ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

Анна Зузанна Дубничкова

НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ ДЛЯ ФИЗИКОВ

ДУБНА

ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Выпуск 41

Р2-87-197

Анна Зузана Дубничкова

НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ ДЛЯ ФИЗИКОВ

Дубна 1987

ОГЛАВЛЕНИЕ

"Эту повесть я расскажу вам в том виде, в котором я слышал её от одного человека, слышавшего её от своего отца, который слышал её от своего отца, а тот от своего и так дальше..."

Марк Твен."Принц и нищий"

Предисловие

Эти лекции посвящены разделу математики, но прочитаны и написаны физиком и для физиков. Основные понятия и аппарат теории групп Ли, известные в математике уже более столетия, в последние четверть века сыграли большую роль в развитии передового раздела современной теоретической физики - теории квантовых полей. Вследствие этого формализм теории непрерывных групп к настоящему времени превратился в повседневный рабочий инструмент физика-теоретика, работающего в области теории частиц.

Несмотря на обилие учебной литературы по группам Ли́, в том числе написанной специально для физиков, следует констатировать отсутствие простого вводного курса в предмет, адресованного студенту - начинающему теоретику, в учебном плане которого теория непрерывных групп обычно отсутствует. В этих условиях приходится читать таким студентам короткие вспомогательные циклы лекций, что обычно делается также физиками-теоретиками. Предлагаемый учебный курс возник на основе подобного курса лекций, неоднократно читанного автором студентам математико-физического факультета Университета имени Яна Амоса Коменского в Братиславе. Окончательный вариант был прочитан в качестве лекций для молодых учёных ОИЯИ в I986 году.

В лекциях излагается вводный курс по группам Ли. Приводятся определения и теоремы, которые часто используются в теории квантовых полей. Изложение не претендует на математическую строгость, а доказательства носят иллюстративный характер.

Автор искренне признательна В.И. Огиевецкому, С.Б. Герасимову, М. Петрашу, В. Пажме за полезные обсуждения, а также Д.В. Ширкову за прочтение рукописи и многочисленные замечания и советы. Автор также благодарна В.А. Мещерякову за поддержку в работе. Помощь в подготовке лекций оказал Б.Н. Валуев.

Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРУПП

§ I. Определение группы

Множество G элементов g_i называется группой, если выполняются следующие условия (групповые аксиомы):

I) Задан закон композиции^x), который каждой паре элементов g_1 и g_2 из G ставит в соответствие третий элемент g_3 того же множества:

$$g_1 \circ g_2 = g_3 \in G . \qquad (I.I)$$

2) Закон композиции обладает ассоциативностью: для любых трех элементов g_1, g_2, g_3 из G выполняется соотношение

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3 . \qquad (I.2)$$

3) В G существует единица, т.е. такой элемент e, что

$$e \circ g = g \circ e = g \qquad (I.3)$$

для любого элемента $g \in G$.

4) Для всякого элемента $g \in G$ существует обратный элемент $g^{-1} \in G$, т.е. такой элемент, что

$$g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e . \qquad (I.4)$$

---

x) В общем случае можно ввести определения так называемого <u>закона внутренней</u> композиции на множестве $\mathcal{M}$ и <u>закона внешней композиции</u> на $\mathcal{M}$.

Определение I

Закон внутренней композиции на $\mathcal{M}$ есть преобразование

$$f: \ \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M} .$$

Определение 2

Закон внешней композиции на $\mathcal{M}$ есть преобразование

$$f: \ \mathcal{M} \times \mathbb{C} \ (\text{или } \ \mathbb{R}) \to \mathcal{M} .$$

Замечание

Аксиомы (I.3) и (I.4) в определении группы можно заменить более слабыми. Достаточно требовать существования левой единицы и левого обратного элемента группы. Можно легко показать, что левая единица e является также и правой единицей, а левый обратный элемент g^{-1} к элементу $g \in G$ является также и правым обратным элементом^x).

Отметим, что композиция в группе не обязательно коммутативна. Если же она коммутативна, т.е. если

$$g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$$

для любых элементов g_1, $g_2 \in G$, то группа называется <u>абелевой</u>. В противном случае группа называется <u>неабелевой</u>.

Группа G называется <u>конечной</u>, если она содержит конечное число элементов. В противном случае группа G называется <u>бесконечной</u>. Число элементов конечной группы называется <u>порядком группы</u>.

Замечания

I) Если число элементов в группе G бесконечно, но счетно, то группу называют <u>бесконечной дискретной группой</u>.

2) Пусть $a \in G$, причем группа G конечна. Тогда наименьшее положительное число n, для которого $a^n = e$, называется <u>порядком элемента</u> a группы G. Если a - элемент порядка n, то a^{n-k}, $k = 1, \dots, n$ представляют разные элементы группы G. Следует отметить, что если $a^k = a^s$, то $a^{k-s} = e$, а поскольку $k - s < n$, получается противоречие с предположением, что n – порядок.

3) Элементы группы G являются <u>независимыми</u>, если ни один из них не может быть выражен через другие. Если существует множество независимых элементов, так что любой элемент $g \in G$ может быть выражен через элементы этого множества, то последнее называют множеством независимых <u>генераторов</u> группы G. Число этих генераторов называется <u>рангом</u> группы.

---

x) <u>Доказательство</u>

I) Пусть e_L и e_P – левая и правая единицы группы G, тогда $e_L \circ e_P = e_P$ и $e_L \circ e_P = e_L$; отсюда следует, что $e_L = e_P$.

2) Пусть g' и g'' – левый и правый обратные элементы группы G, тогда $g' \circ g = e \Rightarrow g' \circ (g \circ g'') = (g' \circ g) \circ g'' = e \circ g'' = g''$ и $g \circ g'' = e \Rightarrow (g' \circ g) \circ g'' = g' \circ (g \circ g'') = g' \circ e = g'$, отсюда следует $g' = g''$, что и требовалось доказать.

В таблице I показано, в каком случае множество $\mathcal{M}$ при заданном законе композиции является группоидом, полугруппой, группой и абелевой группой.

Таблица I. Множество $\mathcal{M}$ с заданным одним внутренним законом композиции

Группоид	Закон композиции:	I) $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{M}, \exists g_3 \in \mathcal{M}$ $g_1 \circ g_2 = g_3$
Полугруппа	Ассоциативный закон:	I)+ 2) $\forall g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{M}$ $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$
Группа	Ассоциативный закон композиции + существование единичного элемента и обратного элемента:	I) + 2)+ 3) $\exists e \in \mathcal{M}$, $g \circ e = e \circ g = g$ для $\forall g \in \mathcal{M}$ 4) $\exists g^{-1} \in \mathcal{M}$, $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ для $\forall g \in \mathcal{M}$
Абелева группа	Групповые свойства + коммутативный закон композиции:	I)+2)+3)+4)+ 5) $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{M}$ $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$

Здесь используется ряд принятых в математической литературе сокращений - кванторов: $\forall$ ≡ "для любых", $\in$ ≡ "принадлежит", $\exists$ ≡ "существует".

Примеры

I. Полугруппы

I) Множество целых положительных чисел относительно операции сложения (или умножения) в качестве композиции;

2) множество особенных матриц относительно операции умножения матриц (композиция).

II. Тривиальная группа

Это группа G, состоящая только из единичного элемента.

III. Бесконечные абелевы группы

I) Множество целых чисел относительно операции сложения.

2) Множество действительных чисел относительно операции умножения $(R \setminus \{0\})$.

3) Все трансляции на прямой евклидова пространства, E_1.

IV. Бесконечная неабелева группа

Группа вращений в трехмерном пространстве. Любой элемент группы вращений определен параметрами φ_1, ϑ, φ_2;
$\varphi_i \in \langle 0, 2\pi)$, $i = 1,2$; $\vartheta \in \langle 0, \pi)$.

V. Конечная группа n - го порядка

$G \equiv \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$; композиция определяется следующим образом: $a^k \circ a^l = a^{k+l}$, и, кроме того, $a^n = e$.

Замечания

I. Группа, элементы которой состоят из степеней $a^0 = e$, a, a^2, a^3, ... одного элемента a, называется <u>циклической группой</u>.

2. В случае конечных групп групповая структура может быть описана таблицей умножения. Так, для группы порядка 2, $G \equiv \{e, a\}$, мы получим

	e	a
e	e	a
a	a	e

или, более просто,

e	a
a	e

т.е. $a^2 = e$.

Эта группа циклична.

Группа порядка 3 есть C_3, так как таблица умножения может иметь только следующий вид:

e	a	b
a	b	e
b	e	a

, так что $b = a^2$, $a^3 = e$ и $C_3 = \{e, a, a^2\}$.

Итак, постепенно, при помощи таблицы умножения, можем построить все возможные группы данного порядка. Групп 4-го порядка всего две. (Проверьте!) Это циклическая группа C_4 и так называемая "группа призмы" D_2.

C_4:

e	a	b	c
a	b	c	e
b	c	e	a
c	e	a	b

$C_4 \equiv \{e, a, a^2, a^3\}$

ранг группы C_4 равен I, так как она имеет один генератор.

D_2:

e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

$D_2 \equiv \{a, b, b, ab\}$

закон композиции следующий:
$a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$, и $ab = ba$.
Группа D_2 имеет ранг 2, так как имеет два генератора a и b.

Группа C_4 может быть реализована последовательными вращениями на угол $\pi/2$.

Группа D_2 соответствует симметриям по отношению к осям, образующим друг с другом угол $\pi/2$, подобно осям O_x и O_y. Если $\vec{x}$ имеет компоненты (x,y), то группу D_2 получим, полагая $e\vec{x}=\vec{x}$, $a\vec{x}=(-x,y)$, $b\vec{x}=(x,-y)$, $c\vec{x}=-\vec{x}$.

Замечание

Группы C_4 и D_2 являются абелевыми.

УI. Наименьшей неабелевой группой является группа перестановок трех объектов. Для того, чтобы её компактно описать, введем символ

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$, обозначающий перестановку объекта I в положение i , 2 в положение j и 3 – в положение k .

Из определения, в частности, следует, что символы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ k & j & i \end{pmatrix}$$

обозначают одну и ту же перестановку. Групповая композиция определена естественным образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ l & m & n \end{pmatrix}.$$

Ясно, что композиция ассоциативна. Единицей является элемент $e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; обратным элементом к $a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ является элемент $a^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, и т.д.

В общем случае перестановку можно записать в следующем виде:

$$P=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Закон умножения перестановок P и Q имеет вид

$$P\circ Q=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix},$$

единица $E=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, элемент, обратный к элементу P :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \text{так что} \quad P\circ P^{-1}=P^{-1}\circ P=E.$$

§ 2. Отображения групп

Приведем примеры конкретных групп, которые можно понимать в качестве разных реализаций одной и той же группы.

I. Группа второго порядка $G=\{0,1\}$ относительно операции сложения по модулю 2:

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+1=0, \quad 1+0=1 .$$

2. Группа перестановок двух объектов

$$e=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad a=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

3. $G\equiv\{+1,-1\}$ относительно операции произведения чисел.

4. $G\equiv\{e,a\}$, где e – тождественное преобразование, a – вращение на угол π вокруг произвольной оси в плоскости E_2 .

Структуру всех этих групп можно записать при помощи одной и той же групповой таблицы

$$\begin{array}{c|c} e & a \\ e & a \end{array} \equiv G .$$

Поэтому они являются реализацией одной и той же "абстрактной" группы. Говорят, что группы в показанных выше примерах взаимно изоморфны. Следует различать:

а) взаимное отображение групп G и G' ;
б) отображение внутри одной и той же группы G .

Мы рассмотрим оба этих случая.

А. Взаимное отображение групп G и G'

I. Если отображение f : $G \longleftrightarrow G'$ взаимно однозначное и сохраняет групповую операцию, т.е. из $G\ni g_1 \leftrightarrow g_1'\in G'$ и $G\ni g_2 \longleftrightarrow g_2'\in G'$ следует $g_1\circ g_2 \longleftrightarrow g_1'\circ g_2'$,то f является <u>изоморфизмом</u>, и группы G и G' <u>взаимно изоморфны.</u>

Символически изоморфизм между группами G и G' обозначаем символом $G\approx G'$.

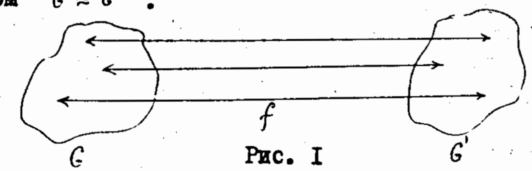

Рис. I

II. Если отображение $f\ :\ G \to G'$ многозначное (т.е. обязано быть однозначным лишь в одну сторону) и сохраняет групповую операцию, то f является **гомоморфизмом**, и группы G и G' – гомоморфны, что записывается в виде $G \simeq G'$.

Замечание

Все элементы группы G, которые отображаются на единичный элемент $e' \in G'$, образуют ядро гомоморфизма $C \equiv Kern\, f$.

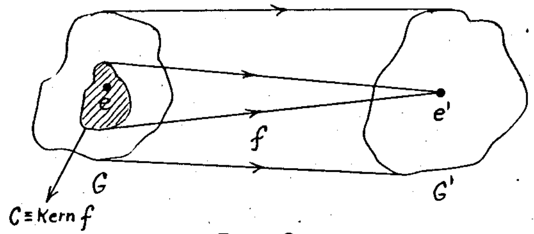

Рис. 2

Б. Отображение внутри одной и той же группы G:

I) Если отображение $f: G \leftrightarrow G$ изоморфно и сохраняет групповую операцию, то f называется **автоморфизмом**.

II) Если отображение $f\ :\ G \to G$ гомоморфно и сохраняет групповую операцию, то f именуется **эндоморфизмом**.

Примеры

1. Рассмотрим группу G с элементами $G \equiv \{1, i, -1, -i\}$, причем закон композиции есть обычное умножение, и группу G' с элементами $G' \equiv \{I, i\sigma_2, -I, -i\sigma_2\}$, где I и σ_2 представляют матрицы 2 x 2 :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

а закон композиции есть матричное умножение. Видно, что группы G и G' изоморфны друг к другу. Изоморфизм f определяется следующим образом:

$$G \leftrightarrow G': \qquad G \ni 1 \longleftrightarrow f(1) = I \in G'$$

$$G \ni i \longleftrightarrow f(i) = i\sigma_2 \in G',$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть группа A является множеством элементов

$a \equiv \{$действительные числа$\}$ с законом композиции – сложением, и группа B – множество элементов $b \equiv \{$положительные действительные числа$\}$. В группе B законом композиции будет умножение. Видно, что группы A и B изоморфны.
Изоморфизм можно определить следующим способом:

$$A \leftrightarrow B, \quad A \ni a \leftrightarrow f(a) = e^a = b(a) \in B.$$

3. Рассмотрим группу G с элементами, которыми являются неособенные матрицы размера $n \times n$ над полем R[x] $G \equiv \{\|\cdot\| \equiv n \times n$ матрицы$\}$. Композиция – матричное умножение. В качестве группы B рассмотрим группу с элементами $b \equiv \{$действительные числа$\}$, в которой композиция – умножение.

Группы G и B являются гомоморфными. Гомоморфизм $f\ :\ G \to B$ определим следующим образом:

$$G \ni \|\cdot\| \to f(\|\cdot\|) = \det\|\cdot\| \in B.$$

Отметим, что в данном случае ядром гомоморфизма группы G является множество матриц с $\det\|\cdot\| = 1$.

§ 3. Подгруппы

Определение

Подмножество H группы G является подгруппой, если все элементы множества H сами по себе образуют группу относительно того же закона композиции, который используется в G. Все нетривиальные подгруппы группы G (т.е. отличные от самой G и её единичного элемента) называются <u>собственными подгруппами</u>. Далее нам потребуется очень важный класс подгрупп – <u>инвариантные подгруппы</u> (называемые также нормальным делителем).

---

x) Определение поля

Пусть на множестве $\mathcal{M}$ определены два внутренних закона композиции. Первый обозначим „+" и второй – „∘". Если множество относительно композиции „+" является абелевой группой и относительно композиции „∘" есть тоже абелева группа и, более того, относительно „∘" определены два дистрибутивных закона, т.е. $(a+b)\circ c = a\circ c + b\circ c$ и $c\circ(a+b) = c\circ a + c\circ b$ для $\forall a,b,c \in \mathcal{M}$, то $\mathcal{M}$ называется <u>полем</u>.

Примеры: 1) C – поле комплексных чисел.

2) R – поле действительных чисел.

Определение

Подгруппа H является инвариантной подгруппой группы G, если для $\forall x \in G$ выполняется условие $x^{-1} H x = H$, т.е. если для $\forall h \in H$ имеет место $x^{-1} h x \in H$. (Инвариантную подгруппу группы G будем ниже обозначать N).

Замечания

I. Непосредственным следствием определения инвариантной подгруппы является тот факт, что все подгруппы абелевой группы G являются инвариантными подгруппами.

2. Хотя подгруппа подгруппы всегда есть подгруппа группы, инвариантная подгруппа инвариантной подгруппы, вообще говоря, не является инвариантной подгруппой группы.

Примеры

I. Пусть $\mathcal{P}$ есть группа Пуанкаре, представляющая реальные линейные преобразования в пространстве Минковского

$$x_\alpha \to x'_\alpha = a_\alpha + \Lambda_{\alpha\beta} x_\beta . \qquad (I.5)$$

Преобразование (I.5), представляющее трансляцию и вращение соответственно, обозначим символически $\{a, \Lambda\}$. Тогда закон группы композиции записывается в виде

$$\{a_2, \Lambda_2\}\{a_1, \Lambda_1\} = \{a_2 + \Lambda_2 a_1, \Lambda_2 \Lambda_1\} \qquad (I.6)$$

и для него имеет место ассоциативность, а также $E = (0, I)$, и $\{a, \Lambda\}^{-1} = \{-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1}\}$ есть обратный элемент к $\{a, \Lambda\}$.

Покажем теперь, что трансляции

$$x_\alpha \to x'_\alpha = a_\alpha + x_\alpha , \qquad (I.7)$$

которые мы обозначим $\{a, I\}$, образуют инвариантную подгруппу группы Пуанкаре $\mathcal{P}$. В самом деле, пусть $\{b, \Lambda\}$ есть произвольный элемент, принадлежащий группе $\mathcal{P}$, тогда

$$\{b, \Lambda\}\{a, I\}\{b, \Lambda\}^{-1} = \{b + \Lambda a, \Lambda\}\{-\Lambda^{-1} b, \Lambda^{-1}\} =$$

$$= \{b + \Lambda a - \Lambda \Lambda^{-1} b, \Lambda \Lambda^{-1}\} = \{\Lambda a, I\}.$$

Из последнего видно, что преобразование $\{b, \Lambda\}\{a, I\}\{b, \Lambda\}^{-1}$ тоже есть трансляция, что и требовалось доказать.

2. В качестве второго примера докажем следующую теорему.

Теорема

Ядро гомоморфного отображения G на G' есть инвариантная подгруппа группы G.

Доказательство

I) $C \equiv \mathrm{Kern} f$ есть группа, так как для любых $c_i, c_j \in C$ из $c_i \xrightarrow{f} e'$, $c_j \xrightarrow{f} e'$ вытекает $c_i c_j \to e'$ вследствие сохранения групповой композиции. Единичный элемент группы G также должен отобразиться на e', так, что $e \in C$. Действительно, если бы элемент e отображался на $x' \neq e'$, то $c_i = c_i e$ отображался бы на $x' e' = x'$ и $c_i \notin C$.

Таким же образом можно доказать существование обратного элемента.

2) $C \equiv \mathrm{Kern} f$ есть инвариантная подгруппа группы G, поскольку для любого элемента $x \in G$, который отображается на $x' \in G'$

$$G \ni x \xrightarrow{f} x' \in G',$$

имеет место отображение

$$x^{-1} C x \xrightarrow{f} (x')^{-1} e' (x') = e' ,$$

так что

$$x^{-1} C x = C , \qquad \text{для } \forall x \in G \text{ и т.д.}$$

Определение

Группа G, не имеющая собственных инвариантных подгрупп, называется <u>простой</u>. Группа G – <u>полупростая</u>, если она не имеет нетривиальных абелевых инвариантных подгрупп.

§ 4. Разложение группы на подмножества

Разложим группу G на подмножества, из которых никакие два не имеют общих элементов, при помощи её собственной подгруппы H. Для этого мы рассмотрим подмножество $H g_i$ группы G, причем H обозначает все элементы подгруппы H, и g_i есть фиксированный элемент группы G. Это подмножество называется <u>правым смежным классом</u> разложения H в G. Аналогично $g_i H$ является <u>левым смежным классом</u> разложения H в G.

Замечание

Два правых (левых) смежных класса разложения H в G либо совпадают, либо не имеют ни одного общего элемента.

Теорема

Если H есть собственная подгруппа конечной группы G, то существует множество элементов $g_1, g_2, \dots g_n \in G$, такое, что

1) $G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup \dots \cup Hg_n$, где $g_1 \equiv e$; (I.8)

2) любая пара правых (левых) смежных классов не имеет общих элементов и каждый из них содержит одинаковое число элементов h, которое равняется порядку подгруппы H.

