соотношений $A=B$, $B=C$, $A<C$. Эти соотношения можно считать определением физической непрерывности: между двумя различными величинами A, C находится третья величина B, не отличимая от каждой из них. Последнее свойство отражает идею непрерывности. Но с математической точки зрения недопустимо, чтобы две величины, равные третьей, не равнялись друг другу: из $A=B$ и $B=C$ должно следовать $A=C$. Это заставляет предположить, что A отличается от B и B отличается от C, и лишь несовершенство наших чувств не позволяет заметить эти отличия. Использование прибора, более совершенного, чем человеческие ощущения, позволит различить A и B, но между ними поместится D, которое нельзя отличить ни от A, ни от B. Какие бы совершенные приборы и методы не использовались, непосредственные результаты опыта будут всегда обладать свойствами физической непрерывности с присущим ей противоречием. Необходимость избежать этого противоречия привела к идее математической непрерывности. Освобождение от противоречия состоит в помещении новых членов между членами, уже разрешенными, и продолжении этой операции до бесконечности.

Отличие физического континуума от математического подчеркивалось также Г.Вейлем /40/: "Мы надеемся, что приемлемо такое описание континуума: I) он делится на части; 2) но его части не "отрублены одна от другой топором", их локализация и границы неизбежно нечетки; 3) однако математик, желая быть готовым к любой неожиданности, полагает, что можно превзойти любую достигнутую ранее степень точности и четкости деления."

Приведенные соображения не означают, что в физике следует отказаться от использования математического понятия непрерывности, в частности, от понятия математической точки. Но эти соображения нельзя игнорировать. Правильный путь состоит во введении вероятностных представлений. Борн по этому поводу пишет так: /4I/: "Утверждения, подобные следующему: величина x имеет полностью определенное значение (выражаемое действительным числом и представляемое точкой в математическом континууме), кажутся мне не имеющими физического смысла. Современная физика достигла величайших успехов с помощью методологического принципа, заключающегося в том, что понятия, применение которых требует принципиально ненаблюдаемых различий, являются бессмысленными и должны быть устранены... Проблема непрерывности требует применения того же самого принципа. Утверждение, подобное $x=\pi$ см, имело бы физический смысл только в том случае, если бы можно было отличить его от $x=\pi_n$ см для любого n, где π_n есть приближение π с помощью первых n десятичных знаков. Однако это невозможно, и даже если мы предположим, что точность измерения в будущем будет увеличиваться, n всегда можно выбрать таким большим, что невозможно никакое экспериментальное различие.

Конечно, я не намереваюсь изгонять из физики понятие действительного числа. Оно необходимо для применения анализов. Но я имею в виду, что физическая ситуация должна описываться посредством действительных чисел таким образом, чтобы во всех наблюдениях естественная неточность принималась во внимание.

Уже пятьдесят лет назад Феликс Клейн потребовал, чтобы подобный шаг был предпринят в геометрии. Наряду с абстрактной, точной геометрией он пожелал иметь практическую геометрию, в которой точка заменяется маленьким пятном, прямые линии – узкими полосами и т.д. Однако из этого не получилось ничего значительного. Тем временем физика независимо разработала необходимый инструмент, а именно физическую статистику. Утверждение "x равно действительному числу" заменяется следующим: "вероятность того, что x лежит в интервале $x_1<x<x_2$, есть $P(x_1/x/x_2)$". Здесь x, x_1, x_2, P можно рассматривать как действительные числа, поскольку аналитически это удобно, пока не затрагивается возможность точного измерения величин; P ведь представляет лишь приблизительное ожидание, когда подсчитываются случаи, для которых x ограничено приблизительно x_1 и x_2. Другими словами, действительной физической переменной является плотность вероятности $P(x)$."

Функция вещественной переменной $f(x)$ заменяется средним значением

$$f(x) \to f_x^\Delta = \int dx'\, w_x(x') f(x'), \qquad (2.I.I)$$

где $w_x(x')$ – плотность вероятности.

§ 2. ПРИНЦИП НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассмотрение, проведенное в предыдущем параграфе, показывает необходимость внесения случайного элемента, или потери информации в математическую часть физической теории. Этот элемент вносится путем усреднения по некоторому распределению вероятности, т.е. путем интегрирования по вероятностной мере. Таким образом, первая проблема (гл.I, § 6) сводится к выбору допустимых с физической точки зрения вероятностных мер. В случае величины, принимающей непрерывное множество вещественных значений, решение указано Борном. Допустимы только чисто непрерывные меры. Мера Дирака (точечная мера) означала бы отсутствие усреднения. Этот простой случай можно существенно обобщить.

Напомним некоторые определения. Измеримым пространством называется пара $(X, \mathcal{A})$, где X – непустое множество, $\mathcal{A}$ – некоторая σ-алгебра его подмножеств. Множества из $\mathcal{A}$ называются измеримыми. По определению, σ-алгебра включает X, пустое множество $\varnothing$ и замкнута относительно операций вычитания, пересечения пары множеств и счетного объединения множеств.

Вероятностной мерой на $\mathcal{A}$ называется счетно аддитивная функция $P: \mathcal{A} \to [0, 1]$, такая, что $P(\varnothing) = 0$, $P(X) = 1$. Говорят также, что P – мера на $(X, \mathcal{A})$, или мера в X.

Тройка $(X, \mathcal{A}, P)$ называется вероятностным пространством.

В общем случае речь идет об усреднении по вероятностной мере:

$$f(x) \to f_x^{\Delta} = \int P_x(dx') f(x'), \qquad x, x' \in X. \qquad (2.2.1)$$

Задача состоит в нахождении некоторого ограничения на класс вероятностных мер, основанного на физических соображениях. Если вероятностная мера задана на измеримом пространстве, не наделенном какой-либо дополнительной структурой, то ввести физические ограничения на эту меру не представляется возможным. Указанные ограничения должны быть связаны с трудностью различения достаточно близких элементов измеримого пространства. Понятие близости является топологическим. Поэтому естественно ограничиться вероятностными мерами на топологических пространствах.

Топологическое пространство – это пара $(X, \mathcal{T})$, где X – непустое множество, $\mathcal{T}$ – топология, т.е. семейство подмножеств X, включающее X, $\varnothing$ и замкнутое относительно конечных пересечений и произвольных объединений. Множества из $\mathcal{T}$ называются открытыми. Дополнение открытого множества называется замкнутым множеством. Если $\mathcal{T}$ задана, топологическим пространством называют также само X.

Наименьшая σ-алгебра $\mathcal{B}$ подмножеств X, содержащая $\mathcal{T}$ ($\mathcal{B} \supset \mathcal{T}$), называется борелевской.

Борелевская вероятностная мера – это вероятностная мера на измеримом пространстве $(X, \mathcal{B})$, где X – топологическое пространство, $\mathcal{B}$ – борелевская σ-алгебра.

Физические ограничения будут введены на борелевские вероятностные меры. Эти ограничения связаны со свойствами непрерывности меры. Основную роль для физических приложений будет играть свойство инфинитезимальной непрерывности.

Напомним, что подмножество V топологического пространства X называется окрестностью точки $x \in X$, если существует открытое множество U, такое, что $x \in U \subset V$.

Борелевскую вероятностную меру P в топологическом пространстве X будем называть инфинитезимально непрерывной в точке $x \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность V точки x, такая, что для каждой пары B_1, B_2 непустых борелевских подмножеств V выполняется соотношение $|P(B_1) - P(B_2)| < \varepsilon$. Борелевскую вероятностную меру будем называть инфинитезимально непрерывной, если она является таковой в каждой точке.

Введем еще свойство глобальной непрерывности меры. При этом используются следующие понятия, относящиеся к топологическому пространству X. Замыканием множества A называется наименьшее замкнутое множество, содержащее A. Внутренностью множества A называется наибольшее открытое множество, содержащееся в A. Границей множества называется пересечение замыканий этого множества и его дополнения.

Замкнутое множество будем называть замкнутым в себе, если оно совпадает с замыканием своей внутренности.

Множество $A \subset X$ называется множеством непрерывности меры P, если мера границы A равна нулю.

Борелевскую вероятностную меру P в топологическом пространстве будем называть глобально непрерывной, если каждое замкнутое в себе множество является множеством непрерывности меры P.

Борелевскую вероятностную меру будем называть вполне непрерывной, если она обладает свойствами инфинитезимальной и глобальной непрерывности.

Теперь сформулируем

Принцип непрерывности вероятности. Физически реализуемая борелевская вероятностная мера вполне непрерывна.

Этот принцип представляет собой искомое ограничение на класс вероятностных мер, обусловленное физическими соображениями.

Отметим два следствия свойства инфинитезимальной непрерывности. Пусть для измеримого множества $B \in \mathcal{B}$ существует точка $x \in X$, такая, что каждая окрестность этой точки содержит бесконечное семейство непересекающихся измеримых множеств, включающее B. Тогда $P(B) = 0$.

Напомним, что точка $x \in X$ называется предельной точкой множества $A \subset X$, если каждая окрестность x включает точку из A, отличную от x.

Пусть каждое одноточечное множество $\{x\} \subset X$ замкнуто (тогда X есть T_1 – пространство) и, следовательно, измеримо. Тогда, если $x \in X$ – предельная точка множества X, $P(\{x\}) = 0$. Таким образом, свойство инфинитезимальной непрерывности исключает точечные меры, сосредоточенные в предельных точках. Кроме того, $P(\{x\})$ является непрерывной функцией точки.

Трудность восприятия статистической интерпретации квантовой теории, т.е. существования индетерминизма, вызывала, как уже отмечалось, неоднократные попытки введения скрытых параметров, т.е. возвращения к детерминизму. Эта трудность обусловлена тем, что в рамках ортодоксального подхода статистическая интерпретация ассоциируется со следующим положением: при точно заданных начальном состоянии и условиях через точно заданный промежуток времени результаты, вообще говоря, различны.

С таким положением, действительно, трудно примириться. Предшествующее рассмотрение показывает, что указанное положение, т.е. представление о возможности полной информации, или абсолютно точного описания физической системы, неадекватно.

§ 3. δ-УСРЕДНЕНИЕ

Введение в математическую часть физической теории случайного элемента путем интегрирования по вполне непрерывной вероятностной мере представляет собой крупноструктурное усреднение. Обсуждение, проведенное в гл.I, § 3, показывает, что при построении фундаментальной физической теории использовать такое усреднение по меньшей мере крайне нежелательно. Повышение точности измерения, в принципе, не ограничено. Это обстоятельство отмечал фон Нейман /4/: "В свойственном классической механике методе рассмотрения (без каких бы то ни было квантовых условий) хотя и приписывают каждой величине... в любом состоянии совершенно определенное значение, но в то же время считают, что любой мыслимый измерительный аппарат... может дать это значение лишь в пределах некоторой, никогда не исчезающей, ошибки. Правда, пределы этой ошибки удается за счет достаточного уточнения метода измерения сдвинуть сколь угодно близко к 0, но точно нулем они никогда не будут. Можно ожидать, что это будет также и в квантовой теории для тех величин..., которые, согласно сложившимся для них (в особенности до открытия квантовой механики) наглядным представлениям, не квантованы, например, для декартовых координат электрона (которые могут принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$ и операторы которых имеют непрерывный спектр)."

Отсюда вытекает, что после проведения крупноструктурного усреднения следует переходить к соответствующему пределу. Так, в случае непрерывной вещественной величины усреднение (2.I.I) проводится по вероятностной мере с плотностью вероятности $w_x(x')$, сосредоточенной около точки x. Предельным переходом является переход к δ-функции: $w_x(x') \to \delta(x-x')$. Более точно этот предельный переход состоит в следующем. Используем секвенциальный подход к определению δ-функции, при котором последняя описывается последовательностью функций $\{w_{xn}(x'),\ n=1,2,\dots\}$. Тогда фигурирует предельный переход $\lim\limits_{n\to\infty}\int dx'\, w_{xn}(x')\, f(x')$. На первый взгляд это может показаться бессмысленным: если f непрерывна в точке x, то предел равен $f(x)$, а если непрерывность отсутствует, то предел, вообще говоря, не существует. Но пусть $f=f_1+f_2$, где f_1 непрерывна, а f_2 отлична от нуля лишь на множестве меры нуль. Тогда $\int dx'\, w_{xn}(x')\, f_2(x') = 0$ и нулевое значение сохраняется после перехода к пределу $n\to\infty$. В дальнейшем окажется, что именно этот эффект приводит к исчезновению интерференционных членов.

Имея в виду рассмотренный предельный переход, будем говорить о δ-усреднении.

Описанный простейший случай нуждается в обобщении в трех отношениях. Во-первых, в общем случае вместо плотности вероятности следует рассматривать вполне непрерывную борелевскую вероятностную меру P.

Во-вторых, в общем случае вместо последовательности необходимо использовать направленность.

Множество Γ называется направленным, если на нем задано бинарное отношение предпорядка $\geq$ (для $\gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$ выполняется: $\gamma \geq \gamma$; из $\gamma \geq \gamma'$ и $\gamma'' \geq \gamma$ следует $\gamma'' \geq \gamma'$), удовлетворяющее условию: для каждой пары $\gamma', \gamma'' \in \Gamma$ существует элемент $\gamma \in \Gamma$ такой, что $\gamma \geq \gamma'$ и $\gamma \geq \gamma''$. Направленность – это функция с областью определения Γ. Предел в метрическом пространстве определяется с помощью последовательности, а в произвольном топологическом пространстве – с помощью направленности. Поэтому направленности будут широко использоваться в дальнейшем.

Итак, используется направленность вполне непрерывных борелевских вероятностных мер $\{P_\gamma,\ \gamma\in\Gamma\}$. Соответственно рассматривается предел $\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}\int P_\gamma(dx)\, f(x)$. Равенство $\lim\limits_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma = y$, где y_γ, y – точки топологического пространства, означает, по определению предела, следующее: для каждой окрестности точки y существует $\gamma'\in\Gamma$ такое, что для каждого $\gamma''\geq\gamma'$ точка $y_{\gamma''}$ принадлежит этой окрестности.

Если одноточечное множество $\{x\}\subset X$ замкнуто, используется направленность мер, пересечение носителей которых есть $\{x\}$. (Носитель меры – это наименьшее замкнутое множество, мера которого равна единице.)

Третье обобщение: в качестве пересечения носителей фигурирует минимальное замкнутое множество, допускаемое топологией. В этом случае также будем использовать термин δ-усреднение. Точки минимального множества топологически неотделимы друг от друга, и их можно представлять себе "склеенными" в одну точку.

Введем также термин Δ-усреднение, означающий не δ-усреднение.

Физически Δ-усреднение означает потерю информации, или неточность в описании системы, а переход к δ-усреднению означает предельно возможное увеличение информации, или точности описания. Подчеркнем, что сочетание принципа непрерывности вероятности и δ-усреднения является не проявлением ограниченности возможностей макроскопического наблюдателя, а отражением объективных свойств природы.

§ 4. СУБЪЕКТИВНАЯ И ОБЪЕКТИВНАЯ СЛУЧАЙНОСТИ

Решение второй проблемы (гл.I, § 6), состоящей в математическом определении субъективной и объективной случайностей, является теперь очевидным.

Пусть в рамках данной физической теории проводится δ-усреднение по направленности вполне непрерывных борелевских вероятностных мер. Если результаты после δ-усреднения отличаются от соответствующих результатов в отсутствие всякого усреднения, будем говорить, что δ-усреднение эффективно; в противном случае – что оно неэффективно. В случае эффективного δ-усреднения будем говорить, что усреднение неустранимо; в случае неэффективного δ-усреднения будем говорить, что усреднение устранимо.

Усреднение по фиксированной вполне непрерывной вероятностной мере (без перехода к δ-усреднению) будем называть непрерывным. Любое Δ-усреднение (в частности, непрерывное), вообще говоря, приводит к случайности.

По определению, объективная случайность, т.е. индетерминизм, соответствует неустранимому усреднению. Это определение согласуется с интуитивным представлением об объективной случайности. Если усреднение устранимо, ему, по определению, соответствует субъективная случайность. Непрерывное неустранимое усреднение приводит как к субъективной, так и к объективной случайности; при предельном переходе к δ-усреднению остается только объективная случайность.

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДЕТЕРМИНИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

Случайность в физике проявляется в динамике, т.е. во временной эволюции. В этой связи напомним, что измерение мы намерены рассматривать как динамический процесс. Физическая система описывается в терминах динамических переменных (в частности, наблюдаемых) и состояний. Временная эволюция есть изменение во времени либо состояния (картина Лиувилля в классической механике, картина Шредингера – в квантовой), либо динамических переменных (картина Гамильтона в классической механике, картина Гейзенберга – в квантовой).

При рассмотрении проблемы случайности удобнее использовать картину Лиувилля-Шредингера. Усреднение проводится по времени (поскольку это непрерывная величина) и по начальным условиям, т.е. по начальному состоянию. Усреднение представляет собой интегрирование по вполне непрерывной вероятностной мере на топологическом пространстве. При усреднении по времени, исходя из физических соображений, следует использовать естественную топологию на вещественной временной оси (т.е. обычную метрику). При усреднении по начальному состоянию вопрос о выборе топологии на множестве состояний должен решаться в каждом конкретном случае на основе физических соображений.

Теперь можно ввести определение индетерминистской динамики. Она характеризуется тем, что объективная случайность проявляется во временной эволюции: δ-усреднение по начальному состоянию и по времени сказывается на изменении состояния во времени – в смысле возникновения объективной случайности.

Сказанное можно схематически представить следующим образом. Пусть ω_0 – состояние в начальный момент времени $t=0$, ω – в момент t, так что временной переход описывается соотношением

$$\omega_0 \to \omega = \omega(\omega_0, t). \qquad (2.5.1)$$

Будем обозначать Δ- и δ-усреднение соответствующими индексами. С учетом Δ-усреднения по ω_0 и t из (2.5.1) получим

$$\omega_\alpha^\Delta \to \omega(\omega_0^\Delta, t^\Delta) \equiv \int P(d\omega_0)\, dt\, r(t)\, \omega(\omega_0, t), \qquad (2.5.2)$$

где $r(t)$ – плотность вероятности. Переход к δ-усреднению дает

$$\omega_0^\delta \to \omega(\omega_0^\delta, t^\delta) \equiv \omega(\omega_0^\Delta, t^\Delta)\big|_{\Delta\to\delta}. \qquad (2.5.3)$$

Теперь заметим, что среднее значение $\omega^\delta(A)$ существует, вообще говоря, не для всех динамических переменных A: предел, соответствующий переходу к δ-усреднению, не существует для разрывных величин. Например, пусть ω – состояние с фиксированным значением координаты x_0, $A=\theta(x-x_0)$, где θ – ступенчатая функция. Тогда $\omega^\delta(A)$ не определено. Таким образом, $\omega^\delta \neq \omega$. Впрочем, это различие не очень велико: согласно теореме Лузина, для каждого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция, отличающаяся от данной на множестве, мера которого меньше ε.

Будем писать $\omega^\delta \simeq \omega$, если $\omega^\delta(A)=\omega(A)$ при условии, что $\omega^\delta(A)$ существует. Тогда эффективность δ-усреднения означает, что

$$\omega(\omega_0^\delta, t^\delta) \not\simeq \omega(\omega_0, t). \qquad (2.5.4)$$

Индетерминистскую динамику можно охарактеризовать следующим образом: существует чистое состояние ω_p, такое, что $\omega_p^\delta \simeq \omega_p$ и $\omega(\omega_p^\delta, t^\delta) \simeq \omega_m$, где ω_m – смешанное состояние.

Как было сказано в гл.I, § 6, решение третьей проблемы, состоящей в установлении математической природы индетерминизма в физике, требует анализа конкретных физических теорий. Этот анализ сводится к выявлению индетерминистской динамики.

§ 6. ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТЬ КЛАССИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ. ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС

Сначала рассмотрим с точки зрения развитого выше подхода классическую динамику. На множестве состояний классической системы можно задать метрическую топологию, т.е. топологию, определяемую метрикой. (Открытые множества являются объединениями открытых шаров.) В качестве носителя вполне непрерывной вероятностной меры, сосредоточенной около некоторой точки пространства состояний, можно выбрать замкнутый шар с центром в этой точке. Интегрирование по такой мере означает непрерывное Δ-усреднение по начальному состоянию. Переход к δ-усреднению реализуется стремлением к нулю радиуса шара. Пусть рассматривается эволюция на произвольном, но фиксированном промежутке времени $[0, T]$. Тогда радиус шара при $t=0$ можно выбрать так, что для любого $t \in [0, T]$ размеры области, соответствующей состоянию в момент t, будут меньше заданного $\varepsilon > 0$. Временное усреднение по мере, носитель которой Δt достаточно мал, не меняет этот результат. Это означает, что δ-усреднение по начальному состоянию и по времени приводит к δ-усреднению по состоянию в любой момент $t > 0$:

$$\omega(\omega_0^\delta, t^\delta) = \omega(\omega_0^\delta, t) \simeq \omega(\omega_0, t). \qquad (2.6.\mathrm{I})$$

Таким образом, в классической динамике усреднение по начальным условиям и по времени устранимо, так что указанная динамика детерминистична.

Здесь следует остановиться на случае неустойчивого движения, когда малые изменения начального состояния увеличиваются со временем. В этом случае радиус шара r_0 в начальный момент времени, требуемый для обеспечения ε на промежутке $[0, T]$, существенно зависит от T, стремясь к нулю с ростом T: $r_0(\varepsilon, T) \xrightarrow[T \to \infty]{} 0$. Для сохранения заданной неточности ε со временем неточность r_0 в начальный момент приходится неограниченно уменьшать.

Простой пример такого рода приведен Борном /4I/. Частица движется без трения на отрезке $0 < x < l$ оси x и упруго отражается на концах этого отрезка. Координата x остается в указанном конечном интервале для любого начального состояния (x_0, v_0), скорость v остается постоянной, но отклонение Δx растет со временем $(\Delta x = \Delta x_0 + t\,\Delta v_0)$ и принимает произвольно большие значения по истечении достаточно большого промежутка времени. Таким образом, движение неустойчиво. После того как достигается критическое время $t_c = l/\Delta v_0$, неопределенность становится $\Delta x > l$, и материальную точку можно найти где угодно в интервале $0 < x < l$. Иначе говоря, при $t > t_c$ конечное положение является недетерминированным. Но при заданных T и $\varepsilon = \Delta x$ значение $r_0 = \Delta v_0 = \frac{\Delta x}{T} = \frac{\varepsilon}{T}$ обеспечивает требуемую точность. δ-усреднение означает $r_0 \to 0$; при этом $T \to \infty$.

Еще более сильная зависимость r_0 от T имеет место в случае экспоненциально расходящихся траекторий, когда возникает динамическая стохастичность /24-26/. Здесь $r_0 = \varepsilon e^{-T/\tau}$, где τ – некоторое характерное время. Кроме того, хотя решение полностью определяется начальными условиями, оно с течением времени меняется чрезвычайно нерегулярным образом (динамический хаос). Однако вывод о неэффективности δ-усреднения остается в силе. Динамический хаос, характерный для детерминированного непериодического потока, является хаосом только для наблюдателя, следящего за грубыми свойствами системы /42/.

Специфика, возникающая в случае неустойчивого движения, связана с тем, что зависимость $\varepsilon(r_0)$ при фиксированном T является непрерывной, но на интервале $0 < T < \infty$ отсутствует равномерная непрерывность.

Итак, в классической динамике индетерминизм отсутствует. Это хорошо известно (гл.I, § I), и соответствующее рассмотрение было здесь проведено только для уяснения постановки задачи.

§ 7. ОСНОВНОЙ ТЕЗИС: НЕУСТРАНИМОСТЬ УСРЕДНЕНИЯ В НЕСЕПАРАБЕЛЬНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Индетерминизм, естественно, следует искать в рамках квантовой динамики. Основной результат этих поисков можно сформулировать в виде следующего тезиса: в случае состояний квантовой системы, описываемых векторами несепарабельного гильбертова пространства, усреднение по начальным условиям и по времени неустранимо. Это означает следующее решение третьей проблемы гл.I, § 6: природа индетерминизма состоит в неустранимости усреднения в несепарабельных гильбертовых пространствах.

Дальнейшее содержание данной главы заключается в расшифровке и доказательстве приведенного тезиса: во-первых, следует остановиться на несепарабельных гильбертовых пространствах, во-вторых, необходимо выяснить, как они появляются в квантовой теории и какую роль играют в ней, в-третьих, – и это главное – доказать тезис.

§ 8. НЕСЕПАРАБЕЛЬНОЕ ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

Комплексное векторное пространство $\mathcal{H}$ называется унитарным (или предгильбертовым) пространством, если на нем задано скалярное произведение (Ψ_1, Ψ_2), $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$. Скалярное произведение считается линейным по второму вектору и антилинейным по первому (I.5.2). Оно подчиняется условиям

$$(\Psi_1, \Psi_2) = (\Psi_2, \Psi_1)^*, \quad (\Psi, \Psi) \geq 0, \quad (\Psi, \Psi) = 0 \text{ эквивалентно } \Psi = 0. \qquad (2.8.\mathrm{I})$$

Величина $\|\Psi\| = (\Psi, \Psi)^{1/2} \geq 0$ определяет норму: выполняются условия

$$\|c\Psi\| = |c| \cdot \|\Psi\|, \quad \|\Psi_1 + \Psi_2\| \leq \|\Psi_1\| + \|\Psi_2\|, \quad \|\Psi\| = 0 \text{ эквивалентно } \Psi = 0. \qquad (2.8.2)$$

Норма определяет метрику $d(\Psi_1, \Psi_2) = \|\Psi_1 - \Psi_2\|$. Метрическое пространство называется полным, если в нем каждая последовательность Коши сходится к некоторой его точке. Полное унитарное пространство называется гильбертовым пространством.

Базисом гильбертова пространства называется максимальное ортонормированное множество векторов $\{\Psi_\varkappa : \varkappa \in K\}$. Максимальность означает, что из $(\Psi, \Psi_\varkappa) = 0$ для каждого $\varkappa \in K$ следует $\Psi = 0$. Гильбертово пространство называется сепарабельным, если оно имеет счетный базис, т.е. $\overline{\overline{K}} = \aleph_0$. Здесь $\overline{\overline{K}}$ – мощность множества K, $\aleph_0$ – мощность счетного множества, т.е. множества натуральных чисел. Гильбертово пространство называется несепарабельным, если его базис несчетный, т.е. $\bar{K} \geq \varkappa$, где $\varkappa$ – мощность континуума, т.е. множества вещественных чисел.

В дальнейшем важную роль будет играть следующий известный факт: разложение произвольного вектора $\Psi \in \mathcal{H}$ по базису включает не более чем счетное множество слагаемых. Остановимся на этом подробнее. Формально

$$\Psi = \sum_{\varkappa \in K} (\Psi_\varkappa, \Psi)\, \Psi_\varkappa . \tag{2.8.3}$$

В случае несепарабельного $\mathcal{H}$, т.е. несчетного K, необходимо определить фигурирующую здесь сумму. Рассмотрим этот вопрос в общем виде.

Пусть Z – топологическое векторное пространство, K – произвольное множество индексов, $z_\varkappa \in Z$, $\varkappa \in K$. Определению подлежит $\sum_{\varkappa \in K} z_\varkappa$. Обозначим $\mathcal{F} = \{F \subset K : F \text{ конечное}\}$ семейство всех конечных подмножеств множества K. Введем частичное упорядочение семейства $\mathcal{F}$ по отношению включения: $F'' \geq F'$ эквивалентно $F'' \supset F'$. Тогда множество $\mathcal{F}$ становится направленным. Введем конечные суммы $z_F = \sum_{\varkappa \in F} z_\varkappa$, $F \in \mathcal{F}$, и направленность таких сумм $\{z_F,\ F \in \mathcal{F}\}$. Если существует предел этой направленности $z = \lim_{F \in \mathcal{F}} z_F$, $z \in Z$, то, по определению, сумма $\sum_{\varkappa \in K} z_\varkappa$ сходится и

$$\sum_{\varkappa \in K} z_\varkappa = z . \tag{2.8.4}$$

Пусть $Z = \mathcal{R}_+$ – множество неотрицательных вещественных чисел. Тогда сходящаяся сумма (2.8.4) включает не более чем счетное множество слагаемых. Действительно, пусть m_n – число слагаемых, превышающих $\frac{1}{2^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Очевидно, каждое m_n конечно, $n = 0, 1, 2, \ldots$ исчерпывает все слагаемые; объединение счетного семейства конечных множеств счетно.

Из (2.8.3) следует $\|\Psi\|^2 = \sum_{\varkappa \in K} |(\Psi_\varkappa, \Psi)|^2$. Ввиду конечности $\|\Psi\|$ сумма включает не более чем счетное множество слагаемых. Таким образом, (2.8.3) сводится к

$$\Psi = \sum_{j=0}^{\infty} (\Psi_{\varkappa_j}, \Psi)\, \Psi_{\varkappa_j} . \tag{2.8.5}$$

Появление несепарабельных гильбертовых пространств уже в квантовой механике, т.е. в теории квантовых систем с конечным числом степеней свободы, проще всего понять, рассмотрев вопрос об описании непрерывного спектра. Наблюдаемые системы с конечным числом степеней свободы в ортодоксальной квантовой механике представляются самосопряженными операторами на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_s$. Оператор с точечным спектром имеет собственные векторы, принадлежащие $\mathcal{H}_s$. Этим векторам отвечают собственные состояния наблюдаемой. Однако оператор с непрерывным спектром не имеет собственных векторов в $\mathcal{H}_s$. Для описания собственных состояний такого оператора используются две существенно различные конструкции.