Доказательство

I. Пусть H есть собственная подгруппа группы G ($H \neq G$, $H \neq e$). Возьмем элемент g_2 x) $\in G$ и $g_2 \notin H$. Все элементы правого смежного класса Hg_2 отличны друг от друга и ни один из них не содержится в H. Если $H = h_1 \cup h_2 \cup \dots \cup h_n$, то, предполагая, что $h_i g_2 = h_j g_2$ $(i \neq j)$, мы имели бы $h_i = h_j$. С другой стороны, если $h_i g_2 = h_j$, то получим $g_2 = h_i^{-1} h_j \in H$, что противоречит допущению (т.е. $g_2 \in G$ и $g_2 \notin H$).

2. Если H и Hg_2 не исчерпывают группу G, добавим Hg_3, где $g_3 \in G$ и $g_3 \notin H$, Hg_2, и так далее до тех пор, пока не будет исчерпана вся группа G и т.д.

Замечание

Число разных правых (левых) смежных классов называется <u>индексом</u> подгруппы H в группе G.

Теорема Лагранжа

Порядок r конечной группы G равен произведению порядка h подгруппы H группы G и индексу n подгруппы H группы G, т.е. $r = h.n$, где n – положительное целое число. Непосредственные следствия теоремы Лагранжа:

I) порядок любого элемента группы G есть множитель порядка группы G;

2) группа, порядок которой есть простое число, обязательно циклична;

3) все подгруппы циклической группы обязательно цикличны.

Теперь определим специальную группу, которая называется <u>фактор-группой</u> и которая используется в физике элементарных частиц (например, в алгебраических реализациях киральных групп и т.д.).

---

x) Напомним, что $g_1 = e$ (соотношение (I.8)).

Теорема

Пусть N – инвариантная подгруппа группы G. Рассмотрим разложение конечной группы G в смежные классы

$$G = N \cup Ng_2 \cup \dots \cup Ng_n, \quad (g_1 \equiv e), \tag{I.9}$$

где $r = h.n$. В этом случае n правых и левых смежных классов совпадают и множество правых (или левых) смежных классов Ng_i $(= g_i N)$, i = I,2, ... , образует группу. Она называется "<u>факторной группой</u> группы G по подгруппе N ". Фактор-группа обозначается символом G/N и имеет порядок $n = r/h$.

Доказательство

Поскольку N есть инвариантная подгруппа, получим

$$Ng_i = g_i N.$$

Отсюда по правилу умножения смежных классов имеем

$$(Ng_i) \circ (Ng_j) = NNg_i \circ g_j = Ng_k,$$

где $g_k = g_i \circ g_j$.

Заметим, что g_k не обязательно совпадает с одним из g_j, находящимся в разложении группы G. Однако смежный класс Ng_k должен совпадать с одним из смежных классов подгруппы N, поскольку g_k обязательно содержится в одном из n смежных классов. Тогда, если он содержится в m-м смежном классе, получаем $Ng_k = Ng_m$. Этим установлена внутренняя композиция (аксиома замыкания).

Ассоциативность следует из равенства

$$(Ng_i \circ Ng_j) \circ Ng_l = Ng_i \circ g_j \circ Ng_l = N(g_i \circ g_j) \circ g_l =$$

$$= Ng_i \circ (g_j \circ g_l) \equiv Ng_i \circ Ng_j \circ g_l = Ng_i \circ (Ng_j \circ Ng_l).$$

Единичный элемент есть N.

Обратный элемент к Ng_j есть Ng_j^{-1} и т.д.

Замечание

Данное определение фактор-группы сохраняет силу и в случае бесконечных групп.

Пример

Пусть G есть группа кватернионов. Эту группу обычно обозначают символом Q. Она имеет порядок 8 и её элементы суть

$$Q \equiv \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\} .$$

Таблица умножения имеет следующий вид:

	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
	i	-i	-1	1	k	-k	j	-j
	-i	i	1	-1	-k	k	-j	j
Q:	j	-j	-k	k	-1	-1	i	-i
	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Алгебраические соотношения между генераторами равны

$$(i)^2 = (j)^2 = (ij)^2 , \qquad (ij) = k .$$

Инвариантной подгруппой группы Q является, например, группа $N = \{-1, 1\}$. Тогда можно построить фактор-группу Q/N:

$$Q = N \cup Ni \cup Nj \cup Nk .$$

Построим таблицу умножения фактор-группы Q/N:

	Ni	Nj	Nk
Ni	N	Nk	Nj
Nj	Nk	N	Ni
Nk	Nj	Ni	N

§ 5. Прямое произведение

Самый простой способ, предоставляющий возможность построения большей группы из двух данных групп, состоит в образовании их прямого произведения.

Определение

Прямое произведение $G \otimes G'$ групп G и G' есть группа, элементами которой являются упорядоченные пары (x, x') с законом композиции

$$(x, x') \circ (y, y') = (x \circ y,\ x' \circ y') ,$$

где $x, y \in G$ и $x', y' \in G'$.

Утверждение

Множество $\Gamma = G \otimes G'$ действительно удовлетворяет всем аксиомам группы. Покажите, что:

1) единичным элементом является пара (e, e');
2) обратный элемент к (x, x') есть пара (x^{-1}, x'^{-1});
3) закон композиции будет ассоциативным.

Замечания

1. Если n и n' – порядок G и G' групп соответственно, то порядок группы $G \otimes G'$ есть $n \circ n'$.
2. Единичным элементом группы $G \otimes G'$ является пара (e, e').
3. Множество элементов (e, g'), где $g' \in G'$, есть инвариантная подгруппа группы $G \otimes G'$, которая изоморфна группе G', т.е. $g' \leftrightarrow (e, g')$ есть взаимно однозначное отображение, сохраняющее закон композиции. Следует отметить, что любой элемент группы $G \otimes G'$ можно записать в следующем виде: $(g, e')(e, g')$, и пересечение множества элементов $\{(g, e')\}$ с множеством элементов $\{(e, g')\}$ равно единичному элементу (e, e'), т.е.

$$\{(g, e')\} \cap \{(e, g')\} = (e, e') .$$

Третье замечание позволяет показать, когда можно группу G записать в виде прямого произведения своих подгрупп.

Теорема

Группа G изоморфна прямому произведению двух своих подгрупп N_1 и N_2, если N_1 и N_2 являются инвариантными подгруппами G, для которых

$$N_1 \cap N_2 = e \qquad \text{и} \qquad N_1 \circ N_2 = G .$$

Примеры

1. Рассмотрим группу $\mathcal{D}_2$: для генераторов которой выполняется соотношение $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$.

	a	b	c (=ab)
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

Инвариантными подгруппами группы $\mathcal{D}_2$ являются две циклические подгруппы $N_1 \equiv \{e, a\}$ и $N_2 \equiv \{e, b\}$. Поскольку $N_1 \cap N_2 = e$ и $N_1 \circ N_2 = \mathcal{D}_2$, то

$$\mathcal{D}_2 = N_1 \otimes N_2 \quad (\equiv C_2 \otimes C_2).$$

2. В качестве второго примера рассмотрим группу $G \equiv U(n)$, т.е. группу всех унитарных матриц размера $n \times n$, закон композиции которой есть матричное умножение. Группа $U(n)$ имеет две инвариантные подгруппы:

а) $N_1 = SU(n)$, где $SU(n)$ есть специальная унитарная группа матриц размера $n \times n$ с $\det \| \cdot \| = 1$;

б) $N = U(1)$, где $U(1)$ есть группа всех унитарных матриц вида $e^{i\phi} I$, где $0 \le \phi \le 2\pi$, и I – единичная матрица. Мы видим, что $N_1 \cap N_2 = e \equiv I$ и $N_1 \circ N_2 = U(n)$.
Тогда $U(n) = SU(n) \otimes U(1)$.

Если теперь G и G' – группы матриц, то их прямым произведением является группа матриц, элементы которой получаются прямым произведением всех матриц группы G и группы G'. Например, прямое произведение матриц 2-го порядка $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ определено следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} & a_{11}\cdot b_{12} & a_{12}\cdot b_{11} & a_{12}\cdot b_{12} \\ a_{11}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{22} & a_{12}\cdot b_{21} & a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} & a_{21}\cdot b_{12} & a_{22}\cdot b_{11} & a_{22}\cdot b_{12} \\ a_{21}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{22} & a_{22}\cdot b_{21} & a_{22}\cdot b_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\{A_i\}, \{B_j\}$, $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, m$ есть множества матриц размера $n \times n$, тогда дадим следующее

Определение

1) Прямое (внутреннее) произведение матриц $\{\mathbb{A}_i\}$ и $\{\mathbb{B}_j\}$ есть множество

$$\{\mathbb{A}_i\} \otimes \{\mathbb{B}_j\} = \{\mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{A}_k \otimes \mathbb{B}_k\}, \quad \text{если} \quad k = m.$$

2) Прямое (внешнее) произведение матриц $\{\mathbb{A}_i\}$ и $\{\mathbb{B}_j\}$ есть множество

$$\{\mathbb{A}_i\} \otimes \{\mathbb{B}_j\} = \{\mathbb{A}_i \otimes \mathbb{B}_j\}, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Свойства прямого произведения матриц.

1) Оно не является коммутативным, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

2) $(\mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_2) \circ (\mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2) = (\mathbb{A}_1 \circ \mathbb{B}_1) \otimes (\mathbb{A}_2 \circ \mathbb{B}_2)$,

где „$\circ$" – обычное матричное умножение.

Результат этих определений есть

а) $\det(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) = \det(\mathbb{A} \circ \mathbb{B})^n$, если $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ – матрицы размерности $n \times n$;

б) $\mathrm{Sp}(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) = \mathrm{Sp}\,\mathbb{A} \cdot \mathrm{Sp}\,\mathbb{B}$, поскольку

$$\mathrm{Sp}(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) = \mathrm{Sp} \begin{pmatrix} a_{11}\mathbb{B} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}\mathbb{B} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn}\mathbb{B} \end{pmatrix}.$$

§ 6. Топологические группы

В настоящем параграфе введем некоторые понятия, которые нам понадобятся в дальнейшем. Рассмотрим случай бесконечных групп, для элементов которых заданы геометрические свойства, такие, как близость двух точек, свойства в окрестности точек, компактность и т.д. Можно сказать, что множество элементов группы G наделено топологией. Определим прежде всего топологическое пространство.

Определение

Пусть $\mathcal{M}$ — любое множество элементов, в котором выделена система подмножеств $\{U_i\}$, называемых окрестностями[x)] точки $x \in \mathcal{M}$ и удовлетворяющих следующим аксиомам:

1) Пустое множество ϕ и само множество $\mathcal{M}$ входят в систему $\{U_i\}$, т.е. тоже являются окрестностями, и любая точка $x \in \phi, \mathcal{M}$ принадлежит некоторой окрестности U_i.

2) Всякое подмножество, содержащее окрестность U_i точки x, тоже является окрестностью этой точки.

3) Пересечение конечного числа окрестностей точки x есть также окрестность этой точки, т.е.

$$\bigcap_{l=1}^{m} U_l \in \{U_i\}.$$

4) Объединение любого числа окрестностей точки x также является окрестностью точки x:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \in \{U_i\}.$$

Любая такая система, удовлетворяющая аксиомам 1 -4, называется топологией множества $\mathcal{M}$. Множество $\mathcal{M}$ вместе со своей топологией $\{U_i\}$ образует топологическое пространство $T \equiv (\mathcal{M}, \{U_i\})$. Элементы $x \in \mathcal{M}$ называются точками пространства T.

Говорят, что топологическое пространство компактно, если каждая последовательность точек этого пространства содержит последовательность, сходящуюся к некоторой точке этого пространства, т.е. каждое бесконечное множество точек, принадлежащее топологическому пространству, имеет предельную точку. Кроме этого $\mathcal{M}$ может обладать также свойствами группы.

Определение

Множество $\mathcal{M}$ называется топологической группой, если является группой и топологическим пространством и если закон групповой композиции является непрерывным.

Тогда любым двум элементам множества $\mathcal{M}$ может быть поставлен

---

x) Окрестностью U_i точки x топологического пространства T называется всякое открытое[xx)] множество, содержащее x.

xx) Множество $\mathcal{M}$ открыто тогда и только тогда, когда каждая точка $x \in \mathcal{M}$ имеет окрестность U_i.

в соответствие третий элемент, являющийся их произведением. Таким образом, с любыми двумя точками $x, y \in \mathcal{M}$ мы связываем некоторую точку $z = f(x,y)$. Если фиксировать точку x, то каждой точке y будет соответствовать точка $\tilde{z} = f_x(y)$. Каждой точке y также соответствует точка $g(\tilde{z}) = y^{-1}$, являющаяся её обращением. Если теперь отображения f и g множества $\mathcal{M}$ на себя, индуцируемые групповыми операциями, являются непрерывными, то множество и образует топологическую группу.

Пример

Пусть G есть множество вещественных чисел и закон композиции - сложение. Если мы введем топологию таким образом, что множество точек x_i удовлетворяет условию $|x_i - x_j| < \varepsilon$, где ε - некоторое положительное число, тогда преобразования $f(x_i,x_j) = x_i + x_j$ и $g(x_i) = -x_i$ являются непрерывными и группа G есть топологическая группа.

Определение

Если G — компактное пространство, то группа G называется компактной.

Более подробно топологическими пространствами мы заниматься не будем, покажем лишь, каким способом относительно определенных условий можно найти соотношение между элементами группы и точками, определенными значениями параметров в топологическом пространстве. К простейшему виду топологических групп относятся те, которые локально обладают свойствами E_n, n-мерного евклидова пространства, так что окрестность точки может быть непрерывно и взаимно однозначно отображена в окрестность точки пространства E_n. Такое топологическое пространство носит название n -мерного многообразия.

Рассмотрим группу G, элементы $g(a)$ которой в определенной окрестности являются непрерывными функциями n -параметров $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Пусть $g(a) \cdot g(b) = g(c)$, где a, b, c — значения наборов соответствующих параметров. Тогда c является непрерывной функцией параметров a и b. Рассматриваемая группа G — n- параметрическая группа, а точки топологического пространства можно отождествить с элементами группы. Если c является аналитической функцией параметров a и b, то группа G называется группой Ли.

Определение

Группа Ли есть топологическая группа, пространство элементов которой является аналитическим многообразием. Для практических вычислений нам понадобится следующая теорема.

Теорема

n – параметрическая группа является компактной, если область изменения всех её параметров ограничена[x)] и замкнута[xx)].

. Замечание

Если рассматриваемая нами группа есть группа матриц, то она будет компактной при условии, что область изменения её элементов ограничена и замкнута.

Примеры

I) Рассмотрим группу трансляций одномерного пространства $x' = x + a$,где $x \in (-\infty, \infty)$, $a \in (-\infty, \infty)$. Введем обозначение

$$x' = x + a \equiv Tx .$$

Тогда $T_a T_b = T_{a+b}$; $(T_a T_b) T_c = T_a (T_b T_c)$, $I = T_a T_a^{-1}$, причем $T_a^{-1} = T_{-a}$ и $I = T_a T_{-a} = T_{a-a} = T_0$. Таким образом, свойства операторов T_a установлены. С другой стороны, мы можем изобразить каждое преобразование T_a как геометрическую точку на прямой. При этом преобразование T_a будет изображаться точкой, имеющей координату a по отношению к началу координат. Начало координат будет изображать единичный элемент T_0 . Если $T_a T_b = T_c$, то функция, осуществляющая отображение $c = f(a,b) = a + b$, будет непрерывной функцией от a и b. Поскольку область изменения параметра a неограничена, группа не является компактной.

2) Группа одномерных вращений в двумерном пространстве

$$x_1' = x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi ,$$

$$x_2' = x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi ,$$

где $x_1 \in (-\infty, \infty)$, $x_2 \in (-\infty, \infty)$,

есть группа,характеризующаяся одним параметром φ . Матричная запись $x' = T_\varphi x$ будет

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ,$$

где матрица T_φ является элементом группы вращений, так что

x) Множество на евклидовой плоскости или в евклидовом пространстве называется ограниченным, если ограничено множество декартовых координат всех его точек.

xx) Множество является замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

$$T_\varphi T_{\varphi'} = T_{\varphi+\varphi'} , \qquad I = T_0 , \qquad T_\varphi^{-1} = T_{-\varphi} .$$

В этом случае точки φ и $\varphi + 2\pi n$ (n – целое число) должны быть отождествлены, так как

$$T_{\varphi+2\pi n} = T_\varphi .$$

Таким образом, групповое пространство является окружностью. Длина кривой конечна. Это пример компактной группы.

3) Примером некомпактной группы может служить группа Лоренца, т.е. группа вращений четырехмерного псевдоевклидова пространства, сохраняющая четырехмерный интервал $c^2t^2 - \vec{x}^2 = inv$. Группу Лоренца можно представить следующим образом. Присоединяя к преобразованиям перехода от движущейся системы к другой ещё и повороты осей трехмерного евклидового пространства, получим группу матриц 4 х 4, зависящую от шести действительных параметров. Элементы этих 4 х 4 матриц пропорциональны $ch\beta$ и $sh\beta$, где $\beta = v/c$ (v – скорость движения системы отсчета относительно исходной, c – скорость света), и,следовательно,они образуют неограниченное множество.

Компактные и некомпактные группы различаются тем, что в первом случае "объем группы" конечен, а во втором – бесконечен. Под "объёмом" V_G группы G подразумевается интеграл по всей группе (т.е. по всем значениям параметров a)

$$V_G = \int_G d\mu(g) ,$$

где $d\mu(g)$ – инвариантный объём,а $\mu(g)$–мера.

Определение

Мера $\mu(g)$ на группе G называется <u>инвариантной слева</u>, если для любого множества $A \subset G$ и любого элемента $g \in G$ имеем

$$\mu(A) = \mu(g \circ A),$$

здесь $g \circ A$ –совокупность элементов вида $g \circ a$, $a \in A$. (Говорят, что мера μ инвариантна относительно левого сдвига). Если же выполняется равенство

$$\nu(A) = \nu(A \circ g) ,$$

то мера ν на группе G называется <u>инвариантной справа</u>.

В частности, если μ –инвариантная слева на группе G , то интеграл по этой мере обладает следующим свойством инвариантности при левых сдвигах:

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int f(g_0 \circ g)\, d\mu(g).$$

Аналогично для правоинвариантной меры ν имеем

$$\int f(g)\, d\nu(g) = \int f(g \circ g_0)\, d\nu(g),$$

где $g_0 \in G$.

Теорема

На компактных группах мера, инвариантная слева, является также инвариантной и справа: $\mu(g) = \nu(g)$.

Инвариантный элемент объема группы запишем в виде

$$d\mu(g) = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \prod_{i=1}^{n} da_i ,$$

где $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ является "функцией" на группе G, которая определяется следующим образом.

Функция $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется функцией на группе, если можно написать

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \varphi(g),$$

так как задание элемента группы g определяет параметры a и, наоборот, задание параметров a определяет элемент g.

Инвариантность элемента объема $d\mu(g)$ означает по определению следующее:

$$d\mu(g \cdot g_0) = d\mu(g), \tag{I.10}$$

где g_0 – произвольная матрица из рассматриваемой нами группы G. Если a и $a^{(0)}$ -параметры матриц g и g_0, то матрица $g' = g \cdot g_0$ будет характеризоваться параметрами $a'(a, a^{(0)})$, которые являются функциями a и $a^{(0)}$. Равенство (I.10) означает, что

$$\varphi'(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) \prod_{i=1}^{n} da'_i = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \prod_{i=1}^{n} da_i ,$$

при любых $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, ..., $a_n^{(0)}$. Функцию $\varphi'(a'_i)$

можно выразить через $\varphi(a)$ и якобиан перехода от переменных a' к переменным a.

Примеры

I. Рассмотрим инвариантную меру и объем группы унимодулярных ($\det \| \cdot \| = 1$), унитарных матриц 2 x 2, т.е. группы $SU(2)$. Найдем выражение меры $d\mu(g)$ через параметры группы $SU(2)$. Рассмотрим сначала группу G, состоящую из невырожденных матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$. Её элементы задаются любыми парами (α, β) комплексных чисел. При умножении справа элемента группы G на элемент $\mu_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ -\beta_0^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ из $SU(2)$ элементы α, β преобразуются линейно:

$$(|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1), \qquad \alpha \to \alpha' = \alpha_0 \alpha - \beta_0^* \beta ,$$

$$\beta \to \beta' = \beta_0 \beta + \alpha_0^* \alpha .$$

Определитель этого преобразования равен единице.

Введем вместо параметров $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ параметры r, φ, ϑ, ψ, связанные с α и β равенствами

$$\alpha = r \cos \vartheta/2 \; e^{i(\varphi + \psi)/2} ,$$

$$\beta = i r \cos \vartheta/2 \; e^{i(\varphi - \psi)/2} .$$

При $r = 1$ матрица $\mu = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ принадлежит группе $SU(2)$, и φ, ϑ, ψ – углы Эйлера этой матрицы. Простой подсчет показывает, что

$$d\alpha\, d\alpha^*\, d\beta\, d\beta^* = \frac{1}{2} r^3 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\, d\psi .$$

Поэтому инвариантный интеграл на группе $SU(2)$ задается в углах Эйлера формулой

$$\int_{SU(2)} f(u)\, du = \frac{1}{16\pi^2} \int_{-2\pi}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} f(\varphi, \vartheta, \psi) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\psi .$$

Фактор $1/16\pi^2$ выбран так, что мера всей группы $SU(2)$, $\int d\mu(g) = 1$, значит

$$d\mu(g) = \frac{1}{16\pi^2} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\psi$$

и $\int_{SU(2)} d\mu(g) = 1$.