Первая конструкция была введена Дираком. Точкам непрерывного спектра x сопоставляются обобщенные векторы $|x\}$. (Это обозначение подчеркивает отличие обобщенного вектора от обычного вектора $|\rangle \in \mathcal{H}_s$.) Указанные векторы не принадлежат $\mathcal{H}_s$ и вообще какому-либо гильбертову пространству и нормируются на δ-функцию: $\{x'|x''\} = \delta(x'-x'')$. Впоследствии этот подход был математически строго оформлен в виде конструкции оснащенного гильбертова пространства /43,44/. Кроме $\mathcal{H}_s$, рассматривается некоторое его топологическое подпространство Φ и сопряженное к Φ пространство Φ^*, т.е. множество непрерывных линейных функционалов на Φ. Имеет место $\Phi \subset \mathcal{H}_s \subset \Phi^*$. $\mathcal{H}_s$ изоморфно множеству комплекснозначных функций на вещественной оси, квадратично интегрируемых по Лебегу. При этом Φ – множество достаточно гладких функций. Тройка (Φ, $\mathcal{H}_s$, Φ^*) называется оснащенным гильбертовым пространством. Обобщенные векторы являются элементами Φ^*: $|\} \in \Phi^*$. Оснащение проводится только для сепарабельного гильбертова пространства.

Вторая конструкция реализуется в алгебраической квантовой теории /45,46,43/. Точкам непрерывного спектра сопоставляются векторы гильбертова пространства $\mathcal{H}_{ns}$, отличного от $\mathcal{H}_s$. Ввиду ортогональности векторов, принадлежащих разным собственным значениям, ясно, что $\mathcal{H}_{ns}$ несепарабельно. Разным операторам соответствуют, вообще говоря, разные $\mathcal{H}_{ns}$. Собственные векторы в непрерывном спектре нормируются на единицу.

В дальнейшем используется алгебраический подход. Такой выбор диктуется следующими соображениями. Одна из основных задач индетерминистской динамики – построение динамической теории измерения (пятая проблема гл.I, § 6). Пусть в состоянии, принадлежащем точечному спектру (амплитуда этого состояния $|\rangle \in \mathcal{H}_s$), измеряется наблюдаемая с непрерывным спектром. Результатом будет собственное состояние в непрерывном спектре. В конструкции оснащенного гильбертова пространства нормировка состояния меняется. Но трудно представить, как описать изменение нормировки в динамике. В алгебраической конструкции такой трудности не возникает.

Кроме того, несепарабельное гильбертово пространство появляется естественным образом при рассмотрении системы с бесконечным числом степеней свободы.

§ 9. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Поскольку дальнейшее рассмотрение будет основано на алгебраическом подходе, опишем основные элементы этого подхода. Он является гораздо более естественным, чем используемый в обычной квантовой теории.

Рассматривается произвольная физическая система: классическая или квантовая, с конечным или бесконечным числом степеней свободы. Система описывается тройкой $(\mathcal{A}, \Omega, \mathcal{D})$, где $\mathcal{A}$ – множество динамических переменных, Ω – множество состояний, $\mathcal{D}$ – динамика, т.е. картина временной эволюции.

Результатом измерений является среднее значение динамической переменной $A \in \mathcal{A}$ в состоянии $\omega \in \Omega$. Указанное среднее обозначим $\omega(A)$. Тем самым состояние определяется как функционал (т.е. комплекснозначная функция) на множестве динамических переменных: $\omega: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, $A \mapsto \omega(A)$ ($\mathcal{C}$ – множество комплексных чисел). Поскольку непосредственный физический смысл приписывается лишь величине $\omega(A)$, следует считать, что множества $\mathcal{A}$ и Ω взаимно разделяют друг друга: если $A_1 \neq A_2$, существует $\omega \in \Omega$, такое, что $\omega(A_1) \neq \omega(A_2)$; если $\omega_1 \neq \omega_2$, существует $A \in \mathcal{A}$, такое, что $\omega_1(A) \neq \omega_2(A)$. Введенные условия являются, по сути, определениями различия соответствующих элементов.

Величины $\omega(A)$ зависят от времени t. Эту зависимость можно описать временной эволюцией либо состояний (картина Лиувилля – Шредингера), либо динамических переменных (картина Гамильтона – Гейзенберга). При этом $[\omega(A)]_t = \omega_t(A) = \omega(A_t)$. Далее, $\omega_{t_2} = S_{t_2,t_1}\omega_{t_1}$, $A_{t_2} = \alpha_{t_2,t_1} A_{t_1}$, где S и α – некоторые преобразования. Динамика определяется как семейство соответствующих преобразований:

$$\mathcal{D}_\Omega = \{ S_{t_2,t_1} : t_1, t_2 \in \mathcal{R} \}, \qquad (2.9.1)$$

$$\mathcal{D}_\mathcal{A} = \{ \alpha_{t_2,t_1} : t_1, t_2 \in \mathcal{R} \} \qquad (2.9.2)$$

($\mathcal{R}$ – вещественная ось).

Итак, $\mathcal{A}$ – некоторое множество, Ω – множество функционалов на $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ – множество преобразований, или отображений, $\mathcal{A}$ или Ω в себя. Описание системы на этом уровне является очень общим, но именно поэтому лишенным какой бы то ни было глубины. Соответствующая теория тривиальна. Для достижения нетривиальности необходимо наделить множества $\mathcal{A}$, Ω и $\mathcal{D}$ какими-то структурами. При этом чем богаче структура, тем теория менее обща, но зато более нетривиальна. Здесь возникает типичная ситуация: борьба между общностью и нетривиальностью. Выбор структур должен быть в какой-то степени оптимальным. По возможности этот выбор должен основываться на физических соображениях.

В математике известны структуры трех типов: алгебраические, топологические и структуры порядка.

Начнем с множества $\mathcal{A}$. Введем в нем алгебраическую структуру. Динамические переменные можно складывать и умножать на комплексные числа. Это наделяет $\mathcal{A}$ структурой комплексного линейного **пространства**. Далее, динамические переменные можно перемножать. Это превращает $\mathcal{A}$ в алгебру. Считаем ее ассоциативной, но, учитывая опыт квантовой механики, вообще говоря, некоммутативной. Коммутативная алгебра описывает классические системы, некоммутативная – квантовые; последний случай представляет основной интерес для дальнейшего.

Константа – частный случай переменной, поэтому включаем в $\mathcal{A}$ единичный элемент I : $AI = IA = A$ для каждого $A \in \mathcal{A}$. Таким образом, $\mathcal{A}$ – алгебра с единицей.

Ввиду интерпретации $\omega(A)$ как среднего значения, с алгебраической структурой множества $\mathcal{A}$ естественно связываются некоторые свойства состояний и структура множества Ω. Среднее константы есть сама константа, поэтому

$$\omega(I) = 1. \qquad (2.9.3)$$

Таким образом, в алгебраической теории все состояния нормируются на единицу.

Для возможности применения теории вероятностей функционал ω необходимо считать линейным: $\omega(A_1 + cA_2) = \omega(A_1) + c\,\omega(A_2)$.

Если ω_1 и ω_2 – различные состояния, то можно ввести новое состояние

$$\omega = w_1\omega_1 + w_2\omega_2\ ; \quad w_1, w_2 > 0, \quad w_1 + w_2 = 1. \qquad (2.9.4)$$

Физическая интерпретация такова. Информация о системе, находящейся в состоянии ω, является неполной: система находится в одном из состояний ω_1 и ω_2 с вероятностью w_1 и w_2 соответственно. Соотношение (2.9.4) означает, что множество Ω выпуклое.

Теперь вводится понятие чистого и смешанного состояний. Если состояние ω допускает представление вида (2.9.4) с $\omega_2 \neq \omega_1$, оно называется смешанным; если такое представление невозможно, состояние ω называется чистым. Информация о системе, находящейся в чистом состоянии, является полной.

Вернемся к алгебраической структуре множества $\mathcal{A}$. Аналогом комплексного сопряжения является инволюция, т.е. операция *, являющаяся биекцией множества $\mathcal{A}$ на себя и обладающая свойствами

$$(A^*)^* = A, \quad (A_1A_2)^* = A_2^* A_1^*, \quad (cA_1 + A_2)^* = \overset{*}{c} A_1^* + A_2^*, \qquad (2.9.5)$$

где c – комплексное число, $\overset{*}{c}$ – комплексно сопряженное. Таким образом, $\mathcal{A}$ – инволютивная алгебра.

Элемент $A = A^*$ называется самосопряженным. Самосопряженная динамическая переменная представляет собой наблюдаемую.

Элемент $A^{-1} \in \mathcal{A}$ называется обратным для элемента A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Важную роль в алгебраической структуре играет понятие спектра элемента. Комплексное число a принадлежит спектру элемента A, если элемент $A - aI$ не имеет обратного. В дальнейшем окажется, что спектр наблюдаемой представляет собой множество ее собственных значений, т.е. результатов ее измерения.

Существует физическое представление о близости, или малости различия динамических переменных. Это понятие формализуется введением в множестве $\mathcal{A}$ топологической структуры. Обозначим $\|A\| = \sup_{\omega\in\Omega} |\omega(A)| < \infty$ максимальную величину модуля среднего значения динамической переменной. Неравенство означает, что рассматриваются только ограниченные динамические переменные. Из линейности ω следует

$$\|cA\| = |c|\cdot\|A\|, \quad \|A_1 + A_2\| \le \|A_1\| + \|A_2\|, \quad \|0\| = 0. \tag{2.9.6}$$

Из $\|A\|=0$ вытекает $\omega(A)=0$ для каждого $\omega\in\Omega$, т.е. $A=0$. Наконец, естественно считать, что

$$\|A_1 A_2\| \le \|A_1\|\cdot\|A_2\|. \tag{2.9.7}$$

Перечисленные свойства величины $\|A\|$ означают, что эта величина есть норма A.

Поскольку $\mathcal{A}$ - линейное пространство, норма определяет метрику

$$d(A_1, A_2) = \|A_1 - A_2\|. \tag{2.9.8}$$

При заданной точности измерения достаточно близкие динамические переменные неразличимы. Это позволяет считать метрическое пространство $\mathcal{A}$ полным. Тогда $\mathcal{A}$ - банахова алгебра.

Еще один существенный шаг: на норму накладывается условие

$$\|A^*A\| = \|A\|^2. \tag{2.9.9}$$

Множество $\mathcal{A}$, обладающее описанной выше алгебраической и топологической структурой, называется C^*-алгеброй. Изучение таких алгебр было начато Гельфандом и Наймарком /47/ и Сигалом /48/.

Важную роль играет класс положительных элементов C^*-алгебры. Положительным называется элемент вида A^*A. Соответственно на состояния накладывается условие

$$\omega(A^*A) \ge 0 \quad \text{для каждого} \quad A \in \mathcal{A}. \tag{2.9.10}$$

Такой функционал ω называется положительным. Таким образом, состояние - положительный линейный функционал на $\mathcal{A}$, нормированный на единицу. Положительный линейный функционал на C^*-алгебре непрерывен. Физически это означает близость средних значений близких динамических переменных.

Теперь в $\mathcal{A}$ возникла структура порядка. Частичное упорядочение определяется условием:

$$A_2 \ge A_1 \text{ эквивалентно } \omega(A_2) \ge \omega(A_1) \text{ для каждого } \omega\in\Omega. \tag{2.9.11}$$

С физической точки зрения близость динамических переменных ассоциируется с близостью средних значений в различных состояниях, причем реальные измерения могут быть проведены для любого конечного множества состояний. Это приводит естественным образом к введению в множестве $\mathcal{A}$ кроме топологии с метрикой (2.9.8) еще одной топологической структуры, а именно, равномерности.

Введем функцию $d_\omega: \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{R}_+$,

$$d_\omega(A_1, A_2) = |\omega(A_1) - \omega(A_2)|. \tag{2.9.12}$$

Она обладает всеми свойствами метрики, кроме одного: возможно $d_\omega(A_1,A_2)=0$ при $A_1 \ne A_2$. Функция с такими свойствами называется псевдометрикой. Семейство псевдометрик $\{d_\omega : \omega\in\Omega\}$ разделяет точки $\mathcal{A}$: для каждой пары $A_1 \ne A_2$ существует d_ω, такая, что $d_\omega(A_1, A_2)\ne 0$.

Семейство псевдометрик $\{d_\beta : \beta\in B\}$, разделяющее точки множества X, называется равномерностью. Множество, на котором задана равномерность, называется равномерным пространством. Равномерность порождает равномерную топологию. Последняя определяется окрестностями точек, задаваемыми конечными множествами псевдометрик, - точно так же, как в метрической топологии окрестности задаются одной метрикой:

$$U_{\{(\beta_i,\varepsilon_i)\}_{i=1}^n}(x) = \{x' : d_{\beta_i}(x', x) < \varepsilon_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}. \tag{2.9.13}$$

Если псевдометрики задаются функционалами - как в (2.9.12), соответствующая равномерная топология называется слабой, или w-топологией.

Направленность $\{x_\gamma, \gamma\in\Gamma\}$ точек равномерного пространства X называется направленностью Коши, если

$$\lim_{\gamma', \gamma''\in\Gamma} d_\beta(x_{\gamma'}, x_{\gamma''}) = 0 \quad \text{для каждого} \quad \beta\in B. \tag{2.9.14}$$

Равномерное пространство называется полным, если каждая направленность Коши сходится к точке этого пространства.

Множество $\mathcal{A}$ является равномерным пространством. Из физических соображений естественно считать это пространство полным. Тогда $\mathcal{A}$ представляет собой W^*-алгебру, или алгебру фон Неймана, - C^*-алгебру специального вида.

Итак, в дальнейшем считается, что множество динамических переменных $\mathcal{A}$ есть W^*-алгебра, а множество состояний Ω есть множество положительных линейных, нормированных на единицу функционалов на этой алгебре. В тех случаях, где результаты справедливы не только для W^*-алгебры, но и для произвольной C^*-алгебры, они обычно формулируются для последней.

Физический смысл самосопряженных элементов C^*-алгебры $\mathcal{A}$ как наблюдаемых подчеркивается следующими результатами. Пусть $A^* = A \in \mathcal{A}$. Спектр A является вещественным (т.е. точки спектра - вещественные числа).

Теперь можно ввести понятие собственного состояния и собственного значения наблюдаемой A. Если

$$\omega(A) = a, \quad \omega(A^2) = a^2, \quad a\in\mathcal{R}, \tag{2.9.15}$$

то ω называется собственным состоянием A, принадлежащим собственному значению a. В состоянии ω наблюдаемая A имеет значение a, поскольку дисперсия равна нулю: $\omega(A^2) = [\omega(A)]^2$.

Для каждой точки a спектра наблюдаемой A существует чистое собственное состояние A, принадлежащее собственному значению a. Обратно, каждое собственное значение есть точка спектра. Таким образом, спектр есть множество собственных значений. Подчеркнем, что собственные состояния, принадлежащие точкам непрерывного спектра, как и все состояния, нормированы на единицу в смысле (2.9.3).

Перейдем к рассмотрению ортодоксальной динамики. Она основывается на физически естественных допущениях. Во-первых считается, что семейства (2.9.I),(2.9.2) являются группами:

$$S_{t_3,t_2} S_{t_2,t_1} = S_{t_3,t_1}, \quad S_{t,t'} S_{t',t} = S_{t,t} = I^{\Omega} \qquad (2.9.16)$$

(I^{Ω} - тождественное преобразование множества Ω на себя); для α - аналогично. Во-вторых, считается, что S - симметрия, а α - соответствующий ей в смысле $[S\omega](A) = \omega(\alpha A)$ йорданов *-автоморфизм.

Симметрия S есть аффинная слабо* непрерывная биекция множества Ω на себя. Свойство аффинности:

$$S[\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2] = \lambda S\omega_1 + (1-\lambda)S\omega_2, \quad 0<\lambda<1, \ \omega_1,\omega_2\in\Omega. \qquad (2.9.17)$$

Слабая* непрерывность - это непрерывность в w^*-топологии на множестве Ω, которая определяется семейством псевдометрик

$$\{d_A(\omega_1,\omega_2): A\in\mathcal{A}\}, \quad d_A(\omega_1,\omega_2) = |\omega_1(A)-\omega_2(A)|. \qquad (2.9.18)$$

Симметрия преобразует чистые состояния в чистые.

Йорданов *-автоморфизм α есть биекция множества $\mathcal{A}$ на себя, обладающая следующими свойствами: линейность, $\alpha A^* = (\alpha A)^*$, $\alpha(A_1A_2 + A_2A_1) = (\alpha A_1)(\alpha A_2) + (\alpha A_2)(\alpha A_1)$.

Временная эволюция в ортодоксальной теории обратима. Ортодоксальная динамика является детерминистской.

Важнейшим случаем является внутренняя, или унитарная динамика. В ней $\alpha_{t_2,t_1}A = U^{-1}_{t_2,t_1} A\, U_{t_2,t_1}$, $\quad S_{t_2,t_1}\omega = \omega(U^{-1}_{t_2,t_1}\cdot U_{t_2,t_1})$, где U - унитарный элемент *-алгебры $\mathcal{A}$: $U^*U = UU^* = I$, $U^{-1} = U^*$. Йорданов *-автоморфизм сводится к обычному *-автоморфизму: $\alpha(A_1A_2) = \alpha(A_1)\alpha(A_2)$.

В случае автономной системы, т.е. системы, находящейся в не зависящих от времени внешних условиях, пара временных параметров t_1, t_2 сводится к одному - их разности $\tau = t_2 - t_1$.

§ 10. ГНС-КОНСТРУКЦИЯ

Центральную роль в алгебраической теории играет ГНС-конструкция. (ГНС означает Гельфанд, Наймарк, Сигал.) Это теорема, которая устанавливает связь алгебраического описания физической системы с описанием в терминах гильбертовых пространств, т.е. связь алгебраической квантовой теории с "обычной" квантовой теорией. Именно благодаря ГНС-конструкции уже для системы с конечным числом степеней свободы появляются несепарабельные гильбертовы пространства.

Начнем с некоторых определений и предварительных результатов. Представление C^*-алгебры $\mathcal{A}$ - это пара $(\mathcal{H},\pi)$, где $\mathcal{H}$ -гильбертово пространство, $\pi: \mathcal{A}\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ - *-гомоморфизм *-алгебры $\mathcal{A}$ в множество $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов на $\mathcal{H}$, т.е. отображение, сохраняющее структуру *-алгебры:

$$\pi(\alpha A_1 + A_2) = \alpha\pi(A_1) + \pi(A_2), \quad \pi(A_1A_2) = \pi(A_1)\pi(A_2), \quad \pi(A^*) = [\pi(A)]^*; \qquad (2.10.1)$$

кроме того, предполагается, что $\pi(I) = I$. Таким образом, $\pi(A)\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $[\pi(A)]^*$ - (эрмитово) сопряженный оператор. Часто представлением называют отображение π. Представление π называется циклическим, если существует вектор $\Psi\in\mathcal{H}$, такой, что замыкание множества векторов $\pi(\mathcal{A})\Psi$ совпадает с $\mathcal{H}$; Ψ называется циклическим вектором представления.

Множество ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ неприводимо, если единственными подпространствами, инвариантными относительно этого множества, являются тривиальные подпространства $\{0\}$ и $\mathcal{H}$. Представление $(\mathcal{H},\pi)$ C^*-алгебры $\mathcal{A}$ называется неприводимым, если множество $\pi(\mathcal{A})$ неприводимо в $\mathcal{H}$.

Пусть $\{(\mathcal{H}_\varkappa,\pi_\varkappa): \varkappa\in K\}$ - семейство представлений $\mathcal{A}$. Прямая сумма этого семейства есть представление $(\mathcal{H},\pi)$, где

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\varkappa\in K}\mathcal{H}_\varkappa, \quad \pi(A) = \{\pi_\varkappa(A): \varkappa\in K\}, \quad A\in\mathcal{A}. \qquad (2.10.2)$$

Представления $(\mathcal{H}_1,\pi_1)$ и $(\mathcal{H}_2,\pi_2)$ (унитарно) эквивалентны, если существует изоморфизм $U: \mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$, такой, что $U\pi_1(A)U^{-1} = \pi(A_2)$.

Важность циклических представлений вытекает из следующего результата. Для каждого представления π существует семейство циклических представлений $\{\pi_\varkappa: \varkappa\in K\}$, такое, что π и $\bigoplus_{\varkappa\in K}\pi_\varkappa$ эквивалентны.

Теперь может быть сформулирована

ГНС-конструкция. Пусть $\mathcal{A}$ - C^*-алгебра с единицей.

1. Для каждого состояния ω на $\mathcal{A}$ существует циклическое представление $(\mathcal{H}_\omega,\pi_\omega)$ алгебры $\mathcal{A}$ с единичным циклическим вектором Ψ_ω, такое, что

$$\omega(A) = (\Psi_\omega, \pi_\omega(A)\Psi_\omega). \qquad (2.10.3)$$

2. Каждое циклическое представление $(\mathcal{H},\pi)$ с циклическим вектором Ψ, такое, что

$$(\Psi,\pi(A)\Psi) = \omega(A) \text{ для некоторого } \omega\in\Omega \text{ и каждого } A\in\mathcal{A}, \qquad (2.10.4)$$

эквивалентно представлению $(\mathcal{H}_\omega,\pi_\omega)$.

Важно подчеркнуть, что различным состояниям соответствуют, вообще говоря, неэквивалентные представления, т.е. различные - в этом смысле - гильбертовы пространства. Поэтому в алгебраической теории фигурирует не одно гильбертово пространство, как в обычной теории, а семейство гильбертовых пространств.

В смысле ГНС-конструкции

$$\omega = (\Psi_\omega, \cdot\,\Psi_\omega), \text{ т.е. } \omega(A) = (\Psi_\omega, \pi_\omega(A)\Psi_\omega). \qquad (2.10.5)$$

Если для $\omega_1 \neq \omega_2$ представления эквивалентны, можно считать $\mathcal{H}_{\omega_1} = \mathcal{H}_{\omega_2}$. Тогда

$$(\Psi_{\omega_2}, \cdot \Psi_{\omega_2}) \neq (\Psi_{\omega_1}, \cdot \Psi_{\omega_1}), \quad \text{т.е.} \quad \Psi_{\omega_2} \neq e^{i\varphi} \Psi_{\omega_1} \qquad (2.10.6)$$

– векторы Ψ_{ω_1} и Ψ_{ω_2} не принадлежат одному лучу.

Чистому состоянию соответствует неприводимое представление, смешанному – приводимое.

Необходимо подчеркнуть, что состояние ω, описываемое амплитудой Ψ_ω согласно (2.10.5), – не обязательно чистое. В таком виде представимо любое состояние.

Пусть $\mathcal{H}_\omega$ – гильбертово пространство некоторого представления. Тогда каждый единичный вектор $\Psi \in \mathcal{H}_\omega$ есть амплитуда некоторого состояния $(\Psi, \cdot \Psi) = \omega_\Psi \in \Omega$.

Пусть ω – собственное состояние наблюдаемой A, принадлежащее собственному значению a. Из (2.9.15) получаем $(\Psi_\omega, [\pi_\omega(A) - a I_\omega]^2 \Psi_\omega) = 0$, где I_ω – единичный оператор на $\mathcal{H}_\omega$. Ввиду самосопряженности оператора $\pi_\omega(A)$ отсюда следует $([\pi_\omega(A) - a I_\omega]\Psi_\omega, [\pi_\omega(A) - a I_\omega]\Psi_\omega) = 0$, т.е. $\pi_\omega(A)\Psi_\omega = a\Psi_\omega$. Таким образом, амплитуда собственного состояния наблюдаемой есть собственный вектор соответствующего оператора.

Теперь легко понять появление несепарабельных гильбертовых пространств. Пусть A – наблюдаемая с непрерывным спектром, Ω_A – множество собственных состояний A, $\{\Psi_\omega : \omega \in \Omega_A\}$ – соответствующее множество собственных векторов. В случае некоммутативной алгебры последнее множество может принадлежать гильбертову пространству $\mathcal{H}$ неприводимого представления. Поскольку собственные векторы, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны, $\mathcal{H}$ несепарабельно: мощность его базиса не меньше $\aleph$.

Каждая C^*-алгебра изоморфна некоторому подмножеству алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, т.е. элементы C^*-алгебры можно считать ограниченными линейными операторами на некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. В качестве $\mathcal{H}$ можно использовать гильбертово пространство универсального представления:

$$\pi_u = \bigoplus_{\omega \in \Omega} \pi_\omega, \quad \mathcal{H}_u = \bigoplus_{\omega \in \Omega} \mathcal{H}_\omega . \qquad (2.10.7)$$

Множество состояний C^*-алгебры обладает следующим важным с физической точки зрения свойством. Пусть $\mathcal{A}$ есть C^*-подалгебра множества $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ограниченных операторов на $\mathcal{H}$. (Нетривиальным является случай $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}_u$.) Обозначим $\Omega_{\mathcal{H}F}$ множество состояний вида

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} w_j (\Psi_j, \cdot \Psi_j), \quad \Psi_j \in \mathcal{H}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (2.10.8)$$

т.е. конечных выпуклых линейных комбинаций состояний $(\Psi, \cdot\Psi)$, $\Psi \in \mathcal{H}$. $\Omega_{\mathcal{H}F}$ есть подмножество Ω. Замыкание $\Omega_{\mathcal{H}F}$ в w^*-топологии, т.е. в равномерном пространстве Ω с равномерностью, заданной семейством псевдометрик (2.9.18), совпадает с Ω. Это значит, что для каждого

состояния $\omega \in \Omega$ существует направленность $\{\omega_\gamma \in \Omega_{\mathcal{H}F}, \gamma \in \Gamma\}$ состояний из $\Omega_{\mathcal{H}F}$, такая, что

$$\omega = w^*\text{-}\lim_{\gamma \in \Gamma} \omega_\gamma , \qquad (2.10.9)$$

где $w^*\text{-}\lim$ – предел в w^*-топологии. Другими словами, $\omega(A) = \lim_{\gamma \in \Gamma} \omega_\gamma(A)$, $A \in \mathcal{A}$. Таким образом, каждое состояние $\omega \in \Omega$ можно аппроксимировать состояниями вида (2.10.8).

Отметим еще, что замыкание $\Omega_{\mathcal{H}F}$ по норме совпадает с множеством всех состояний, описываемых статистическими операторами на $\mathcal{H}$.

До сих пор специфика W^* не фигурировала. Она состоит в том, что W^*-алгебра, рассматриваемая как множество операторов на гильбертовом пространстве, совпадает со своим вторым коммутантом. При таком описании W^*-алгебра называется алгеброй фон Неймана. Для дальнейшего существенно следующее свойство алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$: если A – самосопряженный элемент $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ включает все его спектральные проекторы. Как следствие, проекторы из $\mathcal{A}$ порождают плотное по норме в $\mathcal{A}$ подпространство.

В терминах ГНС-конструкции динамика приобретает "обычный" вид. Шредингеровская картина представляется как эволюция амплитуд. В случае внутренней динамики, опуская индекс ω, получаем $\Psi_{t_2} = \pi(U_{t_2,t_1})\Psi_{t_1}$.

§ 11. СИСТЕМА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Рассмотрим случай системы с конечным числом степеней свободы. В соответствии с ортодоксальной квантовой механикой считаем, что W^*-алгебра $\mathcal{A}$ ограниченных динамических переменных есть множество $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ всех ограниченных линейных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_S$. $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ включает эрмитовы, т.е. ограниченные самосопряженные операторы с непрерывным спектром. Поэтому семейство $\{\mathcal{H}_\omega : \omega \in \Omega\}$ включает несепарабельные гильбертовы пространства. Рассмотрим пример такого пространства.

Пусть Q, P – пара (неограниченных) канонически сопряженных операторов в $\mathcal{H}_S$, $[Q, P] = iI$ $(\hbar = 1)$. Операторы $Q, P \notin \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) = \mathcal{A}$. С целью аппроксимации Q введем семейство функций вещественной переменной $-\infty < q < \infty$

$$F_n(q) = \begin{cases} q & \text{при} \quad -n < q < n \\ 0 & \text{при} \quad |q| \geq n \end{cases}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (2.11.1)$$

Очевидно, $F_n = F_n(Q) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$. Это семейство аппроксимирует Q. Обозначим ω_q собственное состояние каждой наблюдаемой F_n, принадлежащее собственному значению q при $|q| < n$ и 0 при $|q| \geq n$. Получим множество различных состояний $\{\omega_q : q \in \mathcal{R}\}$. Можно считать, что это собственные состояния наблюдаемой Q. Очевидно, $e^{-iyP} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, $y \in \mathcal{R}$. Рассмотрим представление $(\mathcal{H}_{\omega_q}, \pi_{\omega_q})$. Обозначим $\Psi_q \in \mathcal{H}_{\omega_q}$ амплитуду ω_q. Имеет место

$$\pi_{\omega_q}(e^{-iyP})\Psi_q = \Psi_{q+y}. \qquad (2.II.2)$$

Теперь ясно, что $\mathcal{H}_{\omega_q}$ включает $\Psi_{q'}$ для каждого $q' \in \mathcal{R}$. Другими словами, операторы сдвига e^{-iyP} "перепутывают" различные $\mathcal{H}_{\omega_q}$. Таким образом, имеется представление $(\mathcal{H}, \pi)$, $\Psi_q \in \mathcal{H}$ для каждого $q \in \mathcal{R}$,

$$\pi(e^{-iyP})\Psi_q = \Psi_{q+y}. \qquad (2.II.3)$$

Пространство $\mathcal{H}$ несепарабельно, $(\Psi_q, \Psi_{q'}) = \delta_{qq'}$. Подчеркнем, что здесь фигурирует δ-символ, а не δ-функция.