Группа $SU(2)$ является компактной, так как её "объём" конечен.

2. Если взять в качестве второго примера группу трехмерных вращений, то можно показать, что инвариантная мера имеет вид

$$d\mu(g) = \frac{1}{8\pi^2} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, d\gamma,$$

и, следовательно, объем группы вращений тоже конечен, т.е.

$$V_c = \int\limits_{SO(3)} d\mu(g) = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} d\gamma \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_0^{\pi} d\varphi \sin\vartheta = 1.$$

3. Рассмотрим теперь инвариантную меру и объём "чисто лоренцевских" сдвигов вдоль оси I. Они определены следующим преобразованием:

$$\Lambda(\mu) = \begin{pmatrix} ch\,u & -sh\,u & 0 & 0 \\ -sh\,u & ch\,u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v/c}{1-v/c}$ – "быстрота" и $ch\,u = \beta$, $\beta = v/c$. Параметры являются аддитивными. В силу этой аддитивности можно написать

$$g(u_1)\, g(u_2) = g(u_1 + u_2) .$$

Это свойство позволяет выбрать в качестве инвариантной меры для однопараметрической группы Лоренца дифференциал du:

$$d\mu(g) = du .$$

При $-1 \le v/c \le +1$ параметр u меняется в пределах

$$-\infty \le u \le +\infty .$$

Таким образом, объем группы Лоренца:

$$V_L = \int\limits_L d\mu(g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} du = \infty ,$$

и, следовательно, рассматриваемая группа некомпактна.

Глава II. ЛИНЕЙНЫЕ И УНИТАРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Вводя непрерывные группы, Софус Ли определил их элементы как преобразования конечномерного пространства. Позднее оказалось, что для любой группы Ли существует изоморфная ей группа преобразований векторного пространства. Поэтому, ради простоты, мы будем предполагать, что каждый элемент группы Ли есть оператор, действующий в определенном векторном пространстве. В этой главе будут введены линейные и векторные пространства и операции в них.

§ I. Линейное векторное пространство

Множество $\mathcal{M}$ элементов $\vec{\Phi}$, $\vec{\Psi}$, $\vec{\chi}$, ... называется линейным векторным пространством над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), а элементы множества $\mathcal{M}$ называются векторами, если определены два закона композиции: внутренний "+" ($\mathcal{M} + \mathcal{M} \to \mathcal{M}$), т.е. векторное сложение, и внешний "$\circ$" ($\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)$\circ \mathcal{M} \to \mathcal{M}$), т.е. умножение вектора на скаляр, и такие, что

I) $\mathcal{M}$ есть абелева группа по векторному сложению: для каждой пары элементов $\vec{\Phi}$, $\vec{\Psi} \in \mathcal{M}$ пространство $\mathcal{M}$ содержит их векторную сумму $\vec{\Phi} + \vec{\Psi}$ и

$$\begin{aligned} &\vec{\Phi} + \vec{\Psi} = \vec{\Psi} + \vec{\Phi}, \qquad \vec{\Phi} + (\vec{\Psi} + \vec{\chi}) = (\vec{\Phi} + \vec{\Psi}) + \vec{\chi}, \\ &\vec{\Phi} + \vec{0} = \vec{\Phi}, \qquad \vec{\Phi} + (-\vec{\Phi}) = \vec{0}, \end{aligned} \tag{2.I}$$

где $\vec{0}$ – нулевой вектор пространства $\mathcal{M}$, а $(-\vec{\Phi})$ – элемент, обратный к элементу $\vec{\Phi}$;

2) если $\vec{\Phi}$ – любой вектор из $\mathcal{M}$ и α – любой скаляр из $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), то $\mathcal{M}$ содержит вектор $\alpha\vec{\Phi}$, т.е. имеется замкнутость по отношению к умножению на скаляр;

3) $(\alpha\beta)\vec{\Phi} = \alpha(\beta\vec{\Phi})$ – ассоциативный закон умножения на скаляр;

4) $$\left.\begin{aligned} &\alpha(\vec{\Phi} + \vec{\Psi}) = \alpha\vec{\Phi} + \alpha\vec{\Psi} \\ &(\alpha+\beta)\vec{\Phi} = \alpha\vec{\Phi} + \beta\vec{\Phi} \end{aligned}\right\} \text{ – дистрибутивные законы;} \tag{2.2}$$

5) $1\vec{\Phi} = \vec{\Phi}$.

Заметим, что

$$0\vec{\Phi} = \vec{0}, \quad (-1)\vec{\Phi} = (-\vec{\Phi}), \quad (-\alpha)\vec{\Phi} = -(\alpha\vec{\Phi}).$$

Далее линейное векторное пространство будем обозначать символом V.

Определение

Множество векторов $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, \ldots, \vec{\Phi}_n \in V$ называется линейно независимым, если соотношение вида

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{\phi}_k = 0 \tag{2.3}$$

возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. (В противном случае векторы $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n \in V$ называются линейно зависимыми).

Размерность векторного пространства V определена числом линейно независимых векторов в пространстве. Если их число конечно, то V называется конечномерным, в противном случае – бесконечномерным.

§ 2. Унитарное пространство

Определение

Рассмотрим линейное векторное пространство V, в котором каждой паре векторов поставлено в соответствие комплексное число $(\vec{\phi}, \vec{\psi})$, обладающее свойствами:

I) $(\vec{\phi}, \vec{\psi}) = (\vec{\psi}, \vec{\phi})^*$, в частности, $(\vec{\phi}, \vec{\phi})$ вещественно;

2) $(\vec{\phi}, \vec{\psi} + \vec{\chi}) = (\vec{\phi}, \vec{\psi}) + (\vec{\phi}, \vec{\chi})$, (2.4)

3) $(\vec{\phi}, \alpha\vec{\psi}) = \alpha(\vec{\phi}, \vec{\psi})$ для любого комплексного числа α;

4) $(\vec{\phi}, \vec{\phi}) \geq 0$, причем $(\phi, \phi) = 0$ только при $\vec{\phi} = 0$.

Такое пространство V называется унитарным (или предгильбертовым) и обозначается символом H; число $(\vec{\phi}, \vec{\psi})$ именуется скалярным произведением.

Замечание

I) С помощью скалярного произведения в H можно ввести норму

$$\sqrt{(\vec{\phi}, \vec{\phi})} = \| \vec{\phi} \|, \tag{2.5}$$

после чего H становится линейным нормированным пространством.

2) Если H бесконечномерно и полно[x] по введенной норме, то оно называется гильбертовым пространством; символически обозначим его $\mathcal{H}$.

---

[x] Если в нормированном пространстве H каждая фундаментальная[xx] последовательность сходится к некоторому вектору того же пространства, то H называется полным.

[xx] Последовательность точек $\{x_n\}$ нормированного пространства H называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$, такое, что $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ при $m, n \geq N$.

Если ортонормированное множество векторов $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n \in H$, $(\vec{\phi}_i, \vec{\phi}_j) = \delta_{ij}$ полностью определяет векторное пространство, то говорят, что это множество является ортонормированным базисом пространства V. Тогда любой вектор $\vec{\psi} \in V$ можно записать в виде

$$\vec{\psi} = \sum_i a_i \vec{\phi}_i,$$

где a_i – вещественные числа, которые можно определить, умножая $\vec{\psi}$ слева на векторы ортонормированного базиса $\vec{\phi}_j$:

$$(\vec{\phi}_j, \vec{\psi}) = \sum_i a_i (\vec{\phi}_j, \vec{\phi}_i) = \sum_i a_i \delta_{ij} = a_j .$$

Основными характеристиками физической системы в квантовой механике являются наблюдаемые величины и состояния. Способ математического описания этих объектов состоит в следующем: наблюдаемым величинам соответствуют самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (которые будут определены в § 3 этой главы), состояниям – классы нормированных элементов этого пространства. Следует отметить, что, вообще говоря, не все состояния, а значит векторы $\vec{\phi} \in \mathcal{H}$, обладают конечной нормой (например, соответствующие плоским волнам). Однако нормы физических состояний всегда могут быть выбраны конечными (эти состояния описываются волновыми пакетами). Такие векторы состояний удобно нормировать на единицу.

Замечание

Пространство $\mathcal{H}$ называется пространством состояний, его нормированные элементы – векторами состояния, наблюдаемые величины часто принято называть просто наблюдаемыми.

§ 3. Операторы

Определение

Оператор L, определенный в линейном векторном пространстве V, осуществляет отображение самого на себя, т.е. если $\vec{\phi} \in V$, то

$$L\vec{\phi} = \vec{\phi}' \in V . \tag{2.6}$$

Ограничимся теперь линейными операторами. Оператор L называется линейным, если удовлетворяет условиям

I) $L(\vec{\phi} + \vec{\psi}) = L\vec{\phi} + L\vec{\psi}$,

2) $L(\alpha\vec{\phi}) = \alpha L\vec{\phi}$, (2.7)

где α – произвольное комплексное число.

Замечание

Всякий линейный оператор может быть реализован в виде матрицы, т.е. всякая группа линейных преобразований изоморфна некоторой группе матриц. Таким образом, представлениями группы (о которых речь будет идти в главе IУ) являются группы матриц, гомоморфные группе G.

Определение

Антилинейный оператор удовлетворяет условиям:

$$K\vec{\Phi} = \vec{\Phi}' \in V,$$
$$K(\vec{\Phi}+\vec{\Psi}) = K\vec{\Phi} + K\vec{\Psi},$$
$$K(\beta\vec{\Phi}) = \beta^* K\vec{\Phi}, \qquad (2.8)$$

где β – произвольное комплексное число.

Замечания

I) Существует "нулевой" оператор, т.е. такой оператор, который отображает любой вектор пространства V в нулевой вектор.

2) Если $L\vec{\Phi} = \vec{\Psi}$, то можно каждому L поставить в соответствие оператор $(-L)$, который отображает $\vec{\Phi}$ на $-\vec{\Psi}$.

3) Множество операторов, включая нулевой оператор, в котором для каждого L существует $(-L)$, образует относительно операции сложения операторов и умножения на комплексные (вещественные) числа линейное векторное пространство.

4) Произведение двух операторов определяется через два последовательных отображения в пространствах.

Определение

Линейное векторное пространство операторов, для которых имеет место дистрибутивный закон, т.е.

$$(\alpha L_1 + \beta L_2)L_3 = \alpha L_1 L_3 + \beta L_2 L_3,$$
$$L_1(\alpha L_2 + \beta L_3) = \alpha L_1 L_2 + \beta L_1 L_3, \qquad (2.9)$$

образует алгебру.

Замечание

Если произведение операторов в определении алгебры ассоциативно, то алгебра называется ассоциативной.

Ниже мы будем рассматривать так называемые неассоциативные алгебры, в которых произведение двух операторов определяется в виде коммутатора

$$L = L_1 L_2 - L_2 L_1 \equiv [L_1, L_2]. \qquad (2.10)$$

Такие алгебры называются алгебрами Ли.

Приведем определения операторов, которые понадобятся нам в дальнейшем при введении таких понятий, как представления группы G.

Определение

Эрмитово-сопряженным оператором L^+ к линейному оператору L, действующему в унитарном векторном пространстве, называется оператор, для которого имеет место соотношение

$$(\vec{\Psi}, L\vec{\Phi}) = (L^+\vec{\Psi}, \vec{\Phi}). \qquad (2.11)$$

Если $L^+ = L$, то линейный оператор L эрмитов. Если $L^+ = -L$, то линейный оператор антиэрмитов.

Замечания

I. Если имеет место $L\vec{\Psi} = c\vec{\Psi}$, где c – число, то $\vec{\Psi}$ называется собственным вектором оператора L, а константа c – собственным значением оператора L.

2. Можно показать, что собственные значения эрмитова оператора являются вещественными числами.

3. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.

Теорема

Всякий линейный оператор можно представить в виде суммы эрмитова и антиэрмитова операторов. (Докажите!)

Определение

Всякий эрмитов оператор $P \in \mathcal{H}$, удовлетворяющий соотношению $P^2 = P$, называется проекционным оператором в $\mathcal{H}$.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{U}$, отображающий все гильбертово пространство $\mathcal{H}$ на все $\mathcal{H}$ с сохранением нормы

$$\|\mathcal{U}\vec{\Phi}\| = \|\vec{\Phi}\|, \qquad (2.12)$$

называется унитарным.

Замечание

Унитарные операторы обладают свойствами:

I) $(\mathcal{U}\vec{\Phi}, \mathcal{U}\vec{\Psi}) = (\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$ (для всех $\vec{\Phi}, \vec{\Psi} \in \mathcal{H}$).

2) Существует оператор $\mathcal{U}^{-1}$, обратный к унитарному, причем

$$\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^+ \qquad (2.13)$$

(это свойство может служить определением унитарного оператора).

3) Произведение унитарных операторов есть также унитарный оператор. Унитарные операторы образуют группу.

Обратимся к основному свойству преобразований симметрии в квантовой механике. Вероятности переходов

$$w_{i\to j} = |(\vec{\psi}_j, \vec{\psi}_i)|^2$$

из состояния i в состояние j для исходных состояний и преобразованных

$$w_{i\to j} = |(\mathcal{U}\vec{\psi}_j, \mathcal{U}\vec{\psi}_i)|^2$$

должны совпадать (противное означало бы несоответствие динамик состояний $\vec{\psi}$ и $\mathcal{U}\vec{\psi}$):

$$|(\vec{\psi}_j, \vec{\psi}_i)|^2 = |(\mathcal{U}\vec{\psi}_j, \mathcal{U}\vec{\psi}_i)|^2. \tag{2.14}$$

Исключительную важность этого свойства подчеркивает следующая теорема.

Теорема Вигнера

Пусть преобразование $\mathcal{U}$ в $\mathcal{H}$ удовлетворяет соотношению (2.14). Тогда найдется унитарное или антиунитарное преобразование $\mathcal{U}_o$, такое, что

$$(\mathcal{U}_o^{-1}\mathcal{U})_{ij}\vec{\phi}_j = e^{i\delta(\phi)}\vec{\phi}_i ,$$

отсюда следует, что с точностью до постоянной фазы такое преобразование $\mathcal{U}_o$ единственно.

Теорема Вигнера утверждает, что мы не в состоянии отличить преобразования симметрии от унитарных (или антиунитарных) преобразований в $\mathcal{H}$ и поэтому можно их отождествлять. Важным преобразованием на множестве операторов и векторов является преобразование подобия, которое определим следующим образом.

Определение

Два оператора L и L' подобны (иногда их называют эквивалентными), если существует такой оператор S, что

$$L' = S L S^{-1}. \tag{2.15}$$

Оператор S, не меняющий алгебру преобразованной системы, осуществляет преобразование подобия.

Замечания

I) Если оператор S в (2.16) унитарный, то преобразование подобия называется унитарным преобразованием.

2) Все определения, которые введены в данном параграфе для операторов, верны в общем случае так называемых непрерывных операторов[x)]. При работе с операторами дискретными все определения следует тщательно проверять.

Прежде чем перейти к подробному описанию групп Ли и алгебр Ли, введем понятие инвариантного подпространства.

Определение

Подпространство $\mathcal{L}$ пространства V называется инвариантным, если

$$L(\mathcal{L}) \in \mathcal{L},$$

для всякого L, действующего в пространстве V.

x) Оператор называется вполне непрерывным, если он переводит всякое ограниченное множество в компактное.

Глава III. ГРУППЫ ЛИ и АЛГЕБРЫ ЛИ

В этой главе излагаются некоторые сведения об аппарате теории непрерывных групп. Если ограничиться рассмотрением групп линейных преобразований, то можно подразумевать под группой G группу матриц, хотя получаемые соотношения будут иметь более общую значимость.

§ I. Группы Ли

Как уже сказано, непрерывную группу с конечным числом независимых параметров обычно называют "конечномерной непрерывной группой". Число этих параметров определяет порядок группы.

Рассмотрим конечную непрерывную группу порядка n. Элемент группы будем обозначать $g(a)$, где $a=(a_1,\dots,a_n)$. Единичный элемент группы есть $g(a^0)$ (не теряя общности можно считать, что $a^0\equiv 0$).

Как уже было определено в первой главе, если имеет место соотношение

$$g(a)\circ g(b)=g(c),\qquad \begin{aligned}a&=(a_1,\dots,a_n)\\ b&=(b_1,\dots,b_n)\\ c&=(c_1,\dots,c_n),\end{aligned}\tag{3.I}$$

причем $c=\phi(a,b)$ является аналитической функцией параметров a, b и a^{-1} есть также аналитическая функция параметра a, то группа называется n - параметрической группой Ли.

Рассмотрим теперь преобразования n-мерного пространства и покажем, каким условиям эти преобразования должны удовлетворять для того, чтобы они образовали n-параметрическую группу Ли.

Пусть $x_1,x_2,\dots,x_n$ - базисные векторы пространства V. Рассмотрим два последовательных преобразования в данном пространстве:

$$x'=f(x,a)\quad\text{и}\quad x''=f(x',b).\tag{3.2}$$

С точками a и b можно связать точку c, такую, что

$$c=\phi(a,b),$$

где ϕ - аналитическая функция параметров a и b. Таким образом, получим

$$x''=f(x,c)=f(x,\phi(a,b))\tag{3.3}$$

в качестве группового закона композиции. Если обозначить преобразования

$$x'\equiv T_a x\quad\text{и}\quad x''\equiv T_b x',$$

то
$$x''=T_b T_a x,$$

где $T_bT_a=T_c\equiv T_{\phi(a,b)}$. Чтобы T_a образовали группу, для функции $\phi(a,b)$, определенной законом композиции (3.3), должны выполняться следующие условия:

I) ассоциативность

$$T_a(T_bT_c)=(T_aT_b)T_c,\qquad\text{или}$$
$$\phi[a,\phi(b,c)]=\phi[\phi(a,b),c];$$

2) существование единичного элемента

$$a=\phi(a,0)=\phi(0,a);$$

3) существование обратного элемента к элементу T_a, $T_a^{-1}=T_{a'}$, и такого, что $T_a^{-1}T_a=T_aT_a^{-1}=I$. Таким образом,

$$\phi(a^{-1},a)=\phi(a,a^{-1})=0,$$

где a^{-1} - обратный элемент к элементу a.

Если эти аксиомы выполнены, то преобразования (3.2) образуют группу.

Пример группы Ли

Рассмотрим группу преобразований

$$x'=a_1x+a_2,\qquad a_1\neq 0.$$

Элемент этой группы можно записать в виде упорядоченной пары $(a_1,a_2)\equiv T_a$. Тогда

I) единичный элемент есть $(1,0)\equiv I$,

2) обратным к (a_1,a_2) является элемент

$$(1/a_1,-a_2/a_1)\equiv T_a^{-1},$$

3) закон композиции имеет вид

$$T_b\,T_a=(b_1,b_2)(a_1,a_2)=(b_1a_1,\ b_1a_2+b_2)\equiv T_c.\tag{*}$$

Если a_1, a_2 - вещественные числа, то группа двухпараметрическая, если комплексные числа - четырехпараметрическая.

Замечания

I) Если ограничить область изменения параметров группы, то эти преобразования не обязательно образуют группу. Например, если параметр a_2 из рассмотренного примера группы Ли ограничим областью $a_2 \in (0,1)$, то, как видно из (*), умножение двух преобразований уже не будет принадлежать этой области.

2) Группы Ли G и G' являются изоморфными, если порядок и закон композиции групп G и G' совпадают и область изменения их параметров одна и та же.

§ 2. Генераторы группы Ли

Софус Ли, который изучал бесконечно малые преобразования групп Ли, показал, что знание группы Ли в окрестности единицы (т.е. элементов $g(da)$, где da – бесконечно малые значения параметров a) дает возможность восстановить всю группу (т.е. $g(a)$) для произвольных значений a.

Для этого рассмотрим преобразования, образующие группу Ли:

$$x' = f(x,a), \tag{3.4}$$

где x и x' – n-мерные векторы; a, r – характерные параметры. Если единичный элемент определяется соотношением $a = 0$, то из (3.4) вытекает, что $x = f(x,0)$. Бесконечно малое изменение вектора x получим при помощи бесконечно малого изменения параметра a, da:

$$x + dx = f(x, da).$$

Разлагая $f(x,da)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь только первой степенью da, получаем

$$dx = f(x,da) - f(x,0) = \left.\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right|_{a=0} da. \tag{3.5}$$

Если обозначить

$$u(x) = \frac{\partial f(x,0)}{\partial a}, \tag{3.6}$$

из (3.5) получим

$$dx = u(x)\,da .$$

Это уравнение есть сокращенная запись выражения

$$dx_i = \sum_{\nu=1}^{r} u_{i\nu}(x)\,da_\nu, \quad i = 1,2,\dots,n, \tag{3.7}$$

где

$$u_{i\nu} = \left.\frac{\partial f_i(x,a)}{\partial a_\nu}\right|_{a_\nu=0} = \frac{\partial f_i(x,0)}{\partial a_\nu}.$$

Бесконечно малое изменение функции $F(x)$ можно записать в виде

$$dF(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)dx = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)u(x)\,da = da\left\{u(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}F(x) .$$

Введем

$$X \equiv u(x)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial f(x,0)}{\partial a}\frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.8}$$

r-мерный векторный оператор, компоненты которого равны

$$X_\nu = \sum_{i=1}^{n} u_{i\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \quad \nu = 1,2,\dots,r. \tag{3.9}$$

Таким образом, введенные векторные операторы, не зависящие от параметров группы, называются <u>генераторами</u>. Видно, что каждому генератору группы отвечает один независимый параметр группы.