Пусть Q – координата, P – импульс. В состоянии ω_q координата имеет значение q, импульс совершенно не определен.

Состояние ω_q аппроксимируется в смысле (2.I0.9) состояниями вида $(\Psi, \cdot\, \Psi)$, $\Psi \in \mathcal{H}_S$. Другими словами, Ψ_q аппроксимируется волновыми пакетами, сжимающимися к точке q. Но предел находится не в $\mathcal{H}_S$, а в $\mathcal{H}$.

§ I2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО ТЕЗИСА: НЕУСТРАНИМОСТЬ УСРЕДНЕНИЯ В НЕСЕПАРАБЕЛЬНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теперь подготовлена почва для получения анонсированного в § 7 этой главы результата. Пусть $(\mathcal{H}, \pi)$ – представление алгебры ограниченных динамических переменных $\mathcal{A}$, причем гильбертово пространство несепарабельно,

$$\{\Psi_y \in \mathcal{H} : y \in \mathcal{R}\}, \quad (\Psi_{y_1}, \Psi_{y_2}) = \delta_{y_1 y_2} \qquad (2.I2.I)$$

– ортонормированное множество векторов (не обязательно максимальное), $\mathcal{H}_X$ – гильбертово пространство, натянутое на это множество и имеющее размерность континуума. Размерностью гильбертова пространства называется мощность его базиса, а множество (2.I2.I) есть базис $\mathcal{H}_X$. Будем считать динамику автономной и обозначим $t = \tau = t_2 - t_1$. Пусть динамика внутренняя и задается семейством унитарных элементов $\{U_t \in \mathcal{A} : t \in \mathcal{R}\}$, причем $\pi(U_t)\Psi_y \in \mathcal{H}_X$, $y \in \mathcal{R}$. Выберем в качестве начального состояния ($t = 0$) без учета Δ-усреднения по начальным условиям $\omega_{t=0} = (\Psi_y, \cdot\, \Psi_y)$. Тогда состояние в момент $t > 0$ без учета Δ-усреднения по времени, в соответствии с (2.5.I),

$$\omega = \omega(\omega_{t=0}, t) = (\pi(U_t)\Psi_y, \cdot\, \pi(U_t)\Psi_y) \equiv \omega(y, t). \qquad (2.I2.2)$$

Теперь проведем Δ-усреднение. В рассматриваемой схеме, когда $\omega(\omega_{t=0}, t) = \omega(y, t)$, оно сводится к усреднению по вещественным переменным y, t:

$$\omega(\omega^{\Delta}_{t=0}, t^{\Delta}) = \omega(y^{\Delta}, t^{\Delta}) = \int dy\, w_y(y')\, dt'\, r_t(t')\, \omega(y', t'), \qquad (2.I2.3)$$

где w, r – соответствующие плотности вероятности. Итак,

$$\omega(y^{\Delta}, t^{\Delta}) = \int dy'\, w_y(y')\, dt'\, r_t(t')\, (\pi(U_{t'})\Psi_{y'}, \cdot\, \pi(U_{t'})\Psi_{y'}). \qquad (2.I2.4)$$

Разложим вектор $\pi(U_{t'})\Psi_{y'} \in \mathcal{H}_X$ по базису (2.I2.I). Ввиду (2.8.5) получаем

$$\pi(U_t)\Psi_y = \sum_j^{-\infty,\infty} c_j(y,t)\, \Psi_{y_j(y,t)}, \quad \ldots < y_{-1} < y_0 < y_1 < \ldots \qquad (2.I2.5)$$

(здесь удобнее такая нумерация элементов счетного множества), $c_j = (\Psi_{y_j}, \pi(U_t)\Psi_y)$. При подстановке (2.I2.5) в (2.I2.4) получим двойную сумму по j, j'. Покажем, что слагаемые с $j' \neq j$, т.е. интерференционные члены, обращаются в нуль. С этой целью рассмотрим среднее значение произвольной динамической переменной $A \in \mathcal{A}$ в состоянии (2.I2.4):

$$[\omega(y^{\Delta}, t^{\Delta})](A) = \sum_{jj'}^{-\infty,\infty} z_{jj'}, \qquad (2.I2.6)$$

$$z_{jj'} = \int dy'\, w_y(y')\, dt'\, r_t(t')\, \overset{*}{c}_{j'}(y',t')\, c_j(y',t')\, (\Psi_{y_{j'}(y',t')}, \pi(A)\Psi_{y_j(y',t')}). \qquad (2.I2.7)$$

Покажем, что

$$z_{jj'} = 0 \quad \text{при } j' \neq j. \qquad (2.I2.8)$$

Сделаем замену переменных интегрирования $y', t' \to y_j = y_j(y',t')$, $y_{j'} = y_{j'}(y',t')$, $j' \neq j$. Предполагается, что якобиан преобразования D отличен от нуля в окрестности точки (y, t). Получаем

$$z_{jj'} = \int dy_j\, dy_{j'}\, |D|\, w_y\, r_t\, \overset{*}{c}_{j'}\, c_j\, (\Psi_{y_{j'}}, \pi(A)\Psi_{y_j}). \qquad (2.I2.9)$$

Зафиксируем y_j и рассмотрим интеграл по $y_{j'}$. Вектор $\pi(A)\Psi_{y_j} \in \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_X$, так что величина $(\Psi_{y_{j'}}, \pi(A)\Psi_{y_j})$ при фиксированном y_j отлична от нуля не более чем на счетном множестве значений $y_{j'}$. Поэтому интегрирование по $y_{j'}$ дает нуль. Соотношение (2.I2.8) доказано. В (2.I2.6) остаются только диагональные члены.

Таким образом, состояние (2.I2.4) имеет вид

$$\omega(y^{\Delta}, t^{\Delta}) = \sum_j^{-\infty,\infty} \int dy'\, w_y(y')\, dt'\, r_t(t')\, |c_j(y',t')|^2\, \omega_{y_j(y',t')}, \qquad (2.I2.I0)$$

где введено обозначение $\omega_y = (\Psi_y, \cdot\, \Psi_y)$. Переход к δ-усреднению означает предельный переход $w_y(y') \to \delta(y'-y)$, $r_t(t') \to \delta(t'-t)$. Ввиду наличия интегрирования по y' предельный переход для $r_t(t')$ можно выполнить. Тогда

$$\omega(y^{\Delta}, t^{\delta}) = \sum_j^{-\infty,\infty} \int dy'\, w_y(y')\, |c_j(y',t)|^2\, \omega_{y_j(y',t)}. \qquad (2.I2.II)$$

Переход к δ-усреднению по y дает

$$\omega(y^{\delta}, t^{\delta}) = \sum_j^{-\infty,\infty} |c_j(y,t)|^2\, \omega_{y_j(y^{\delta},t)}. \qquad (2.I2.I2)$$

С другой стороны, в отсутствие усреднения по времени

$$\omega(y^{\delta}, t) = \sum_{jj'}^{-\infty,\infty} \overset{*}{c}_{j'}(y,t)\, c_j(y,t)\, (\Psi_{y_{j'}(y,t)}, \cdot\, \Psi_{y_j(y,t)})\Big|_{y^{\delta}}, \qquad (2.I2.I3)$$

где индекс означает δ-усреднение по y. Неравенство

$$\omega(y^\delta, t^\delta) \neq \omega(y,t), \tag{2.12.14}$$

являющееся частным случаем неравенства (2.5.4), означает эффективность δ-усреднения для рассмотренного временного перехода. Другими словами, при наличии усреднения по начальным условиям усреднение по времени неустранимо.

Теперь понятно, какова роль несепарабельности гильбертова пространства: оно содержит континуальное множество ортонормированных векторов, по которому ведется интегрирование, т.е. усреднение. Интерференционные члены исчезают вследствие того, что в разложение произвольного вектора по указанному множеству входит не более чем счетное множество слагаемых.

Стоит подчеркнуть, что эффект исчезновения интерференционных членов имеет место не благодаря переходу от Δ-усреднения к δ-усреднению, а несмотря на такой переход.

В классическом случае алгебра динамических переменных $\mathcal{A}$ коммутативна. В ГНС-конструкции все операторы являются операторами умножения. Все неприводимые представления одномерны, т.е. реализуются в одномерных гильбертовых пространствах. Это позволяет глубже понять, почему индетерминизм - чисто квантовое явление.

Заметим в связи с этим, что предельный переход $\hbar \to 0$ существует не всегда: при любом $\hbar \neq 0$ алгебра $\mathcal{A}$ некоммутативна и ее неприводимые представления не являются одномерными, как в случае $\hbar = 0$.

Эффект исчезновения интерференционных членов при δ-усреднении отсутствует в бесконечномерном, но сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_s$, на основе которого строится квантовая теория системы с конечным числом степеней свободы (предыдущий параграф). Поэтому динамика в сепарабельном гильбертовом пространстве детерминистская.

В связи с последним обстоятельством может возникнуть вопрос о том, насколько физически реальны состояния, описываемые векторами несепарабельных гильбертовых пространств $\mathcal{H}_{ns}$. Ответ состоит в следующем. Во-первых, в класс таких состояний входят собственные состояния в непрерывном спектре, например, собственные состояния координаты, импульса и энергии (в случае непрерывного спектра). Такие состояния самым широким образом используются и в обычной квантовой механике (только с другой нормировкой). Во-вторых, - и это главное - согласно соотношению (2.10.9) и сказанному в конце предыдущего параграфа, состояния, соответствующие $\mathcal{H}_{ns}$, аппроксимируются состояниями, отвечающими $\mathcal{H}_s$, и поэтому с физической точки зрения граница между классами этих состояний отсутствует.

§ 13. ИНДЕТЕРМИНИЗМ И НЕОБРАТИМОСТЬ

Рассмотренный в предыдущем параграфе переход можно представить в виде

$$[\omega_y]^\delta \to \sum_j^{-\infty,\infty} w_j\, [\omega_{y_j}]^\delta, \qquad w_j = |c_j(y,t)|^2. \tag{2.13.1}$$

Этот переход является индетерминированным. Пусть для простоты состояния ω_y, $y \in \mathcal{R}$, чистые. Тогда в результате перехода система оказывается, с точностью до δ-усреднения, в одном из чистых состояний ω_{y_j} с вероятностью w_j. Информация в описании начального состояния и динамики максимально возможная (но не абсолютно полная!): неточности в начальных условиях Δy и во времени Δt стремятся к нулю.

Для лучшего понимания природы индетерминизма следует иметь в виду, что сколь угодно малый отличный от нуля отрезок Δy содержит континуальное множество взаимно ортогональных ортов, т.е. различных состояний.

Теперь покажем, как в рамках использованной схемы возникает необратимость. С целью явного описания необратимого перехода рассмотрим начальное состояние вида

$$[\omega_{t=0}]^\Delta = \int dx\, w(x)\, (\Psi_{(x)}, \cdot\, \Psi_{(x)}), \qquad x \in \mathcal{R}, \tag{2.13.2}$$

$$\Psi_{(x)} = \sum_l^{-\infty,\infty} a_l(x)\, \Psi_{y_l(x)}. \tag{2.13.3}$$

В момент времени t

$$\omega(\omega^\Delta_{t=0}, t^\Delta) = \int dx\, w(x)\, dt'\, \Gamma_t(t') \big(\pi(U_{t'})\Psi_{(x)}, \cdot\, \pi(U_{t'})\Psi_{(x)}\big). \tag{2.13.4}$$

Находим

$$\pi(U_t)\Psi_{(x)} = \sum_l^{-\infty,\infty} a_l(x)\, \pi(U_t)\Psi_{y_l(x)} = \sum_{lj}^{-\infty,\infty} a_l(x)\, c_j(y_l(x),t)\, \Psi_{y_j(y_l(x),t)}. \tag{2.13.5}$$

Члены с $(l,j) \neq (l',j')$ в (2.13.4) обращаются в нуль, так что после перехода к δ-усреднению по времени получаем

$$\omega(\omega^\Delta_{t=0}, t^\delta) = \sum_{lj}^{-\infty,\infty} \int dx\, w(x)\, |a_l(x)|^2 |c_j(y_l(x),t)|^2\, \omega_{y_j(y_l(x),t)}. \tag{2.13.6}$$

Выпадение фаз величин a_l означает, что в одно и то же конечное состояние (2.13.6) переходят все состояния вида (2.13.2) с различными значениями фаз a_l. Такое преобразование называется неинъективным. Неинъективное преобразование, очевидно, необратимо. Итак, переход $\omega^\Delta_{t=0} \to \omega(\omega^\Delta_{t=0}, t^\delta)$ необратим.

ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЯ

§ I. ИЗМЕРЕНИЕ НАБЛЮДАЕМОЙ С ПРОСТЫМ ТОЧЕЧНЫМ СПЕКТРОМ

Полученные результаты служат основой для построения общей индетерминистской динамики. Однако прежде чем приступить к такому построению, целесообразно – с методической точки зрения – рассмотреть частный случай, дающий принципиальное решение проблемы измерения.

Рассмотрим измерение наблюдаемой X^m, относящейся к системе m с конечным числом степеней свободы и имеющей простой точечный спектр. Согласно гл.2, § II X^m – эрмитов оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_s^m$.

Спектр оператора называется точечным, если каждая его точка является собственным значением, которому принадлежит собственный вектор из $\mathcal{H}_s$ (а не из другого гильбертова пространства ГНС-конструкции). Точечный спектр называется простым, если кратность каждого собственного значения равна единице, т.е. каждому собственному значению принадлежит ровно один вектор.

Обозначим $x_j^m, \Psi_j^m, j=1,2,\dots$, собственные значения и собственные векторы X^m: $X^m \Psi_j^m = x_j^m \Psi_j^m$. Множество $\{\Psi_j^m : j=1,2,\dots\}$ есть базис в $\mathcal{H}_s^m$.

Пусть состояние системы m, в котором следует провести измерение, т.е. состояние перед измерением, или начальное состояние, является чистым и описывается амплитудой в $\mathcal{H}_s^m$:

$$\omega_{t=0}^m = \omega_0^m = (\Psi_0^m, \cdot\, \Psi_0^m), \quad \Psi_0^m \in \mathcal{H}_s^m . \tag{3.I.I}$$

В качестве прибора используем систему a с конечным числом степеней свободы, в качестве начального состояния прибора без учета Δ-усреднения выберем собственное состояние канонической переменной Q^a, принадлежащее собственному значению q_0:

$$\omega_{t=0}^a = \omega_{q_0}^a = (\Psi_{q_0}^a, \cdot\, \Psi_{q_0}^a), \quad \Psi_{q_0}^a \in \mathcal{H}_{ns}^a , \tag{3.I.2}$$

где $\mathcal{H}_{ns}^a$ – несепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ представления π, рассмотренного в гл.2, § II.

Обозначим $\Sigma = m + a$ составную систему, состоящую из m и a. Начальное состояние Σ

$$\omega_{t=0}^\Sigma = \omega_0^\Sigma = \omega_0^m \otimes \omega_{q_0}^a , \tag{3.I.3}$$

или

$$\omega_0^\Sigma = (\Psi_0^\Sigma, \cdot\, \Psi_0^\Sigma), \quad \Psi_0^\Sigma = \Psi_0^m \otimes \Psi_{q_0}^a \in \mathcal{H}_{ns}^\Sigma = \mathcal{H}_s^m \otimes \mathcal{H}_{ns}^a . \tag{3.I.4}$$

Пусть динамика системы Σ является внутренней и задается семейством

$$\{U_t^\Sigma : t \geq 0\}, \quad U_t^\Sigma = e^{-i\beta X^m \otimes P^a t} , \tag{3.I.5}$$

где P^a – каноническая переменная, сопряженная к Q^a. Без учета Δ-усреднения по времени

$$\omega_t^\Sigma = (\Psi_t^\Sigma, \cdot\, \Psi_t^\Sigma), \quad \Psi_t^\Sigma = \pi^\Sigma(U_t^\Sigma)\Psi_0^\Sigma , \tag{3.I.6}$$

где π^Σ – представление $\mathcal{A}^\Sigma$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{ns}^\Sigma$.

Разложим Ψ_0^m по собственным векторам X^m: $\Psi_0^m = \sum_j c_j \Psi_j^m$, $c_j = (\Psi_j^m, \Psi_0^m)$. Находим, с учетом (2.II.3),

$$\Psi_t^\Sigma = \pi^\Sigma\left(e^{-i\beta X^m \otimes P^a t}\right) \sum_j c_j \Psi_j^m \otimes \Psi_{q_0}^a =$$

$$= \sum_j c_j \Psi_j^m \otimes \pi^a\left(e^{-i\beta x_j^m P^a t}\right)\Psi_{q_0}^a = \sum_j c_j \Psi_j^m \otimes \Psi_{q_j}^a , \tag{3.I.7}$$

где $q_j = q_j(t) = q_0 + \beta t x_j^m$. Таким образом, состояние системы Σ в момент t без учета Δ-усреднения

$$\omega_t^\Sigma = \sum_{jj'} \overset{*}{c}_{j'} c_j (\Psi_{j'}^m, \cdot\, \Psi_j^m) \otimes (\Psi_{q_{j'}}^a, \cdot\, \Psi_{q_j}^a) . \tag{3.I.8}$$

Усреднение по начальному состоянию сводится к усреднению по q_0. Δ-усреднение по q_0 и t приводит, согласно гл.2, § I2, к уничтожению интерференционных членов $j' \neq j$. Переходя к δ-усреднению, получим

$$\omega^\Sigma(q_0^\delta, t^\delta) = \sum_j w_j \omega_j^m \otimes [\omega_{q_j}^a]^\delta , \tag{3.I.9}$$

где $\omega_j^m = (\Psi_j^m, \cdot\, \Psi_j^m)$,

$$w_j = |c_j|^2 = |(\Psi_j^m, \Psi_0^m)|^2, \quad j = 1, 2, \dots \tag{3.I.I0}$$

Смешанное состояние (3.I.9) редуцируется к одному из состояний $[\omega_j^\Sigma]^\delta = \omega_j^m \otimes [\omega_{q_j}^a]^\delta$ с вероятностью w_j. В этом смысле правую часть (3.I.9) можно заменить множеством пар $(\omega_j^{\Sigma\delta}, w_j)$:

$$\omega^\Sigma(q_0^\delta, t^\delta) = \{(\omega_j^{\Sigma\delta}, w_j) : j = 1, 2, \dots\} . \tag{3.I.II}$$

Запись (3.I.9) удобна с точки зрения нахождения средних, запись (3.I.II) наглядна с точки зрения редукции. Интерпретация смешанного состояния в терминах редукции не является специфически квантовой: она соответствует обычной теории вероятностей.

Показание прибора есть q_j, соответствующее значение измеряемой величины $x_j^m = [q_j(t) - q_0]/\beta t$. Время измерения t может быть любым, в том числе и сколь угодно малым. Но с ростом t уменьшается ошибка в x_j^m.

Значение x_j^m получается с вероятностью w_j, определяемой выражением (3.I.I0). Это статистический принцип Борна. Таким образом, статистическая интерпретация квантовой механики есть следствие индетерминистской динамики и стандартной вероятностной интерпретации смешанного состояния.

Для прибора величина Q^a определена с точностью до δ-усреднения (до измерения q_0^δ, после измерения - q_j^δ), вторая каноническая переменная P^a совершенно не определена. В этом смысле прибор можно назвать полуклассическим объектом (спектр Q^a непрерывен; вообще, каноническая переменная достаточно классична). Полная классичность не нужна (и невозможна). Это полезно иметь в виду в плане оценки копенгагенской интерпретации.

Наконец, рассмотренный прибор можно назвать каноническим.

§ 2. ИДЕАЛЬНЫЙ ОПЫТ ШТЕРНА-ГЕРЛАХА

Стандартным примером, фигурирующим в работах, посвященных проблеме измерения, является опыт Штерна-Герлаха. Исследуемой системой m является спиновая степень свободы, измеряемой величиной X^m - проекция спина σ_z. Под идеальным опытом Штерна-Герлаха здесь подразумевается случай, когда начальное состояние центра масс атома или нейтрона (опыт с пучком нейтронов реализован в /49/) есть состояние с определенным значением импульса. В этом случае роль прибора α играет центр масс. Магнитное поле направлено по оси z, причем напряженность пропорциональна z.

Гамильтониан полной системы $\Sigma = m + \alpha$

$$H^\Sigma = \frac{P^2}{2M} - \beta \sigma_z Z , \qquad (3.2.1)$$

где P, Z - операторы импульса и координаты центра масс. В обозначениях предыдущего параграфа $X^m = \sigma_z$, $P^\alpha = -Z$, $Q^\alpha = P$. Наличие в H^Σ слагаемого, зависящего от Q^α, не сказывается на результатах предыдущего параграфа, поскольку имеет место обобщающая (2.II.3) формула

$$\pi\left(e^{-if(Q) - iyP}\right)\psi_q = e^{i\alpha}\psi_{q+y} , \qquad (3.2.2)$$

где $e^{i\alpha}$ - фазовый множитель, не существенный для результатов ввиду исчезновения интерференционных членов.

Начальное состояние без учета усреднения

$$\omega_0^\Sigma = \omega_0^m \otimes \omega_{p_0}^\alpha , \qquad (3.2.3)$$

где p_0 - начальное значение z-составляющей импульса центра масс; конечное состояние с учетом δ-усреднения до редукции

$$\omega^\Sigma(p_0^\delta, t^\delta) = \sum_j w_j\, \omega_j^m \otimes [\omega_{p_j}^\alpha]^\delta, \quad w_j = |(\psi_j^m, \psi_0^m)|^2, \qquad (3.2.4)$$

ω_j^m - собственное состояние σ_z, отвечающее значению s_j z-проекции спина, $p_j = p_0 + f_j t$, $f_j = \beta s_j$.

Величина f_j имеет смысл силы, действующей на центр масс в j-м пучке, т.е. в пучке, соответствующем проекции спина s_j.

В литературе рассматривался так называемый мысленный опыт Штерна-Герлаха /19,50/, в котором вначале исходный пучок расщепляется, а затем все пучки сводятся снова в один пучок. Такой опыт в исследованном здесь идеальном случае привел бы к смешанному состоянию

$$\omega^\Sigma(p_0^\delta, t'^\delta) = \left(\sum_j w_j\, \omega_j^m\right) \otimes [\omega_{p_0}^\alpha]^\delta, \qquad (3.2.5)$$

в котором центр масс находится в чистом (с точностью до δ-усреднения) состоянии со значением импульса p_0, а спиновая подсистема находится в смешанном состоянии, слагаемые которого отвечают различным значениям проекции спина s_j. Это обусловлено некогерентностью пучков в (3.2.4), т.е. после первой части опыта.

§ 3. РЕАЛЬНЫЙ ОПЫТ ШТЕРНА-ГЕРЛАХА

В реальном опыте Штерна-Герлаха исходный пучок ограничен в пространстве. Рассмотрение такого случая представляет большой интерес, тем более, что для него реализован "мысленный" (теперь уже в кавычках) опыт Штерна-Герлаха /49/. Кроме того, его анализ позволяет глубже понять аппроксимацию состояний непрерывного спектра состояниями с амплитудами в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_s$. При описании фактически реализуемой ситуации следует проводить Δ-усреднение без перехода к δ-усреднению. Это соответствует неточностям в реальном опыте.

Пусть начальное состояние Σ-системы без учета Δ-усреднения

$$\omega_0^\Sigma = \omega_0^m \otimes \omega_0^\alpha , \quad \omega_0^\alpha = (\psi_0^\alpha, \cdot\, \psi_0^\alpha), \quad \psi_0^\alpha \in \mathcal{H}_s^\alpha , \qquad (3.3.1)$$

причем амплитуда ψ_0^α состояния центра масс представляет собой минимизирующий волновой пакет /51/. В координатном представлении ($\hbar = 1$)

$$\psi_0^\alpha(z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}(Dz)^{1/2}} \exp\left[i\bar{p}z - \frac{(z-\bar{z})^2}{4(Dz)^2}\right]. \qquad (3.3.2)$$

Здесь $\bar{z}$, $\bar{p}$ - средние значения координаты и импульса, Dz - неопределенность координаты. Соответствующая неопределенность импульса $Dp = \frac{1}{2Dz}$. В момент t

$$\psi_t^\Sigma = \sum_j c_j\, \psi_j^m \otimes \psi_{jt}^\alpha , \quad c_j = (\psi_j^m, \psi_0^m), \qquad (3.3.3)$$

j - номер пучка,

$$\psi_{jt}^\alpha(z) = e^{-i(P^2/2M - f_j z)t}\, \psi_0^\alpha(z). \qquad (3.3.4)$$

Операторная экспонента распутывается /52/:

$$e^{itf_j z - i(t/2M)P^2} = exp(-\frac{i}{6M} f_j^2 t^3)\times$$
$$\times e^{itf_j z} e^{-i(f_j t^2/2M)P} e^{-i(t/2M)P^2} \qquad (3.3.5)$$

Оператор $e^{-i(t/2M)P^2}$ описывает свободное движение; результат действия оператора находится методом /51/. Экспонента $e^{-i(f_j t^2/2M)P}$ является оператором сдвига $z \to z - f_j t^2/2M$. Наконец, $e^{itf_z z}$ – оператор умножения. В результате получаем

$$\Psi^{\alpha}_{jt}(z) = \frac{e^{i\alpha_j}}{(2\pi)^{1/4}(D_t z)^{1/2}} \times$$
$$\times exp\left[i\bar{p}_j z + i\frac{Mt/2}{t^2 + 4M^2(Dz)^4}(z-\bar{z}_j)^2 - \frac{(z-\bar{z}_j)^2}{4(D_t z)^2}\right]. \qquad (3.3.6)$$

Здесь α_j – фаза, которую не выписываем, $D_t z = [(Dz)^2 + (t/2MDz)^2]^{1/2}$, $\bar{p}_j = \bar{p} + f_j t$, $\bar{z}_j = \bar{z} + \frac{\bar{p}t}{M} + \frac{f_j t^2}{2M}$.

Δ-усреднение состояния $\omega^{\Sigma}_t = (\Psi^{\Sigma}_t, \cdot\, \Psi^{\Sigma}_t)$ проводится по величинам $\bar{z}$, $\bar{p}$ (неточность начальных условий), t и β (неточность значения магнитного поля).

Определим условия, при которых Δ-усреднение приводит к нарушению когерентности пучков. Условие пространственного разделения пучков: $\beta t^2/2M >> D_t z$, откуда

$$t >> \left(\frac{2MDz}{\beta^3}\right)^{1/2} + \frac{1}{\beta Dz}. \qquad (3.3.7)$$

Для нарушения когерентности пучков достаточно, чтобы величины $\bar{p}_j$, $\bar{p}_{j'}$, $j' \neq j$, независимо менялись в интервалах $\Delta \bar{p}_{j,j'} >> \frac{1}{2 D_t z}$, что приводит к

$$\Delta\bar{p},\ \Delta(\beta t) >> \frac{1}{2[(Dz)^2 + (t/2MDz)^2]^{1/2}}. \qquad (3.3.8)$$

Здесь Δ – неточность в реальном опыте.

Предельный переход к идеальному опыту означает $Dp \to 0$. При этом возможен последующий предельный переход $\Delta \to 0$, т.е. переход от Δ-усреднения к δ-усреднению:

Условие (3.3.8) заведомо выполняется при достаточно больших t, т.е. при достаточно больших разведениях пучков. Физически это обусловлено расплыванием волнового пакета. (Напомним, что в случае электромагнитной волны такое расплывание отсутствует.)

ГЛАВА 4. ИНДЕТЕРМИНИСТСКАЯ ДИНАМИКА

§ I. РАНДОМ-СИММЕТРИЯ

Частные случаи индетерминистской динамики были рассмотрены в гл.2, § 12 и в гл.3, § I. Представим соответствующие результаты в форме, удобной для обобщения.

Переход от состояния ω в момент времени t_1 к состоянию в момент t_2 может быть описан следующим образом. Состояние $\omega = (\Psi, \cdot\, \Psi)$, $\Psi \in \mathcal{H}_{ns}$, где $\mathcal{H}_{ns}$ – несепарабельное гильбертово пространство, вначале преобразуется согласно $\omega \to S\omega = (\Psi_S, \cdot\, \Psi_S)$, $\Psi_S \in \mathcal{H}_{ns}$, где S – симметрия (гл.2, § 9). Вектор состояния Ψ_S раскладывается по некоторому базису пространства $\mathcal{H}_{ns}$; важно подчеркнуть, что этот базис зависит от S:

$$\Psi_S = \sum_j c_j \Psi_j, \quad \Psi_j = \Psi_j^S, \quad c_j = (\Psi_j, \Psi_S); \qquad (4.I.I)$$

соответственно

$$S\omega = \sum_{jj'} \overset{*}{c}_{j'} c_j (\Psi_{j'}, \cdot\, \Psi_j). \qquad (4.I.2)$$

Наконец, δ-усреднение по начальному состоянию и по времени приводит к уничтожению интерференционных членов:

$$\sum_{jj'} \overset{*}{c}_{j'} c_j (\Psi_{j'}, \cdot\, \Psi_j) \to \sum_j |c_j|^2 (\Psi_j, \cdot\, \Psi_j). \qquad (4.I.3)$$

Последний переход формально можно описать как результат рандомизации фаз различных векторов Ψ_j. Соответственно введем оператор рандомизации, или рандомизатор $R = R^S$:

$$R\sum_{jj'} \overset{*}{c}_{j'} c_j (\Psi_{j'}, \cdot\, \Psi_j) = \sum_j |c_j|^2 (\Psi_j, \cdot\, \Psi_j). \qquad (4.I.4)$$

Теперь рассматриваемый временной переход ($t_1 \to t_2$) можно представить в виде

$$\omega^{\delta}_{t_1} \to R_{t_2,t_1} S_{t_2,t_1} \omega^{\delta}_{t_1}. \qquad (4.I.5)$$

Рандомизатор R_{t_2,t_1} подразумевает δ-усреднение по времени. Вводя состояние ω_{t_2} в момент t_2, получим

$$\omega_{t_2}(\omega^{\delta}_{t_1}, t^{\delta}_1, t^{\delta}_2) = R_{t_2,t_1} S_{t_2,t_1} \omega^{\delta}_{t_1}. \qquad (4.I.6)$$

В дальнейшем для краткости будем опускать индекс δ-усреднения. Тогда

$$\omega_{t_2} = R_{t_2,t_1} S_{t_2,t_1} \omega_{t_1}. \qquad (4.I.7)$$

Поскольку S – симметрия, а R – рандомизатор, преобразование RS можно назвать рандом-симметрией.

Дальнейшая задача состоит в определении рандомизатора общего вида. Необходимость обобщения становится очевидной при рассмотрении измерения наблюдаемой с непрерывным спектром. Если амплитуда исходного состояния системы, в которой проводится измерение, принадлежит сепарабельному гильбертову пространству $\mathcal{H}_S$, то должно фигурировать ее разложение по векторам другого, несепарабельного гильбертова пространства. Такое разложение в ГНС-конструкции должно являться аналогом обычного интегрального разложения по обобщенным векторам в конструкции оснащенного гильбертова пространства: $\psi = \int c(x)\varphi_x\,dx$, где $\psi \in \mathcal{H}_S$; $\varphi_x, x \in \mathcal{R}$, – обобщенные векторы с нормировкой на δ-функцию (гл.2, § 8).

Соотношение (4.I.I) представляет собой частный случай спектрального разложения. Поэтому следует рассмотреть спектральное разложение в общем случае.

§ 2. СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА

Спектральное разложение основывается на введенной фон Нейманом конструкции обобщенной прямой суммы гильбертовых пространств /53/. Эта конструкция использует спектральную меру, или разложение единицы.

Сначала напомним понятие разложения единицы для ($\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$), где $\mathcal{R}$ – вещественная прямая, $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Разложение единицы есть семейство проекторов E на $\mathcal{H}$

$$\mathcal{E} = \{ E_\lambda : \lambda \in \mathcal{R} \}, \tag{4.2.I}$$

удовлетворяющее условиям:

$$\text{из } \lambda_2 > \lambda_1 \text{ следует } E_{\lambda_2} \geq E_{\lambda_1}, \tag{4.2.2}$$

т.е. $(\psi, (E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})\psi) \geq 0$ для каждого $\psi \in \mathcal{H}$;

$$E_{\lambda+0} = E_\lambda, \tag{4.2.3}$$

т.е. $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} (\psi, E_{\lambda+\varepsilon}\psi) = (\psi, E_\lambda\psi)$, $\psi \in \mathcal{H}$;

$$\lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda = 0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} E_\lambda = I, \tag{4.2.4}$$

т.е. $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} (\psi, E_\lambda\psi) = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} (\psi, E_\lambda\psi) = \|\psi\|^2$, $\psi \in \mathcal{H}$;

$$E_{\lambda_2} E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1} \text{ при } \lambda_1 \leq \lambda_2. \tag{4.2.5}$$

Далее, можно определить

$$E((\lambda_1, \lambda_2]) = E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}, \quad -\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty, \tag{4.2.6}$$

$$E(\{\lambda\}) = E_\lambda - E_{\lambda-0} \tag{4.2.7}$$

и продолжить функцию E на семейство всех измеримых подмножеств $\mathcal{R}$. Это приводит к спектральной мере как проекторнозначной функции на указанном семействе. Свойства этой функции вытекают из свойств семейства (4.2.I), представляющего собой сужение функции на семейство множеств вида $(-\infty, \lambda]$: $E_\lambda = E((-\infty, \lambda])$.

Имеет место взаимно-однозначное соответствие между множествами разложений единицы и самосопряженных операторов A на $\mathcal{H}$:

$$A = \int E(d\lambda)\,\lambda. \tag{4.2.8}$$

Теперь легко перейти к спектральной мере общего вида. Пусть $(X, \mathcal{A})$ – измеримое пространство (гл.2, § 2), $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Спектральная мера для (X, $\mathcal{A}$, $\mathcal{H}$) есть проекторнозначная функция E с областью определения $\mathcal{A}$ (т.е. заданная на измеримых множествах $M \in \mathcal{A}$), удовлетворяющая условиям: $E(\emptyset) = 0$, $E(X) = I$; $E(M_1 \cap M_2) = E(M_1)E(M_2)$; если $M_1, M_2, \ldots$ – счетное семейство попарно непересекающихся измеримых множеств, то $E(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} E(M_j)$, сходимость последней суммы понимается в смысле средних $(\psi, \cdot\,\psi)$, $\psi \in \mathcal{H}$.

Пусть $f: X \to \mathcal{R}$ – ограниченная измеримая функция. Тогда

$$A = \int E(dx)\, f(x) \tag{4.2.9}$$

– эрмитов оператор на $\mathcal{H}$.

Спектральной мере E и единичному вектору $\psi \in \mathcal{H}$ соответствует вероятностная мера $(\psi, E\,\psi)$ на измеримом пространстве (X, $\mathcal{A}$). Имея в виду использование принципа непрерывности вероятности (гл.2, § 2), ограничимся борелевскими спектральными мерами, т.е. случаем (X, $\mathcal{B}$), где X – топологическое пространство, $\mathcal{B}$ – борелевская σ-алгебра. Очевидно, в этом случае область интегрирования в (4.2.9) есть $supp\,E$ – носитель меры, т.е. наименьшее замкнутое множество, мера которого равна I.

§ 3. ОБОБЩЕННАЯ ПРЯМАЯ СУММА ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Конструкция обобщенной прямой суммы гильбертовых пространств состоит в следующем. Пусть E – спектральная мера для (X, $\mathcal{B}$, $\mathcal{H}$). Каждый вектор $\psi \in \mathcal{H}$ может быть представлен в виде

$$\psi = \int \oplus \sqrt{(\psi, E(dx)\psi)}\,\psi_x, \quad \psi_x \in \mathcal{H}_x, \quad (\psi_x, \psi_x) = 1, \tag{4.3.I}$$

где $\mathcal{H}_x$, $x \in supp\,E$, – гильбертовы пространства. Вектор ψ_x зависит от ψ, но каждое $\mathcal{H}_x$ одно и то же для всех $\psi \in \mathcal{H}$.

Смысл представления (4.3.I) помогает понять следующее. Поскольку $\int E(dx) = I$, имеет место $\psi = \int E(dx)\psi$ (так называемая теорема об общем разложении). Введем формально $E(dx)\psi = \sqrt{(\psi, E(dx)\psi)}\,\psi_x$, где $\psi_x = E(dx)\psi / \sqrt{(\psi, E(dx)\psi)}$. Это приводит к (4.3.I).

Для каждой пары векторов $\psi^{(1)}, \psi^{(2)} \in \mathcal{H}$ существует вероятностная мера P на (X, $\mathcal{B}$), такая, что меры $(\psi^{(i)}, E\,\psi^{(i)})$, $i = 1, 2$, абсолютно непрерывны относительно P, т.е. из $P(B) = 0$ следует $(\psi^{(i)}, E(B)\psi^{(i)}) = 0$, $B \in \mathcal{B}$. При этом

$$(\psi^{(i)}, E(dx)\psi^{(i)}) = \frac{(\psi^{(i)}, E(dx)\psi^{(i)})}{P(dx)} P(dx) \equiv f^{(i)}(x)\,P(dx) \tag{4.3.2}$$

и скалярное произведение

$$(\Psi^{(2)},\Psi^{(1)}) = \int P(dx)\sqrt{f^{(1)}(x)f^{(2)}(x)}\,(\Psi^{(2)}_x,\Psi^{(1)}_x). \qquad (4.3.3)$$

Символически запишем (4.3.I) в виде

$$\mathcal{H} = \int_{supp\,E} \oplus \sqrt{E(dx)}\;\mathcal{H}_x . \qquad (4.3.4)$$

Соотношение (4.3.I) (или (4.3.4)) есть спектральное разложение.

§ 4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАНДОМИЗАТОР

Теперь введем спектральный рандомизатор общего вида. Пусть ω - состояние W^*-алгебры $\mathcal{A}$, $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega)$ - представление в ГНС-конструкции, E_ω - спектральная мера для $(X, \mathcal{B}, \mathcal{H}_\omega)$, такая, что для каждого $B \in \mathcal{B}$ проектор $E_\omega(B)$ есть образ проектора $E(B)$ из $\mathcal{A}$: $E_\omega(B) = \pi_\omega(E(B))$, $E(B) \in \mathcal{A}$, $E^* = E$, $E^2 = E$. Для амплитуды Ψ_ω состояния ω получаем

$$(\Psi_\omega, E_\omega \Psi_\omega) = (\Psi_\omega, \pi_\omega(E)\Psi_\omega) = \omega(E), \qquad (4.4.I)$$

$\omega(E)$ - вероятностная мера на $(X, \mathcal{B})$.

Спектральное разложение (4.3.I) для Ψ_ω принимает вид

$$\Psi_\omega = \int \oplus \sqrt{\omega(E(dx))}\;\Psi_{\omega x} . \qquad (4.4.2)$$

При этом предполагается, что $\mathcal{H}_x$ для каждого $x \in supp\,E$ есть гильбертово пространство некоторого представления в ГНС-конструкции.

Спектральному разложению амплитуды Ψ_ω отвечает представление состояния

$$\omega = (\Psi_\omega, \cdot\, \Psi_\omega) = \int \oplus \sqrt{\omega(E(dx))\,\omega(E(dx'))}\,(\Psi_{\omega x'}, \cdot\, \Psi_{\omega x}). \qquad (4.4.3)$$

Спектральный рандомизатор $R = R^E$, соответствующий спектральной мере E, есть оператор на пространстве состояний Ω, определенный согласно

$$R^E\omega = \int \omega(E(dx))\,\omega_x , \qquad (4.4.4)$$

где $\omega_x = (\Psi_{\omega x}, \cdot\, \Psi_{\omega x})$ - состояние с амплитудой $\Psi_{\omega x}$; его можно назвать спектральным состоянием, порожденным состоянием ω.

Спектральный рандомизатор является идемпотентным оператором: $R^2 = RR = R$.

§ 5. ГЛОБАЛЬНАЯ ДИНАМИКА

Глобальная динамика определяет изменение состояния за конечный промежуток времени. Соответствующее уравнение временной эволюции имеет вид (4.I.7):

$$\omega_{t_2} = R_{t_2,t_1} S_{t_2,t_1} \omega_{t_1}, \quad t_2 > t_1, \qquad (4.5.I)$$

где S_{t_2,t_1} - симметрия, $R_{t_2,t_1} = R^S_{t_2,t_1} = R^{E_S}_{t_2,t_1} = R^{E_{S_{t_2,t_1}}}$ - спектральный рандомизатор, $E_{S_{t_2,t_1}}$ - спектральная мера, которая зависит от S_{t_2,t_1}. Напомним, что в уравнении (4.5.I) опущен индекс δ-усреднения.

Согласно гл.2, § I3 эволюция, описываемая уравнением (4.5.I), является, вообще говоря, необратимой. Поэтому семейство рандом-симметрий $T^E_{t_2,t_1} = R^E_{t_2,t_1} S_{t_2,t_1}$ в общем случае не обладает групповым свойством. Естественно ввести полугрупповое свойство

$$T_{t_2,t'}\,T_{t',t_1} = T_{t_2,t_1}, \quad t_2 \geq t' > t_1 . \qquad (4.5.2)$$

Положив здесь $t' = t_2$ и учтя, что $S_{t,t} = I^\Omega$ (2.9.I6), получим соотношение

$$R_{t_2,t_2} R_{t_2,t_1} = R_{t_2,t_1} . \qquad (4.5.3)$$

В случае автономной динамики зависимость от t_1, t_2 сводится к зависимости от разностного времени $\tau = t_2 - t_1$. Полагая $t_1 = 0$ и обозначая $t = \tau$, получаем уравнение временной эволюции в виде

$$\omega_t = R_t S_t \omega_0, \quad t > 0. \qquad (4.5.4)$$

Выделим еще случай стационарной рандомизации, когда E_{S_t} не зависит от t:

$$\omega_t = R S_t \omega_0, \quad t > 0. \qquad (4.5.5)$$

§ 6. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ ДИНАМИКА. ИНДЕТЕРМИНИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Исходя из глобального, или интегрального описания временной эволюции (4.5.I), получим дифференциальное уравнение движения, определяющее инфинитезимальную динамику. Пусть начальное состояние задано при $t = t_0$. Считаем $t_2 > t_1 > t_0$. Ввиду соотношения (4.5.3) можно записать

$$\omega_{t_1} = R_{t_1,t_1}\,\omega_{t_1} . \qquad (4.6.I)$$

Находим

$$\omega_{t_2} - \omega_{t_1} = R_{t_2,t_1} S_{t_2,t_1} R_{t_1,t_1}\omega_{t_1} - R_{t_1,t_1}\omega_{t_1} =$$

$$= R_{t_2,t_1} S_{t_2,t_1} R_{t_1,t_1}\omega_{t_1} - R_{t_2,t_1} R_{t_1,t_1}\omega_{t_1} + (R_{t_2,t_1} - R_{t_1,t_1}) R_{t_1,t_1}\omega_{t_1} =$$

$$= R_{t_2,t_1}(S_{t_2,t_1} - I^\Omega) R_{t_1,t_1}\omega_{t_1} + (R_{t_2,t_1} - R_{t_1,t_1})\omega_{t_1} . \qquad (4.6.2)$$

Полагая $\tau = t_2 - t_1 > 0$, получаем

$$\frac{1}{\tau}(\omega_{t_1+\tau} - \omega_{t_1}) = \frac{1}{\tau}(R_{t_1+\tau,t_1} - R_{t_1,t_1})\omega_{t_1} +$$

$$+ \frac{1}{\tau} R_{t_1+\tau,t_1}(S_{t_1+\tau,t_1} - I^\Omega) R_{t_1,t_1}\omega_{t_1} . \qquad (4.6.3)$$

Переходим к пределу $\tau \to +0$, считая, что указанный предел существует в w^*-топологии (гл.2, § 10), - аналогично случаю детерминистской динамики /46/. Тогда

$$\frac{d\omega_{t_1}}{dt_1} = \left(\frac{\partial R_{t',t_1}}{\partial t'}\right)_{t'=t_1} \omega_{t_1} + \lim_{\tau\to+0} \frac{1}{\tau} R_{t_1,t_1}\left(S_{t_1+\tau,\,t_1} - I^{\Omega}\right) R_{t_1,t_1}\,\omega_{t_1}. \quad (4.6.4)$$

Положим $t_1 = t$ и введем обозначения

$$K_t = \lim_{\Delta t\to+0} \frac{1}{\Delta t} R_{t,t}\left(S_{t+\Delta t,\,t} - I^{\Omega}\right) R_{t,t}, \quad (4.6.5)$$

$$M_t = \left(\frac{\partial R_{t',t}}{\partial t'}\right)_{t'=t} + K_t. \quad (4.6.6)$$

Допуская предельный переход $t \to t_0 + 0$, получаем уравнение

$$\frac{d\omega_t}{dt} = M_t\,\omega_t, \quad t \ge t_0 + 0, \quad (4.6.7)$$

с начальным условием

$$\omega_{t_0+0} = R_{t_0,t_0}\,\omega_{t_0}. \quad (4.6.8)$$

В точке $t = t_0$ состояние меняется скачком от ω_{t_0} до ω_{t_0+0}. Это можно учесть, записав вместо (4.6.7) уравнение

$$\frac{d\omega_t}{dt} = \widetilde{M}_t\,\omega_t, \quad t \ge t_0,$$
$$\widetilde{M}_t = M_t + \delta(t - t_0)\left(R_{t_0,t_0} - I^{\Omega}\right) \quad (4.6.9)$$

с начальным состоянием ω_{t_0}. Но удобнее использовать уравнение (4.6.7) с начальным условием (4.6.8).

Уравнение (4.6.7) представляет собой индетерминистское квантовое уравнение движения. (Эпитет "квантовое" здесь по сути излишен, ибо классические уравнения движения детерминистские.) Оператор M_t является инфинитезимальным генератором.

В случае автономной динамики первое слагаемое правой части (4.6.6) сводится к

$$\left(\frac{dR_t}{dt}\right)_0 \equiv \left(\frac{dR_t}{dt}\right)_{t=0}. \quad (4.6.10)$$

Кроме того,

$$K_t = \lim_{\Delta t\to+0} \frac{1}{\Delta t} R_0\left(S_{\Delta t} - I^{\Omega}\right) R_0 = K,$$
$$M_t = M = \left(\frac{dR_t}{dt}\right)_0 + K. \quad (4.6.11)$$

Таким образом,

$$\frac{d\omega_t}{dt} = M\omega_t, \quad t \ge +0, \quad (4.6.12)$$

$$\omega_{+0} = R_0\,\omega_0. \quad (4.6.13)$$

Наконец, в случае стационарной рандомизации

$$M = K = \lim_{\Delta t\to+0} \frac{1}{\Delta t} R\left(S_{\Delta t} - I^{\Omega}\right) R. \quad (4.6.14)$$

§ 7. ДЕТЕРМИНИСТСКАЯ ДИНАМИКА

Ортодоксальная, т.е. детерминистская динамика является частным случаем построенной выше индетерминистской динамики. Этот случай реализуется при спектральной мере следующего вида. Пусть $X = \mathcal{R}$ - вещественная ось, а разложение единицы (4.2.1) определяется согласно

$$E_x = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ I & \text{при } x \ge 0 \end{cases}. \quad (4.7.1)$$

Тогда

$$\omega(E_x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x \ge 0 \end{cases}. \quad (4.7.2)$$

Спектральное разложение (4.4.2) сводится к $\Psi_\omega = \Psi_{\omega 0}$, т.е. к тождеству $\Psi_\omega = \Psi_\omega$. Отсюда следует, что спектральный рандомизатор сводится к единичному оператору на Ω:

$$R = I^{\Omega}. \quad (4.7.3)$$

Соответственно уравнение (4.5.1) принимает вид

$$\omega_{t_2} = S_{t_2,t_1}\,\omega_{t_1}. \quad (4.7.4)$$

Оно определяет ортодоксальную детерминистскую динамику.

Далее,

$$\widetilde{M}_t = M_t = K_t = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(S_{t+\Delta t,\,t} - I^{\Omega}\right) = L_t, \quad (4.7.5)$$

где L_t - лиувиллиан. Таким образом, инфинитезимальный генератор сводится к лиувиллиану. Уравнения движения (4.6.7) и (4.6.9) сводятся к ортодоксальному уравнению движения

$$\frac{d\omega_t}{dt} = L_t\,\omega_t. \quad (4.7.6)$$

В случае динамики, задаваемой гамильтонианом $H = H_t$, лиувиллиан определяется соотношением

$$L\omega = i\left[\omega(H\cdot) - \omega(\cdot H)\right]. \quad (4.7.7)$$

В этом случае уравнение (4.7.6) соответствует уравнению фон Неймана для статистического оператора ρ

$$\frac{d\rho}{dt} = i(\rho H - H\rho). \quad (4.7.8)$$

Ортодоксальная динамика заведомо реализуется в случае состояний, описываемых амплитудами в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Итак, индетерминистское уравнение движения является обобщением квантового уравнения Лиувилля или уравнения фон Неймана для статистического оператора.

§ 8. ВЕРОЯТНОСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

В гл.3, § I вероятностная интерпретация квантовой теории была рассмотрена в частном случае. Общий случай основывается на спектральном разложении состояния (4.4.4). Пусть

$$\omega = \int_{supp\,\omega(E)} \omega(E(dx))\,\omega_x\,, \tag{4.8.I}$$

где $supp\,\omega(E)$ – носитель вероятностной меры $\omega(E)$. Подчеркнем, что это спектральное разложение состояния, а не амплитуды.

Вероятностная интерпретация состояния ω (4.8.I) заключается в следующем. Введем в рассмотрение семейство измеримых подмножеств M множества $supp\,\omega(E)$, таких, что $\omega(E(M)) \neq 0$:

$$\mathcal{M}_\omega^E = \{ M \in \mathcal{B} :\ M \subset supp\,\omega(E),\ \omega(E(M)) \neq 0 \}. \tag{4.8.2}$$

Тогда с вероятностью $\omega(E(M))$ система находится в состоянии

$$\omega_M = \frac{1}{\omega(E(M))} \int_M \omega(E(dx))\,\omega_x \qquad \text{для каждого} \quad M \in \mathcal{M}_\omega^E. \tag{4.8.3}$$

Другими словами, состояние ω редуцируется с вероятностью $\omega(E(M))$ к состоянию ω_M. Поэтому данную интерпретацию можно назвать принципом редукции.

Во избежание недоразумения отметим, что в литературе, где редукция рассматривается на словесном уровне, она обычно относится к превращению одного чистого состояния в другое – через промежуточное смешанное состояние. Здесь же принцип редукции относится к спектральному разложению смешанного состояния.

Состояние ω_M, в свою очередь, можно редуцировать к состоянию ω_{M_1}, $M_1 \subset M$, и так далее. Однако необходимо подчеркнуть следующее. Утверждение, что система находится в состоянии ω_{M°, таком, что $\omega(E(M^\circ)) = 0$, не имеет смысла. Такое состояние физически не реализуемо. Допущение реализации таких состояний привело бы к противоречию с принципом непрерывности вероятности. Указанный принцип подразумевает, что событие, вероятность которого равна нулю, невозможно. Напомним, что в теории вероятностей обычно считается, что вероятность невозможного события равна нулю, но не наоборот.

Установим связь вероятностной интерпретации с наблюдаемыми. Пусть оператор (4.2.9) является образом наблюдаемой $A \in \mathcal{A}$ (в смысле ГНС-конструкции). Тогда для $x \in supp\,E$

$$\omega_x(A) = \int \omega_x(E(dx'))\,f(x') = f_x \int \omega_x(E(dx')) = f_x\,\omega_x(E(X)) = f_x\,, \tag{4.8.4}$$

где f_x принадлежит предельному множеству f в точке x. Аналогично

$$\omega_x(A^2) = f_x^2\,. \tag{4.8.5}$$

Следовательно, ω_x-собственное состояние наблюдаемой A, принадлежащее собственному значению f_x. Таким образом, спектральное разложе-

ние состояния, на котором основывается вероятностная интерпретация, есть разложение по собственным состояниям наблюдаемых, соответствующих всевозможным функциям f в (4.2.9).

Заметим следующее. Разложение смешанного состояния по чистым состояниям может быть неоднозначным, даже если амплитуды последних ортогональны. Это имеет место в случае вырождения:

$$\omega = \tfrac{1}{2}\omega_1 + \tfrac{1}{2}\omega_2 = \tfrac{1}{2}\omega_1' + \tfrac{1}{2}\omega_2'\,, \quad (\Psi_{\omega_1}, \Psi_{\omega_2}) = (\Psi_{\omega_1'}, \Psi_{\omega_2'}) = 0, \tag{4.8.6}$$

векторы $\Psi_{\omega_i'}$ – линейные комбинации векторов Ψ_{ω_i}. В этом случае редукция неоднозначна. Связь редукции со спектральным разложением устраняет эту неоднозначность.

Как уже отмечалось в гл.3, § I, существенно, что статистическая интерпретация проводится в рамках обычной теории вероятностей. Чтобы подчеркнуть это, назовем вероятностную меру $\omega(E)$, для которой выполняется соотношение (4.8.I), редуцируемой мерой: она описывает распределение вероятности для редуцируемого состояния (4.8.I). Для произвольной меры $\omega(E)$ выполняется лишь соотношение (4.4.4).

§ 9. ТОЧЕЧНАЯ ИНДЕТЕРМИНИРОВАННОСТЬ

Рассмотрим случай точечной индетерминированности, или точечно индетерминированной динамики, т.е. случай, когда индетерминированность возникает в изолированных точках временной оси.

Пусть для симметрии выполняется полугрупповое свойство

$$S_{t_2,t'}\,S_{t',t_1} = S_{t_2,t_1}\,, \quad t_2 \geq t' \geq t_1\,. \tag{4.9.I}$$

Тогда усреднение по промежуточному моменту времени t' выпадает:

$$\begin{aligned}&\int d\bar t_2\,d\bar t'\,d\bar t_1\, r_{t_2}(\bar t_2)\, r_{t'}(\bar t')\, r_{t_1}(\bar t_1)\, S_{\bar t_2,\bar t'}\, S_{\bar t',\bar t_1} = \\ &= \int d\bar t_2\,d\bar t'\,d\bar t_1\, r_{t_2}(\bar t_2)\, r_{t'}(\bar t')\, r_{t_1}(\bar t_1)\, S_{\bar t_2,\bar t_1} = \\ &= \int d\bar t_2\,d\bar t_1\, r_{t_2}(\bar t_2)\, r_{t_1}(\bar t_1)\, S_{\bar t_2,\bar t_1}\,.\end{aligned} \tag{4.9.2}$$

Это значит, что индетерминированность возникает только в начальный и конечный моменты времени.

В терминах рандом-симметрии получаем соотношение

$$R_{t_2,t'}\,S_{t_2,t'}\,R_{t',t_1}\,S_{t',t_1}\,R_{t_1,t_1} \doteq R_{t_2,t_1}\,S_{t_2,t'}\,S_{t',t_1}\,R_{t_1,t_1}\,. \tag{4.9.3}$$

Оно выполняется, если можно опустить промежуточную рандомизацию R_{t',t_1} и считать $R_{t_2,t'} = R_{t_2,t_1} = R_{t_2,t_2}$. Тогда

$$\omega_{t_2} = R_{t_2,t_2}\,S_{t_2,t_1}\,R_{t_1,t_1}\,\omega_{t_1}\,. \tag{4.9.4}$$

В случае автономной динамики временное усреднение относится к t в S_t. Можно считать, что индетерминированность возникает только в начальный момент, а при $t > 0$ эволюция детерминированная:

$$\omega_t = S_t\,R_0\,\omega_0\,. \tag{4.9.5}$$

ГЛАВА 5. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЯ

§ I. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЯ

Хотя результаты, полученные в гл.3, дают принципиальное решение проблемы измерения, они далеко не исчерпывают ее. Во-первых, рассматривалась только наблюдаемая; в общем случае можно измерять обобщенную наблюдаемую /54,55/, или гипернаблюдаемую. (Все вводимые в этом параграфе понятия будут определены в дальнейшем.) Во-вторых, рассматривался только простой точечный спектр; общим является случай произвольного спектра. В-третьих, рассматривалось только прямое измерение; возможны также расширенное и косвенное измерения /54,55/. В-четвертых, рассматривалось только измерение первого рода, или идеальное измерение; более общим является измерение второго рода, или неидеальное измерение /8/. В-пятых, рассматривался прибор частного вида.

Таким образом, общая квантоводинамическая теория измерения должна включать решение следующих задач: измерение произвольной гипернаблюдаемой, в частности, наблюдаемой с произвольным спектром; прямое, расширенное и косвенное измерения; неидеальное и, в частности, идеальное измерение; измерение прибором общего вида.

Построение теории удобно осуществить следующим образом: вначале ввести понятие гипернаблюдаемой, затем провести классификацию измерений, далее рассмотреть прямое измерение гипернаблюдаемой; результаты этого рассмотрения лежат в основе решения всех остальных задач.