Коммутаторы генераторов могут быть записаны в виде

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_{\lambda=1}^{r} C_{\mu\nu}^{\lambda} X_\lambda, \quad \mu,\nu = 1,2,\dots,r. \tag{3.10}$$

В этой формуле $C_{\mu\nu}^{\lambda}$ – числа (вообще говоря, комплексные), которые называются структурными константами. Генераторы X_ν образуют алгебру Ли группы Ли. Чтобы показать это, напомним, что алгебра Ли $\mathcal{L}$ есть линейное векторное пространство, на котором определен внутренний закон композиции, который удовлетворяет соотношениям

$$[X, Y] \in \mathcal{L}, \tag{3.11а}$$

$$[X, Y] = -[Y, X] \tag{3.11б}$$

и тождеству Якоби

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0. \tag{3.11в}$$

Пусть теперь задана группа Ли, порядка r, структурные константы которой равны $C_{\mu\nu}^{\lambda}$. Алгебру Ли этой группы определим следующим образом. Пусть ℓ_μ $(\mu = 1,2,\dots,r)$ являются базисными элементами r-мерного линейного векторного пространства. Для любых двух элементов алгебры $\mathcal{L}$, $X = \sum_\mu x_\mu \ell_\mu$ и $Y = \sum_\nu y_\nu \ell_\nu$ закон композиции можно определить следующим образом:

$$[X,Y] = \sum_{\mu,\nu} x_\mu y_\nu [\ell_\mu, \ell_\nu] = \sum_{\mu,\nu,\lambda} x_\mu y_\nu C^\lambda_{\mu\nu} \ell_\lambda . \tag{3.12}$$

Исходя из свойства (3.11б), вследствие которого структурные константы антисимметричны по нижним индексам, т.е.

$$C^\lambda_{\mu\nu} = - C^\lambda_{\nu\mu} , \tag{3.13}$$

видим, что (3.12) удовлетворяет коммутационным соотношениям (3.10). Таким образом, алгебра Ли $\mathcal{L}$ группы Ли определена, т.е. доказано, что совокупность генераторов X_ν замкнута относительно операции коммутирования.

Замечания

1) Задание алгебры Ли группы, т.е. структурных констант $C^\lambda_{\mu\nu}$, или, что то же самое, коммутаторов $[X_\mu, X_\nu]$, однозначно не определяет генераторы группы X_ν и, следовательно, не определяет ещё саму группу.

2) Компактность или некомпактность группы сказывается на свойствах генераторов X_ν и на структурных константах $C^\lambda_{\mu\nu}$.

3) В теории групп Ли показано, что генераторы компактной группы всегда можно выбрать эрмитовыми. Для некомпактных групп генераторы, вообще говоря, неэрмитовы. Структурные константы $C^\lambda_{\mu\nu}$ компактных групп Ли антисимметричны по всем трем индексам μ, ν, λ. Для некомпактных групп (например, для группы Лоренца) это не имеет места.

Генераторы X_ν удовлетворяют тождеству Якоби (3.11в), откуда для структурных констант получаем

$$\sum_{\beta=1}^{r} \left(C^\beta_{\nu\mu} C^\delta_{\beta\lambda} + C^\beta_{\mu\lambda} C^\delta_{\beta\nu} + C^\beta_{\lambda\nu} C^\delta_{\beta\mu} \right) = 0 . \tag{3.14}$$

Покажем на примерах способ получения генераторов группы Ли.

Примеры

1. Пусть G есть двухпараметрическая группа преобразований одномерного вектора

$$x' = a_1 x + a_2 .$$

Бесконечно малые преобразования принимают следующий вид:

$$dx = x\, da_1 + da_2 . \tag{3.15}$$

Сравнивая выражение (3.15) с (3.7), получаем

$$u_{11} = x , \qquad u_{12} = 1$$

и из определения генератора (3.9) имеем

$$X_1 = x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \qquad X_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Теперь рассмотрим действие коммутатора генераторов X_1 и X_2 на функцию $F(x)$:

$$[X_1, X_2] F(x) = x \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right) =$$

$$= x \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial F(x)}{\partial x} - x \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = - \frac{\partial F(x)}{\partial x} = -X_2 F(x) .$$

Итак, $[X_1, X_2] = -X_2$.
Значения структурных констант равны:

$$C_{121} = 0 , \qquad C_{122} = -1 .$$

2. Рассмотрим группу вращений трехмерного евклидова пространства. Эти преобразования, которые оставляют инвариантной форму $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, образуют группу $SO(3)$ (буква S означает, что $\det g = 1$, где $g \in SO(3)$). Такие преобразования можно записать в виде $x' = \mathbb{A} x$, где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и $\mathbb{A}$ – действительная 3 x 3 матрица, удовлетворяющая условию $\mathbb{A}\mathbb{A}^T = I$ и $\det \mathbb{A} = +1$. Если бесконечно малое преобразование записать в виде

$$x' = (1 + da) x ,$$

то

$$dx = x\, da .$$

Из соотношения $\mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbf{I}$ получаем $(1 + da)(1 + da^T) = 1$, откуда следует $da = -da^T$, т.е.

$$da = \begin{pmatrix} 0 & da_{12} & -da_{13} \\ -da_{12} & 0 & da_{23} \\ da_{13} & -da_{23} & 0 \end{pmatrix} . \qquad (3.16)$$

Таким образом, группа трехмерных вращений имеет три независимых параметра. Вводя обозначение $da_{23} = b_1$, $da_{13} = b_2$, $da_{12} = b_3$, запишем бесконечно малое преобразование вектора x в виде

$$dx_1 = x_2 b_3 - x_3 b_2 ,$$

$$dx_2 = -x_1 b_3 + x_3 b_1 ,$$

$$dx_3 = x_1 b_2 - x_2 b_1 .$$

Соответствующие генераторы определяются равенствами

$$X_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} ,$$

$$X_2 = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} , \qquad (3.17)$$

$$X_3 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} .$$

Коммутационные соотношения этих генераторов имеют следующий вид:

$$[X_1, X_2] = X_3 , \quad [X_2, X_3] = X_1 , \quad [X_3, X_1] = X_2 .$$

Если записать генераторы (3.17) в виде матриц, как, например,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

то сразу видно, что X_i (i = 1,2,3) являются антиэрмитовыми операторами. (Докажите!) Генераторы группы трехмерных вращений (см. § 6 первой главы) можно выбрать эрмитовыми. Итак, если записать генераторы X_i (i = 1,2,3) в виде $J_i = iX_i$, то коммутационные соотношения получаем в виде

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k . \qquad (3.18)$$

Структурные константы алгебры Ли группы вращений совпадают с полностью антисимметричным тензором 3-го ранга ε_{ijk}.

3. В качестве третьего примера возьмем группу специальных унитарных преобразований $SU(2)$, т.е. множество 2x2 унитарных матриц с $\det \|\cdot\| = 1$, действующих на точке двумерного комплексного векторного пространства. Соответствующее преобразование может быть представлено следующим образом:

$$x' = U x .$$

Бесконечно малое преобразование имеет вид

$$x' = (1 + du) x , \qquad dx = du \, x .$$

Так как матрицы U унитарны: $UU^+ = U^+U = 1$, получаем

$$du + du^+ = 0 .$$

Если добавим условие

$$\det (1 + du) = +1 ,$$

то матрица du может быть представлена в виде

$$du = \begin{pmatrix} iu_1 & u_2 + iu_3 \\ -u_2 + iu_3 & -iu_1 \end{pmatrix} ,$$

где u_i (i = 1,2,3) – вещественные числа. Из вида бесконечно малых преобразований

$$dx_1 = iu_1 x_1 + (u_2 + iu_3) x_2 ,$$

$$dx_2 = (-u_2 + iu_3) x_1 - iu_1 x_2 ,$$

следует явный вид генераторов

$$X_1 = i x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - i x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} ,$$

$$X_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} ,$$

$$X_3 = i x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + i x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} .$$

Вычисляя непосредственно коммутаторы, получим

$$[X_1, X_2] = -2X_3 \qquad \text{(+ циклическая замена).}$$

Если теперь выберем эти генераторы эрмитовыми (так как группа $SU(2)$ компактна) $X_i = -2iJ_i$ (i = 1,2,3), то получим коммутационные соотношения

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k ,$$

которые совпадают с коммутационными соотношениями (3.18). Мы видим, что группы $SO(3)$ и $SU(2)$ обладают одной и той же алгеброй Ли.

Замечания

1) Если две группы Ли обладают одной и той же алгеброй Ли, то говорят, что они локально изоморфны.

2) Гомоморфные группы Ли G и G' являются локально изоморфными, если ядро гомоморфизма есть дискретная подгруппа группы G.

3) Генераторы группы Ли образуют алгебру Ли, в которой произведением элементов является коммутатор алгебры. Алгебра Ли группы Ли

полностью определяется этой группой. Наоборот, алгебра Ли определяет эту группу с точностью до локального изоморфизма.

Аналогами подгруппы и инвариантной подгруппы в алгебре Ли являются подалгебра и идеал.

Определение

Если в алгебре Ли $\mathcal{L}$ существует множество $\mathcal{L}'$ элементов, которое само является алгеброй Ли, то это множество называется подалгеброй $\mathcal{L}'$ алгебры Ли $\mathcal{L}$, т.е., если $X \in \mathcal{L}'$ и $Y \in \mathcal{L}'$, то

$$[X, Y] \in \mathcal{L}'.$$

Символически запишем

$$[\mathcal{L}', \mathcal{L}'] \subset \mathcal{L}'.$$

Замечания

1. Если $\mathcal{N}$ - такая подалгебра алгебры Ли $\mathcal{L}$, что для любых $X \in \mathcal{N}$ и $Y \in \mathcal{L}$ произведение

$$[X, Y] \in \mathcal{N},$$

или же символически

$$[\mathcal{N}, \mathcal{L}] \subset \mathcal{N},$$

то $\mathcal{N}$ называется идеалом алгебры $\mathcal{L}$.

2. Алгебра Ли называется простой, если она не содержит идеала, отличного от самой алгебры, и называется полупростой, если она не имеет коммутативного идеала (т.е. $[\mathcal{N}, \mathcal{N}] = 0$).

3. Алгебра Ли простой группы Ли проста, а алгебра Ли полупростой группы Ли полупроста.

4. Пусть задана некоторая группа Ли $G_{\mathcal{L}}$ конечной размерности n, генераторы которой образуют алгебру Ли $\mathcal{L}$ той же размерности. Если в алгебре $\mathcal{L}$ существуют коммутирующие элементы, то элементы эти образуют коммутативную подалгебру алгебры Ли $\mathcal{L}$. Максимальную коммутативную подалгебру $\mathcal{K}$ алгебры $\mathcal{L}$ называют подалгеброй Картана алгебры Ли.

Если обозначаем через H_i базисные элементы рассматриваемой алгебры Картана, то имеем

$$[H_i, H_j] = 0 \qquad i, j = 1, 2, \ldots, \ell .$$

Размерность ℓ подалгебры Картана алгебры Ли $\mathcal{L}$ называется рангом алгебры Ли $\mathcal{L}$ или рангом группы $G_{\mathcal{L}}$.

Глава IУ. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ЛИ И АЛГЕБР ЛИ

В предыдущей главе мы рассматривали инфинитезимальные операторы групп Ли и их коммутационные соотношения с абстрактной точки зрения, не используя явную форму операторов. Чтобы установить связь с физическими ситуациями, необходимо ввести специальные реализации этих операторов. Поскольку мы работаем с линейными операторами, то, как уже отмечалось, с каждым из этих операторов можно связать матрицу. Если при этом соответствующие матрицы удовлетворяют коммутационным соотношениям для этих операторов, то говорят, что эти матрицы[x)] образуют представление группы.

§ I. Общие свойства представлений

Пусть V - линейное векторное пространство. Введем базис, состоящий из линейно независимых векторов $f_1, f_2, \ldots, f_n$, так что любой вектор $\phi \in V$ может быть представлен в виде

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i f_i ,$$

и он полностью характеризуется своими компонентами ϕ_i. Рассмотрим линейное преобразование D пространства V:

$$\phi \to \phi' = D\phi ,$$

или в матричном виде

$$\phi_i' = \sum_j D_{ij} \phi_j , \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

где D_{ij} - матрица преобразования D. Будем говорить, что задано представление D

$$g \to D(g)$$

группы G в пространстве V, если каждому элементу $g \in G$ сопоставляется преобразование $D(g)$ пространства V таким образом, что

$$D(g_1) D(g_2) = D(g_1 \cdot g_2), \tag{4.I}$$

т.е. сохраняется закон композиции, определенный в G. Из (4.I) сле-

---

x) Следует отметить, что, вообще говоря, представления не обязательно являются матричными, но в случае групп Ли всегда можно построить матричные представления.

дует, что единичному элементу $e \in G$ соответствует единичный оператор (тождественное преобразование):

$$D(e) = I .$$

Обратному элементу $g \in G$ соответствует обратное преобразование в пространстве V :

$$[D(g)]^{-1} = D(g^{-1}),$$

так как

$$D(g^{-1})\,D(g) = D(g^{-1}\circ g) = D(e) = I .$$

Определение

<u>Линейным представлением</u> группы Ли $G_\mathcal{L}$ является группа n-мерных матриц $D(g)$, на которую группа $G_\mathcal{L}$ гомоморфно отображена, причем матрица $D(g)$ соответствует элементу $g \in G_\mathcal{L}$.

Если это отображение – изоморфизм, то представление группы является <u>точным</u>, в противном случае оно называется <u>неточным</u>.

Замечания

I. Если представление является точным, то структурные константы алгебр Ли групп $G_\mathcal{L}$ и D совпадают, или, иначе говоря, перестановочные соотношения генераторов групп $G_\mathcal{L}$ и D одинаковы.

2. Простые группы имеют только точные представления.

Примеры

I) Пусть G – группа $G \equiv \{e, a\}$, тогда следующие представления являются точными:

а) $D^{(1)}(e) = 1$, $\quad D^{(1)}(a) = -1$;

б) $D^{(2)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad D^{(2)}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $D^{(3)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad D^{(3)}(a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

а представление

$D(e) = 1$, $\quad D(a) = 1$ – не является. (Докажите!)

2. В качестве примера линейного представления рассмотрим группу трансляций в трехмерном пространстве:

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a},$$

когда каждая трансляция характеризуется вектором сдвига $\vec{a}$. Пусть V – некоторое векторное пространство. Каждой трансляции на вектор $\vec{a}$ сопоставим оператор умножения векторов пространства V на комплексное число $e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}}$, где $\vec{k}$ – некоторый фиксированный трехмерный вектор. Произведению двух трансляций $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, т.е. $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, соответствует оператор умножения на

$$e^{i\vec{k}(\vec{a}_1+\vec{a}_2)} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}_1} e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}_2} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}_1} \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}_1} .$$

Таким образом, мы получили одно из возможных линейных представлений группы трансляций.

Замечание

В одном и том же пространстве V могут существовать разные представления одной и той же группы. Пусть $D(g)$ – представление группы G в пространстве V и S – линейное отображение пространства V в V , имеющее непрерывное обратное отображение S^{-1} . Тогда выражение

$$D'(g) = S\,D(g)\,S^{-1}$$

также определяет представление группы G в V . В самом деле, имеем

$$D'(g_1)\,D'(g_2) = S\,D(g_1)\,S^{-1}S\,D(g_2)\,S^{-1} = S\,D(g_1)\,D(g_2)\,S^{-1} =$$

$$= S\,D(g_1\circ g_2)\,S^{-1} = D'(g_1\circ g_2) .$$

Подобные представления считаются <u>эквивалентными</u>. Дадим общее

Определение

Представления $D(g)$ и $D'(g)$ группы G в пространствах V_1 и V_2 <u>эквивалентны</u>, если существует линейный оператор S, отображающий V_1 в V_2 , имеющий обратный линейный оператор S^{-1}, такой, что

$$D'(g) = S\,D(g)\,S^{-1}.$$

§ 2. Унитарные представления

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$. Как уже отмечалось выше (гл. II, § I), преобразование $D(g)$ в этом пространстве называется <u>унитарным</u>, если $D(g)$ не меняет скалярное произведение любой пары векторов, т.е. если для любых $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ выполняется условие

$$(D(g)\phi, D(g)\psi) = (\phi, \psi).$$

Определение

Пусть гильбертово пространство $\mathcal{H}$ преобразуется по представлению $D(g)$ группы G. Если все операторы $D(g)$ этого представления унитарны, то оно называется унитарным представлением.

Теорема

Для любой компактной группы каждое её конечномерное представление эквивалентно некоторому унитарному представлению.

Доказательство этой теоремы основано на том, что для компактной группы можно ввести инвариантное интегрирование.

Прежде всего надо показать, что, если операторы $D(g)$ неунитарны относительно заданного скалярного произведения (далее "старое" скалярное произведение) (ϕ, ψ), то можно ввести такое "новое" скалярное произведение $(\phi, \psi)'$, что относительно этого произведения все операторы $D(g)$ уже унитарны, т.е.

$$(D(g)\phi, D(g)\psi)' = (\phi, \psi)'.$$

Следует отметить, что для любой пары векторов ϕ и ψ величина

$$f(g) = (D(g)\phi, D(g)\psi)$$

является некоторой ограниченной функцией на группе G. Для компактной группы существует инвариантный интеграл (см. § 6)

$$\int_G f(g)\,dg = \int_G f(gg_0)\,dg = \int_G f(g_0 g)\,dg,$$

где g_0 - любой элемент группы G.

Введем "новое" скалярное произведение

$$(\phi, \psi)' = \int_G (D(g)\phi, D(g)\psi)\,dg. \tag{4.2}$$

Выражение $(\phi, \psi)'$ удовлетворяет определению скалярного произведения. (Докажите!)

По отношению к скалярному произведению (4.2) все операторы унитарны, так как имеем:

$$(D(g)\phi, D(g)\psi)' = \int_G (D(g')D(g)\phi, D(g')D(g)\psi)\,dg' = \int_G (D(g'g)\phi, D(g'g)\psi)\,dg' \equiv$$

$$\equiv \int_G (D(g')\phi, D(g')\psi)\,dg' = (\phi, \psi)',$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь f_i - некоторый базис, ортонормированный относительно "старого" скалярного произведения

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

и f_i' - базис, ортонормированный относительно "нового" скалярного произведения

$$(f_i', f_j')' = \delta_{ij}.$$

Обозначим через A - оператор, переводящий f_i и f_i':

$$A f_i = f_i'.$$

Если $\phi = \sum_i \phi_i f_i$, $\psi = \sum_i \psi_i f_i$, то $A\phi = \sum_i \phi_i f_i'$, $A\psi = \sum_i \psi_i f_i'$, и, следовательно,

$$(A\phi, A\psi)' = \sum_i \phi_i \psi_i \equiv (\phi, \psi),$$

или

$$(\phi, \psi)' = (A^{-1}\phi, A^{-1}\psi).$$

Если определим $D'(g) = A^{-1} D(g) A$, то

$$(D'(g)\phi, D'(g)\psi) = (A^{-1}D(g)A\phi, A^{-1}D(g)A\psi) =$$

$$= (D(g)A\phi, D(g)A\psi)' = (A\phi, A\psi)' = (\phi, \psi),$$

т.е. все операторы $D'(g)$ унитарны относительно "старого" скалярного произведения.

Таким образом, каждое представление компактной группы эквивалентно унитарному представлению. Поэтому в дальнейшем для компактной группы Ли мы можем ограничиться лишь унитарными представлениями.

§ 3. Неприводимые представления

Пусть задано некоторое представление $D(g)$ группы G в пространстве V и V_1 - некоторое подпространство пространства V, инвариантное относительно $D(g)$, т.е. для любого $\psi \in V_1$ и $g \in G$ имеет место

$$D(g)\psi \in V_1,$$

Определение

Представление $D(g)$ в пространстве V называется приводимым, если существует нетривиальное подпространство V_1, инвариантное относительно данного представления. В противном случае представление называется неприводимым.