§ 2. НАБЛЮДАЕМАЯ И ГИПЕРНАБЛЮДАЕМАЯ

Ограниченная наблюдаемая представляет собой самосопряженный элемент W^*-алгебры $\mathcal{A}$ динамических переменных. Наблюдаемой A взаимно-одноэначно соответствует разложение единицы - согласно (4.2.9):

$$A \leftrightarrow \mathcal{E} = \{ E_\lambda \in \mathcal{A} : \lambda \in \mathcal{R} \}. \qquad (5.2.\text{I})$$

Поскольку рассматривается W^*-алгебра, считается, что проекторы на $\mathcal{H}$, фигурирующие в (4.2.I), имеют прообразы в $\mathcal{A}$. Выполняются соотношения типа (4.2.2)-(4.2.4):

$$\text{из } \lambda_2 > \lambda_1 \text{ следует } E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1} \geq 0 \qquad (5.2.2)$$

(положительный элемент C^*-алгебры определен в гл.2, § 9);

существуют λ_{min}, λ_{max}, такие, что

$$E_\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda < \lambda_{min} \\ \text{I} & \text{при } \lambda > \lambda_{max} \end{cases}; \qquad (5.2.3)$$

$$\omega(E_{\lambda+0}) = \omega(E_\lambda), \quad \omega \in \Omega. \qquad (5.2.4)$$

Вследствие этих соотношений функция $g(\lambda) = \omega(E_\lambda)$ является функцией

распределения, определяющей вероятностную меру $\omega(E(B))$, где E - спектральная мера (гл.4, §§ 2,4).

Теория измерения должна дать следующий результат:

$$W_\omega(A \leq \lambda) \equiv \omega(E_\lambda) \qquad (5.2.5)$$

есть вероятность того, что при измерении наблюдаемой A в состоянии ω будет получено значение, не превосходящее λ.

Кроме соотношений (5.2.2)-(5.2.4), выполняется также условие ортогональности (4.2.5):

$$\text{из } \lambda_2 \geq \lambda_1 \text{ следует } E_{\lambda_2} E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1}. \qquad (5.2.6)$$

Ввиду (5.2.I) можно считать, что наблюдаемая представляет собой разложение единицы. Обобщенная наблюдаемая /55/ определяется как обобщенное разложение единицы /56/

$$\mathcal{F} = \{ F_\lambda \in \mathcal{A} : \lambda \in \mathcal{R} \}, \qquad (5.2.7)$$

где F_λ удовлетворяют соотношениям:

$$\text{из } \lambda_2 > \lambda_1 \text{ следует } F_{\lambda_2} \geq F_{\lambda_1}; \qquad (5.2.8)$$

существуют λ_{min}, λ_{max}, такие, что

$$F_\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda < \lambda_{min} \\ \text{I} & \text{при } \lambda > \lambda_{max} \end{cases}; \qquad (5.2.9)$$

$$\omega(F_{\lambda+0}) = \omega(F_\lambda), \quad \omega \in \Omega. \qquad (5.2.\text{I0})$$

В дальнейшем будем для краткости называть обобщенную наблюдаемую гипернаблюдаемой.

В отличие от наблюдаемой, гипернаблюдаемая не сводится к одному самосопряженному элементу W^*-алгебры $\mathcal{A}$: хотя можно ввести элемент $A = A^* \in \mathcal{A}$, такой, что $A = \int dF_\lambda \, \lambda$, при этом, вообще говоря, $A^2 \neq \int dF_\lambda \, \lambda^2$. Таким образом, гипернаблюдаемая есть, по определению, семейство (5.2.7).

Гипернаблюдаемая приобретет статус измеримой величины, если в теории измерения функция распределения

$$W_\omega(\mathcal{F} \leq \lambda) \equiv \omega(F_\lambda) \qquad (5.2.\text{II})$$

получит надлежащую вероятностную интерпретацию.

Гипернаблюдаемая $\mathcal{F}$ сводится к наблюдаемой $\mathcal{E} \leftrightarrow A$ в случае, когда выполняется условие ортогональности

$$F_{\lambda_2} F_{\lambda_1} = F_{\lambda_1} F_{\lambda_2} = F_{\lambda_1} \quad \text{при } \lambda_1 \leq \lambda_2. \qquad (5.2.\text{I2})$$

§ 3. ТИПЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Одна классификация измерений связана с методом, или способом измерения. В ней различаются прямое, расширенное и косвенное измерения. Пусть измеряется гипернаблюдаемая $\mathcal{F}^m$ в исследуемой системе m.

В случае прямого измерения динамический процесс происходит в системе $\Sigma = m + a$, состоящей из исследуемой системы m и прибора a.

Прибором непосредственно измеряется гипернаблюдаемая $\mathcal{F}^m$.

В случаях расширенного и косвенного измерений динамический процесс происходит в системе $\Sigma = m + aux + a$, где aux – некоторая вспомогательная система.

Расширенное измерение гипернаблюдаемой $\mathcal{F}^m$ сводится к прямому измерению прибором a наблюдаемой $\mathcal{E}^{m+aux} \leftrightarrow X^{m+aux}$ в системе $m+aux$, состоящей из исследуемой системы m и вспомогательной системы aux.

В случае косвенного измерения гипернаблюдаемой $\mathcal{F}^m$ вначале происходит динамический процесс в системе $m+aux$, а затем прибором a проводится прямое измерение наблюдаемой X^{aux} во вспомогательной системе aux, или, что то же, наблюдаемой $X^{m+aux} = I^m \otimes X^{aux}$ в системе $m+aux$.

Другая классификация измерений связана с распределением вероятности измеряемой (гипер)наблюдаемой в состоянии системы m после динамического перехода в системе Σ, но до редукции. Если указанное распределение совпадает с таковым в состоянии системы m до измерения, говорят об измерении первого рода, или идеальном измерении, в противном случае – об измерении второго рода, или неидеальном измерении.

Как будет видно из дальнейшего, идеальное измерение возможно только для наблюдаемой.

§ 4. ПРЯМОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ГИПЕРНАБЛЮДАЕМОЙ

В основе всей квантоводинамической теории измерения лежит рассмотрение прямого измерения гипернаблюдаемой.

Запишем соотношение (4.5.I), описывающее динамический переход, для системы $\Sigma = m+a$ в виде

$$\omega^\Sigma = R^\Sigma S^\Sigma \omega_0^\Sigma ; \tag{5.4.I}$$

ω_0^Σ – состояние Σ -системы до измерения, ω^Σ – после динамического перехода, соответствующего измерению, но до редукции. Состояние до измерения $\omega_0^\Sigma = \omega_0^m \otimes \omega_0^a$, где ω_0^m – начальное состояние исследуемой системы, ω_0^a – начальное состояние прибора. Состояние прибора ω_0^a описывается вектором $\Psi_{\omega_0^a}$ несепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}_{\omega_0^a}$.

Пусть $X^a \in \mathcal{A}^a$ – наблюдаемая прибора (ее значение есть показание прибора), $\mathcal{E}^a = \{E_x^a : x \in \mathcal{R}\} \leftrightarrow X^a$ – соответствующее разложение единицы. Введем наблюдаемую Σ -системы $X^{\Sigma(a)} = I^m \otimes X^a$ и соответствующее ей разложение единицы

$$\mathcal{E}^{\Sigma(a)} = \{E_x^{\Sigma(a)} : x \in \mathcal{R}\}, \quad E_x^{\Sigma(a)} = I^m \otimes E_x^a . \tag{5.4.2}$$

Симметрия S^Σ выбирается так, чтобы спектральный рандомизатор имел вид

$$R^{\Sigma S} = R^\Sigma = R^{\Sigma(a)} = R^{\Sigma E^{\Sigma(a)}} = R^{E^{\Sigma(a)}} , \tag{5.4.3}$$

где $E^{\Sigma(a)}$ – спектральная мера, определяемая разложением единицы (5.4.2) (гл.4, § 2).

Цель дальнейшего рассмотрения состоит в установлении следующего: при заданной симметрии S^Σ и соответствующем спектральном рандомизаторе $R^{E^{\Sigma(a)}}$ показания прибора, т.е. значения наблюдаемой X^a, соответствуют значениям некоторой гипернаблюдаемой $\mathcal{F}^m$ системы m.

Введем обозначение

$$\omega_S^\Sigma = S^\Sigma \omega_0^\Sigma \tag{5.4.4}$$

для состояния, получающегося в результате действия симметрии S^Σ на начальное состояние. Тогда $\omega^\Sigma = R^{E^{\Sigma(a)}} \omega_S^\Sigma$. Ввиду (4.4.4) получаем

$$\omega^\Sigma = \int \omega_S^\Sigma (E^{\Sigma(a)}(dx))\, \omega_{Sx}^\Sigma . \tag{5.4.5}$$

Состояние прибора, соответствующее состоянию ω^Σ системы Σ, $\omega^a = \omega^\Sigma (I^m \otimes \cdot)$, т.е. $\omega^a(A^a) = \omega^\Sigma(I^m \otimes A^a)$, $A^a \in \mathcal{A}^a$.

Согласно (5.4.5), ω_{Sx}^Σ – спектральное состояние Σ -системы, порожденное состоянием ω_S^Σ. Покажем, что

$$\omega_{Sx}^\Sigma (I^m \otimes \cdot) = \omega_x^a , \tag{5.4.6}$$

где ω_x^a – спектральное состояние прибора, порожденное состоянием ω^a. В случае спектральной меры E, соответствующей разложению единицы E_x, имеет место характеристическое свойство $\omega_{x'}(E_x) = \theta^+(x-x')$, где ступенчатая функция

$$\theta^+(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 . \end{cases} \tag{5.4.7}$$

Находим

$$\omega_{Sx}^\Sigma (I^m \otimes E_{x'}^a) = \omega_{Sx}^\Sigma (E_{x'}^{\Sigma(a)}) = \theta^+(x'-x), \tag{5.4.8}$$

что отвечает (5.4.6). Таким образом,

$$\omega^a = \int \omega_S^\Sigma (E^{\Sigma(a)}(dx))\, \omega_x^a . \tag{5.4.9}$$

Далее,

$$\omega^a(E_x^a) = \int \omega_S^\Sigma (E^{\Sigma(a)}(dx')) \omega_{x'}^a(E_x^a) = \int \omega_S^\Sigma (E^{\Sigma(a)}(dx'))\, \theta^+(x-x') = \\ = \omega_S^\Sigma (E_x^{\Sigma(a)}). \tag{5.4.10}$$

Следовательно,

$$\omega^{\alpha} = \int \omega^{\alpha}(E^{\alpha}(dx))\, \omega^{\alpha}_{x} . \qquad (5.4.11)$$

Теперь ясно, что $\omega^{\Sigma}_{Sx} \leftrightarrow \omega^{\alpha}_{x}$ и вероятностные интерпретации спектральных разложений для ω^{Σ} (5.4.5) и ω^{α} (5.4.11) эквивалентны. Поэтому в вероятностной интерпретации можно использовать прибор.

Функция распределения показания прибора, т.е. значения наблюдаемой X^{α} после динамического перехода (но до редукции), ввиду (5.4.11),

$$W^{\alpha}_{x} \equiv W_{\omega^{\alpha}}(X^{\alpha} \le x) = \omega^{\alpha}(E^{\alpha}_{x}). \qquad (5.4.12)$$

Пусть $B \subset \mathcal{R}$ - борелевское множество, тогда

$$W^{\alpha}(B) \equiv W_{\omega^{\alpha}}(X^{\alpha} \in B) = \omega^{\alpha}(E^{\alpha}(B)). \qquad (5.4.13)$$

Состояние исследуемой системы m, соответствующее состоянию ω^{Σ} системы Σ, $\omega^{m} = \omega^{\Sigma}(\cdot \otimes I^{\alpha})$, или ввиду (5.4.5),(5.4.10)

$$\omega^{m} = \int \omega^{\alpha}(E^{\alpha}(dx))\, \bar{\omega}^{m}_{x} , \qquad (5.4.14)$$

где $\bar{\omega}^{m}_{x} = \omega^{\Sigma}_{Sx}(\cdot \otimes I^{\alpha})$. Обозначение подчеркивает, что $\bar{\omega}^{m}_{x}$ не является спектральным состоянием, порожденным состоянием ω^{m}: $\bar{\omega}^{m}_{x} \neq \omega^{m}_{x}$.

Состояние ω^{m} есть результат действия некоторой операции на начальное состояние m-системы ω^{m}_{0} : $\omega^{m} = \varphi^{m}(\mathcal{R})\, \omega^{m}_{0}$, где $\varphi^{m}(\mathcal{R})$ - так называемая неселективная операция /55/. Неселективность соответствует состоянию до редукции.

Введем в рассмотрение функционал на $\mathcal{A}^{m}$

$$\int_{B} \omega^{\alpha}(E^{\alpha}(dx))\, \bar{\omega}^{m}_{x} = \varphi^{m}(B)\, \omega^{m}_{0} , \qquad (5.4.15)$$

где $\varphi^{m}(B)$ - селективная операция. Селективность соответствует частичной редукции. Взяв равенство (5.4.15) для единичного элемента I^{m}, получаем $\omega^{\alpha}(E^{\alpha}(B)) = [\varphi^{m}(B)\, \omega^{m}_{0}](I^{m})$. Далее, $[\varphi(B)\omega](I) = \omega(\varphi_{\mathcal{A}}(B) I)$, где $\varphi_{\mathcal{A}}$ - операция на множестве динамических переменных $\mathcal{A}$, соответствующая операции φ на множестве состояний Ω. Обозначим $F^{m}(B) = \varphi^{m}_{\mathcal{A}}(B) I^{m}$, $F^{m}(B) \in \mathcal{A}^{m}$. Тогда

$$\omega^{m}_{0}(F^{m}(B)) = \omega^{\alpha}(E^{\alpha}(B)). \qquad (5.4.16)$$

Из $0 \le \omega^{m}_{0}(F^{m}(B)) \le 1$, $\omega^{m}_{0} \in \Omega^{m}$, следует, что элемент $F^{m}(B)$ удовлетворяет $0^{m} \le F^{m}(B) \le I^{m}$.

Обозначим $F^{m}_{\lambda} = F^{m}((-\infty, \lambda])$. Легко видеть, что семейство

$$\mathcal{F}^{m} = \{ F^{m}_{\lambda} : \lambda \in \mathcal{R} \} \qquad (5.4.17)$$

представляет собой гипернаблюдаемую исследуемой системы m.

Заметим, что вытекающее из (5.4.16),(5.4.10) соотношение $\omega^{m}_{0}(F^{m}_{x}) =$

$= \omega^{\Sigma}_{S}(E^{\Sigma(\alpha)}_{x})$ отвечает введенной Наймарком конструкции вложения гильбертова пространства $\mathcal{H}_{\omega^{m}_{0}}$ в гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\omega^{\Sigma}_{S}}$ /56/.

Из (5.4.16),(5.4.13)

$$W^{\alpha}(B) = \omega^{m}_{0}(F^{m}(B)) ; \qquad (5.4.18)$$

в частности,

$$W^{\alpha}_{x} = \omega^{m}_{0}(F^{m}_{x}). \qquad (5.4.19)$$

Тем самым функция распределения (5.2.11) получила должную интерпретацию.

Таким образом, в рассмотренной схеме прибор служит для измерения гипернаблюдаемой $\mathcal{F}^{m}$ (5.4.17) исследуемой системы m. Указанная гипернаблюдаемая определяется симметрией S^{Σ} и соответствующим ей спектральным рандомизатором $R^{E^{\Sigma(\alpha)}}$. Обратно, основываясь на результатах /55/, можно показать, что существует прибор для измерения заданной гипернаблюдаемой с любой точностью.

В гл.3, § 1 был описан канонический прибор. В общем случае прибор - это α-система в рассмотренной схеме. Подчеркнем, что коль скоро реализуется эта очень общая схема, происходит измерение - по определению последнего.

Ввиду (5.4.16) выражение (5.4.14) можно переписать в виде

$$\omega^{m} = \int \omega^{m}_{0}(F^{m}(dx))\, \bar{\omega}^{m}_{x} , \qquad (5.4.20)$$

а соотношение (5.4.15) - в виде

$$\varphi^{m}(B)\, \omega^{m}_{0} = \int_{B} \omega^{m}_{0}(F^{m}(dx))\, \bar{\omega}^{m}_{x} . \qquad (5.4.21)$$

Положим $B = (x-\varepsilon, x]$. При $\varepsilon \to +0$ получаем

$$\varphi^{m}((x-\varepsilon, x])\, \omega^{m}_{0} = \omega^{m}_{0}(F^{m}((x-\varepsilon, x]))\, \bar{\omega}^{m}_{x} , \qquad (5.4.22)$$

откуда

$$\bar{\omega}^{m}_{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi^{m}((x-\varepsilon, x])\, \omega^{m}_{0}}{\omega^{m}_{0}(F^{m}((x-\varepsilon, x]))} , \quad x \in \operatorname{supp} \omega^{m}_{0}(F^{m}), \qquad (5.4.23)$$

$\operatorname{supp} \omega^{m}_{0}(F_{m})$ - носитель меры $\omega^{m}_{0}(F_{m})$. Обозначим

$$\omega^{m\varphi}_{0x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi^{m}((x-\varepsilon, x])\, \omega^{m}_{0}}{\omega^{m}_{0}(F^{m}((x-\varepsilon, x]))} , \qquad (5.4.24)$$

тогда

$$\omega^{m} = \int \omega^{m}_{0}(F^{m}(dx))\, \omega^{m\varphi}_{0x} . \qquad (5.4.25)$$

§ 5. НАБЛЮДАЕМАЯ КАК ИДЕАЛЬНАЯ ГИПЕРНАБЛЮДАЕМАЯ

Покажем, что гипернаблюдаемая, допускающая идеальное измерение, представляет собой наблюдаемую. В этом смысле наблюдаемую можно назвать идеальной гипернаблюдаемой.

Для краткости опустим индекс m в обозначениях, относящихся к m-системе. Согласно определению идеального измерения гипернаблюдаемой $\mathcal{F}$, для последнего должно выполняться

$$\omega(F(B)) = \omega_0(F(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{R}), \quad \omega_0 \in \Omega, \qquad (5.5.1)$$

где $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ – борелевская σ-алгебра, т.е. семейство борелевских подмножеств вещественной оси $\mathcal{R}$. Ввиду (5.4.25) $\omega = \int \omega_0(F(dx))\,\omega_{0x}^{\varphi}$, так что равенство (5.5.1) принимает вид

$$\int \omega_0(F(dx))\,\omega_{0x}^{\varphi}(F(B)) = \omega_0(F(B)). \qquad (5.5.2)$$

Отсюда следует условие

$$\omega_{0x}^{\varphi}(F(B)) = \chi_B(x), \qquad (5.5.3)$$

где $\chi_B(x)$ – характеристическая функция множества B:

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in B \\ 0 & \text{при } x \notin B . \end{cases} \qquad (5.5.4)$$

Ввиду (5.4.24) для левой части (5.5.3) находим

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{[\varphi((x-\varepsilon, x])\omega_0](F(B))}{\omega_0(F((x-\varepsilon, x]))} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\omega_0(\varphi_{\mathfrak{A}}((x-\varepsilon, x])F(B))}{\omega_0(F((x-\varepsilon, x]))} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\omega_0(\varphi_{\mathfrak{A}}((x-\varepsilon, x])I\,F(B))}{\omega_0(F((x-\varepsilon, x]))} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\omega_0(F((x-\varepsilon, x])F(B))}{\omega_0(F((x-\varepsilon, x]))}, \qquad (5.5.5)$$

так что (5.5.3) сводится к

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\omega_0(F((x-\varepsilon, x])F(B))}{\omega_0(F((x-\varepsilon, x]))} = \chi_B(x). \qquad (5.5.6)$$

Выберем $B = (x'-\alpha, x']$, тогда

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\omega_0(F((x-\varepsilon, x])F((x'-\alpha, x']))}{\omega_0(F((x-\varepsilon, x]))} = \chi_{(x'-\alpha, x']}(x). \qquad (5.5.7)$$

Ввиду $\varepsilon \to +0$, можно считать

$$(x-\varepsilon, x] \begin{cases} \subset (x'-\alpha, x'] & \text{при } x \in (x'-\alpha, x'] \\ \not\subset (x'-\alpha, x'] & \text{при } x \notin (x'-\alpha, x'] . \end{cases} \qquad (5.5.8)$$

Получаем

$$F((x-\varepsilon, x])F((x'-\alpha, x']) = \begin{cases} 0 & \text{при } (x-\varepsilon, x] \cap (x'-\alpha, x'] = \emptyset \\ F((x-\varepsilon, x]) & \text{при } (x-\varepsilon, x] \subset (x'-\alpha, x'] \end{cases} \qquad (5.5.9)$$

– условие ортогональности, эквивалентное (5.2.12). Таким образом, $F = E$, т.е. $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.

§ 6. ПРЯМОЕ ИЗМЕРЕНИЕ НАБЛЮДАЕМОЙ

В описании прямого измерения наблюдаемой можно существенно продвинуться, используя спектральное разложение амплитуды состояния (4.4.2).

Пусть измеряемая наблюдаемая

$$A^m \leftrightarrow \mathcal{E}^m = \{E_\lambda^m : \lambda \in \mathcal{R}\}, \qquad (5.6.1)$$

вектор начального состояния m-системы $\Psi_0^m = \Psi_{\omega_0^m}$, вектор начального состояния прибора $\Psi_0^a = \Psi_{\omega_0^a}$, вектор начального состояния системы $\Sigma = m + a$

$$\Psi_0^\Sigma = \Psi_{\omega_0^\Sigma} = \Psi_0^m \otimes \Psi_0^a . \qquad (5.6.2)$$

Пусть, как и в § 4, показание прибора соответствует наблюдаемой

$$X^a \leftrightarrow \mathcal{E}^a = \{E_x^a : x \in \mathcal{R}\}. \qquad (5.6.3)$$

Запишем спектральное разложение вектора Ψ_0^m по спектральной мере E^m, отвечающей $\mathcal{E}^m$:

$$\Psi_0^m = \int\oplus \sqrt{\omega_0^m(E^m(d\lambda))}\;\Psi_{0\lambda}^m . \qquad (5.6.4)$$

Введем строго возрастающее отображение

$$f : \operatorname{supp} E^m \to \operatorname{supp} E^a, \quad \lambda \mapsto x = f(\lambda) \qquad (5.6.5)$$

носителя E^m в носитель E^a. Пусть симметрия S^Σ такова, что амплитуда состояния ω_S^Σ (5.4.4)

$$\Psi_S^\Sigma = \Psi_{\omega_S^\Sigma} = \int\oplus \sqrt{\omega_0^m(E^m(d\lambda))}\;\bar{\Psi}_\lambda^m \otimes \Psi_{f(\lambda)}^a , \qquad (5.6.6)$$

где Ψ_x^a – собственный вектор наблюдаемой X^a (в смысле ГНС-конструкции), принадлежащий собственному значению x. В общем случае $\bar{\Psi}_\lambda^m$ не является собственным вектором A^m, так что, вообще говоря, $(\bar{\Psi}_\lambda^m, \bar{\Psi}_{\lambda'}^m) \neq \delta_{\lambda\lambda'}$.

Состояние Σ-системы после динамического перехода, описываемого рандом-симметрией $R^{E^{\Sigma(a)}}S^\Sigma$, но до редукции

$$\omega^\Sigma = R^{E^{\Sigma(a)}}\omega_S^\Sigma = \int \omega_0^m(E^m(d\lambda))\,\bar{\omega}_\lambda^m \otimes \omega_{f(\lambda)}^a . \qquad (5.6.7)$$

Редукция приводит в пределе к состоянию $\bar{\omega}_\lambda^\Sigma = \bar{\omega}_\lambda^m \otimes \omega_{f(\lambda)}^a$. (Напомним, что индекс δ-усреднения опускается.) Показание прибора есть $x = f(\lambda)$; ему соответствует значение λ измеряемой величины.

Описанное измерение является неидеальным, или измерением второго рода.

Идеальное измерение, или измерение первого рода представляет собой частный случай, когда выполняется

$$\overline{\Psi}^m_\lambda = \Psi^m_{0\lambda}, \quad \overline{\omega}^m_\lambda = \omega^m_{0\lambda}, \tag{5.6.8}$$

т.е. когда состояние исследуемой системы после предельной редукции есть собственное состояние измеряемой наблюдаемой – с точностью до δ-усреднения.

§ 7. РАСШИРЕННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ

Расширенное измерение гипернаблюдаемой $\mathcal{F}^m$ или, в частности, наблюдаемой $\mathcal{E}^m \leftrightarrow X^m$ в исследуемой системе m представляет собой прямое измерение в системе $s = m + aux$, где aux – некоторая вспомогательная система, наблюдаемой

$$X^s \leftrightarrow \mathcal{E}^s = \{ E^s_\lambda : \lambda \in \mathcal{R} \}. \tag{5.7.1}$$

Начальное состояние s-системы $\omega^s_0 = \omega^m_0 \otimes \omega^{aux}_0$. Измерение наблюдаемой (5.7.1) проводится с помощью прибора α, т.е. реализуется схема предыдущего параграфа с заменой m на s.

Основываясь на результатах /54/, систему aux, наблюдаемую $\mathcal{E}^s$ и состояние ω^{aux}_0 можно выбрать так, что

$$\omega^s_0(E^s_\lambda) = \omega^m_0(F^m_\lambda) \quad \text{для каждого} \quad \omega^m_0 \in \Omega^m. \tag{5.7.2}$$

Это означает, что измерение $\mathcal{F}^m$ сведено к измерению $\mathcal{E}^s \leftrightarrow X^s$.

§ 8. КОСВЕННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ

Понятие косвенного измерения наблюдаемой было введено Мандельштамом /57/. Косвенное измерение гипернаблюдаемой $\mathcal{F}^m$ (или наблюдаемой $\mathcal{E}^m$) в системе m состоит в следующем. Используется система $s = m + aux$. Начальное состояние s-системы $\omega^s_0 = \omega^m_0 \otimes \omega^{aux}_0$. В системе s происходит динамический переход $\omega^s_0 \to \omega^s_1$, такой, что

$$\omega^s_1(E^{s(aux)}_\lambda) = \omega^m_0(F^m_\lambda), \tag{5.8.1}$$

где $E^{s(aux)}_\lambda = I^m \otimes E^{aux}_\lambda$. Затем с помощью прибора α проводится прямое измерение наблюдаемой

$$X^{s(aux)} \leftrightarrow \mathcal{E}^{s(aux)} = \{ E^{s(aux)}_\lambda : \lambda \in \mathcal{R} \} \tag{5.8.2}$$

в системе s, находящейся в состоянии ω^s_1, или, что то же, – прямое измерение наблюдаемой

$$X^{aux} \leftrightarrow \mathcal{E}^{aux} = \{ E^{aux}_\lambda : \lambda \in \mathcal{R} \} \tag{5.8.3}$$

в системе aux, находящейся в состоянии $\omega^{aux}_1 = \omega^s_1(I^m \otimes \cdot)$.

Соотношение (5.8.1) означает, что измерение $\mathcal{F}^m$ сведено к измерению $\mathcal{E}^{aux}$, поскольку $\omega^{aux}_1(E^{aux}_\lambda) = \omega^s_1(E^{s(aux)}_\lambda)$.

Основываясь на результатах /55/, можно показать, что косвенное измерение гипернаблюдаемой реализуемо с любой степенью точности.

ГЛАВА 6. ТЕОРИЯ НЕОБРАТИМОСТИ

§ 1. ПРОБЛЕМА НЕВОЗМУЩАЮЩЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ

Перейдем к рассмотрению круга вопросов, относящихся к теории необратимости. Прежде всего следует четко сформулировать проблему необратимости и, более обще, – достижимости. Сначала обрисуем проблему в общих чертах, а затем внесем необходимые уточнения.

Пусть ω_1, ω_2 – различные состояния рассматриваемой системы. Переход $\omega_1 \to \omega_2$ называется необратимым, если переход $\omega_2 \to \omega_1$ невозможен. Будем говорить, что состояние ω_2 достижимо из состояния ω_1, если возможен переход $\omega_1 \to \omega_2$. Обозначим $\Omega^a(\omega)$ множество состояний, достижимых из состояния ω. Проблема достижимости состоит в определении множеств достижимости $\Omega^a(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. Ясно, что проблема необратимости сводится к проблеме достижимости: необратимость перехода $\omega_1 \to \omega_2$ эквивалентна недостижимости состояния ω_1 из состояния ω_2.

Необходимость уточнения возникает в случае, когда рассматриваемая система s является частью "составной" системы $\Sigma = s + \overline{s}$, где $\overline{s}$ – некоторая другая система ("окружение" системы s). Рассматривается процесс, в котором состояние окружения может меняться, и требуется лишь, чтобы конечное состояние окружения совпадало с начальным. В типичном определении /58/ необратимым называется "процесс, выполненный таким образом, что в заключение процесса система не может быть возвращена в ее начальное состояние без каких-либо изменений в остальной части вселенной".

Однако такое определение недостаточно: следуя ему, можно получить противоречие с законом возрастания энтропии. Приведем следующий пример. Пусть амплитуды состояний систем s, $\overline{s}$ принадлежат сепарабельным гильбертовым пространствам $\mathcal{H}^s$, $\mathcal{H}^{\overline{s}}$ соответственно, $\{\Psi^s_n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, $\{\Psi^{\overline{s}}_n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ – базисы в этих пространствах. Определим унитарный оператор временной эволюции Σ-системы согласно

$$U_{t_2,t_1} \Psi^s_{m+n} \otimes \Psi^{\overline{s}}_n = \Psi^s_m \otimes \Psi^{\overline{s}}_n, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6.1.1}$$

Выберем начальное состояние

$$\omega^\Sigma_{t_1} = \sum_n w_n \, \omega^s_{m+n} \otimes \omega^{\overline{s}}_n, \quad \omega^{s,\overline{s}}_n = (\Psi^{s,\overline{s}}_n \cdot \Psi^{s,\overline{s}}_n). \tag{6.1.2}$$

Начальные состояния систем s, $\overline{s}$ соответственно

$$\omega^s_{t_1} = \sum_n w_n \, \omega^s_{m+n}, \quad \omega^{\overline{s}}_{t_1} = \sum_n w_n \omega^{\overline{s}}_n. \tag{6.1.3}$$

В момент времени t_2

$$\omega^\Sigma_{t_2} = \omega^s_m \otimes \sum_n w_n \, \omega^{\overline{s}}_n, \quad \omega^s_{t_2} = \omega^s_m, \quad \omega^{\overline{s}}_{t_2} = \omega^{\overline{s}}_{t_1}. \tag{6.1.4}$$

Таким образом, состояние системы $\bar{S}$ (окружения) не изменилось, а состояние системы S превратилось из смешанного $\omega_{t_1}^S$ в чистое $\omega_{t_2}^S$. При этом энтропия системы S уменьшилась:

$$\sigma_{t_2}^S = 0 < -\sum_n w_n \ln w_n = \sigma_{t_1}^S . \qquad (6.1.5)$$

Полученное противоречие обусловлено неаддитивностью энтропии в начальном состоянии:

$$\sigma_{t_1}^\Sigma = -\sum_n w_n \ln w_n \neq -2\sum_n w_n \ln w_n = \sigma_{t_1}^S + \sigma_{t_1}^{\bar{S}} . \qquad (6.1.6)$$

Эта неаддитивность вызвана коррелированностью систем S и $\bar{S}$ в состоянии (6.1.2). При наличии такой коррелированности следует рассматривать энтропию составной системы:

$$\sigma_{t_2}^\Sigma = \sigma_{t_1}^\Sigma \qquad (6.1.7)$$

– как только и может быть в детерминистской динамике.

Следует ограничиться случаем, когда в начальном и конечном состояниях корреляции системы и окружения отсутствуют.

Пусть Σ-система находится в состоянии ω^Σ. При этом состояния систем S, $\bar{S}$

$$\omega^S = \omega^\Sigma(\cdot \otimes I^{\bar{S}}), \quad \omega^{\bar{S}} = \omega^\Sigma(I^S \otimes \cdot) . \qquad (6.1.8)$$

Состояние ω^S будем называть отделимым, если

$$\omega^\Sigma = \omega^S \otimes \omega^{\bar{S}} . \qquad (6.1.9)$$

Пусть ω_1^S, ω_2^S – отделимые состояния системы S (не обязательно различные). Переход $\omega_1^S \to \omega_2^S$ есть результат перехода в составной системе

$$\omega_1^S \otimes \omega_1^{\bar{S}} \to \omega_2^S \otimes \omega_2^{\bar{S}} . \qquad (6.1.10)$$

Переход $\omega_1^S \to \omega_2^S$ будем называть невозмущающим, если $\omega_2^{\bar{S}} = \omega_1^{\bar{S}}$. Таким образом, невозмущающий переход – это переход между отделимыми состояниями, в результате которого состояние окружения не меняется.

Подчеркнем, что в процессе невозмущающего перехода, т.е. для промежуточных состояний, условие (6.1.9) может нарушаться. Требуется лишь, чтобы это условие выполнялось для начального и конечного состояний и чтобы совпадали начальное и конечное состояние окружения.

Проблема состоит в нахождении критерия невозмущающей достижимости, т.е. возможности невозмущающего перехода $\omega_1^S \to \omega_2^S$, или, другими словами, в определении множества невозмущающей достижимости $\Omega^a(\omega)$.

§ 2. МНОЖЕСТВО НЕВОЗМУЩАЮЩЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ

Будем считать, что реализуема произвольная индетерминистская динамика. Таким образом, обусловленные какими-либо дополнительными физическими соображениями ограничения – если таковые имеются – не учитываются.

Сначала рассмотрим случай статистически изолированной системы, т.е. системы, лишенной окружения. При этом система может быть незамкнутой и даже неавтономной: внешние условия могут зависеть от времени, но лишь заданным образом. Процессы в такой системе – это адиабатические процессы. В этом случае возможен переход (4.5.1), определяемый рандом-симметрией:

$$\omega_1 \to \omega_2 = R^E S . \omega_1 . \qquad (6.2.1)$$

Если амплитуда состояния ω_1 принадлежит сепарабельному гильбертову пространству, то спектральный рандомизатор R^E равен единичному оператору (4.7.3), и переход (6.2.1) является детерминистским: $\omega_1 \to S\omega_1$.

Положение кардинально меняется при наличии окружения. Обратимся к результатам гл.5, § 6. Пусть система S играет роль исследуемой системы m, окружение $\bar{S}$ – роль прибора a, причем ω_0^a – собственное состояние X^a (5.6.3), и измерение является идеальным. Пусть начальное состояние системы S отделимо, так что начальное состояние составной системы $\Sigma = S + \bar{S}$

$$\omega_1^\Sigma = \omega_1^S \otimes \omega_1^{\bar{S}} . \qquad (6.2.2)$$

Рассмотрим два последовательных перехода

$$\omega_1^S \otimes \omega_1^{\bar{S}} = \omega_1^\Sigma \to R^{E^{\Sigma(\bar{S})}} S^\Sigma \omega_1^\Sigma \to R^{E^{\Sigma(\bar{S})}} (S^\Sigma)^{-1} R^{E^{\Sigma(\bar{S})}} S^\Sigma \omega_1^\Sigma . \qquad (6.2.3)$$

Для результирующего состояния получаем

$$R^{E^{\Sigma(\bar{S})}} (S^\Sigma)^{-1} \int \omega_1^S(E^S(d\lambda))\, \omega_{1\lambda}^S \otimes \omega_{f(\lambda)}^{\bar{S}} = R^{E^{\Sigma(\bar{S})}} \int \omega_1^S(E^S(d\lambda))\, \omega_{1\lambda}^S \otimes \omega_1^{\bar{S}} =$$

$$= \omega_2^S \otimes \omega_1^{\bar{S}} , \qquad (6.2.4)$$

где

$$\omega_2^S = \int \omega_1^S(E^S(d\lambda))\, \omega_{1\lambda}^S = R^{E^S} \omega_1^S . \qquad (6.2.5)$$

Таким образом, при наличии окружения невозмущающий переход с нетривиальным спектральным рандомизатором возможен в случае сепарабельного гильбертова пространства.

Учитывая все S и E, получим множество состояний

$$\{ R^E S \omega : \ S \text{ и } E \text{ любые} \} , \qquad (6.2.6)$$

достижимых из состояния ω. Но это множество не является максимальным. Из физических соображений его следует замкнуть в w^*-топологии пространства состояний Ω (гл.2, § 10). Таким образом, множество невозмущающей достижимости для состояния ω

$$\Omega^a(\omega) = w^*\text{-}cl \{ R^E S \omega : \ S \text{ и } E \text{ любые} \} , \qquad (6.2.7)$$

где $w^*\text{-}cl$ – символ замыкания в w^*-топологии.

§ 3. ЗАКОН ВОЗРАСТАНИЯ ИНДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

Выражение (6.2.7) дает решение проблемы невозмущающей достижимости. Этому решению удобно придать несколько иную форму.

Если $\omega_2 \in \Omega^a(\omega_1)$, будем говорить, что индетерминированность состояния ω_2 больше индетерминированности состояния ω_1 . Введем отношение предпорядка по индетерминированности на множестве состояний Ω :

$$\omega_2 \overset{i}{\gtrsim} \omega_1, \quad \text{если и только если} \quad \omega_2 \in \Omega^a(\omega_1). \qquad (6.3.\text{I})$$

Для отношения предпорядка выполняется условие рефлексивности

$$\omega \overset{i}{\gtrsim} \omega, \quad \omega \in \Omega \qquad (6.3.2)$$

и транзитивности:

$$\text{из } \omega_2 \overset{i}{\gtrsim} \omega_1 \text{ и } \omega_3 \overset{i}{\gtrsim} \omega_2 \text{ следует } \omega_3 \overset{i}{\gtrsim} \omega_1, \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega. \qquad (6.3.3)$$

Условие антисимметричности не выполняется: возможно, $\omega_2 \overset{i}{\gtrsim} \omega_1$ и $\omega_1 \overset{i}{\gtrsim} \omega_2$ при $\omega_2 \neq \omega_1$.

Отношение предпорядка порождает отношение эквивалентности:

$$\omega_2 \overset{i}{\sim} \omega_1 \quad \text{если и только если} \quad \omega_2 \overset{i}{\gtrsim} \omega_1 \text{ и } \omega_1 \overset{i}{\gtrsim} \omega_2 . \qquad (6.3.4)$$

Если ω_1 и ω_2 принадлежат одному классу эквивалентности по индетерминированности, будем говорить, что индетерминированности этих состояний равны.

Подчеркнем, что индетерминированность не является числом или множеством чисел; это понятие определяется введенными отношениями предпорядка и эквивалентности.

Сформулируем полученные результаты следующим образом.

Закон возрастания индетерминированности. Критерием невозмущающей достижимости является возрастание индетерминированности. Критерием обратимости невозмущающего перехода является сохранение индетерминированности.

§ 4. РЕДУЦИРУЕМАЯ МЕРА СО СЧЕТНЫМ НОСИТЕЛЕМ

Рассмотрим случай редуцируемой меры $\omega(E)$ со счетным носителем, т.е. $card\,[\,supp\,\omega(E)\,] \leq \aleph_0$, где $card$ – кардинальное число, или мощность. Этот случай важен как сам по себе, так и в связи с рассмотренной в гл.2, § I0 аппроксимацией (2.I0.9).

С точки зрения индетерминированности состояния основной интерес представляет изменение последнего, обусловленное спектральной рандомизацией. Рассмотрим переход

$$\omega_1 \to \omega_2 = R^E \omega_1 . \qquad (6.4.\text{I})$$

Пусть

$$\omega_1 = \sum_K w_1^K \omega_1^K , \quad \omega_1^K = (\Psi_1^K \cdot \Psi_1^K), \quad (\Psi_1^K, \Psi_1^{K'}) = \delta_{KK'} , \qquad (6.4.2)$$

и спектральный рандомизатор задается соотношением

$$R^E \omega = \sum_l \omega(E_2^l \cdot E_2^l), \quad \omega \in \Omega, \qquad (6.4.3)$$

где E_2^l – проектор на орт Ψ_2^l , причем $\sum\limits_l E_2^l = I$, I – единичный оператор. Получаем

$$\omega_2 = \sum_l w_2^l \omega_2^l , \quad \omega_2^l = (\Psi_2^l \cdot \Psi_2^l), \quad (\Psi_2^l, \Psi_2^{l'}) = \delta_{ll'} , \qquad (6.4.4)$$

причем

$$w_2^l = \sum_K b^{lK} w_1^K , \qquad (6.4.5)$$

где

$$b^{lK} = |(\Psi_1^K, \Psi_2^l)|^2 . \qquad (6.4.6)$$

Обозначим $K = \{K : w_1^K \neq 0\}$, $L = \{l : w_2^l \neq 0\}$. Множества K и L не более чем счетные; такими же являются носители редуцируемых мер в (6.4.2),(6.4.4).

Элементы матрицы $(b^{lK})_{K\in K, l\in L}$ удовлетворяют соотношениям

$$b^{lK} \geq 0, \quad \sum_{l\in L} b^{lK} = 1, \quad \sum_{K\in K} b^{lK} \leq 1. \qquad (6.4.7)$$

Второе соотношение есть следствие нормировки для распределений вероятности

$$W_1 = \{w_1^K : K \in K\}, \quad W_2 = \{w_2^l : l \in L\} . \qquad (6.4.8)$$

Из соотношений (6.4.7) вытекают следующие свойства этих распределений.

Свойство "сглаживания" распределения:

$$w_2^l \leq \max_K \{w_1^K\} . \qquad (6.4.9)$$

Свойство неубывания числа компонент распределения:

$$\overline{\overline{L}} \geq \overline{\overline{K}} \qquad (6.4.\text{I}0)$$

($\overline{\overline{K}}$ – мощность множества K). Действительно,

$$\sum_{K\in K}\sum_{l\in L} b^{lK} = \sum_{K\in K} 1 = \overline{\overline{K}}, \quad \sum_{l\in L}\sum_{K\in K} b^{lK} \leq \sum_{l\in L} 1 = \overline{\overline{L}} . \qquad (6.4.\text{II})$$

Эти свойства демонстрируют смысл возрастания индетерминированности.

Рассмотрим два состояния ω_1 , ω_2 с распределениями

$$W_1 = \{1/2,\ 1/2\}, \quad W_2 = \{3/4,\ 1/8,\ 1/8\} . \qquad (6.4.\text{I}2)$$

Из условия сглаживания вытекает невозможность перехода $\omega_1 \to \omega_2$, из условия неубывания числа компонент – невозможность перехода $\omega_2 \to \omega_1$. Таким образом, при невозмущающих переходах существуют взаимно недостижимые состояния.

§ 5. ЗАКОН ВОЗРАСТАНИЯ ЭНТРОПИИ

Пусть существует энтропия начального состояния ω_1 в (6.4.I):

$$\sigma_1 = -\sum_K w_1^K \ln w_1^K < \infty . \tag{6.5.I}$$

Тогда из соотношений (6.4.7) вытекает закон возрастания энтропии:

$$\sigma_2 \geq \sigma_1 . \tag{6.5.2}$$

Вывод приведен, например, в /4,59/, причем вместо неравенства в третьем соотношении (6.4.7) фигурирует равенство. Однако неравенство лишь усиливает (6.5.2).

Однако закон возрастания энтропии не дает достаточного условия возможности перехода $\omega_1 \to \omega_2$ между состояниями, характеризуемыми распределениями W_1, W_2 (6.4.8). Пусть

$$W_1 = \{1/2, 1/2\}, \quad W_2 = \{1/4-\gamma,\ 1/4-\gamma,\ 1/2+2\gamma\}, \quad 0<\gamma<1/4. \tag{6.5.3}$$

При достаточно малом $\gamma \neq 0$ выполняется $\sigma_2 > \sigma_1$. Но переход $\omega_1 \to \omega_2$ невозможен ввиду свойства сглаживания.

Таким образом, закон возрастания энтропии в форме

$$\text{если } \sigma_1 < \infty, \text{ то } \sigma_2 \geq \sigma_1 \tag{6.5.4}$$

является лишь необходимым условием невозмущающей достижимости.

Итак, закон возрастания индетерминированности представляет собой более сильное, чем закон возрастания энтропии, утверждение. Другими словами, понятие энтропии есть частный случай более общего понятия индетерминированности.

§ 6. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАКОНА ВОЗРАСТАНИЯ ИНДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

Хотя физическая интерпретация закона возрастания индетерминированности является очевидным следствием вероятностной интерпретации квантовой теории, или принципа редукции (гл.4, § 8), на этом следствии имеет смысл остановиться подробнее. Возрастание индетерминированности не означает перехода в состояние, которое в чем-то принципиально отличается от исходного состояния. Возрастание индетерминированности означает потерю информации. Так, пусть происходит переход

$$\omega_1 = \omega_1^1 \to \omega_2 = \sum_l w_2^l \omega_2^l, \quad W_1 = \{1\}, \quad W_2 = \{w_2^l : l \in L\}. \tag{6.6.I}$$

Согласно принципу редукции, можно считать, что "в действительности" произошел переход в одно из состояний ω_2^l, $l \in L$, – с вероятностью w_2^l. Термин "в действительности" взят в кавычки потому, что соответствующее понятие в рамках проводимого рассмотрения является первичным, не сводимым к другим понятиям.

В этом смысле индетерминированность, как и, в частности, энтропия, носит субъективный характер. Указанный характер энтропии подчеркивал Паули /5/: "Первое применение теории вероятности в физике, имеющее фундаментальное значение для нашего понимания законов природы, мы находим в основанной Больцманом и Гиббсом общей статистической теории теплоты. Как известно, энтропия естественно истолковывается этой теорией как переменная состояния, которая, в отличие от энергии, зависит от наших знаний о системе. Если эти знания самые полные, какие только вообще допускаются законами природы (микросостояние), то энтропия равна всегда нулю."

Но закон возрастания индетерминированности, как и закон возрастания энтропии, является объективным законом природы.

Остановимся еще на равновесном состоянии, которое возможно в случае автономной динамики. Запишем его в виде (4.8.I):

$$\omega_e = \int \omega_e(E(dx))\, \omega_x . \tag{6.6.2}$$

По определению равновесного состояния, ω_e инвариантно относительно временной эволюции: $\omega_{et} = \omega_{e0} = \omega_e$. Согласно принципу редукции, система, описываемая состоянием (6.6.2), с вероятностью $\omega_e(E(M))$ находится в состоянии

$$\omega_M = \frac{1}{\omega_e(E(M))} \int_M \omega_e(E(dx))\,\omega_x , \quad M \in \mathcal{M}^E_{\omega_e} . \tag{6.6.3}$$

Пусть ω_M – состояние в момент времени 0. Тогда состояние в момент t

$$\omega_{Mt} = \int \omega_{Mt}(E(dx))\,\omega_x , \tag{6.6.4}$$

причем $\operatorname{supp} \omega_{Mt}(E) \subset \operatorname{supp} \omega_e(E)$. Переходы $\omega_M \to \omega_{Mt}$, $M \in \mathcal{M}^E_{\omega_e}$ определяют равновесную кинетику. Очевидно, $\omega_{Mt} \xrightarrow[t\to\infty]{} \omega_e$.

§ 7. НЕПРЕРЫВНАЯ ИНДЕТЕРМИНИРОВАННОСТЬ

Рассмотрим пример непрерывно индетерминированной автономной динамики, т.е. динамики, при которой индетерминированность возрастает со временем непрерывно.

Пусть $\mathcal{H}$ -несепарабельное гильбертово пространство ГНС-конструкции (индекс ω опускаем) с базисом

$$\{\Psi_y \in \mathcal{H} : y \in (-a,-b) \cup \{0\} \cup (b,a)\}, \quad a > b > 0. \tag{6.7.I}$$

Перейдем с помощью строго монотонного возрастающего биективного отображения

$$(-a,-b) \to (-\infty,-b), \quad \{0\} \to \{0\}, \quad (b,a) \to (b,\infty) \tag{6.7.2}$$

к другой, более удобной нумерации ортов базиса

$$\{\Psi_x \in \mathcal{H} : x \in (-\infty,-b) \cup \{0\} \cup (b,\infty)\}. \tag{6.7.3}$$

Пусть S_t – внутренняя симметрия, определяемая унитарным оператором U_t, который задан согласно

$$
\pi(U_t)\begin{cases} \Psi_0 = (1-\gamma t)^{1/2}\Psi_0 + (\gamma t)^{1/2}\Psi_{b+\kappa t} \\ \Psi_{-b-\kappa t} = (\gamma t)^{1/2}\Psi_0 - (1-\gamma t)^{1/2}\Psi_{b+\kappa t} \\ \Psi_x = \Psi_{x+\kappa t} \quad \text{при } x<-b-\kappa t \text{ или } x>b \\ \Psi_x = \Psi_{x+2b+\kappa t} \quad \text{при } -b-\kappa t < x < -b, \end{cases} \tag{6.7.4}
$$

где $0<\gamma t<1$ (нужны только значения $\pi(U_t)$ при $t\to+0$), $\kappa>0$.

Оператор $\pi(U_t)$ превращает подпространство, натянутое на векторы $\Psi_{-b-\kappa t}$, Ψ_0, в подпространство, натянутое на векторы Ψ_0, $\Psi_{b+\kappa t}$.

Нетрудно видеть, что рандомизация является стационарной (гл.4, § 5), причем спектральная мера E_S определяется тремя проекторами на подпространства с базисами $\{\Psi_x : x<b\}$, $\{\Psi_0\}$ и $\{\Psi_x : x>b\}$ соответственно.

Обозначим $\omega(x) = (\Psi_x, \cdot\,\Psi_x)$. Находим

$$
RS_t\begin{cases} \omega(0) = (1-\gamma t)\omega(0) + \gamma t\, \omega(b+\kappa t) \\ \omega(-b-\kappa t) = \gamma t\, \omega(0) + (1-\gamma t)\omega(b+\kappa t) \\ \omega(x) = \omega(x+\kappa t) \quad \text{при } x<-b-\kappa t \text{ или } x>b \\ \omega(x) = \omega(x+2b+\kappa t) \quad \text{при } -b-\kappa t<x<-b. \end{cases} \tag{6.7.5}
$$

Поскольку согласно (6.7.4) семейство $\{S_t : t\ge 0\}$ не обладает полугрупповым свойством, рандом-симметрия RS_t имеет смысл лишь при $t\to+0$.

При $\gamma\tau\ll 1$ уравнение (4.6.I2) с учетом (4.6.I4) приближенно запишем в виде

$$
\frac{\omega_{t+\tau}-\omega_t}{\tau} = \frac{1}{\tau}\, R(S_\tau - I^\Omega)R\omega_t. \tag{6.7.6}
$$

Принимая во внимание (4.6.I), отсюда получаем

$$
\omega_{t+\tau} = RS_\tau\,\omega_t. \tag{6.7.7}
$$

§ 8. НЕКОГЕРЕНТНЫЙ РАСПАД

Рассмотрим случай начального состояния

$$
\omega_0 = \omega(0). \tag{6.8.I}
$$

Из (6.7.7) последовательно находим, используя (6.7.5),

$$
\omega_\tau = (1-\gamma\tau)\omega(0) + \gamma\tau\,\omega(b+\kappa\tau), \tag{6.8.2}
$$

$$
\omega_{2\tau} = (1-\gamma\tau)^2\omega(0) + (1-\gamma\tau)\gamma\tau\,\omega(b+\kappa\tau) + \gamma\tau\,\omega(b+2\kappa\tau), \tag{6.8.3}
$$

. . . .

$$
\begin{aligned}
\omega_{n\tau} &= (1-\gamma\tau)^n\omega(0) + \gamma\tau\big[(1-\gamma\tau)^{n-1}\omega(b+\kappa\tau) + (1-\gamma\tau)^{n-2}\omega(b+2\kappa\tau)+\ldots+ \\
&\quad + (1-\gamma\tau)\omega(b+(n-1)\kappa\tau) + \omega(b+n\kappa\tau)\big] = \\
&= (1-\gamma\tau)^n\Big[\omega(0) + \gamma\tau\sum_{m=1}^{n}(1-\gamma\tau)^{-m}\omega(b+\kappa m\tau)\Big].
\end{aligned} \tag{6.8.4}
$$

Положим $n\tau = t$ и перейдем к пределу $\tau\to 0$, $n\to\infty$, $t=const$. Заменим в (6.8.4) сумму по m на интеграл:

$$
\sum_{m=1}^{n}(1-\gamma\tau)^{-m}\omega(b+\kappa m\tau) \to \int_1^n dy\,(1-\gamma\tau)^{-y}\omega(b+\kappa y\tau). \tag{6.8.5}
$$

Получаем

$$
\begin{aligned}
\omega_t = \omega_{n\tau} &= (1-\gamma\tau)^n\Big[\omega(0) + \gamma\tau\int_1^n dy\,(1-\gamma\tau)^{-y}\omega(b+\kappa y\tau)\Big] = \\
&= (1-\gamma\tau)^{t/\tau}\Big[\omega(0) + \gamma\int_\tau^t du\,(1-\gamma\tau)^{-u/\tau}\omega(b+\kappa u)\Big],
\end{aligned} \tag{6.8.6}
$$

откуда, переходя к пределу $\tau\to 0$, находим

$$
\omega_t = e^{-\gamma t}\Big[\omega(0) + \gamma\int_0^t du\, e^{\gamma u}\omega(b+\kappa u)\Big], \tag{6.8.7}
$$

или

$$
\omega_t = e^{-\gamma t}\omega(0) + \gamma\int_0^t du\, e^{\gamma(u-t)}\omega(b+\kappa u). \tag{6.8.8}
$$

Проверим, что формально полученное выражение для ω_t удовлетворяет уравнению движения (4.6.I2). Из (6.8.7) находим

$$
\frac{d\omega_t}{dt} = -\gamma\omega_t + \gamma\omega(b+\kappa t). \tag{6.8.9}
$$

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\tau\to+0}\frac{1}{\tau}R(S_\tau - I^\Omega)\omega_t &= e^{-\gamma t}\Big[\lim_{\tau\to+0}\frac{1}{\tau}(S_\tau - I^\Omega)\omega(0) + \\
&\quad + \gamma\int_0^t du\, e^{\gamma t}\lim_{\tau\to+0}R(S_\tau - I^\Omega)\omega(b+\kappa u)\Big].
\end{aligned} \tag{6.8.I0}
$$

Используя (6.7.6), получим выражение

$$
\begin{aligned}
& e^{-\gamma t}\lim_{\tau\to+0}\frac{1}{\tau}\Big\{(1-\gamma\tau)\omega(0) + \gamma\tau\,\omega(b+\kappa\tau) - \omega(0) + \\
&\quad + \gamma\int_0^t du\, e^{\gamma u}\big[\omega(b+\kappa u+\kappa\tau) - \omega(b+\kappa u)\big]\Big\} = \\
&= e^{-\gamma t}\Big\{-\gamma\omega(0) + \gamma\omega(b) + \gamma\int_0^t du\, e^{\gamma u}\frac{d\omega(b+\kappa u)}{du}\Big\}.
\end{aligned} \tag{6.8.II}
$$

Интегрируя по частям, приходим к выражению

$$
\begin{aligned}
& e^{-\gamma t}\Big\{-\gamma\omega(0) + \gamma\omega(b) + \gamma\Big[e^{\gamma u}\omega(b+\kappa u)\Big|_0^t - \gamma\int_0^t du\, e^{\gamma u}\omega(b+\kappa u)\Big]\Big\} = \\
&= e^{-\gamma t}\Big\{-\gamma\omega(0) - \gamma\int_0^t du\, e^{\gamma u}\omega(b+\kappa u) + \gamma e^{\gamma t}\omega(b+\kappa t)\Big\} = \\
&= -\gamma\omega_t + \gamma\omega(b+\kappa t),
\end{aligned} \tag{6.8.I2}
$$

которое совпадает с (6.8.9).

Найденное решение (6.8.8) уравнения (4.6.I2) описывает распад начального состояния $\omega(0)$. При распаде индетерминированность непрерывно возрастает во времени, так что процесс распада необратим.

Подчеркнем, что непрерывность возрастания индетерминированности обусловлена отсутствием группового свойства у семейства $\{S_t : t \in \mathcal{R}\}$.

Здесь был рассмотрен некогерентный распад: начальное состояние (первое слагаемое правой части (6.8.8)) и состояние, возникающее в результате распада (второе слагаемое), некогерентны. Подробное рассмотрение когерентного распада содержится в /60/.

ГЛАВА 7. СИСТЕМЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

§ I. МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Как было отмечено в начале § 9 гл.2, общее рассмотрение относится к системам как с конечным, так и с бесконечным числом степеней свободы. В последнем случае, естественно, возникают специфические моменты, которые и являются предметом данной главы.

Проблема суперпозиции, или когерентности состояний макроскопической системы, обсуждавшаяся в гл.I, § 5, является частью более общей проблемы квантового описания макрообъекта. Первый вопрос, возникающий в связи с этой последней, состоит в определении макроскопической системы. В алгебраической квантовой теории, благодаря ГНС-конструкции, систему можно описывать в терминах гильбертовых пространств – как и в ортодоксальной квантовой теории. Здесь на сцену выступает сепарабельность и, в связи с ней, – число степеней свободы. Динамические переменные системы с конечным числом степеней свободы описываются в сепарабельном гильбертовом пространстве. Система, состоящая из нескольких частей (подсистем), описывается в терминах тензорного произведения гильбертовых пространств, относящихся к отдельным частям.

Обозначим n число степеней свободы. Макроскопическую систему можно пытаться определить одним из трех способов: $n \gg 1$, $n \to \infty$, $n = \infty$. Обсудим эти возможности.

Определение $n \gg 1$ не позволяет выделить какие-либо специфические особенности макроскопической системы. Главная причина состоит в том, что тензорное произведение произвольного конечного числа сепарабельных гильбертовых пространств представляет собой также сепарабельное гильбертово пространство. Поэтому с точки зрения подхода, в котором некогерентность состояний (т.е. исчезновение интерференционных членов) может возникнуть только за счет несепарабельности, определение $n \gg 1$ непригодно. Более того, все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны. Поэтому в общей теории конкретное значение числа степеней свободы, коль скоро оно конечно, не играет роли.

Определение $n \to \infty$ страдает тем недостатком, что требует установления смысла предельного перехода в описании квантовой системы в терминах гильбертовых пространств. При любом конечном n соответствующее гильбертово пространство сепарабельно, так что переход к несепарабельности означал бы скачок. Последнее обстоятельство затрудняет придание смысла предельному переходу.

Приведенные соображения делают целесообразным выбор определения $n = \infty$. Таким образом, в соответствии с общепринятой точкой зрения /37/, макроскопическая система определяется как система с бесконечным числом степеней свободы. Последняя описывается в терминах бесконечного тензорного произведения гильбертовых пространств.

§ 2. БЕСКОНЕЧНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Изложим основные понятия и наиболее важные результаты введенной фон Нейманом /6I/ конструкции бесконечных тензорных произведений гильбертовых пространств.