Как было замечено выше, под представлением $D(g)$ следует подразумевать группу матриц, которые являются конечномерными, т.е. имеют конечное число строк и столбцов. Тогда все матрицы приводимого представления $D(g)$ могут быть приведены к виду

$$D'(g) = S D(g) S^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} A(g) & B(g) \\ \hline 0 & C(g) \end{array}\right| . \tag{4.3}$$

В более общем случае матрицы представимы в виде

$$D(g) = \left|\begin{array}{c|c|c|c} D^1(g) & \multicolumn{3}{c}{A^1(g)} \\ \hline & D^2(g) & \multicolumn{2}{c}{A^2(g)} \\ \cline{2-4} 0 & 0 & D^3(g) & A^3(g) \\ \cline{3-4} & & 0 & \ddots \\ & & & D^\rho(g) \end{array}\right| , \tag{4.4}$$

где $D^1, D^2, \ldots, D^\rho$ – неприводимые матрицы представлений группы G, A^1, A^2, ... вообще говоря, отличные от нуля матричные элементы; 0 – нулевая прямоугольная матрица.

Подчеркнем, что матрица S – "приводящая" матрицы $D(g)$ к виду (4.4), не должна зависеть от g. Если пространство представления может быть разбито на сумму инвариантных относительно группы G подпространств, то все матрицы представления $D(g)$ группы G могут быть приведены к квазидиагональному виду с помощью одной и той же матрицы S:

$$D'(g) = S D(g) S^{-1} = \left|\begin{array}{c|c|c|c} D^1(g) & \multicolumn{3}{c}{0} \\ \hline & D^2(g) & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \cline{2-4} & & \ddots & 0 \\ & & 0 & D^\rho(g) \end{array}\right| . \tag{4.5}$$

В этом случае представление называется полностью приводимым. Если представления $D^\alpha(g)$ ($\alpha = 1, 2, \ldots \rho$) неприводимые, то мы можем записать $D(g)$ в виде прямой суммы:

$$D(g) = D^1(g) \oplus D^2(g) \oplus \ldots \oplus D^\rho(g) . \tag{4.6}$$

Замечание

Смысл приводимости представления состоит в том, что линейным преобразованием

$$\Psi'(x) = S\,\Psi(x)$$

многокомпонентной величины[x)] $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$, где $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ являются точками n-мерного векторного пространства (пространства представления), из компонент $\psi_1, \ldots, \psi_n$ можно составить $m < n$ линейных комбинаций $\psi'_{n-m+1}, \ldots, \psi'_n$, преобразующихся друг через друга (т.е. независимо от $\psi'_1, \ldots, \psi'_{n-m}$ компонент) при всех преобразованиях $x' = g x, g \in G$. Значения m-компонентной величины $\psi'_{n-m+1}, \ldots, \psi'_n$ образуют m-мерное подпространство пространства представления.

Пример

Рассмотрим пример приводимого представления группы вращений $SO(3)$. Пусть величиной Ψ будет тензор второго ранга, составленный из двух трехмерных координатных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\Psi_{\alpha\beta} = x_\alpha y_\beta , \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Если $A \in SO(3)$ есть матрицы, преобразующие при вращениях векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, то матрицы $D(g)$, преобразующие тензор $\Psi_{\alpha\beta}$, являются прямым произведением двух матриц A:

$$D(g) = A \otimes A .$$

Действительно,

$$\Psi'_{\alpha\beta} = D(g)\,\Psi_{\alpha\beta} = (A_{\alpha\alpha'} x_{\alpha'})(A_{\beta\beta'} y_{\beta'}) = A_{\alpha\alpha'} A_{\beta\beta'} x_{\alpha'} y_{\beta'} .$$

Тензор $\Psi_{\alpha\beta}$ имеет $n = 9$ компонент, и поэтому $D(g)$ в данном случае

---

x) Такой многокомпонентной величиной можно представить себе, например, 4-импульс частицы, вектор-потенциал электромагнитного поля, волновую функцию частицы со спином, и т.п.

являются матрицами 9 x 9:

$$(D(g))_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} = A_{\alpha\alpha'} A_{\beta\beta'} .$$

Выполним теперь над тензором $\psi_{\alpha\beta}$ операцию свертки:

$$\tilde{\psi}_1 = \psi_{\alpha\beta}\,\delta_{\alpha\beta} = \vec{x}\cdot\vec{y} . \qquad (4.7)$$

Эта величина инвариантна относительно всех вращений.

Произведем также свертку $\psi_{\alpha\beta}$ с полностью антисимметричным тензором $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$

$$\tilde{\psi}_{k(\alpha)} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\psi_{\beta\gamma} = (\vec{x}\times\vec{y})_\alpha , \quad \alpha = 1,2,3 , \quad k(\alpha) = 2,3,4 . \qquad (4.8)$$

Наконец, образуя симметричный тензор с равным нулю следом

$$\tilde{\psi}_{j(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2}(\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\beta\alpha}) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\,Sp\,\psi = \frac{1}{2}(x_\alpha x_\beta + x_\beta x_\alpha) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\vec{x}\cdot\vec{y}, \qquad (4.9)$$

$$j(\alpha,\beta) = 5,6,\ldots,9 .$$

получаем еще пятикомпонентную величину $\tilde{\psi}_j$, которая также преобразуется сама через себя при всех вращениях.

Таким образом, тензор второго ранга $\psi_{\alpha\beta}$ разбит на три независимо преобразующиеся при всех вращениях величины:

$$\tilde{\psi}_1 , \quad \tilde{\psi}_{k(\alpha)} \quad (k(\alpha) = 2,3,4) \quad \text{и} \quad \tilde{\psi}_{j(\alpha,\beta)} \quad (j(\alpha,\beta) = 5,6,\ldots,9).$$

Это означает, что все матрицы $D(g) = \mathbb{A}\otimes\mathbb{A}$ могут быть приведены к квазидиагональному виду

$$\tilde{D}(g) = S\,D(g)\,S^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1\times 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & 3\times 3 & 0 \\ \cline{2-3} & 0 & 5\times 5 \end{array}\right) .$$

Матрица S задана преобразованиями (4.7) – (4.9). Покажите, что скаляр $\tilde{\psi}_1$, вектор $\tilde{\psi}_k$ и симметричный, с равным нулю следом тензор $\tilde{\psi}_j$ являются уже неприводимыми.

Остановимся на одном важном общем свойстве неприводимых представлений, известном как

Лемма Шура

Если представление $D(g)$ группы G в пространстве V неприводимо, то любой оператор F, коммутирующий со всеми операторами представления $D(g)$, должен быть кратен единичному оператору, т.е., если

$$[D(g), F] = 0 \qquad \text{для} \quad \forall g \in G , \qquad (4.10)$$

то $F = \lambda I$, где λ – число.

Доказательство

Будем считать, что все операторы представления $D(g)$ реализованы в виде матриц. Матрицу F, коммутирующую со всеми матрицами представления $D(g)$ группы G, будем считать приводимой к диагональному виду и выберем такой базис в пространстве V, чтобы матрица F имела вид:

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m I_{n_m} \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – числа, а в каждом из ящиков I_{n_i} есть единичные матрицы, вообще говоря, различной размерности $n_i \times n_i$ $(i = 1,2,\ldots,m,\ \sum_{i=1}^{m} n_i = n)$. Если не все λ_i одинаковы, то из условия

$$F\,D(g) = D(g)\,F$$

следует, что все матрицы представления $D(g)$ должны иметь блочно-диагональный вид с блоками $n_i \times n_i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ вдоль главной диагонали. Но это означало бы, что представление $D(g)$ приводимо. По предположению $D(g)$ неприводимо и $F \neq 0$, тогда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = \lambda ,$$

и, следовательно,

$$F = \lambda \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} ,$$

т.е. F кратна единичной матрице I, что и требовалось доказать.

Пример

Можно проиллюстрировать лемму Шура на примере матриц 2 х 2. Пусть $D(g)$ представлено матрицами вида

$$D(g) = B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \qquad \text{и пусть} \qquad F = A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Если имеет место преобразование

$$B = A\,B\,A^{-1},$$

которое дает

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & \frac{a_1}{a_2} b_2 \\ \frac{a_2}{a_1} b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

то

а) или $a_1 = a_2 = a$, в согласии с леммой Шура (т.е. $A = \lambda I$),

б) или $b_2 = b_3 = 0$, и значит, матрица B приводима.

Рассмотрим теперь различные представления, связанные с данным представлением $D(g)$ и имеющие такую же размерность, что и $D(g)$, но не эквивалентные представлению $D(g)$.

§ 4. Сопряженное и контраградиентное представления

Введем представление D^*, которое получается заменой каждой матрицы данного представления на её комплексно сопряженную. Тогда, если

$$D(g_1)\,D(g_2) = D(g_1 \cdot g_2),$$

то

$$D^*(g_1)\,D^*(g_2) = D^*(g_1 \cdot g_2),$$

и $D^*(g)$ также образует представление, которое называется сопряженным представлением к $D(g)$.

Если теперь заменить каждую матрицу представления $D(g)$ на матрицу $[D(g)^{-1}]^T \equiv \bar{D}(g)$, то соответствие также дает представление группы G, которое называется контраградиентным. В самом деле, для любого $g_i \in G$ имеем $D^{-1}(g_i) = D(g_i^{-1})$ и $[D^{-1}(g_i)]^T = [D(g_i^{-1})]^T$. Вследствие $D(g_1)D(g_2) = D(g_1 \cdot g_2)$ получаем

$$\bar{D}(g_1)\bar{D}(g_2) \equiv [D^{-1}(g_1)]^T [D^{-1}(g_2)]^T = [D^{-1}(g_1 g_2)]^T \equiv \bar{D}(g_1 \cdot g_2).$$

Таким образом, доказано, что $\bar{D}(g)$ является представлением.

Замечания

1) В случае унитарных представлений контраградиентное к $D(g)$ представление $\bar{D}(g)$ совпадает с сопряженным к $D(g)$ представлением $D^*(g)$. Проверим это замечание.

Так как все операторы $D(g)$ унитарны:

$$D^+(g) = D^{-1}(g) = D(g^{-1}),$$

то

$$D^*(g) = [D(g^{-1})]^T \equiv \bar{D}(g),$$

что и требовалось доказать.

2) Введение контраградиентных представлений позволяет образовать инварианты групп.

Пусть $\vec{x}$ - вектор с компонентами x_α, преобразующийся по представлению $D(g)$ группы G, а вектор $\vec{y}$ - вектор с компонентами y_α, преобразующийся по представлению $\bar{D}(g)$. Значит,

$$x'_\alpha = (D(g))_{\alpha\beta}\, x_\beta,$$

$$y'_\alpha = (\bar{D}(g))_{\alpha\beta}\, y_\beta = D(g^{-1})_{\beta\alpha}\, y_\beta.$$

Отсюда получаем

$$y'_\alpha x'_\alpha = y_\beta\,(D(g^{-1}))_{\beta\alpha}\,(D(g))_{\alpha\mu}\,x_\mu = y_\beta (D(e))_{\beta\mu}\,x_\mu = y_\beta x_\beta,$$

т.е. сумма $y_\alpha x_\alpha$ является инвариантом.

В дальнейшем нам понадобится определение регулярного представления.

Пусть $G_\mathcal{L}$ есть компактная группа Ли порядка n. Коммутационные соотношения генераторов алгебры $\mathcal{L}$ группы $G_\mathcal{L}$ определены следующим образом:

$$[X_i, X_k] = \sum_\ell c^\ell_{ik} X_\ell. \qquad (4.II)$$

Покажем, что число C можно использовать для построения множества матриц $n \times n$, определяющего представление алгебры (4.II).

Положим

$$(R_a)_{bd} = -C^d_{ab} . \tag{4.12}$$

Это соотношение определяет n матриц размерности $n \times n$. Напомним, что структурные константы C удовлетворяют тождеству Якоби, т.е.

$$\sum_d (C^d_{s\ell} C^k_{di} + C^d_{is} C^k_{d\ell} + C^d_{\ell i} C^k_{ds}) = 0.$$

Отсюда следует, что матрицы (4.12) удовлетворяют условию

$$\sum_m \left[(R_a)_{cm} (R_b)_{mn} - (R_b)_{cm} (R_a)_{mn} \right] = \sum_m C^m_{ab} (R_m)_{cn} ,$$

из которого видно, что матрицы R удовлетворяют уравнению (4.11). Полученное представление R матриц группы $G_{\mathcal{L}}$ носит название регулярного представления[x)].

Замечание

Пусть заданы два неприводимых представления группы G, $D(g_1)$ и $D(g_2)$, размерность которых равна m и n соответственно. Из заданных представлений всегда можно построить новое представление двумя способами. Во-первых, можно построить прямую сумму представлений $D(g) = D_1(g) \oplus D_2(g)$. Размерность этого представления равна $m+n$, и, как отмечалось выше, сумма записывается в виде матрицы:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} .$$

Генераторы представления $D(g)$ равны

$$X_\mu^{D_1 \oplus D_2} = \begin{pmatrix} X_\mu^{D_1} & 0 \\ 0 & X_\mu^{D_2} \end{pmatrix} .$$

Во вторых, можно получить представление, размерность которого равна $m \times n$, построив <u>прямое произведение</u> представлений $D_1(g) \otimes D_2(g)$. На матричном языке это значит, что

---

x) Название "регулярное представление" используется в математике. В физических приложениях принято называть это представление <u>присоединенным</u>.

$$[D_1(g) \otimes D_2(g)]_{\alpha\beta,\mu\delta} = [D_1(g)]_{\alpha\mu} [D_2(g)]_{\beta\delta} . \tag{4.13}$$

Генераторы этого прямого произведения

$$[X_\mu^{D_1 \otimes D_2}]_{\alpha\beta,\mu\delta} = [X_\mu^{D_1}]_{\alpha\mu} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\mu} [X_\mu^{D_2}]_{\beta\delta} ,$$

получаются дифференцированием уравнения (4.13).

§ 5. Представления алгебры Ли

Аналогично определению представлений группы Ли $G_{\mathcal{L}}$ можно определить представление алгебры Ли $\mathcal{L}$ как отображение элементов алгебры на линейные операторы линейного векторного пространства V:

$$X \to T(X) , \tag{4.14}$$

такие, что

$$T(\alpha X + \beta Y) = \alpha T(X) + \beta T(Y); \tag{4.15}$$

$$T([X, Y]) = [T(X), T(Y)] , \tag{4.16}$$

где $X, Y \in \mathcal{L}$. Выражение (4.16) является коммутатором двух операторов $T(X)$, $T(Y)$. Определения неприводимых, приводимых, вполне приводимых, эквивалентных, унитарных и других представлений алгебры Ли $\mathcal{L}$ являются такими же, как для группы Ли $G_{\mathcal{L}}$. Отметим, что если найдено представление группы Ли $G_{\mathcal{L}}$, то генераторы группы $G_{\mathcal{L}}$ определяют представление соответствующей алгебры Ли. Справедливым оказывается и следующее утверждение. Представление алгебры Ли полностью определяет представление группы. Покажем это. Пусть задана группа Ли $G_{\mathcal{L}}$ порядка r. Определим однопараметрическую подгруппу группы $G_{\mathcal{L}}$ следующим образом. Это будет группа $H_{\mathcal{L}}$, элементы $g(t)$ которой являются непрерывными функциями вещественного параметра t, $t \in (-\infty, \infty)$. В общем случае однопараметрическая подгруппа $H_{\mathcal{L}}$ некоторой группы $G_{\mathcal{L}}$ является "кривой" группы, такой, что

$$g(t_1) g(t_2) = g(t_1 + t_2) \tag{4.17a}$$

есть закон композиции.

Ясно, что $g(0) = e$ – единичный элемент,

$$g(-t) = [g(t)]^{-1} \quad \text{и} \quad g(t_1) g(t_2) = g(t_2) g(t_1) .$$

Для групп, которые будут рассмотрены (группа вращений, группа Лоренца, группа $SU(2)$, $SU(3)$ и группа Пуанкаре), окрестность единичного элемента (бесконечно малые преобразования) может быть заполнена "кривыми" группы, т.е. сегментами однопараметрических подгрупп, причем при пересечении любой пары сегментов общим элементом является только единичный. Под сегментом понимается совокупность элементов $g(t)$, соответствующих значениям $|t|$, меньшим некоторого фиксированного значения.

Отметим, что элементы группы $G_{\mathcal{L}}$ характеризуются значением параметров $a_1, a_2, \dots, a_n$, и однопараметрическая подгруппа получается подходящим выбором параметров a_i $(i=1,2,\dots,n)$, являющихся функциями t, т.е. $a_i = a_i(t)$.

Пусть $T(g)$ есть представление группы $G_{\mathcal{L}}$. Операторы $T(g(t))$, соответствующие элементам однопараметрической подгруппы, можно записать в следующем виде: $T(t) \equiv T(a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))$, и из уравнения (4.17а) (закон композиции сохраняется) следует

$$T(t_1)\,T(t_2) = T(t_1+t_2). \tag{4.17б}$$

Рассмотрим теперь производную $T(t)$, взятую при $T(t)=e$, т.е. элемент

$$\left.\frac{dT(t)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial T(t)}{\partial a_k}\cdot\frac{\partial a_k}{\partial t}\right]_{t=0} = \sum_k X_k c_k, \tag{4.18}$$

где

$$c_k = \left.\frac{\partial a_k(t)}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Оператор

$$\left.\frac{dT(t)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_k X_k c_k \tag{4.19}$$

называется генератором однопараметрической подгруппы $H_{\mathcal{L}}$ в данном представлении. Оператор (4.19) является линейной комбинацией генераторов I_k группы $G_{\mathcal{L}}$. Эти генераторы определяют представление алгебры Ли $\mathcal{L}$ группы Ли $G_{\mathcal{L}}$. Значит, используя уравнения (4.17б) и (4.19), можно выразить любой элемент $T(t)$ через I_k. Действительно, дифференцируя равенство (4.17б) по t_1 и полагая $t_1=0$, $t_2=t$, имеем

$$\frac{dT(t)}{dt} = \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=0}\cdot T(t) = \Big(\sum_k X_k c_k\Big)T(t).$$

Решение этого уравнения дается выражением

$$T(t) = \exp\Big\{\sum_k X_k c_k\cdot t\Big\}. \tag{4.20}$$

Таким образом, видно, что оператор $T(t)$ при произвольном t полностью определяется генераторами X_k.

Как уже упоминалось выше, нас интересуют унитарные представления групп Ли. Тогда уравнение (4.20) можно записать в виде

$$T(t) = \exp\Big\{i\sum_k J_k c_k\cdot t\Big\}, \tag{4.21}$$

где J_k является эрмитовым оператором.

Итак, представление алгебры полностью задается линейными операторами, соответствующими генераторам X_k группы и удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k,$$

и уравнение (4.21) позволяет определить любой элемент $T(t)$ через $iX_k = J_k$.

§ 6. Операторы Казимира

Рассмотрим алгебру Ли, группы Ли $G_{\mathcal{L}}$

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k. \tag{4.22}$$

Определение

Оператором Казимира C группы $G_{\mathcal{L}}$ называется оператор, коммутирующий со всеми генераторами X_i этой группы, т.е.

$$[C, X_i] = 0. \tag{4.23}$$

Отметим, что C, вообще говоря, не является элементом соответствующей алгебры, т.е. линейной композицией генераторов X_i.

Пример

В группе вращений $SO(3)$ имеется всего один такой оператор

$$\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2,$$

где J_i ($i = 1,2,3$) - генераторы группы вращений. Делая непосредственные вычисления, с учетом коммутационных соотношений

$$[J_i, J_k] = i\varepsilon_{ikj} J_j,$$

легко убедиться, что

$$[J_i, \vec{J}^2] = 0 \qquad \text{для всех } i \ (i = 1,2,3)\ .$$

Важность значения определения операторов Казимира заключается в следующем.

Пусть $T(g)$ будет представлением группы $G_{\mathcal{L}}$. Генераторы $\frac{dT(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \left(\sum_k X_k c_k\right) T(t)$ образуют представление алгебры Ли $\mathcal{L}$ группы $G_{\mathcal{L}}$. Пусть имеется генератор, который в этом представлении соответствует элементу C, т.е. коммутирует со всеми генераторами X_k, а значит, со всеми операторами $T(g(t))$. Отсюда следует, что на основании леммы Шура представление может быть неприводимым только тогда, когда векторное пространство, на котором $T(g(t))$ определено, натянуто на множество собственных функций, соответствующих одному собственному значению оператора Казимира C. Значит, C в данном представлении кратен единичной матрице. Таким образом, каждому набору собственных значений всех операторов Казимира соответствует одно и только одно неприводимое представление. Поэтому проблема классификации неприводимых представлений группы $G_{\mathcal{L}}$ сводится к нахождению собственных значений операторов Казимира.

Напомним, что алгебры Ли $\mathcal{L}$ имеются простые и полупростые. Картан нашел критерий, по которому можно определить, когда рассматриваемая алгебра является полупростой. Для этого построим из структурных констант c_{ij}^k, определенных в (4.22), так называемую форму Киллинга:

$$g_{ij} = \sum_{k,\ell} c_{ik}^{\ell}\, c_{j\ell}^{k}. \qquad (4.24)$$

Теорема Картана состоит в утверждении, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы алгебра Ли была полупростой, является условие

$$\det g_{ij} \neq 0. \qquad (4.25)$$

Более того, необходимым и достаточным условием для того, чтобы соответствующая алгебра была компактной, является условие, чтобы форма Киллинга (4.24) была отрицательно определенной.

Из теоремы Картана следует, что g_{ij} в матричном представлении является несингулярной матрицей. Тогда можно определить g^{ij} уравнением

$$\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta_{ik}.$$

При помощи формы Киллинга можно для полупростой алгебры Ли построить оператор Казимира

$$C = \sum_{i,j} g_{ij} X_i X_j\ . \qquad (4.26)$$

Проверьте, что $[C, X_i] = 0$, т.е. что оператор Казимира, определенный уравнением (4.26), коммутирует со всеми генераторами алгебры $\mathcal{L}$.

Замечания

1) Можно доказать, что любая полупростая группа $G_{\mathcal{L}}$ ранга r содержит r операторов Казимира.

2) Общего правила построения операторов Казимира не существует.

Глава У. ПРИМЕРЫ ПРОСТЫХ И ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП

§ I. Группа вращений

Связь между координатами точек трехмерного пространства для двух наблюдателей, системы координат которых повернуты друг относительно друга вокруг общего начала координат, имеет вид

$$\vec{x}' = \mathbb{R}\,\vec{x} \tag{5.1}$$

или

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} R_{ik} x_k .$$

Длина вектора и угол между векторами остаются неизменными при вращениях, т.е.

$$x'_i y'_i = x_i y_i . \tag{5.2}$$

Из (5.2) следует, что

$$\mathbb{R}\mathbb{R}^T = \mathbb{R}^T\mathbb{R} = I , \tag{5.3}$$

т.е. вращения представляются ортогональными матрицами 3 х 3, элементы которых являются вещественными числами. Из (5.3) следует

$$\det \mathbb{R}\mathbb{R}^T = \det \mathbb{R}^T \det \mathbb{R} = (\det \mathbb{R})^2 = 1 ,$$

так что для матриц, удовлетворяющих (5.3), $\det \mathbb{R} = \pm 1$. Преобразования, для которых $\det \mathbb{R} = +1$, называют <u>собственными преобразованиями</u>, или вращениями. Те, для которых $\det \mathbb{R} = -1$, называют <u>несобственными ортогональными преобразованиями.</u> Типичным примером несобственного преобразования является <u>отражение</u> в начале координат, которое представляется матрицей

$$I_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{5.4}$$

Совокупность всех вращений в евклидовом трехмерном пространстве образует группу $SO(3)$. Группа всех вращений вместе с отражениями называется ортогональной группой O_3.

Замечание

Группа $SO(3)$ является инвариантной подгруппой группы $O(3)$. Действительно,

$$\det(\mathbb{R}\mathbb{R}_p\mathbb{R}^{-1}) = +1$$

для любой матрицы $\mathbb{R}_p \in SO(3)$ и $\mathbb{R} \in O(3)$.

Ядро гомоморфизма группы $O(3)$ на $SO(3)$ состоит из единичной

матрицы и матрицы (5.4). Обе эти матрицы определяют абелеву инвариантную подгруппу $\mathcal{P}$ группы $O(3)$; закон композиции, в которой

$$I^2 = I_s^2 = I , \qquad I I_s = I_s I = I_s . \tag{5.5}$$

Любой элемент группы $O(3)$ можно записать однозначным образом в виде умножения вращения на элемент группы $\mathcal{P}$, так что группа $O(3)$ является прямым произведением $SO(3)$ и $\mathcal{P}$, т.е.

$$O(3) = SO(3) \otimes \mathcal{P} . \tag{5.6}$$

Все неприводимые представления группы $O(3)$ можно теперь получить, если взять прямое произведение неприводимых представлений групп $SO(3)$ и $\mathcal{P}$. Поскольку группа $\mathcal{P}$ является абелевой, то она имеет только одномерные неприводимые представления

$$I = I_s = 1$$

или

$$I = 1 , \quad I_s = -1 .$$

(Докажите!)

Значит, чтобы знать все неприводимые представления группы $O(3)$, достаточно найти неприводимые представления группы $SO(3)$.

Каждое вращение может быть охарактеризовано заданием оси, вокруг которой осуществляется поворот, и величины угла поворота. Тем самым вращение может быть задано вектором $\vec{\omega}$, направленным вдоль оси вращения и равным по величине углу поворота φ, т.е. $\vec{\omega} = \vec{n}\varphi$, где $\vec{n}$ – единичный вектор и $0 \le \varphi \le 2\pi$. Так, вращение вокруг оси I задается вектором $(\omega_1, 0, 0)$, вокруг оси 2 – вектором $(0, \omega_2, 0)$ и вокруг оси 3 – вектором $(0, 0, \omega_3)$. Очевидно, что вектор вращения $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ имеет длину $|\vec{\omega}| \le 2\pi$ и что векторы вращения, описывающие все возможные вращения, заполняют шар радиуса π. Если вместо векторов ввести точки, которые заполняют объем шара, то, соответственно, различные точки внутри шара описывают различные вращения. Две диаметрально противоположные точки на поверхности шара – одно и то же вращение – должны быть отождествлены. Таким образом, задана топология группы $SO(3)$. Отметим, что элемент группы $SO(3)$ может рассматриваться как функция $\vec{\omega}$, т.е. $g = g(\vec{\omega})$. Множество точек групповых элементов $g = g(\vec{\omega})$ ограничено и замкнуто. Значит группа $SO(3)$ компактна, что уже было показано (гл. I, § 6) при помощи инвариантной меры.

Представление группы $SO(3)$, T_g, можно тоже записать как функцию $\vec{\omega}$, т.е. $T_g = T(\vec{\omega})$. Вектор $\vec{\omega} = 0$ соответствует тождественному преобразованию $T(\vec{0}) = I$.

Как упоминалось выше, фундаментальную роль будут играть бесконечно малые вращения вокруг некоторой оси. Они порождают однопараметрические подгруппы, и любое конечное вращение может быть построено как последовательность бесконечно малых. Пусть $\mathbb{R}^{(3)}(\varphi)$ – матрица поворота на угол φ вокруг оси 3. Генератор вращения вокруг оси 3 тогда равен

$$X_3 = \frac{d}{d\varphi}\mathbb{R}^{(3)}(\varphi)\Big|_{\varphi=0}. \tag{5.7}$$

При бесконечно малом ε можно записать

$$\mathbb{R}^{(3)}(\varphi) = 1 + X_3\varepsilon + O(\varepsilon^2) .$$

Вращение на угол φ вокруг оси 3 можно рассматривать как результат n поворотов на угол φ/n. Поэтому при $n\to\infty$ получим

$$\mathbb{R}^{(3)}(\varphi) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\varphi}{n}X_3\right)^n = e^{nX_3} .$$

Так как

$$\mathbb{R}^{(3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то, вычисляя X_3 по (5.7), имеем

$$X_3 = \frac{d}{d\varphi}\mathbb{R}^{(3)}(\varphi)\Big|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно определить генераторы вращений вокруг осей I и 2:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что генераторы X_i (i = I,2,3) удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$[X_i, X_j] = -\varepsilon_{ijk}X_k , \qquad (i,j,k = 1,2,3). \tag{5.8}$$

Отметим также, что оператор отражения I_s в (5.4) коммутирует со всеми вращениями

$$[I_s, X_i] = 0 , \qquad (i = 1,2,3).$$

Алгебра Ли группы вращений состоит из трех линейно независимых операторов X_1, X_2 и X_3, удовлетворяющих соотношению (5.8). Каждый из этих операторов по отдельности порождает однопараметрическую подгруппу вращения вокруг соответствующих пространственных осей. Бесконечно малый поворот вокруг произвольного направления $\vec{\varepsilon}$ на угол $|\vec{\varepsilon}|$ может быть записан в виде

$$\mathbb{R}(\vec{\varepsilon}) = 1 + \varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2 + \varepsilon_3 X_3 + O(\varepsilon^2) .$$

Соответствующий оператор представления группы $SO(3)$, $T(\vec{\varepsilon})$, можно записать

$$T(\vec{\varepsilon}) = T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = I + \varepsilon_1 M_1 + \varepsilon_2 M_2 + \varepsilon_3 M_3 + O(\varepsilon^2),$$

где M_i образуют представление генераторов алгебры Ли и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[M_i, M_j] = -\varepsilon_{ijk}M_k .$$

Как было показано в IУ главе, § 5, оператор $T(\vec{\omega})$ при произвольном $\vec{\omega}$ полностью определяется генераторами M_i (i = I;2,3); представим его в виде

$$T(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = e^{\omega_1 M_1 + \omega_2 M_2 + \omega_3 M_3} . \tag{5.9}$$

В унитарных представлениях операторы T унитарны и, следовательно, операторы M_i антиэрмитовы. Поэтому операторы

$$J_i = -i M_i$$

будут эрмитовы. J_i удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям для операторов момента количества движения

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k . \tag{5.10}$$

Проблема нахождения всех неприводимых представлений группы $SO(3)$ эквивалентна нахождению всех возможных совокупностей матриц J_1, J_2, J_3, удовлетворяющих соотношениям (5.10). Теперь надо найти все операторы Казимира группы $SO(3)$, и проблема классификации неприводимых представлений группы $SO(3)$ сводится к нахождению спектра собственных значений этих операторов.

В случае группы $SO(3)$ имеется лишь один оператор Казимира

$$\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 ,$$

который, согласно лемме Шура, должен быть кратен единичной матрице

$$\vec{J}^2 = \lambda I, \tag{5.11}$$

где λ – некоторое число, I – единичная матрица (размерность которой мы определим позднее). Сначала надо найти значение λ. Для этого перейдем от генераторов J_1, J_2, J_3 к другому набору генераторов J_+, J_-, J_3, определяемых равенствами:

$$J_\pm = (J_1 \pm i J_2)/\sqrt{2}, \qquad J_3 = J_3 .$$

Операторы $J_\pm$ называются также повышающими и понижающими. Смысл этого будет виден ниже. На основании (5.10) перестановочные соотношения для генераторов $J_\pm$, J_3 равны:

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm , \qquad [J_+, J_-] = J_3 . \tag{5.12}$$

Кроме того, из эрмитовости генераторов J_1, J_2, J_3 следует, что

$$J_+^+ = J_- .$$

Из коммутационных соотношений (5.12) ясно, что генераторы (напомним, что они представляются матрицами) $J_\pm$, J_3 не могут быть приведены одновременно к диагональному виду. Выберем диагональную матрицу J_3. Введем собственные векторы ϕ_m оператора J_3 с собственными значениями m:

$$J_3 \phi_m = m \phi_m .$$

Векторы ϕ_m можно выбрать нормированными (они ортогональны):

$$(\phi^*_{m'}, \phi_m) = \delta_{m'm} .$$

Рассмотрим векторы $J_\pm \phi_m$. Покажем, что они также являются собственными векторами оператора J_3. Действительно, используя (5.12), имеем

$$J_3 (J_\pm \phi_m) = (m \pm 1)(J_\pm \phi_m). \tag{5.13}$$

Обозначим $J_\pm \phi_m = \phi_{m\pm 1}$. Видно, что операторы $J_\pm$ повышают и понижают собственное значение m на единицу, так что (5.13) можно записать

$$J_3 (J_\pm \phi_m) = (m \pm 1) \phi_{m \pm 1} .$$

Поскольку искомые неприводимые представления группы $SO(3)$ конечномерны, то среди собственных значений m существует наибольшее, которое мы обозначим буквой j. Тогда, используя (5.13), получим

$$J_+ \phi_j = 0 \tag{5.14}$$

(в противном случае существовало бы собственное значение $j+1 > j$). Из конечномерности представления вытекает, что должно существовать и наименьшее собственное значение, поэтому согласно (5.13)

$$J_-^{(k)} \phi_j = 0, \tag{5.15}$$

где k – достаточно большое число. Из формул (5.13)–(5.15) следует, что матрица J_3 имеет собственные векторы

$$\phi_j,\ J_-\phi_j,\ J_-^{(2)}\phi_j,\ J_-^{(3)}\phi_j, \ldots,\ J_-^{(N)}\phi_j , \tag{5.16}$$

отвечающие собственным значениям

$$j,\ j-1,\ j-2,\ j-3, \ldots,\ j-N , \tag{5.17}$$

N – целое число, такое, что

$$J_-^{(N+1)} \phi_j = 0 .$$

До сих пор мы не использовали неприводимости представления. Следствием неприводимости представления является тот факт, что векторы (5.16) исчерпывают все собственные векторы, а значения (5.17) – все собственные значения оператора J_3. Теперь отыскание всех неприводимых представлений группы $SO(3)$ состоит в нахождении генераторов $J_\pm$, J_3. Воспользуемся равенством

$$\mathrm{Sp}\, J_3 = 0,$$

которое вытекает из коммутационных соотношений (5.12). Так как J_3 – диагональная матрица, получим

$$\mathrm{Sp}\, J_3 = j + (j-1) + \cdots + (j-N) = \tfrac{1}{2}(2j-N)(N+1) = 0,$$

откуда следует

$$j = N/2 ,$$

где N – целое число, и, следовательно, j может быть либо целым, либо полуцелым числом. Таким образом, J_3 имеет вид

$$J_3 = \begin{pmatrix} j & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & -j \end{pmatrix},$$

а размерность представления равна $2j+1$. Для нахождения λ в

(5.II) подействуем $\vec{J}^2$ на собственный вектор ϕ_j. Оператор $\vec{J}^2$ при помощи $J_\pm$, J_3 можно записать в следующем виде:

$$\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_+ J_- + J_- J_+ + J_3^2 .$$

Тогда

$$\vec{J}^2 \phi_j = \{ (J_+ J_- - J_- J_+) + 2 J_- J_+ + J_3^2 \} \phi_j = (J_3^2 + J_3)\phi_j = j(j+1)\phi_j , \quad (5.18)$$

т.е.

$$\lambda = j(j+1) .$$

При вычислении (5.I8) мы использовали равенства (5.I2) и (5.I4). Очевидно, что размерность единичной матрицы в (5.II) равна $(2j+1)(2j+1)$. Найдем теперь матрицы $J_\pm$. Исходя из формулы (5.I3), можно записать

$$J_\pm \phi_m = N_{m\pm 1}^{(\pm)} \phi_{m\pm 1} ,$$

где $N_{m\pm1}^{(\pm)}$ – некоторые числа. Состояния ϕ_m ортонормированы, так что

$$(\phi_m^* , J_\pm \phi_{m'}) \equiv (J_\pm)_{mm'} = N_{m\pm 1}^{(\pm)} \delta_{m, m'\pm 1} .$$

Таким образом, у матриц $J_\pm$ отличны от нуля только элементы диагонали, расположенной над (под) главной диагональю. Далее, поскольку $J_+^+ = J_-$, то

$$N_m^{(+)} = N_{m-1}^{(-)*} . \quad (5.19)$$

Используя (5.I9), получаем

$$J_+ \phi_{k-1} = \frac{1}{N_{k-1}^{(-)}} J_+ J_- \phi_k = \frac{1}{N_{k-1}^{(-)}} [J_+ , J_-]\phi_k = \frac{1}{N_{k-1}^{(-)}} (J_3 + J_+ J_-)\phi_k =$$
$$= \frac{1}{N_{k-1}^{(-)}} (k + N_{k+1}^{(+)} N_k^{(-)})\phi_k = N_k^{(+)} \phi_k . \quad (5.20)$$

Поскольку $N_{k+1}^{(+)} = N_k^{(-)*}$, получим из (5.20)

$$|N_k^{(+)}|^2 - |N_{k+1}^{(+)}|^2 = k . \quad (5.21)$$

Сложив равенства (5.2I) для всех k, от $k=j$ до $k=m$, и, учитывая, что $N_{j+1}^{(+)} = 0$ и $N_{-j-1}^{(-)} = 0$, т.е.

$$|N_j^{(+)}|^2 = j$$
$$|N_{j-1}^{(+)}|^2 - |N_j^{(+)}|^2 = j-1$$
$$\vdots$$
$$|N_{j-\ell}^{(+)}|^2 - |N_{j-\ell+1}^{(+)}|^2 = j-\ell ,$$

получим

$$|N_{j-\ell}^{(+)}|^2 = (\ell+1)j - \frac{\ell(\ell+1)}{2} = \frac{1}{2}(\ell+1)(2j-\ell) .$$

Если обозначить $j-\ell = m$, то

$$N_m^{(+)} = e^{i\delta_m} \left[\frac{(j+m)(j-m+1)}{2} \right]^{1/2} .$$

Фаза δ_m остается неопределенной. Так как перестановочные соотношения никаких ограничений на фазу не накладывают, можно выбирать $\delta_m = 0$.

Суммируя результаты, можно отметить, что повышающий и понижающий операторы J_+, J_- имеют соответственно вид

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & N_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N_{j-1} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & N_{-j-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ N_j & 0 & & & 0 \\ 0 & N_{j-1} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & N_{-j+1} & 0 \end{pmatrix} ,$$

где

$$N_k = \frac{1}{\sqrt{2}} [(j+k)(j-k+1)]^{1/2} .$$

Теперь можно найти генераторы J_1 и J_2 :

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & N_j & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ N_j & 0 & N_{j-1} & & & \vdots \\ 0 & N_{j-1} & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & 0 & N_{j+1} \\ 0 & \cdots & & & N_{j+1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -N_j & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ N_j & 0 & -N_{j-1} & & & \vdots \\ 0 & N_{j-1} & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & 0 & -N_{j+1} \\ 0 & \cdots & & & N_{j+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

При $j=0$ представление одномерно, каждый элемент группы отображается единичным элементом, генераторы тождественно равны нулю. Представление называем скалярным.

Нетривиальное представление размерности два, $(2j+1)=2$, т.е. $j=1/2$, можно реализовать эрмитовыми матрицами Паули σ_i, умноженными на $1/2\, i$. Генераторы данного представления равны

$$M_i^{(1/2)} \equiv \frac{1}{2} i\, \sigma_i .$$

σ_i удовлетворяют соотношению

$$\sigma_\ell \sigma_j = \delta_{\ell j} + i \varepsilon_{\ell j k} \sigma_k .$$

Таким образом, в представлении $j=1/2$ оператор поворота на угол φ вокруг оси 3 записывается в виде

$$T_3^{(1/2)}(\varphi) = T^{(1/2)}(0,0,\varphi) = e^{i/2\,\sigma_3 \varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\varphi\right)^n \sigma_3^n =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^4 + \cdots\right] + i\sigma_3 \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^5 - \cdots\right] =$$

$$= \cos\frac{\varphi}{2} + i\sigma_3 \sin\frac{\varphi}{2} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

Аналогично в представлении $j=1/2$ записываются операторы поворотов на угол φ вокруг осей I и 2:

$$T_1^{(1/2)}(\varphi) = T^{(1/2)}(\varphi,0,0) = e^{i/2\,\varphi\sigma_1} = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sigma_1 \sin\frac{\varphi}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & i\sin\frac{\varphi}{2} \\ i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix},$$

$$T_2^{(1/2)}(\varphi) = T^{(1/2)}(0,\varphi,0) = e^{i/2\,\varphi\sigma_2} = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sigma_2 \sin\frac{\varphi}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}.$$

Видно, что матрицы $T_i^{(1/2)}(\varphi)$ (i = I,2,3) унитарны и имеют детерминант, равный единице. Отметим, что поворот на угол 2π вокруг любой оси дает

$$T_i^{(1/2)}(\varphi + 2\pi) = -T_i^{(1/2)}(\varphi).$$

Таким образом, представление $j=1/2$ двузначно и называется спинорным представлением, а величины, преобразующиеся по этим представлениям, называются спинорами.

Замечания

I) Можно показать, что любое представление группы $SO(3)$ с полуцелым j двузначно.

2) Двузначность спинорных представлений не порождает двузначности наблюдаемых физических величин, связанных со спинорами, так как эти величины выражаются через спиноры билинейно (см. ниже).

При $j=1$ представление трехмерно, и в качестве матричного представления генераторов $M_i^{(1)}$ можно взять матрицы X_i, определенные в (5.8). Обычно их выбираем в следующем виде:

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это представление называется векторным. Величины ξ , которые при вращении системы координат

$$\vec{x}' = \mathbb{R}\,\vec{x} \qquad (5.22)$$

преобразуются по закону

$$\xi' = T^{j}(\mathbb{R})\,\xi,$$

называют скалярами при $j = 0$, спинорами I-го ранга при $j = 1/2$, векторами при $j = 1$, спинорами 2-го ранга при $j = 3/2$, тензорами при $j = 2$ и т.д. (спиноры n -го ранга, тензоры n -го ранга). При бесконечно малых поворотах на угол $\delta\varphi$ вокруг i-й оси закон преобразования принимает вид

$$\xi \to \xi' = (1 + \delta\varphi^{i} M_i^{(j)})\,\xi.$$

Таким образом, скаляр есть однокомпонентная величина, которая при вращениях (5.22) преобразуется по закону

$$\xi' = \xi \;.$$

Спинор I-го ранга является двухкомпонентной величиной $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, которая при бесконечно малых поворотах на угол $\delta\varphi$ вокруг i -й оси преобразуется по закону

$$\xi \to \xi' = (1 + \tfrac{i}{2}\,\delta\varphi^{i}\sigma_i)\,\xi \;.$$

Вектор является трехкомпонентной величиной $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, компоненты которой ξ_i (i = 1,2,3) при вращении (5.22) преобразуются так же, как сами координаты.