а. Бесконечные суммы и произведения. Прежде всего вводится понятие сходимости суммы $\sum_{j\in J} z_j$ и произведения $\prod_{j\in J} z_j$, где z_j – комплексные числа, в случае, когда множество индексов J имеет произвольную мощность $\bar{\bar{J}}$. Сумма уже рассматривалась в гл.2, § 8. Для удобства напомним соответствующие определения. Обозначим $\mathcal{F} = \{F \subset J : F \text{ финитно}\}$ семейство всех конечных подмножеств множества индексов J. На множестве $\mathcal{F}$ задано направление $\geq$: $F'' \geq F'$ эквивалентно $F'' \supset F'$, так что $\mathcal{F}$ – направленное множество. Введем конечные суммы и произведения $z_F^{\Sigma} = \sum_{j\in F} z_j$, $z_F^{\Pi} = \prod_{j\in F} z_j$, $F \in \mathcal{F}$. Тогда, по определению,

$$\sum_{j\in J} z_j = \lim_{F\in\mathcal{F}} z_F^{\Sigma}, \quad \prod_{j\in J} z_j = \lim_{F\in\mathcal{F}} z_F^{\Pi} \tag{7.2.I}$$

при условии, что соответствующий предел существует.

Для произведения вводится понятие квази-сходимости. Произведение $\prod_{j\in J} z_j$ является квазисходящимся, если и только если сходится $\prod_{j\in J} |z_j|$. Значение квазисходящегося произведения определяется согласно

$$\prod_{j\in J} z_j = \begin{cases} \lim\limits_{F\in\mathcal{F}} z_F^{\Pi} & \text{при наличии сходимости} \\ 0 & \text{в отсутствие сходимости.} \end{cases} \tag{7.2.2}$$

Таким образом, введено следующее соглашение: если $\prod_{j\in J} |z_j|$ сходится, но $\prod_{j\in J} z_j = \prod_{j\in J} |z_j| e^{i\varphi_j}$ не сходится вследствие слишком сильных осцилляций фазы, то произведению приписывается значение 0.

Заметим, что введенное фон Нейманом соглашение является очевидным следствием усреднения, т.е. принципа непрерывности вероятности. Усреднение величин $e^{i\varphi_j}$, $j \in J$, по интервалам фаз $\Delta\varphi_j = \varepsilon|\varphi_j|$, $\varepsilon \ll 1$, т.е. Δ-усреднение, приведет к

$$\Big(\prod_{j\in J}\Big)^{\Delta} = \prod_{j\in J} |z_j| e^{i\varphi_j} \frac{\sin\varepsilon|\varphi_j|}{\varepsilon|\varphi_j|} = 0 \qquad \text{в отсутствие сходимости (7.2.2).} \tag{7.2.3}$$

Переход к δ-усреднению $\varepsilon\to 0$ дает для $(\prod_{j\in J} z_j)^\delta$ результат (7.2.2). Отметим еще, что усреднение величин $|z_j|$ устранимо ввиду сходимости $\prod_{j\in J}|z_j|$.

б. Полное тензорное произведение. Пусть $\{\mathcal{H}_j : j\in J\}$ – семейство гильбертовых пространств, $\{\psi_j\in\mathcal{H}_j,\ j\in J\}$ – функция из J в $\bigcup_{j\in J}\mathcal{H}_j$, или (в терминологии фон Неймана) последовательность векторов. (Здесь термин последовательность не означает, что множество J счетное.) Не предполагается $\|\psi_j\|=1$.

Последовательность $\{\psi_j, j\in J\}$ есть C-последовательность, если и только если $\prod_{j\in J}\|\psi_j\|$ сходится.

Введем формальный объект – вектор-произведение

$$\Psi^{\otimes C} = \bigotimes_{j\in J}\psi_j, \tag{7.2.4}$$

соответствующий C-последовательности $\{\psi_j, j\in J\}$, формальную линейную комбинацию вектор-произведений – вектор

$$\Psi^{\otimes f} = \sum_{k=1}^{m} c_k\Psi_k^{\otimes C} \tag{7.2.5}$$

и скалярное произведение векторов

$$\left(\Psi^{\otimes C(2)}, \Psi^{\otimes C(1)}\right) = \prod_{j\in J}(\psi_j^{(2)}, \psi_j^{(1)}). \tag{7.2.6}$$

Векторное пространство с элементами (7.2.5) и скалярным произведением (7.2.6) представляет собой предгильбертово пространство. Его пополнение обозначается $\mathcal{H}^{\otimes} = \bigotimes_{j\in J}\mathcal{H}_j$ и называется полным тензорным произведением гильбертовых пространств $\mathcal{H}_j$, $j\in J$. Векторы пространства $\mathcal{H}^{\otimes}$ обозначаются $\Psi^{\otimes}$.

в. Неполное тензорное произведение. Последовательность $\{\psi_j, j\in J\}$ есть C_0-последовательность, если и только если сумма $\sum_{j\in J}|\|\psi_j\|-1|$ сходится. Каждая C_0-последовательность есть C-последовательность. Каждая C-последовательность с $\bigotimes_{j\in J}\psi_j\neq 0$, т.е. с $\prod_{j\in J}\|\psi_j\|\neq 0$, есть C_0-последовательность.

Две C_0-последовательности $\{\psi_j^{(1)}, j\in J\}$ и $\{\psi_j^{(2)}, j\in J\}$ эквивалентны, если и только если сумма $\sum_{j\in J}|(\psi_j^{(1)},\psi_j^{(2)})-1|$ сходится. Отношение эквивалентности разбивает множество всех C_0-последовательностей на классы эквивалентности. Обозначим $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}[\{\psi_j, j\in J\}]$ класс эквивалентности, Γ – множество указанных классов. Классы эквивалентности взаимно ортогональны. Две C_0-последовательности из одного класса ортогональны тогда и только тогда, когда для некоторого j выполняется $(\psi_j^{(1)}, \psi_j^{(2)})=0$.

Пусть $\mathfrak{C}\in\Gamma$ – класс эквивалентности,

$$\mathcal{H}^{\mathfrak{C}} = \bigotimes_{j\in J}^{\mathfrak{C}}\mathcal{H}_j \tag{7.2.7}$$

– замкнутое линейное пространство, порожденное множеством вектор-произведений $\{\bigotimes_{j\in J}\psi_j : \{\psi_j, j\in J\}\in\mathfrak{C}\}$. Гильбертово пространство (7.2.7) называется ($\mathfrak{C}$-адическим) неполным тензорным произведением гильбертовых пространств $\mathcal{H}_j$, $j\in J$.

Неполные тензорные произведения взаимно ортогональны; полное тензорное произведение является их ортогональной суммой:

$$\mathcal{H}^{\otimes} = \bigoplus_{\mathfrak{C}\in\Gamma}\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}. \tag{7.2.8}$$

Пусть $\{\psi_j^0, j\in J\}\in\mathfrak{C}$, причем $\|\psi_j^0\|=1$, $j\in J$. Тогда $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$ есть замкнутое линейное пространство, порожденное всеми C_0-последовательностями, такими, для которых $\psi_j\neq\psi_j^0$ только для конечного множества значений j.

Пусть $\varkappa_j$ – размерность $\mathcal{H}_j$ (т.е. мощность базиса в $\mathcal{H}_j$), $\mathcal{K}_j$ – множество индексов, имеющее мощность $\varkappa_j$, причем $0\in\mathcal{K}_j$, $\{\psi_j^{\beta}, \beta\in\mathcal{K}_j\}$ – базис в $\mathcal{H}_j$. Пусть y – функция с областью определения J, такая, что $y(j)\in\mathcal{K}_j$, причем $y(j)\neq 0$ только для конечного множества значений j. Обозначим $\mathcal{Y}$ множество этих функций. Тогда $\{\bigotimes_{j\in J}\psi_j^{y(j)} : y\in\mathcal{Y}\}$ – базис в $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$.

Два последних абзаца выясняют структуру неполного тензорного произведения, в то время как соотношение (7.2.8) показывает, как полное произведение построено из неполных.

г. Слабо неполное тензорное произведение. Две C_0-последовательности $\{\psi_j^{(1)}, j\in J\}$ и $\{\psi_j^{(2)}, j\in J\}$ слабо эквивалентны, если существует последовательность комплексных чисел $\{z_j, |z_j|=1, j\in J\}$, такая, что C_0-последовательность $\{z_j\psi_j^{(1)}, j\in J\}$ эквивалентна последовательности $\{\psi_j^{(2)}, j\in J\}$. Критерием слабой эквивалентности является сходимость суммы $\sum_{j\in J}||(\psi_j^{(1)}, \psi_j^{(2)})|-1|$. Отношение слабой эквивалентности разбивает множество всех C_0-последовательностей на классы слабой эквивалентности. Обозначим $\mathfrak{C}_w=\mathfrak{C}_w[\{\psi_j, j\in J\}]$ класс слабой эквивалентности, Γ_w – множество указанных классов.

Для каждого $\mathfrak{C}\in\Gamma$ имеет место $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{C}_w$ для точно одного $\mathfrak{C}_w\in\Gamma_w$; каждый класс $\mathfrak{C}_w\in\Gamma_w$ есть сумма всех $\mathfrak{C}\in\Gamma$, таких, что $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{C}_w$.

Пусть

$$\mathcal{H}^{\mathfrak{C}_w} = \bigotimes_{j\in J}^{\mathfrak{C}_w}\mathcal{H}_j \tag{7.2.9}$$

– замкнутое линейное пространство, порожденное множеством вектор-произведений $\{\bigotimes_{j\in J}\psi_j : \{\psi_j, j\in J\}\in\mathfrak{C}_w\}$. Гильбертово пространство (7.2.9) будем называть слабо неполным тензорным произведением гильбертовых пространств $\mathcal{H}_j$, $j\in J$. (Фон Нейман этот термин не вводил.)

Слабо неполное тензорное произведение является ортогональной суммой соответствующих неполных тензорных произведений:

$$\mathcal{H}^{\mathfrak{C}_w} = \bigoplus_{\mathfrak{C}\in\Gamma(\mathfrak{C}_w)}\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}, \tag{7.2.10}$$

где

$$\Gamma(\mathfrak{C}_w) = \{\mathfrak{C} : \mathfrak{C}\subset\mathfrak{C}_w\}. \tag{7.2.11}$$

При этом $\Gamma = \sum_{\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w} \Gamma(\mathfrak{C}_w)$. (Как обычно, суммой обозначается объединение непересекающихся множеств.)

Полное тензорное произведение является ортогональной суммой слабо неполных тензорных произведений:

$$\mathcal{H}^{\otimes} = \bigoplus_{\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w} \mathcal{H}^{\mathfrak{C}_w}. \qquad (7.2.12)$$

Из (7.2.12),(7.2.10) следует соотношение

$$\mathcal{H}^{\otimes} = \bigoplus_{\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w} \bigoplus_{\mathfrak{C} \in \Gamma(\mathfrak{C}_w)} \mathcal{H}^{\mathfrak{C}_w \mathfrak{C}}, \qquad (7.2.13)$$

где введено обозначение $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}_w \mathfrak{C}} = \mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{C} \in \Gamma(\mathfrak{C}_w)$. Соотношение (7.2.13) соответствует соотношению (7.2.8).

д. Фазовый оператор. Введем унитарный оператор на $\mathcal{H}^{\otimes}$

$$U_{\varphi}^{\otimes c} = \bigotimes_{j \in J} U_{\varphi_j}, \quad \varphi = \{\varphi_j, j \in J\}, \quad -\pi < \varphi_j \le \pi, \qquad (7.2.14)$$

где

$$U_{\varphi_j} = e^{-i\varphi_j} I_j = e^{-i\varphi_j} I_j, \qquad (7.2.15)$$

I_j – единичный оператор на $\mathcal{H}_j$. Действие $U_{\varphi}^{\otimes c}$ на вектор-произведение $\Psi^{\otimes c}$ (7.2.4) задается согласно

$$U_{\varphi}^{\otimes c} \Psi^{\otimes c} = \bigotimes_{j \in J} U_{\varphi_j} \psi_j = \bigotimes_{j \in J} e^{-i\varphi_j} \psi_j. \qquad (7.2.16)$$

При этом $\{e^{-i\varphi_j}\psi_j, j \in J\}$ – C-последовательность. Будем называть $U_{\varphi}^{\otimes c}$ фазовым оператором.

Если $\prod_{j \in J} e^{-i\varphi_j}$ сходится и равняется $e^{-i\varphi_\Sigma}$, то оператор (7.2.14) пропорционален единичному: $U_{\varphi}^{\otimes c} = e^{-i\varphi_\Sigma} I^{\otimes}$, $I^{\otimes}$ – единичный оператор на $\mathcal{H}^{\otimes}$. Поэтому основной интерес представляет случай, когда произведение $\prod_{j \in J} e^{-i\varphi_j}$ не сходится, т.е. является квазисходящимся к нулю. В этом случае $U_{\varphi}^{\otimes c}$ отображает $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}_w \mathfrak{C}'}$ на $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}_w \mathfrak{C}''}$ с $\mathfrak{C}'' \ne \mathfrak{C}'$.

е. Размерности тензорных произведений. Все неполные тензорные произведения $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$ имеют одну и ту же размерность: $\dim \mathcal{H}^{\mathfrak{C}} = \overline{\overline{\mathcal{Y}}}$, $\mathfrak{C} \in \Gamma$, где $\mathcal{Y}$ – множество функций, введенное в пункте в. Если все $\mathcal{H}_j$ сепарабельны, а множество J счетное, то $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$ сепарабельно.

Если J конечно, то Γ и Γ_w включают точно один элемент – множество всех C_0-последовательностей $\{\psi_j, j \in J\}$.

Если J бесконечно, тогда $\overline{\overline{\Gamma}}(\mathfrak{C}_w) = 2^{\overline{\overline{J}}}$, $\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w$, $\overline{\overline{J}} \ge \aleph_0$, где $\aleph_0$ – мощность счетного множества. При этом $\dim \mathcal{H}^{\mathfrak{C}_w} = \overline{\overline{\mathcal{Y}}} \cdot 2^{\overline{\overline{J}}}$. Поскольку $2^{\overline{\overline{J}}} \ge \aleph$ – мощность континуума, слабо неполное тензорное произведение несепарабельно.

Имеет место $\overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\overline{\Gamma}}(\mathfrak{C}_w) \cdot \overline{\overline{\Gamma}}_w$.

Размерность полного тензорного произведения $\dim \mathcal{H}^{\otimes} = \overline{\overline{\mathcal{Y}}} \cdot \overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\overline{\mathcal{Y}}} \cdot 2^{\overline{\overline{J}}} \cdot \overline{\overline{\Gamma}}_w$, $\overline{\overline{J}} \ge \aleph_0$.

Пусть множество неодномерных $\mathcal{H}_j$ бесконечно. Тогда $\overline{\overline{\Gamma}}_w \ge \aleph$. В противном случае $\overline{\overline{\Gamma}}_w = 1$.

§ 3. МАКРОСКОПИЧЕСКИ РАЗЛИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ

С целью определения макроскопически различных состояний введем понятие ультраслабой эквивалентности. Пусть

$$\{\psi_j^{(\kappa)\alpha_\kappa}, j \in J\} \in \mathfrak{C}_w^{(\kappa)}, \quad \|\psi_j^{(\kappa)\alpha_\kappa}\| = 1, \ j \in J, \quad \kappa = 1, 2, \qquad (7.3.1)$$

где $\mathfrak{C}_w^{(1)}$, $\mathfrak{C}_w^{(2)}$ – классы слабой эквивалентности (не обязательно различные), α_κ – индекс последовательности из класса $\mathfrak{C}_w^{(\kappa)}$. Введем функцию

$$d(\mathfrak{C}_w^{(1)}, \mathfrak{C}_w^{(2)}) = \inf_{\alpha_1} \sup_{j \in J} \|\psi_j^{(1)\alpha_1} - \psi_j^{(2)\alpha_2}\| = \inf_{\alpha_2} \sup_{j \in J} \|\psi_j^{(1)\alpha_1} - \psi_j^{(2)\alpha_2}\|. \qquad (7.3.2)$$

Можно проверить, что эта функция является псевдометрикой (гл.2, § 9) на множестве Γ_w классов слабой эквивалентности. Однако d не является метрикой: возможно $d(\mathfrak{C}_w^{(1)}, \mathfrak{C}_w^{(2)}) = 0$, но $\sum_{j \in J} [1 - |(\psi_j^{(1)\alpha_1}, \psi_j^{(2)\alpha_2})|]$ не сходится, т.е. $\mathfrak{C}_w^{(1)} \ne \mathfrak{C}_w^{(2)}$.

Как обычно, псевдометрика d разбивает множество Γ_w на классы эквивалентности. Назовем эту эквивалентность ультраслабой. Таким образом,

$\mathfrak{C}_w^{(1)}$ и $\mathfrak{C}_w^{(2)}$ ультраслабо эквивалентны, если и только если $d(\mathfrak{C}_w^{(1)}, \mathfrak{C}_w^{(2)}) = 0$. (7.3.3)

Обозначим $\mathfrak{C}_{uw} = \mathfrak{C}_{uw}[\mathfrak{C}_w]$ класс ультраслабой эквивалентности, Γ_{uw} – множество указанных классов,

$$\Gamma_w(\mathfrak{C}_{uw}) = \{\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w : \mathfrak{C}_w \subset \mathfrak{C}_{uw}\}, \qquad (7.3.4)$$

$$\mathcal{H}^{\mathfrak{C}_{uw}} = \bigoplus_{\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w(\mathfrak{C}_{uw})} \mathcal{H}^{\mathfrak{C}_w} \qquad (7.3.5)$$

– ультраслабо неполное тензорное произведение. При этом

$$\mathcal{H}^{\otimes} = \bigoplus_{\mathfrak{C}_{uw} \in \Gamma_{uw}} \mathcal{H}^{\mathfrak{C}_{uw}}. \qquad (7.3.6)$$

На множестве Γ_{uw} классов ультраслабой эквивалентности d порождает метрику:

$$d(\mathfrak{C}_{uw}^{(1)}, \mathfrak{C}_{uw}^{(2)}) = d(\mathfrak{C}_w^{(1)}, \mathfrak{C}_w^{(2)}), \quad \mathfrak{C}_w^{(\kappa)} \subset \mathfrak{C}_{uw}^{(\kappa)}, \quad \kappa = 1, 2. \qquad (7.3.7)$$

Представим условие ультраслабой эквивалентности (7.3.3) в другом виде. Напомним, что подмножество множества называется конфинитным, если его дополнение финитно. Обозначим $\mathcal{G} = \{G \subset J : G \text{ конфинитно}\}$ семейство всех конфинитных подмножеств множества индексов J. На множестве $\mathcal{G}$ зададим направление $\ge$: $G'' \ge G'$ эквивалентно $G'' \subset G'$, так что $\mathcal{G}$ – направленное множество. Обозначим

$$p_G^{(1)(2)} = \sup_{j \in G} |1 - |(\psi_j^{(1)}, \psi_j^{(2)})||, \quad \{\psi_j^{(\kappa)}, j \in J\} \in \mathfrak{C}_w^{(\kappa)}, \quad \kappa = 1, 2. \qquad (7.3.8)$$

Поскольку для единичных векторов Ψ', Ψ''

$$\|\Psi'-\Psi''\| = \sqrt{2}\,[1-\cos\beta\,|(\Psi',\Psi'')|]^{1/2}, \qquad (7.3.9)$$

где $(\Psi',\Psi'') = e^{i\beta}|(\Psi',\Psi'')|$, получаем

$$d(\mathfrak{C}_w^{(1)},\mathfrak{C}_w^{(2)}) = \inf_{\alpha_1}\sup_{j\in J}\sqrt{2}\,[1-|(\Psi_j^{(1)\alpha_1},\Psi_j^{(2)\alpha_2})|]^{1/2} \qquad (7.3.10)$$

(операция $\inf\limits_{\alpha_1}$ позволяет считать $\cos\beta=1$). Поэтому

$$d(\mathfrak{C}_w^{(1)},\mathfrak{C}_w^{(2)}) = 0 \quad \text{эквивалентно} \quad \lim_{G\in\mathcal{G}} p_G^{(1)(2)} = 0. \qquad (7.3.11)$$

Теперь естественно определить макроскопически различные состояния как состояния, относящиеся к различным ультраслабо неполным тензорным произведениям $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}_{uw}}$. В самом деле, состояния, относящиеся к одному и тому же $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}_{uw}}$, не отличаются на макроскопическом уровне в следующем смысле: с любой степенью точности можно считать, что для них различаются состояния только конечного числа степеней свободы. Действительно, $\lim\limits_{G\in\mathcal{G}} p_G^{(1)(2)} = 0$ означает, что для каждого $\varepsilon>0$ существует $G\in\mathcal{G}$, такое, что $|1-|(\Psi_j^{(1)},\Psi_j^{(2)})||<\varepsilon$, $\forall j\in G$. Для состояний же, относящихся к различным $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}_{uw}}$, различаются состояния бесконечного числа степеней свободы.

Таким образом, макроскопическая неэквивалентность состояний определяется как ультраслабая неэквивалентность.

Множество классов макроскопически различных состояний есть Γ_{uw}. Найдем мощность $\overline{\overline{\Gamma}}_{uw}$ этого множества. Пусть $\aleph'\ge\aleph_0$, $2\le\aleph''\le\aleph$. Поскольку $\aleph^{\aleph'} = (2^{\aleph_0})^{\aleph'} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph'} = 2^{\aleph'}$, имеет место $(\aleph'')^{\aleph'} = 2^{\aleph'}$ при $2\le\aleph''\le\aleph$, $\aleph'\ge\aleph_0$. Пусть каждое $\mathcal{H}_j$ сепарабельно. Тогда в вектор-произведении $\otimes_{j\in J}\Psi_j$ каждый вектор Ψ_j может быть выбран не менее чем двумя и не более чем $\aleph^{\aleph_0}=\aleph$ способами. Поэтому $\overline{\overline{\Gamma}}_{uw} = 2^{\overline{\overline{J}}}$. В частности, в случае счетного множества степеней свободы Γ_{uw} имеет мощность континуума.

§ 4. ОГРАНИЧЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

В случае системы с конечным числом степеней свободы множество ограниченных динамических переменных $\mathcal{A}$ есть множество $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ ограниченных линейных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_S$. В случае системы с бесконечным числом степеней свободы положение иное: множество ограниченных динамических переменных является собственным подмножеством множества $\mathcal{B}^{\otimes}(\mathcal{H}^{\otimes})$ ограниченных линейных операторов на $\mathcal{H}^{\otimes}$. Это связано с тем, что динамические переменные системы со многими степенями свободы строятся из динамических переменных отдельных степеней свободы путем алгебраического процесса и процесса пополнения /6I/.

Введем ограниченный оператор-произведение на $\mathcal{H}^{\otimes}$

$$B^{\otimes c} = \otimes_{j\in J} B_j, \quad B_j\in\mathcal{B}_j(\mathcal{H}_j), \qquad (7.4.1)$$

действие которого на вектор-произведение (7.2.4) задается согласно

$$B^{\otimes c}\Psi^{\otimes c} = \otimes_{j\in J} B_j\Psi_j. \qquad (7.4.2)$$

При этом $\{B_j\Psi_j, j\in J\}$ – C-последовательность. Далее введем линейное пространство, порожденное операторами (7.4.1), и пополним его относительно слабой операторной топологии, т.е. равномерной топологии (гл.2, § 9), порожденной семейством псевдометрик

$$d_{\Psi^{\otimes}}(B_1^{\otimes},B_2^{\otimes}) = |(\Psi^{\otimes},[B_1^{\otimes}-B_2^{\otimes}]\Psi^{\otimes})|,\quad \Psi^{\otimes}\in\mathcal{H}^{\otimes},\quad B_{1,2}^{\otimes}\in\mathcal{B}^{\otimes}(\mathcal{H}^{\otimes}). \qquad (7.4.3)$$

Обозначим получающееся при этом множество операторов $\mathcal{B}^{w}$.

В случае, когда J конечно, $\mathcal{B}^{w}=\mathcal{B}^{\otimes}$ /6I/. В случае бесконечного J это соотношение нарушается: $\mathcal{B}^{w}\subsetneqq\mathcal{B}^{\otimes}$.

Каждый оператор $B^{w}\in\mathcal{B}^{w}$ коммутирует с каждым фазовым оператором $U_{\varphi}^{\otimes c}$ (7.2.14):

$$B^{w}U_{\varphi}^{\otimes c} - U_{\varphi}^{\otimes c}B^{w} = 0. \qquad (7.4.4)$$

§ 5. ФИНИТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Введем оператор

$$B^{\otimes cf} = \otimes_{j\in J} B_j, \quad B_j = I_j \quad \text{для } j\in G\in\mathcal{G}; \qquad (7.5.1)$$

очевидно, $B^{\otimes cf}\in\mathcal{B}^{w}$. Далее вводим линейное пространство, порожденное операторами вида (7.5.1), и пополняем его относительно слабой операторной топологии. Следуя /6I/, обозначим получающееся множество операторов $\mathcal{B}^{\#}$. Операторы $B^{\#}\in\mathcal{B}^{\#}$ будем называть финитными (Фон Нейман этот термин не вводил.)

Каждое неполное тензорное произведение $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$ инвариантно относительно множества финитных операторов /6I/:

$$B^{\#}\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}\subset\mathcal{H}^{\mathfrak{C}},\quad B^{\#}\in\mathcal{B}^{\#};\quad \mathcal{B}^{\#}\mathcal{H}^{\mathfrak{C}} = \mathcal{H}^{\mathfrak{C}};\quad \mathfrak{C}\in\Gamma. \qquad (7.5.2)$$

Это характеристическое свойство финитных операторов.

§ 6. ТОПОЛОГИЯ В МНОЖЕСТВЕ КЛАССОВ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ $\Gamma(\mathfrak{C}_w)$

Имея в виду последующее применение принципа непрерывности вероятности, введем топологию в множестве $\Gamma(\mathfrak{C}_w)$ (7.2.11). Каждому $\mathfrak{C}\in\Gamma(\mathfrak{C}_w)$ можно взаимно-однозначно сопоставить фазовую последовательность $\varphi=\{\varphi_j, j\in J\}$ и затем ввести топологию в множестве указанных последовательностей

$$\Phi = \{\varphi : \varphi\leftrightarrow\mathfrak{C}\}. \qquad (7.6.1)$$

Выберем некоторое $\mathfrak{C}^{o}\in\Gamma(\mathfrak{C}_w)$ и положим

$$(\varphi=0) = \{\varphi_j=0,\ j\in J\}\leftrightarrow U_0^{\otimes c} = I^{\otimes}. \qquad (7.6.2)$$

Теперь

$$\mathbb{C} \leftrightarrow \varphi \leftrightarrow U_{\varphi}^{\otimes c}, \quad U_{\varphi}^{\otimes c} \mathcal{H}^{\mathbb{C}_w \mathbb{C}^o} = \mathcal{H}^{\mathbb{C}_w \mathbb{C}}. \tag{7.6.3}$$

Обозначим

$$d(\varphi_j^{(1)}, \varphi_j^{(2)}) = \min\{|\varphi_j^{(1)} - \varphi_j^{(2)}|, 2\pi - |\varphi_j^{(1)} - \varphi_j^{(2)}|\}. \tag{7.6.4}$$

Легко проверить выполнение неравенства треугольника

$$d(\varphi_j^{(1)}, \varphi_j^{(3)}) \le d(\varphi_j^{(1)}, \varphi_j^{(2)}) + d(\varphi_j^{(2)}, \varphi_j^{(3)}). \tag{7.6.5}$$

Топологию в множестве Φ вводим с помощью баз окрестностей точек

$$U_\varepsilon(\varphi) = \{\varphi' : \text{существует } G \in \mathcal{G} \text{ такое, что } \sup_{j \in G} d(\varphi_j', \varphi_j) < \varepsilon\}. \tag{7.6.6}$$

Можно проверить, что условия для базы окрестностей точки выполняются.

Обозначим

$$r_G^{(1),(2)} = \sup_{j \in G} d(\varphi_j^{(1)}, \varphi_j^{(2)}). \tag{7.6.7}$$

Введем понятие конфинитной эквивалентности фазовых последовательностей: $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ конфинитно-эквивалентны, если и только если $\lim_{G \in \mathcal{G}} r_G^{(1),(2)} = 0$.

Обозначим $\Phi_g = \Phi_g(\varphi)$ класс конфинитной эквивалентности, Γ_g – множество указанных классов. Методом /6I/ нетрудно установить

$$\overline{\overline{\Gamma_g}} = 2^{\overline{\overline{J}}}. \tag{7.6.8}$$

Пусть $\varphi \in \Phi_g$. Тогда $\Phi_g \subset U_\varepsilon(\varphi)$ для каждого $\varepsilon > 0$. Таким образом, во введенной топологии точки пространства Φ, принадлежащие одному и тому же Φ_g, неотделимы. Точки, принадлежащие различным Φ_g, отделимы.

Множество Φ_g замкнуто как дополнение к объединению тех открытых окрестностей точек $\varphi \in \Phi$, $\varphi \notin \Phi_g$, которые не пересекаются с Φ_g.

Топологическое пространство $\Gamma(\mathbb{C}_w)$ гомеоморфно пространству Φ – согласно (7.6.3).

§ 7. НЕПРЕРЫВНАЯ ВЕРОЯТНОСТНАЯ МЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ $\Gamma(\mathbb{C}_w)$

Пусть P – борелевская вероятностная мера (гл.2, § 2) в топологическом пространстве Φ и, тем самым, – в $\Gamma(\mathbb{C}_w)$. Множества $\Phi_g \in \Gamma_g$, будучи замкнутыми, измеримы. Различные множества Φ_g не пересекаются: $\Phi_g' \cap \Phi_g'' = \emptyset$ при $\Phi_g' \ne \Phi_g''$. Рассмотрим $U_\varepsilon(\varphi)$, $\varphi \in \Phi_g$. Окрестность $U_\varepsilon(\varphi)$ содержит Φ_g и, как нетрудно установить с помощью метода /6I/, бесконечное множество других Φ_g'. Это справедливо при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому наложив на меру P условие инфинитезимальной непрерывности (гл.2, § 2), получим $P(\Phi_g) = 0$, $\Phi_g \in \Gamma_g$. Одноточечное множество $\{\varphi\} \subset \Phi_g$, поэтому

$$P(\{\varphi\}) = 0, \quad \varphi \in \Phi, \tag{7.7.1}$$

вполне непрерывная вероятностная мера одноточечного множества в пространстве Φ равна нулю. Заметим, что существование вполне непрерывной вероятностной меры в пространстве Φ возможно потому, что ввиду (7.6.8) $\overline{\overline{\Gamma_g}} \ge \aleph$ при $\overline{\overline{J}} \ge \aleph_0$.

Для пространства $\Gamma(\mathbb{C}_w)$ соотношение (7.7.I) принимает вид

$$P(\{\mathbb{C}\}) = 0, \quad \mathbb{C} \in \Gamma(\mathbb{C}_w). \tag{7.7.2}$$

§ 8. НЕКОГЕРЕНТНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ НЕПОЛНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Проблема когерентности состояний, описываемых векторами $\Psi^{\otimes(1)}$, $\Psi^{\otimes(2)} \in \mathcal{H}^{\otimes}$, есть, в других терминах, проблема связности состояния, описываемого суперпозицией

$$\Psi^{\otimes} = c^{(1)}\Psi^{\otimes(1)} + c^{(2)}\Psi^{\otimes(2)}. \tag{7.8.1}$$

Пусть, как обычно, $\omega_{\Psi^\otimes} = (\Psi^\otimes, \cdot\ \Psi^\otimes)$ – состояние с амплитудой $\Psi^\otimes$. Несвязность состояния, описываемого суперпозицией (7.8.I), означает, что

$$\omega_{\Psi^\otimes} = |c^{(1)}|^2 \omega_{\Psi^{\otimes(1)}} + |c^{(2)}|^2 \omega_{\Psi^{\otimes(2)}}, \tag{7.8.2}$$

т.е. что в $\omega_{\Psi^\otimes}$ отсутствуют интерференционные члены (гл.I, § 5).

Рассмотрим суперпозицию векторов, относящихся к различным неполным тензорным произведениям,

$$\Psi^{\otimes} = c^{(1)}\Psi^{\mathbb{C}^{(1)}} + c^{(2)}\Psi^{\mathbb{C}^{(2)}}, \quad \mathbb{C}^{(1)} \ne \mathbb{C}^{(2)}, \quad \Psi^{\mathbb{C}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{C}}. \tag{7.8.3}$$

Ввиду (7.2.I0) вектор (7.8.3) можно записать в виде

$$\Psi^{\otimes} = c^{(1)}\Psi^{\mathbb{C}_w' \mathbb{C}^{(1)}} + c^{(2)}\Psi^{\mathbb{C}_w'' \mathbb{C}^{(2)}}, \quad \mathbb{C}^{(1)} \ne \mathbb{C}^{(2)}, \quad \Psi^{\mathbb{C}_w \mathbb{C}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{C}_w \mathbb{C}}, \tag{7.8.4}$$

где допускается как $\mathbb{C}_w' \ne \mathbb{C}_w''$, так и $\mathbb{C}_w' = \mathbb{C}_w''$.

Рассмотрим среднее значение

$$\omega_{\Psi^\otimes}(B^\otimes) = (\Psi^\otimes, B^\otimes \Psi^\otimes), \tag{7.8.5}$$

где $\Psi^\otimes$ задается выражением (7.8.4), $B^\otimes \in \mathcal{B}^\otimes(\mathcal{H}^\otimes)$. (Здесь нет необходимости ограничиваться множеством $\mathcal{B}^w$). Величину (7.8.5) следует усреднить по непрерывным вероятностным мерам $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ в пространствах $\Gamma(\mathbb{C}_w')$ и $\Gamma(\mathbb{C}_w'')$ соответственно. Указанные пространства могут, в частности, совпадать. Достаточно учесть одно усреднение. Для интерференционного члена получаем выражение

$$\int P^{(1)}(d\mathfrak{C}^{(1)})(\Psi^{\mathfrak{C}'_w\mathfrak{C}^{(1)}},\ B^{\otimes}\ \Psi^{\mathfrak{C}''_w\mathfrak{C}^{(2)}}). \tag{7.8.6}$$

Доказательство равенства этого выражения нулю аналогично доказательству соотношения (2.12.8). Различные векторы $\Psi^{\mathfrak{C}'_w\mathfrak{C}^{(1)}}$, $\mathfrak{C}^{(1)}\in\Gamma(\mathfrak{C}'_w)$ попарно ортогональны. Поэтому скалярное произведение вектора $B^{\otimes}\Psi^{\mathfrak{C}''_w\mathfrak{C}^{(2)}}$ на векторы $\Psi^{\mathfrak{C}'_w\mathfrak{C}^{(1)}}$ отлично от нуля не более чем для счетного множества последних. Но мера такого множества, ввиду (7.7.2), равна нулю. Таким образом, выражение (7.8.6) равно нулю.

Этот результат справедлив для любой вполне непрерывной вероятностной меры, что означает неустранимость усреднения. Равенство нулю интерференционного члена для произвольного оператора $B^{\otimes}$ означает несвязность состояния, описываемого вектором (7.8.4).

Таким образом, различные неполные тензорные произведения $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$ попарно некогерентны.

Из соотношений (7.4.4) и $U_{\varphi}^{\otimes c}\mathcal{H}^{\mathfrak{C}_w\mathfrak{C}'}=\mathcal{H}^{\mathfrak{C}_w\mathfrak{C}''}$ с учетом унитарности $U_{\varphi}^{\otimes c}$ следует, что различные $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$, относящиеся к одному и тому же $\mathfrak{C}_w$, физически эквивалентны:

$$\begin{aligned}(\Psi_1^{\mathfrak{C}_w\mathfrak{C}''},\ B^w\Psi_2^{\mathfrak{C}_w\mathfrak{C}''})&=(U_{\varphi}^{\otimes c}\Psi_1^{\mathfrak{C}_w\mathfrak{C}'},\ B^wU_{\varphi}^{\otimes c}\Psi_2^{\mathfrak{C}_w\mathfrak{C}'})=\\&=(\Psi_1^{\mathfrak{C}_w\mathfrak{C}'},\ (U_{\varphi}^{\otimes c})^*B^wU_{\varphi}^{\otimes c}\Psi_2^{\mathfrak{C}_w\mathfrak{C}'})=\\&=(\Psi_1^{\mathfrak{C}_w\mathfrak{C}'},\ B^w\ \Psi_2^{\mathfrak{C}_w\mathfrak{C}'}).\end{aligned} \tag{7.8.7}$$

Отсюда, с учетом некогерентности различных $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$, следует, что с физической точки зрения класс $\mathfrak{C}_w$ представлен одним из классов $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{C}_w$.

§ 9. ФИНИТНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Некогерентность различных неполных тензорных произведений $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$, обусловленная неустранимым усреднением, означает, что с учетом указанного усреднения в качестве ограниченных динамических переменных следует рассматривать только операторы, относительно которых $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$ инвариантны, т.е., ввиду (7.5.2), финитные операторы.

Получим этот результат еще одним путем, а именно покажем, что неустранимое усреднение приводит к обращению в нуль матричных элементов нефинитного оператора B^w. Рассмотрим матричный элемент

$$(\Psi^{\otimes(2)},\ B^w\Psi^{\otimes(1)}),\quad \Psi^{\otimes(1),(2)}\in\mathcal{H}^{\otimes},\quad B^w\in\mathcal{B}^w. \tag{7.9.1}$$

Множество векторов вида (7.2.5) является всюду плотным в $\mathcal{H}^{\otimes}$, а множество линейных комбинаций оператор-произведений (7.4.1) всюду плотно в $\mathcal{B}^w$, поэтому можно ограничиться матричными элементами

$$(\Psi^{\otimes c(2)},\ B^{\otimes c}\Psi^{\otimes c(1)})=\prod_{j\in J}(\Psi_j^{(2)},\ B_j\Psi_j^{(1)}). \tag{7.9.2}$$

Введем обозначения

$$z_j=(\Psi_j^{(2)},\ B_j\Psi_j^{(1)}),\quad z=\{z_j,\ j\in J\},\quad \Pi(z)=\prod_{j\in J}z_j; \tag{7.9.3}$$

таким образом, z – последовательность, $\Pi(z)$ – соответствующий матричный элемент. Обозначим $\mathcal{Z}^{\infty}$ множество всех последовательностей, обладающих следующим свойством: существуют $\varepsilon=\varepsilon(z)>0$ и $G=G(z)\in\mathcal{G}$, такие, что $|(\Psi_j^{(\kappa)},\ B_j\Psi_j^{(\kappa)})-1|>\varepsilon,\ \kappa=1,2,$ для каждого $j\in G$. Рассмотрение множества $\mathcal{Z}^{\infty}$ исключает случай $B_j=I_j$ для $j\in G\in\mathcal{G}$, т.е. случай финитного оператора. Введем топологию в множестве $\mathcal{Z}^{\infty}$ с помощью баз окрестностей точек

$$U_{\varepsilon}(z)=\{z':\ \text{существует } G\in\mathcal{G},\ \text{такое, что } \sup_{j\in G}|z'_j-z_j|<\varepsilon\}. \tag{7.9.4}$$

Эта топология аналогична введенной в § 6.

Для последовательности $z^{(1)}=\{z_j=1,\ j\in J\}$ матричный элемент $\Pi(z^{(1)})=1$. Последовательность z, для которой $\Pi(z)\neq 0$, конфинитно эквивалентна последовательности $z^{(1)}$:

$$\lim_{G\in\mathcal{G}}\ \sup_{j\in G}|z_j-z_j^{(1)}|=0 \quad \text{при} \quad \prod_{j\in J}z_j\neq 0. \tag{7.9.5}$$

Таким образом, последовательности, для которых матричные элементы отличны от нуля, принадлежат классу конфинитной эквивалентности $\mathcal{Z}_g^{\infty}=\mathcal{Z}_g^{\infty}[z^{(1)}]$.

Вполне непрерывная борелевская вероятностная мера P на рассматриваемом топологическом пространстве $\mathcal{Z}^{\infty}$ обладает свойством $P(\mathcal{Z}_g^{\infty})=0$. Отсюда вероятность того, что матричный элемент отличен от нуля, равна нулю: $P(\{z:\ \Pi(z)\neq 0\})=0$. Усреднение матричного элемента $\Pi(z)$ (7.9.3) по такой мере дает нуль. Это означает, что с физической точки зрения нефинитный оператор равен нулю.

Тем самым, множеством физических ограниченных динамических переменных является множество $\mathcal{B}^{\#}$ финитных операторов.

Отсюда, в свою очередь, следует некогерентность различных $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$.

§ 10. НЕКОГЕРЕНТНОСТЬ МАКРОСКОПИЧЕСКИ РАЗЛИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Состояния, описываемые векторами из различных $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}_w}$ и, тем более, из различных $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}_{uw}}$, соответствуют различным $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$ и поэтому некогерентны. Таким образом, макроскопически различные состояния некогерентны.

Этот результат основан на определении макроскопической системы как системы с бесконечным числом степеней свободы. Но учет того, что в любом реальном опыте фигурирует не δ-, а Δ-усреднение, приводит к выводу о практическом исчезновении макроскопической когерентности в случае системы с конечным, но достаточно большим числом степеней свободы $n = \bar{\bar{J}}$. Здесь имеется в виду Δ-усреднение для каждой степени свободы, например, типа усреднения в (7.2.3). Различие случаев $n=\infty$ и $n \gg 1$ аналогично различию идеального и реального опытов Штерна-Герлаха – с тем, однако, существенным отличием, что случай $n=\infty$ сам по себе реален.

Если рассматривать предельный переход $n \to \infty$ до перехода от Δ-усреднения к δ-усреднению, то вывод о некогерентности макроскопически различных состояний справедлив в случае $n \to \infty$.

§ II. О ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Остановимся на некоторых особенностях динамики систем с бесконечным числом степеней свободы. Динамика определяется симметриями, которым в общем случае соответствуют преобразования на всем $\mathcal{H}^{\otimes}$, а не только на отдельных $\mathcal{H}^{\mathfrak{C}}$. Это обусловлено тем, что при построении динамики симметрии вводятся до усреднения. Таким образом, динамика допускает переходы между состояниями, соответствующими различным классам слабой эквивалентности, и, в частности, между различными классами ультраслабой эквивалентности $\mathfrak{C}_{uw}$, т.е. между макроскопически различными состояниями. В случае указанных переходов индетерминированность возникает даже без учета усреднения по времени. Последнее существенно для индетерминированности, возникающей внутри $\mathfrak{C}$.

Как подчеркивалось, непрерывное возрастание индетерминированности во времени, рассмотренное в гл.6, §§ 7,8, обусловлено отсутствием группового свойства у семейства симметрий $\{S_t : t \in \mathcal{R}\}$. Это связано с существенностью δ-усреднения по времени. В случае бесконечного числа степеней свободы положение дел меняется: групповое свойство семейства симметрий не препятствует непрерывному возрастанию индетерминированности во времени.

Несколько слов о так называемой тепловой смерти Вселенной. С физической точки зрения речь идет о равновесном состоянии системы с бесконечным числом степеней свободы. Равновесное состояние произвольной системы описано в гл.6, § 6 и имеет вид (6.6.2)

$$\omega_e = \int \omega_e(E(dx))\, \omega_x . \tag{7.II.I}$$

В случае системы с бесконечным числом степеней свободы множество состояний $\{\omega_x : x \in \operatorname{supp} \omega_e(E)\}$ включает макроскопически различные

состояния. Согласно вероятностной интерпретации формулы (7.II.I), система совершает индетерминированные (непредсказуемые) переходы между такими состояниями. При этом, ввиду принципа непрерывности вероятности, вероятность того, что состояние принадлежит точно определенному классу $\mathfrak{C}_{uw} \in \Gamma_{uw}$, равна нулю, т.е. такое состояние нереализуемо. Вряд ли термин "тепловая смерть" адекватен такой картине.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В своей сущности любая квантовая теория должна быть индетерминистской. Хотя ортодоксальная теория удовлетворяет этому условию, она неполна, поскольку содержит индетерминизм только в интерпретационной части. Это обусловлено тем, что в ортодоксальной теории лишь констатируется существование индетерминизма в реальном мире, но не рассматривается его математическая (и тем самым физическая) природа. По этой причине в ортодоксальной теории квантовая механика и статистическая квантовая механика существуют в значительной мере независимо друг от друга, хотя естественно думать, что наличие вероятностной интерпретации должно неразрывно связывать их.

Именно так обстоит дело в индетерминистской динамике, которую можно было бы назвать теорией индетерминизма. Установление природы индетерминизма, т.е. выбор адекватной математической модели позволяет построить единую теорию, включающую как квантовую механику (с теорией измерения), так и статистическую квантовую механику. Включение последней обеспечивается тем, что из закона возрастания индетерминированности вытекает закон возрастания энтропии, который, в свою очередь, приводит к каноническому распределению.

Заканчивая изложение, еще раз подчеркнем, что математическая модель индетерминизма (принцип непрерывности вероятности и связанное с ним δ-усреднение) не придумана ad hoc, а является отражением свойств физического континуума, т.е. объективных свойств природы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борн М. Статистика в физике. – В кн.: Физика в жизни моего поколения. М.: ИЛ, 1963.
2. Гейзенберг В. Развитие интерпретации квантовой теории. – В кн.: Нильс Бор и развитие физики. М.: ИЛ, 1958.
3. Бор Н. Квантовая физика и философия. – В кн.: Атомная физика и человеческое познание. М.: ИЛ, 1961.
4. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. – М.: Наука, 1964.
5. Паули В. Вероятность и физика. – В кн.: Физические очерки. М.: Наука, 1975.

6. Фок В.А. Квантовая физика и строение материи. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1965.
7. Jauch J.M. The quantum probability calculus. – In: Fundamenta sciential Seminaire sur les foundements des sciences, No 7. Strasbourg, 1975.
8. D'Espagnat B. Conceptual Foundations of Quantum Mechanics. – USA: Benjamin W.A., Inc., 1976.
9. Такабаяси Т. Вопросы теории измерений в квантовой механике. – В кн.: Перспективы квантовой физики. Киев: Наукова думка, 1982.
10. Mashkevich V.S. Quantum Statistical Dynamics: Statistics Origin, Measurement, and Irreversibility. – Found. of Phys., 1985, v. 15, No 1, 1-33.
11. Машкевич В.С. Квантовая динамика: симметрии и усреднение. – Препринт ИФ АН УССР. Киев, 1984, № 84/42.
12. Машкевич В.С. Индетерминистское квантовое уравнение движения. – Препринт ИФ АН УССР. Киев, 1986, № 86/34.
13. Машкевич В.С. Некогерентность макроскопически различных квантовых состояний. – Препринт ИФ АН УССР. Киев, 1987, № 87/1.
14. Машкевич В.С. Квантоводинамическая теория измерения. – Препринт ИФ АН УССР. Киев, 1987, № 87/2.
15. Шредингер Э. 2400 лет квантовой теории. – В кн.: Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976.
16. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики. – М.: Наука, 1985.
17. Борн М. Физика и относительность. – В кн.: Физика в жизни моего поколения. М.: ИЛ, 1963.
18. Эйнштейн А. Рассуждения об основах теоретической физики. – В кн.: Собрание научных трудов, т. 4. М.: Наука, 1967.
19. Вигнер Е. Проблема измерения. – В кн.: Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971.
20. Юкава Х. Лекции по физике. – М.: Энергоиздат, 1981.
21. Уилер Дж. Квант и Вселенная. – В сб.: Астрофизика, кванты и теория относительности. М.: Мир, 1982.
22. Гуггенгейм Э.А. Современная термодинамика. – Л., М.: Госхимиздат, 1941.
23. Исихара А. Статистическая физика. – М.: Мир, 1973.
24. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984.
25. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. – М.: Наука, 1984.
26. Шуэн Ш. Стохастичность в динамических системах. Лекции для молодых ученых. Вып. 34, Р17-86-211. – Дубна: ОИЯИ, 1986.

27. Пригожин И. Время, структура и флуктуации. – УФН, 1980, т. 131, 185-207.
28. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика, часть 1. – М.: Наука, 1976.
29. Гейзенберг В. Физические принципы квантовой теории. – Л.-М.: ГТТИ, 1932.
30. Мессиа А. Квантовая механика, т. 1. – М.: Наука, 1978.
31. Leggett A.J. The "Arrow of Time" and Quantum Mechanics. – In: The Encyclopaedia of Ignorance. Pergamon Press, 1977.
32. Machida S., Namiki M. – Prog. Theor. Phys., 1980, v. 63, No 5; 1457-1473; No 6, 1833-1847.
33. Araki H. – Prog. Theor. Phys., 1980, v. 64, No 3, 719-730.
34. Schrödinger E. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. – Naturwissenschaften, 1935, v. 23, 807-812, 823-828, 844-849.
35. Wigner E.P. Remarks on the Mind-Body Question. – In: The Scientist Speculates. London: I.J.Good, Ed. W.Heinemann, 1961.
36. Девис П. Случайная Вселенная. – М.: Мир, 1985.
37. D'Espagnat B. In Search of Reality. – Springer-Verlag, 1983.
38. Leggett A.J. Macroscopic Quantum Systems and the Quantum Theory of Measurement. – Supplement of Prog. Theor. Phys., 1980, No 69, 80-100; Schrödinger's Cat and Her Laborotory Cousins. – Contemp. Phys., 1984, v. 25, No 6, 583-598.
39. Пуанкаре А. Наука и гипотеза. – В кн.: О науке. М.: Наука, 1983.
40. Вейль Г. Призрак модальности. – В кн.: Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984.
41. Борн М. Действительно ли классическая механика детерминистична? – В кн.: Физика в жизни моего поколения. М.: ИЛ, 1963.
42. Йорке Дж., Йорке Е. Метастабильный хаос. – В сб.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981.
43. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. – М.: Наука, 1987.
44. Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. Обобщенные функции, вып. 4. – М.: ФМ, 1961.
45. Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. – М.: Мир, 1976.
46. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. – М.: Мир, 1982.
47. Гельфанд И.М., Наймарк М.А. – Мат. сб., 1943, т. 12, 147-213.
48. Segal I.E. – Bull. Amer. Math. Soc., 1947, v. 61, 69-105.
49. Summerhammer J., Badurek G., Rauch H., Kischko U., Zeilinger A. – Phys. Rev. Ser.A, 1983, v. 27, 2523.

50.Böhm A. Quantum Mechanics. - Springer-Verlag, 1979.
51.Шифф Л. Квантовая механика. - М.: ИЛ, 1957.
52.Киржниц Д.А. Полевые методы теории многих частиц. - М.: Госатомиздат, 1963.
53.Von Neumann J. - Ann. Math., 1949, v. 50, 401-485.
54.Холево А.С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. - М.: Наука, 1980.
55.Kraus K. States, Effects, and Operations. - Springer-Verlag, 1983.
56.Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. - М.: Наука, 1966.
57.Мандельштам Л.И. Лекции по основам квантовой механики. - В кн.: Полное собрание трудов, т. У. Изд-во АН СССР, 1950.
58.Irreversible Process. - In: Encyclopedic Dictionary of Physics, v. 4. Pergamon Press, 1961.
59.Файнстейн А. Основы теории информации. - М.: ИЛ, 1960.
60.Exner P. Open Quantum Systems and Feynman Integrals. - D.Reidel Publishing Company, 1985.
61.Von Neumann J. Composit Math., 1938, v. 6, 1-77.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 февраля 1988 года.

ПЕРЕЧЕНЬ
лекций, вышедших с 1974 в ОИЯИ

Фаустов Р.Н. Связанная система частиц в квантовой электродинамике. Вып.1. ОИЯИ, Дубна, 1974.

Синаев А.Н. Современные аппаратурные системы модульной структуры, используемые при создании измерительно-вычислительных комплексов /КАМАК, ВЕКТОР/. Вып.2. ОИЯИ, 8507, Дубна, 1975.

Волков Д.В. Кварки как следствие дуальности. Вып.3. ОИЯИ, Р2-8765, Дубна, 1975.

Пальчик М.Я., Фрадкин Е.С. Введение в теорию конформно-инвариантных квантовых полей. Вып.4. ОИЯИ, 2-8874, Дубна, 1975.

Замори З. Микропроцессоры. Вып.5. ОИЯИ, Р10-8852, Дубна, 1975.

Биленький С.М. Вопросы физики нейтрино высоких энергий. Вып.6. ОИЯИ, 2-9026, Дубна, 1975.

Малкин И.А., Манько В.И. Инварианты, когерентные состояния и динамические симметрии квантовых систем. Вып.7. ОИЯИ, Р2-9228, Дубна, 1975.

Волков М.К., Первушин В.Н. Квантовая теория поля с киральным лагранжианом и физика мезонов низких энергий. Вып.8. ОИЯИ, Р2-9390, Дубна, 1976.

Басиладзе С.Г. Интегральные схемы с эмиттерной связью и их применение в наносекундной ядерной электронике. Вып.9. ОИЯИ, 13-9744, Дубна, 1976.

Аникин С.А. и др. Перенормированные составные поля в квантовой теории поля. Вып.10. ОИЯИ, Р2-10528, Дубна, 1977.

Шляпников П.В. Множественные процессы и инклюзивные реакции. Вып.11. ОИЯИ, Р2-10681, Дубна, 1977.

Капусцик Э. Галилеева инвариантность в теории поля. Вып.12. ОИЯИ, Р2-10677, Дубна, 1977.

Бутцев В.С. Явление возбуждения высокоспиновых ядерных состояний и механизм поглощения отрицательных π-мезонов. Вып.13,ОИЯИ,Р15-10847, Дубна, 1977.

Валуев Б.Н. Применение алгебры Клиффорда к решению задачи Изинга - Онсагера. Вып.14. ОИЯИ, Р17-11020, Дубна, 1977.

Капусцик Э. Нестандартные алгебры квантово-механических наблюдаемых. Вып.15. ОИЯИ, Р4-11497, Дубна, 1978.

Блохинцев Д.И. Квантовая механика. Лекции по избранным вопросам. Вып.16. ОИЯИ, Р2-11728, Дубна, 1978.

Ширикова Н.Ю. Начинающим работать на ЭВМ CDC-6500. Вып.17. ОИЯИ, Р11-11739, Дубна, 1978.

Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Непрерывные симметрии в теории поля. Вып.18. ОИЯИ, Р2-12029, Дубна, 1978.

Некоторые проблемы физики высоких энергий /сборник/. Вып.19. ОИЯИ, Р2-12080, Дубна, 1978.

Басиладзе С.Г. Электронная регистрирующая аппаратура физического эксперимента. Вып.20. ОИЯИ, Р13-12151, Дубна, 1979.

Ефремов А.В., Радюшкин А.В. Партоны, жесткие процессы и квантовая хромодинамика. Вып.21. ОИЯИ, Р2-12803, Дубна, 1979.

Говорков А.Б. Введение в теорию кварков. Вып.22, ОИЯИ, Р2-12803, Дубна, 1979.

Говорков А.Б. Цветные кварки и глюоны. Вып.23. ОИЯИ, Р2-80-6, Дубна, 1980.

Исаев П.С. Глубоконеупругое рассеяние лептонов на нуклонах. Партонная модель нуклона. Вып.24. ОИЯИ, Р2-80-325, Дубна, 1980.

Казаков Д.И., Ширков Д.В. Суммированне асимптотических рядов в квантовой теории поля. Вып.25. ОИЯИ, Р2-80-462, Дубна, 1980.

Ососков Г.А. Применение методов распознавания образов в физике высоких энергий. Вып.26. ОИЯИ, Р10-83-187, Дубна, 1983.

Малышев В.А. Элементарное введение в математическую физику бесконечно-частичных систем. Вып.27. ОИЯИ, Р17-83-363, Дубна, 1983.

Савушкин Л.Н., Фоменко В.Н. Введение в мезонную теорию ядерных взаимодействий и ядерных систем. Вып.28. ОИЯИ, Р4-83-369, Дубна,1983.

Биленький С.М. Осцилляции нейтрино. Вып.29. ОИЯИ, Р2-83-441, Дубна, 1983.

Бужек В. Введение в метод стохастического квантования. Вып.30. ОИЯИ, Р2-84-419, Дубна, 1984.

Шумовский А.С., Юкалов В.И. Фазовые состояния и переходы. Вып.31. ОИЯИ, Р17-85-676, Дубна, 1985.

Владимиров А.А. Введение в квантовые интегрируемые системы. Метод R-матрицы. Вып.32. ОИЯИ, Р17-85-742, Дубна, 1985.

Осипов В.А., Федянин В.К. Полиацетилен и двумерные модели квантовой теории поля. Вып. 33. ОИЯИ, Р17-85-309, Дубна, 1985.

Шуян Ш. Стохастичность в динамических системах. Вып. 34. ОИЯИ, Р17-86-211, Дубна, 1986.

Ефремов А.В. Введение в квантовую хромодинамику. Вып. 35. ОИЯИ, Р2-86-212, Дубна, 1986.

Нестеренко В.В., Червяков А.М. Сингулярные лагранжианы. Классическая динамика и квантование. Вып. 36. ОИЯИ, Р2-86-323, Дубна, 1986.

Пепёлышев Ю.Н. Регистрация нейтронов /современное состояние и перспективы развития/ Вып. 37. ОИЯИ, Р13-86-719, Дубна, 1986.

Боголюбов Н.Н./мл./, Шумовский А.С. Светоизлучение. Вып. 38. ОИЯИ, Р17-87-176, Дубна, 1987.

Пушкаров Д.И. Дефектоны в кристаллах. /Метод квазичастиц в квантовой теории дефектов/. Вып. 39. ОИЯИ, Р17-87-177, Дубна, 1987.

Никитюк Н.М. От современной алгебры к специализированным процессорам. Вып. 40. ОИЯИ, Р10-87-401, Дубна, 1987.

Дубничкова А.З. Непрерывные группы для физиков. Вып. 41, ОИЯИ, Р2-87-197, Дубна, 1987.

Никитюк Н.М. Электронные методы экспериментальной физики высоких энергий. Вып. 42, ОИЯИ, Р1-87-909, Дубна, 1987.

Балдин А.М., Диденко Л.А. Асимптотические свойства адронной материи в пространстве четырехмерных относительных скоростей. Вып. 43, ОИЯИ, Р1-87-912, Дубна, 1987.