Теперь вернемся к спинорам. Покажем, что можно построить билинейную форму из двух спиноров, которая имеет определенные трансформационные свойства при вращениях (5.22). Эту форму можно построить следующим образом. Введем сначала понятие сопряженного спинора. Сопряжение выполняется обычным образом путем транспонирования и комплексного сопряжения. Таким образом, при j = 1/2 спинор ξ^* , сопряженный к ξ , имеет вид

$$\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*) \;.$$

При бесконечно малом повороте вокруг i -й оси ξ^* преобразуется по закону

$$\xi^* \to \xi^{*\prime} = \xi^*(1 - \tfrac{i}{2}\,\delta\varphi^{i}\sigma_i).$$

Скалярное произведение спиноров χ и ξ определяется следующим образом:

$$\chi^*\xi = \sum_{i=1}^{2} \chi_i^*\,\xi_i \,. \qquad (5.23)$$

Величина $\chi^*\xi$ при бесконечно малом повороте преобразуется согласно

$$\chi^*\xi \to \chi^{*\prime}\xi' = \chi^*(1 - \tfrac{i}{2}\delta\varphi^{i}\sigma_i)(1 + \tfrac{i}{2}\delta\varphi^{i}\sigma_i)\,\xi = \chi^*\xi + O(\delta\varphi^2),$$

т.е. как скаляр. Доказательство для конечных поворотов просто. Так как $T^{(1/2)}(\vec{\omega})$ при любом $\vec{\omega}$ представляется унитарной матрицей 2 х 2, то

$$\chi^*\xi \to \chi^{*\prime}\xi = \chi^*\,T^{(1/2)*}(\vec{\omega})\,T^{(1/2)}(\vec{\omega})\,\xi = \chi^*\xi.$$

Аналогично можно показать, что величина $\chi^*\sigma_i\,\xi$ при вращении преобразуется как вектор. (Докажите!)

В конце этого параграфа следует отметить, что прямое произведение двух неприводимых представлений группы вращения, характеризуемое значениями j_1 и j_2, вполне приводимо. Оно разбивается на неприводимые представления с собственными значениями j , где $|j_1 - j_2| \le j \le j_1 + j_2$, причем каждое из этих представлений входит только один раз:

$$T^{(j_1, j_2)}(g) \equiv T^{(j_1)}(g) \otimes T^{(j_2)}(g) = T^{(|j_1 - j_2|)}(g) \oplus \ldots \oplus T^{(j_1 + j_2)}(g) \,. \qquad (5.24)$$

Это утверждение[x)] называется теоремой Клебша-Гордана. Формула (5.24) означает, что существует матрица, приводящая одновременно

[x)] Оно выражает квантовый закон сложения углового момента, а j называется спином.

все матрицы $T^{(j_1,j_2)}(g)$ к квазидиагональному виду

$$S\,T^{(j_1,j_2)}(g)\,S^{-1} = \begin{pmatrix} T^{(j_1+j_2)} & & & \\ & T^{(j_1+j_2-1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T^{(|j_1-j_2|)} \end{pmatrix}. \qquad (5.25)$$

Элементы матрицы S, осуществляющей разбиение прямого произведения $T^{(j_1)}(g) \otimes T^{(j_2)}(g)$ на неприводимые представления, называются коэффициентами Клебша - Гордана и обозначаются символом

$$C^{jm}_{j_1m_1,\,j_2m_2}, \qquad \text{где} \quad j = (j_1+j_2), \ldots, |j_1-j_2|; \quad -j \le m \le j.$$

Матрица S определяется формулой (5.25) неоднозначно. Обычно условие (5.25) дополняется требованием унитарности. Матрица может быть выбрана не только унитарной, но даже ортогональной, так что коэффициенты Клебша - Гордана становятся действительными числами. Коэффициенты Клебша - Гордана широко используются в квантовой механике и излагаются в учебниках квантовой механики в связи с конкретными вычислениями.

§ 2. Группы $SU(2)$ и $SU(3)$

Существует гомоморфизм группы $SU(2)$ в группу вращений $SO(3)$. Напомним, что общий вид матриц, образующих группу $SU(2)$, следующий:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Если положить $a = a_0 + i a_3$, $b = a_2 + i a_1$, то матрицу $\mathcal{U}$ можно записать в виде

$$\mathcal{U} = a_0 I + i\,\vec{a}\cdot\vec{\sigma}, \qquad (5.26)$$

где $\vec{\sigma}$ - матрицы Паули и $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Вещественные параметры a_i ($i = 0,1,2,3$) удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^{3} a_i^2 = 1 \equiv a_0^2 + \vec{a}^{\,2}.$$

Теперь можно определить

$$a_0 = \cos\frac{\omega}{2}, \qquad |\vec{a}| = \sin\frac{\omega}{2} \qquad (0 \le \omega \le 2\pi)$$

и (5.26) переписать в виде

$$\mathcal{U}(\omega) = \cos\frac{\omega}{2} - i\sin\frac{\omega}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \equiv \exp\left\{-i\frac{\omega}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right\}, \qquad (5.27)$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор в направлении вектора $\vec{a}$.
Гомоморфизм группы $SU(2)$ в группу $SO(3)$ осуществляется отображением двух матриц $\pm\,\mathcal{U}(\omega)$ в (5.27) на матрицы $\mathbb{R}(\omega)$ группы $SO(3)$. Группа $SO(3)$ имеет однозначные и двузначные (спинорные) представления, все эти представления являются однозначными представлениями группы $SU(2)$. Поэтому если найти все унитарные неприводимые конечномерные представления группы $SU(2)$, то будут определены все представления группы $SO(3)$.

Алгебра Ли группы $SU(2)$ совпадает с алгеброй группы $SO(3)$, т.е. генераторы J_i ($i = 1,2,3$) удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[J_i, J_j] = i\,\varepsilon_{ijk} J_k.$$

Таким образом, определены структурные константы группы $SU(2)$, совпадающие со структурными константами группы $SO(3)$. Учитывая теперь критерий Картана (4.25), получим

$$g_{ij} = -\delta_{ij},$$

откуда следует, что группы $SU(2)$ и $SO(3)$ являются полупростыми. На самом деле группа $SU(2)$ не имеет инвариантных подгрупп, так что можно сказать, что она простая. (Покажите, что группа $SU(2)$ или $SO(3)$ не имеет инвариантных подгрупп). В заключение можно сказать, что группы $SO(3)$ и $SU(2)$ являются простыми и компактными.

Перейдем теперь к группе $SU(3)$. Группа $SU(3)$ - множество унитарных, унимодулярных 3 x 3 матриц. Элементы данной группы определяются восемью независимыми вещественными параметрами. Любой элемент группы $SU(3)$ можно записать в виде

$$\mathcal{U} = \exp\left\{i\sum_k a_k F_k\right\}, \qquad (5.28)$$

где a_k - вещественные параметры и iF_k - восемь генераторов группы $SU(3)$. Обычно эти генераторы выбираются в следующем виде:

$$F_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_6 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_7 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Операторы F_k удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k . \tag{5.29}$$

Эти константы f_{ijk} полностью антисимметричны по отношению к перестановке любых двух индексов. Уравнение (5.29) определяет структурные константы группы, которые характеризуют алгебру Ли группы $SU(3)$, и те из них, которые отличны от нуля, принимают значения:

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{156} = -f_{367} = 1/2$$

$$f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2 .$$

Вычисляя тензор g_{ij} по форме Киллинга (4.24), получим

$$g_{ij} = -3\delta_{ij} ,$$

откуда следует, что группа $SU(3)$ является полупростой и компактной.

Кроме того, генераторы F_k в (5.29) удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$[F_i, F_j]_+ = \frac{1}{4}\delta_{ij} I + \sum_k d_{ijk} F_k . \tag{5.30}$$

Здесь константы d_{ijk} полностью симметричны относительно перестановки индексов. Они также являются структурными константами. Отличные

от нуля d_{ijk} равны

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = 1/\sqrt{3}$$

$$d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -1/(2\sqrt{3})$$

$$d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = 1/2 .$$

Для структурных констант f_{ijk} и d_{ijk} существует соотношение, которое можно получить, если использовать аналог тождества Якоби

$$[F_i, \{F_j, F_k\}] = \{[F_i, F_j], F_k\} + \{[F_i, F_k], F_j\},$$

откуда

$$\sum_k (d_{ijk} f_{kem} + f_{kem} d_{ijk}) = \sum_k d_{kjm} f_{kie} .$$

Заметим, что группа $SU(3)$ является группой ранга 2. У неё существуют два оператора Казимира C_1 и C_2 :

$$C_1 = \sum_{i=1}^{8} F_i^2 \equiv \frac{2i}{3} \sum_{i,j,k} f_{ijk} F_i F_j F_k \tag{5.31}$$

и

$$C_2 = \sum_{i,j,k} d_{ijk} F_i F_j F_k .$$

Собственные значения операторов Казимира C_1 и C_2 можно использовать для классификации неприводимых представлений. Конечно, нас интересуют только конечномерные унитарные неэквивалентные неприводимые представления. Для практических целей полезно ввести новый базис генераторов следующим образом:

$$I_\pm = F_1 \pm i F_2 , \quad U_\pm = F_6 \pm i F_7 , \quad V_\pm = F_4 \pm i F_5 ,$$

$$I_3 = F_3 , \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8 . \tag{5.32}$$

Перестановочные соотношения генераторов (5.32) равны:

$$[I_3, I_\pm] = \pm I_\pm , \qquad [I_+, I_-] = 2 I_3 ,$$

$$[I_3, U_\pm] = \mp \frac{1}{2} U_\pm , \qquad [I_3, V_\pm] = \pm \frac{1}{2} V_\pm ,$$

$$[I_+, V_+] = [I_+, U_-] = [U_+, V_+] = [Y, I_\pm] = [I_3, Y] = 0,$$

$$[Y, U_\pm] = \pm U_\pm, \quad [Y, V_\pm] = \pm V_\pm, \quad [I_+, V_-] = -U_-,$$

$$[I_+, U_+] = V_+, \quad [U_+, U_-] = \frac{3}{2} Y - I_3 \equiv 2U_3,$$

$$[U_+, V_-] = I_-, \quad [V_+, V_-] = \frac{3}{2} Y + I_3 = 2V_3 .$$

Из этих коммутационных соотношений видно, что группа $SU(3)$ имеет три независимые подгруппы $SU(2)$. Именно операторы

$$(I_+, I_-, I_3), \quad (U_+, U_-, U_3), \quad (V_+, V_-, V_3)$$

и определяют алгебру трех различных групп $SU(2)$. Мы не будем здесь рассматривать неприводимые представления этих групп, напомним только, что компактные группы имеют нетривиальные конечномерные унитарные представления.

Замечание

Поскольку группы преобразований $SU(2), SU(3)$ не затрагивают координат пространства Минковского, то принято их называть в физике элементарных частиц - группы внутренней симметрии.

Глава УI. ГРУППА ЛОРЕНЦА И ЕЁ РАСШИРЕНИЕ

§ I. Группа Лоренца

Рассмотрим важнейшие свойства группы Лоренца L_H. Пространственно-временные координаты x^μ ($\mu = 0,1,2,3$) являются элементами четырехмерного пространства Минковского. Здесь $x^0 = ct$ - координата времени и x^1, x^2, x^3 - пространственные координаты.

Метрический тензор пространства $g_{\mu\nu}$ представляется диагональной матрицей с вещественными элементами

$$g_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1).$$

Следует различать контравариантные векторы a^μ и ковариантные a_μ. Операция опускания и поднимания индексов достигается сверткой с метрическим тензором

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \qquad a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu .$$

Тензор $g^{\mu\nu}$ удовлетворяет соотношениям

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = \delta^\nu_\sigma,$$

где δ^ν_σ - символ Кронекера. При этом $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

Напомним суть преобразования Лоренца. Если две системы отсчета движутся друг относительно друга в направлении оси I, то связь между ними выражается преобразованием Лоренца

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) = x^0 ch\, u - x^1 sh\, u, \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) = x^1 ch\, u - x^0 sh\, u, \\ x'^2 &= x^2, \\ x'^3 &= x^3, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где v - относительная скорость двух систем отсчета, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$, а $u = arc\,th\,\beta$ — так называемая быстрота.

Наиболее общим преобразованием Лоренца является вещественное преобразование

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \qquad \overset{*}{\Lambda}{}^\nu_\mu = \Lambda^\nu_\mu, \tag{6.2}$$

которое оставляет инвариантной квадратичную форму

$$x^2 = x_\mu x^\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv x_0^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2 .$$

Из этого требования следует, что

$$\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\rho_\nu = \Lambda^{\mu\rho} \Lambda_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu . \tag{6.3}$$

Последнее соотношение можно записать в виде

$$\Lambda_{\mu}^{\sigma} g_{\sigma\rho} \Lambda_{\nu}^{\rho} = g_{\mu\nu},$$

откуда видно, что

$$(\det \Lambda)^2 = 1, \tag{6.4}$$

и, следовательно, для каждого преобразования Лоренца существует обратное преобразование. Произведение двух преобразований Лоренца снова является преобразованием Лоренца, и совокупность всех преобразований Лоренца образует группу. Порядок группы равен шести, поскольку в группе L_H имеется шесть генераторов, соответствующих вращениям в каждой из шести плоскостей пространства-времени.

Изучая топологические свойства группы L_H, начнем с того, что сохранение x^2 выполняется как при непрерывных, так и при некоторых дискретных преобразованиях. Из уравнения (6.4) следует $\det \Lambda = \pm 1$. Таким образом, преобразования, у которых $\det \Lambda = -1$, являются и дискретными преобразованиями, конкретно пространственное отражение I_s и временное отражение I_t:

$$I_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad I_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из преобразований, у которых $\det \Lambda = +1$, рассмотрим те, что являются непрерывными. Все совокупности матриц Λ группы L_H видны, если в уравнении (6.3) положить $\mu = \nu = 0$. Тогда получим

$$(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda_0^i)^2 \geq 1,$$

так что $\Lambda_0^0 \geq 1$ или $\Lambda_0^0 \leq -1$. Видно, что совокупность эта может быть разбита на четыре дискретных подмножества.

Подмножество I : $\det \Lambda = +1$ $\quad \Lambda_0^0 \geq 1$

Подмножество II : $\det \Lambda = -1$ $\quad \Lambda_0^0 \geq 1$

Подмножество III : $\det \Lambda = -1$ $\quad \Lambda_0^0 \leq -1$

Подмножество IV: $\det \Lambda = +1$ $\quad \Lambda_0^0 \leq -1.$

Эти подмножества не могут быть соединены друг с другом непрерыв-

ным образом. Подмножество I образует группу ограниченных преобразований Лоренца L_{HR}, которая является параметрической непрерывной группой. Кроме того, группа L_{HR} является ядром гомоморфизма и поэтому образует инвариантную подгруппу группы Лоренца L_H. Группа V, которая состоит из элементов I, I_s, I_t и $I_{st} = I_s I_t$, тоже образует подгруппу группы Лоренца, но не инвариантную, и называется группой отражений. Поэтому группу Лоренца L_H нельзя записать в виде прямого произведения ограниченной группы Лоренца L_{HR} и группы V, т.е.

$$L_H \neq L_{HR} \otimes V.$$

Мы не будем рассматривать неприводимые представления группы Лоренца L_H, т.е. группы с отражениями, а ограничимся группой L_{HR}, которую называют также собственной ортохронной группой Лоренца. Группа L_{HR} включает преобразования вида

$$\Lambda(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

где R – трехмерные ортогональные матрицы вращений $(R \in SO(3))$. Кроме преобразований (6.5), группа L_{HR} содержит "чисто лоренцевские" преобразования перехода в движущуюся систему отсчета. Если взять такое преобразование вдоль оси I, то согласно (6.I) оно имеет вид

$$\Lambda(u,1\,0) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u & -\operatorname{sh} u & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Как можно показать, любое преобразование Лоренца может быть представлено следующим образом:

$$\Lambda = \Lambda(R_1)\,\Lambda(u,1\,0)\,\Lambda(R_2), \tag{6.7}$$

где $\Lambda(R_1)$ и $\Lambda(R_2)$ – вращения и $\Lambda(u,1\,0)$ – чисто лоренцевское преобразование вдоль оси I. Представление произвольной матрицы Λ из собственной группы Лоренца L_{HR} в виде (6.7) можно получить из следующих соображений.

Вначале мы совершим поворот R_1, направляя ось I покоящейся системы по направлению скорости $\vec{v}$ движущейся системы. Затем произведем переход $\Lambda(u,1\,0)$ в систему отсчета, движущуюся теперь (т.е.

после поворота R_1) вдоль оси I неподвижной системы со скоростью $\vec{v}$. Наконец, повернем (вращение R_2) ось получившейся в результате двух предыдущих преобразований движущейся системы отсчета до совпадения с осями заданной движущейся системы.

Формула (6.7) показывает, что существенно новым в группе Лоренца, сравнительно с группой вращений, являются "чисто лоренцевские" преобразования.

Как и в случае группы вращений, нетрудно найти вид генераторов для преобразований Лоренца. При бесконечно малых преобразованиях

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \varepsilon \lambda^{\mu}_{\nu} \tag{6.8}$$

условие (6.2) накладывает следующее ограничение на λ^{μ}_{ν} :

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{ij} &= -\lambda^{ji} \\ \lambda^{ii} &= 0 \\ \lambda^{oi} &= \lambda^{io} \\ \lambda^{oo} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (i,j = 1,2,3).$$

Явное матричное представление "чисто лоренцевского" преобразования вдоль оси I (вращение в плоскости $x^o x^1$) дает матрица (6.7)). Генератор M^{10} для этого вращения

$$M^{10} = \frac{d}{du} \Lambda(u,10)\Big|_{u=0}$$

имеет вид

$$M^{10} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Определяя аналогичным образом генераторы M^{20} и M^{30} для вращений вдоль осей 2 (плоскость $x^o x^2$) и 3 (плоскость $x^o x^3$), получим

$$M^{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^{30} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Генераторы пространственных вращений в плоскостях $x^i x^j$:

$$M^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

$$M^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из равенств (6.9)-(6.II) следует, что генераторы M^{io} - эрмитовы, а M^{ij} - антиэрмитовы (i,j = I,2,3). Вычисляя непосредственно коммутаторы матриц M^{ij} и M^{io} , находим алгебру Ли ограниченной группы Лоренца L_{MR} . Если ввести операторы

$$\vec{M} = (M_{32}, M_{13}, M_{21}),$$

$$\vec{N} = (M_{10}, M_{20}, M_{30}),$$

то получим

$$\begin{aligned} [M_i, M_j] &= \varepsilon_{ijk} M_k, \\ [M_i, N_j] &= \varepsilon_{ijk} N_k, \\ [N_i, N_j] &= -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad (i,j,k = 1,2,3). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Эти коммутационные соотношения очень похожи на алгебру Ли группы вращений, но на самом деле существенно отличаются от нее не только числом генераторов. Уже было показано, что структурные константы алгебры Ли группы вращений полностью антисимметричны по всем трем индексам. Что касается алгебры Ли (6.I2) группы Лоренца L_{HR} , то никакой нумерацией генераторов M_i и N_i нельзя добиться полной антисимметрии структурных констант этой алгебры. Причина же, по которой структурные константы алгебры Ли группы Лоренца L_{HR} не антисимметричны по всем индексам (а только по двум нижним), состоит в том, что группа Лоренца некомпактна. Алгебру Ли группы L_{HR} можно упростить, если введем операторы

$$J_i = \frac{1}{2}(M_i + N_i)$$

и

$$K_i = \frac{1}{2}(M_i - N_i).$$

Из формул (6.12) можно получить перестановочные соотношения для генераторов $\mathcal{J}_i$ и $\mathcal{K}_i$:

$$[\mathcal{J}_k, \mathcal{J}_l] = i\,\varepsilon_{klm}\mathcal{J}_m,$$
$$[\mathcal{K}_l, \mathcal{K}_m] = i\,\varepsilon_{lmn}\mathcal{K}_n,$$
$$[\mathcal{J}_l, \mathcal{K}_m] = 0, \qquad k,l,m = 1,2,3. \tag{6.13}$$

Таким образом, перестановочные соотношения между некоммутирующими генераторами совпадают с алгеброй Ли группы вращений. При помощи генераторов $i\,\mathcal{M}^{\mu\nu}$ произвольное бесконечно малое преобразование Лоренца может быть теперь представлено в виде

$$\Lambda(\omega) = I + \tfrac{i}{2}\,\omega^{\mu\nu}\mathcal{M}_{\mu\nu}\ , \text{ где } \quad \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}.$$

Конечные вращения в плоскости $x^\mu x^\nu$ выражаются в виде экспоненты

$$\Lambda(\omega;\mu\nu) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\mathcal{M}_{\mu\nu}}.$$

Можно показать, что генераторы $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[\mathcal{M}_{\mu\nu}, \mathcal{M}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}\mathcal{M}_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}\mathcal{M}_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma}\mathcal{M}_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}\mathcal{M}_{\mu\sigma}. \tag{6.14}$$

Поэтому если все четыре индекса $\mu\nu\rho\sigma$ различны, то матрицы коммутируют.

Пусть теперь $\Gamma(\Lambda)$ – любое представление ограниченной группы Лоренца L_{HR} . Генераторы этого представления обозначим через $M_{\mu\nu}$. Так как $M_{\mu\nu}$ образуют представление генераторов алгебры Ли группы L_{HR} , то они удовлетворяют тем же самым перестановочным соотношениям, что и $\mathcal{M}_{\mu\nu}$, т.е.

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}. \tag{6.15}$$

Проблема нахождения представлений группы L_{HR} эквивалентна проблеме нахождения всех представлений коммутационных соотношений (6.15).

Группа L_{HR} имеет конечномерные и бесконечномерные неприводимые представления.

При построении неприводимых представлений группы Лоренца будем исходить из того, что генераторы $M_{\mu\nu}$, так же, как и $\mathcal{M}_{\mu\nu}$, можно переопределить. Обозначая

$$\vec{M} = (M_{32}, M_{13}, M_{12}),$$
$$\vec{N} = (M_{10}, M_{20}, M_{30}),$$

можно ввести эрмитовы операторы

$$J_l = \tfrac{1}{2} i\,(M_l + i N_l),$$
$$K_l = \tfrac{1}{2} i\,(M_l - i N_l), \tag{6.16}$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J_k, J_l] = i\,\varepsilon_{klm} J_m,$$
$$[K_l, K_m] = i\,\varepsilon_{lmn} K_n, \tag{6.17}$$
$$[J_l, K_m] = 0, \qquad k,l,m,n = 1,2,3.$$

Это дает возможность использовать для построения неприводимых конечномерных представлений группы Лоренца результаты теории неприводимых представлений группы вращений. Из операторов $\vec{J}$ и $\vec{K}$ в (6.17) можно построить два оператора Казимира:

$$C_1 \equiv \vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2,$$
$$C_2 \equiv \vec{K}^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2. \tag{6.18}$$

На основании леммы Шура представления могут быть перенумерованы значениями этих операторов в данном представлении.

Поскольку все коммутаторы $[J_l, K_m] = 0$, можно одновременно диагонализовать два генератора – по одному из наборов J_l и K_m . Выберем в пространстве искомого неприводимого представления в качестве базиса векторы Φ этих матриц $\Phi_{m_1 m_2}$:

$$J_3\,\Phi_{m_1 m_2} = m_1\Phi_{m_1 m_2}, \qquad K_3\,\Phi_{m_1 m_2} = m_2\,\Phi_{m_1 m_2}.$$

Обозначим наибольшее из чисел m_1 через j_1 , а наибольшее из m_2 – через j_2 . Повторяя теперь в точности те же рассуждения, что и в главе У, § I при построении неприводимых представлений группы вращений, мы получим, что j_1 и j_2 могут быть целыми и полуцелыми числами, причем

$$m_1 = j_1, j_1 - 1, \ldots, -j_1,$$

$$m_2 = j_2, j_2 - 1, \ldots, -j_2.$$

Отсюда следует, что размерность искомого неприводимого представления группы Лоренца L_{HR} равна $(2j_1+1)(2j_2+1)$. Операторы Казимира C_1 и C_2 в (6.I5) выражаются через j_1 и j_2 так же, как оператор Казимира группы вращений, т.е.

$$C_1 = \vec{J}^2 = j_1(j_1+1)I,$$
$$C_2 = \vec{K}^2 = j_2(j_2+1)I. \qquad (6.19)$$

Из вышесказанного следует, что всякое конечномерное неприводимое представление группы Лоренца определяется парой чисел (j_1 , j_2), каждое из которых может быть целым или полуцелым. Размерность же неприводимого представления, заданного числами (j_1 , j_2), равна $(2j_1+1)(2j_2+1)$. В отличие от неприводимых представлений группы вращений, среди которых существует только одно неприводимое представление данной размерности, в случае группы Лоренца имеются два неэквивалентных неприводимых представления.
Это представления (j_1, j_2) и (j_2, j_1).

Если бы эти представления были эквивалентны, то их операторы Казимира были бы одинаковы[x)]. Однако, если $j_1 \neq j_2$, то операторы Казимира представлений (j_1, j_2) и (j_2, j_1) не равны. Можно показать, что эквивалентны представления $(j_1, j_2)^*$ и (j_2, j_1), где $(j_1, j_2)^*$ означает комплексно-сопряженное представление. Действительно, при комплексном сопряжении генераторы $\vec{J}$ и $\vec{K}$ в (6.I9) меняются местами и поэтому

$$\vec{J}'^2 = \vec{K}^{*2} = j_2(j_2+1),$$

$$\vec{K}'^2 = \vec{J}^{*2} = j_1(j_1+1),$$

откуда видно, что представления $(j_1, j_2)^*$ и (j_2, j_1) эквивалентны.

Напомним, что для того, чтобы знать все конечномерные представления ограниченной группы Лоренца, достаточно знать явный вид операторов

x) Так как операторы Казимира неприводимых представлений кратны единичному, то они коммутируют с любой матрицей S, поэтому $SCS^{-1} = SS^{-1}C = C.$

$$J^{\pm} = \frac{J_1 \pm i J_2}{\sqrt{2}}, \qquad J_3 = J_3,$$

и

$$K^{\pm} = \frac{K_1 \pm i K_2}{\sqrt{2}}, \qquad K_3 = K_3.$$

Если операторы $\vec{J}$ и $\vec{K}$ записать в терминах чисел j_1 и j_2, то получаются следующие представления, в полной аналогии с группой $SO(3)$:

$$J_{\pm}\Phi_{j_1 m_1, j_2 m_2} = \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)}\,\Phi_{j_1 m_1 \pm 1, j_2 m_2},$$

$$J_3 \Phi_{j_1 m_1, j_2 m_2} = m_1 \Phi_{j_1 m_1, j_2 m_2} \qquad (6.20)$$

и

$$K_{\pm}\Phi_{j_1 m_1, j_2 m_2} = \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)}\,\Phi_{j_1 m_1, j_2 m_2 \pm 1},$$

$$K_3 \Phi_{j_1 m_1, j_2 m_2} = m_2 \Phi_{j_1 m_1, j_2 m_2}.$$

В этом представлении легко получить матрицу $T^{(j_1 j_2)}(\Lambda)$, представляющую любое преобразование Лоренца L_{HR}.

Резюмируя, можно сказать, что ограниченная группа Лоренца имеет счетное число неэквивалентных конечномерных (неунитарных) неприводимых представлений.

Представление (j_1, j_2) однозначно, если $j_1 + j_2$ – целое число, и двузначно, если оно полуцелое.

Из формул прямого произведения представлений группы вращений следует, что величина, преобразующаяся по неприводимому представлению группы Лоренца (j_1, j_2), при вращениях преобразуется по прямому произведению $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$ неприводимых представлений $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$ группы вращений. Согласно формуле Клебша – Гордана (5.24) это означает, что величина, преобразующаяся по неприводимому представлению (j_1, j_2) ограниченной группы Лоренца, содержит в себе величины (поля), отвечающие частицам со спинами от $(j_1 + j_2)$ до $|j_1 - j_2|$.

Поэтому можно записать:

$$T^{(j_1 j_2)}(\Lambda(R)) = T^{(j_1+j_2)} \oplus \ldots \oplus T^{|j_1 - j_2|}. \qquad (6.21)$$

Эта формула дает "спиновое содержание" неприводимого представления $T^{(j_1 j_2)}$ ограниченной группы Лоренца L_{HR}. Рассмотрим несколько простейших прмеров.

Величину, преобразующуюся по представлению $(0,0)$, называют скаляром. Она является однокомпонентной инвариантной величиной.

По представлениям $(1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$ преобразуются релятивистские двухкомпонентные спиноры. Согласно формуле (6.2I) релятивистский двухкомпонентный спинор отвечает частице со спином $j = 1/2$. Генераторы представлений $(1/2, 0)$, $(0, 1/2)$ можно найти из следующих соображений. Для представления $(1/2, 0)$ имеем

$$\vec{J}^{\,2} = 0$$

и $\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1,2,3)$

$$J_i = 0 .$$

Далее, матрицы $\vec{K}$ совпадают с генераторами представления группы $SO(3)$, $T^{(1/2)}$:

$\vec{K} = \frac{i}{2}\vec{\sigma}$, где $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули. Для представления $(0, 1/2)$ имеем из этих соображений

$$\vec{J} = \frac{i}{2}\vec{\sigma} .$$

Таким образом, явная матричная реализация генераторов в представлениях $(0, 1/2)$ и $(1/2, 0)$ дана при помощи матриц Паули

$$\vec{J}^{(1/2,0)} = 0 , \qquad \vec{J}^{(0,1/2)} = \frac{i}{2}\vec{\sigma},$$

$$\vec{K}^{(1/2,0)} = \frac{i}{2}\vec{\sigma} \qquad \text{и} \qquad \vec{K}^{(0,1/2)} = 0 .$$

По представлениям $(1,0)$ и $(0,1)$ преобразуются трехкомпонентные величины. При пространственных вращениях эти величины преобразуются как векторы $(j = 1)$. По представлениям $(1,0)$ и $(0,1)$ преобразуются линейные комбинации дуальных антисимметричных тензоров f_{ij} и $\varepsilon_{ijkl} f^{kl}$. Если f_{ij} – тензор электромагнитного поля, то по $(1,0)$ и $(0,1)$ преобразуются трехмерные величины $\vec{E} \pm i\vec{H}$ ($\vec{E}, \vec{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей).

Следующим (по возрастанию размерности) является представление (I/2, I/2) – это четырехкомпонентная величина, обычный 4-вектор.

Замечания

I) Все неприводимые представления (j_1, j_2), у которых одно из чисел j_1, j_2 целое, а другое – полуцелое, являются спинорными, т.е. двузначными. Величина (или поле), преобразующаяся по спинорному представлению, отвечает частицам с максимальным спином, равным $s = \frac{n}{2}\hbar$, где n – целое положительное число.

Прямое произведение двух неприводимых конечномерных представлений группы L_{HR} дает представление, которое, вообще говоря, не является неприводимым:

$$T^{(j_1 j_1')} \otimes T^{(j_2 j_2')} = T^{(j_1+j_2,\, j_1'+j_2')} \oplus T^{(j_1+j_2-1,\, j_1'+j_2')} \oplus$$

$$\oplus T^{(j_1+j_2,\, j_1'+j_2'-1)} \oplus \dots \oplus T^{(j_1+j_2-1,\, j_1'+j_2'-1)} \oplus \dots \oplus T^{(|j_1-j_2|,\, |j_1'-j_2'|)} .$$

2) Выше изучались представления ограниченной группы Лоренца L_{HR}. Если рассматривать представления группы Лоренца L_H, то необходимо учесть и отражения. Так, например, пространственным отражением I_s, т.е. путем умножения матриц представления группы L_{HR} на матрицу I_s, мы можем осуществить переход от собственных к несобственным преобразованиям Лоренца и наоборот. Можно проверить, что, умножая на операторы I_s, I_t, $I_s I_t$ матрицы группы L_{HR}, можно переводить любое преобразование L_{HR} в преобразование любого другого типа, т.е. получить любое из подмножеств I-IУ.

§ 2. Спинорные представления

Нашей задачей не является построение всех представлений группы Лоренца (скалярных, векторных, тензорных), однако спинорные представления важны в теории квантовых полей, а именно – для введения основных понятий суперсимметрий, и поэтому мы приведем сейчас основные сведения о них.

Как уже было сказано (см. § I данной главы), неприводимыми представлениями группы Лоренца являются спиноры. Имеется два различных неприводимых представления группы Лоренца, и по лемме Шура они представлены в виде двухкомпонентных спиноров, групп вращений трехмерного пространства. В одном из них, обозначаемом как (I/2,0), пара комплексных чисел $\psi = \binom{\psi_1}{\psi_2}$ преобразуется согласно

$$\psi'_\alpha(x') = S_\alpha^\beta \psi_\beta(x) \qquad \text{или} \qquad \psi' = S\psi, \qquad (6.22)$$

где S – унимодулярная 2 x 2 матрица. Комплексное сопряжение дает второе неприводимое представление (0,I/2)

$$(\psi'_\alpha)^+ = (\psi_\beta)^+ (S^\beta_\alpha)^+. \tag{6.23}$$

Оно эквивалентно первому, и, чтобы отличать их, во втором принято снабжать индексы точкой и, кроме того, употреблять в ψ^+, S^+ черту вместо знака +, т.е. писать вместо (6.23)

$$\bar\psi'_{\dot\alpha}(x') = \bar\psi_{\dot\beta}(x)\,\bar S^{\dot\beta}_{\dot\alpha} \qquad \text{или} \qquad \bar\psi' = \bar\psi \bar S. \tag{6.24}$$

Можно было бы ввести спиноры, преобразующиеся транспонированными матрицами

$$\varkappa' = S^T \varkappa, \qquad \text{или} \qquad \varkappa^\alpha = \varkappa^\beta S^\alpha_\beta; \tag{6.25}$$

$$\bar\varkappa' = \bar\varkappa \bar S^T, \qquad \text{или} \qquad \bar\varkappa^{\dot\alpha\,\prime} = \bar S^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\, \bar\varkappa^{\dot\beta}. \tag{6.26}$$

Представление (6.25) эквивалентно представлению (6.22). Эквивалентный спинор $C\psi$, где $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ -матрица зарядового сопряжения, принято снабжать верхним индексом и, вводя антисимметричную величину $\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}$, записывать

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta.$$

Опускают индексы обратной матрицей $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Поскольку матрицы S унимодулярны, эти величины являются инвариантными тензорами, например,

$$\varepsilon'_{\alpha\beta} = S^\mu_\alpha S^\sigma_\beta\, \varepsilon_{\mu\sigma} = (\det S)^2 \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Аналогично представление (6.26) эквивалентно представлению (6.24) и отличается от него высотой индекса, теперь точечного:

$$\bar\psi^{\dot\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\psi_{\dot\beta}, \qquad \bar\psi_{\dot\alpha} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\psi^{\dot\beta},$$

а величины $\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} = -\varepsilon^{\dot\beta\dot\alpha}$ и $\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} = -\varepsilon_{\dot\beta\dot\alpha}$ – снова инвариантные тензоры. При этом

$$\varepsilon^{12} = -\varepsilon_{12} = 1, \qquad \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\mu} = \delta^\alpha_\mu,$$

$$\varepsilon^{\dot1\dot2} = -\varepsilon_{\dot1\dot2} = 1, \qquad \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\mu} = \delta^{\dot\mu}_{\dot\alpha}.$$

Зная фундаментальные спинорные представления, можно построить все неприводимые представления группы Лоренца. Поскольку индексы с точкой и без точки принимают только два значения, <u>любое</u> неприводимое представлениз группы Лоренца описывается полем мультиспинорного вида

$$\varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n),\dot\alpha_1\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_k},$$

абсолютно симметричным как по индексам без точки, так и по индексам с точкой. Такое представление обозначается символом $(\frac{n}{2}, \frac{k}{2})$ и имеет $(n+1)(k+1)$ компонент. Например, векторное поле – это $\varphi_{\alpha\dot\alpha}$ в двухкомпонентном формализме, и оно является представлением (I/2,I/2).

Связь между векторным и спинорным формализмом осуществляется посредством матриц $(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}$, $(\tilde\sigma_a)^{\dot\alpha\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}(\sigma_a)_{\beta\dot\beta}$, у которых спинорные индексы расставлены с определением (6.27) и трансформационным законом (6.28) так, чтобы 4-вектор χ^a представлялся величиной $\chi_{\alpha\dot\alpha}$. Эти 2 x 2 матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_a\tilde\sigma_b + \sigma_b\tilde\sigma_a = 2g_{ab}, \qquad Sp\, \sigma_a\tilde\sigma_b = 2g_{ab},$$

$$(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}(\tilde\sigma^a)^{\beta\dot\beta} = 2\delta^\beta_\alpha \delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha},$$

$$\sigma_a\tilde\sigma_b = g_{ab} - \tfrac{i}{2}\varepsilon_{abcd}\,\sigma^c\tilde\sigma^d.$$

Преобразующие спиноры – унимодулярные матрицы S и $\bar S$ инфинитезимально имеют вид

$$S^\beta_\alpha = \left(1 + \frac{i}{4}\omega^{ab}\sigma_{ab}\right)^\beta_\alpha,$$

$$S^{\dot\beta}_{\dot\alpha} = \left(1 - \frac{i}{4}\omega^{ab}\tilde\sigma_{ab}\right)^{\dot\beta}_{\dot\alpha},$$

где

$$(\sigma_{ab})^\beta_\alpha = \frac{1}{2i}(\sigma_a\tilde\sigma_b - \sigma_b\tilde\sigma_a)^\beta_\alpha, \qquad (\tilde\sigma_{ab})^{\dot\beta}_{\dot\alpha} = \frac{1}{2i}(\tilde\sigma_a\sigma_b - \tilde\sigma_b\sigma_a)^{\dot\beta}_{\dot\alpha}.$$

В физической литературе пользуются часто векторным формализмом с четырехкомпонентными спинорами. Дираковский спинор может быть составлен из разных двухкомпонентных спиноров

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix},$$

а майорановский – из сопряженных друг другу спиноров

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}.$$

Далее будем использовать малые буквы греческого алфавита α, β, γ, ..., – для спинорных индексов, малые буквы латинского алфавита a, b, c, ..., – для векторных индексов. Любому вещественному 4-вектору x^a сопоставляется эрмитова матрица

$$\mathbb{X} = x^a \sigma_a \equiv \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - i x^2 \\ x^1 + i x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \tag{6.27}$$

Наоборот,

$$x^a = \frac{1}{2} Sp(\tilde\sigma^a \mathbb{X}),$$

где

$$\tilde\sigma^a = (1\!\!1, \vec\sigma), \qquad \tilde\sigma_a = (1\!\!1, -\vec\sigma)$$

и

$$Sp\, \sigma_a \tilde\sigma_b = 2 g_{ab}.$$

Важно, что детерминант матрицы, соответствующей 4-вектору, равен квадрату длины этого вектора. Из (6.27) видно, что

$$\det \mathbb{X} = x^a x_a.$$

Общее преобразование, сохраняющее вещественность матрицы (6.27) и оставляющее неизменным ее детерминант, дается унимодулярной матрицей S :

$$\mathbb{X}' = S \mathbb{X} S^+. \tag{6.28}$$

Это преобразование эквивалентно преобразованию Лоренца 4-вектора и может быть записано в форме $x'^a = \Lambda_a^b x^b$ и

$$\Lambda_a^b = \frac{1}{2} Sp(\tilde\sigma^b S \sigma_a S^+), \text{ или } \Lambda_{ab} = \frac{1}{2} Sp(\tilde\sigma_a S \sigma_b S^+).$$

Унимодулярная матрица S входит в закон преобразования векторов (6.28) квадратично.

§ 3. Группа Пуанкаре

Линейные преобразования Пуанкаре $L = \{a, \Lambda\}$ определяются согласно

$$x'_\mu = (Lx)_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu, \tag{6.29}$$

т.е. как произведение операций сдвига на вещественный вектор a_μ и преобразования Лоренца Λ, причем сдвиг выполняется <u>после</u> преобразования Лоренца Λ. Преобразование Пуанкаре удобно записывать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & \Lambda_2^0 & \Lambda_3^0 & a^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 & a^1 \\ \Lambda_0^2 & \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 & a^2 \\ \Lambda_0^3 & \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где последняя координата I не имеет физического смысла и остается инвариантной при преобразовании. Преобразования (6.29) сохраняют интервал

$$(x'-y')_\mu (x'-y')^\mu = (x-y)_\mu (x-y)^\mu, \tag{6.30}$$

где

$$(x-y)_\mu (x-y)^\mu = (x-y)^2 \equiv (x^0 - y^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2.$$

Из условия сохранения интервала (6.30) следует, что

$$g_{\mu\nu} \Lambda_\beta^\mu \Lambda_\delta^\nu = g_{\beta\delta}, \tag{6.31}$$

откуда $|\det \Lambda| = 1$. Напомним (см. § 3 первой главы), что произведение двух линейных преобразований Пуанкаре $\{a_1, \Lambda_1\}$ и $\{a_2, \Lambda_2\}$ равно

$$\{a_1, \Lambda_1\}\{a_2, \Lambda_2\} = \{a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2\}.$$

Преобразования Пуанкаре образуют 10-параметрическую непрерывную группу Пуанкаре $\mathcal{P}$.

Замечания

1. Группа P содержит в себе две подгруппы: группу Лоренца L_H, определенную линейными преобразованиями $\{0,\Lambda\}$ и абелеву группу сдвигов $\mathcal{S}$, преобразования которой записываются в виде $\{a,I\}$. Пересечением подгрупп L_H и $\mathcal{S}$ является единичный элемент $\{0,I\}$. Можно проверить, что элементы группы сдвигов $\mathcal{S}$ не коммутируют с элементами группы Лоренца L_H, откуда следует, что группу Пуанкаре нельзя записать в виде прямого произведения

$$P \neq L_H \otimes \mathcal{S}.$$

2. Существует гомоморфизм группы P на группу L_H, который определяется отображением

$$\{a,\Lambda\} \xrightarrow{f} \{0,\Lambda\}.$$

Группа сдвигов $\mathcal{S}$ является ядром гомоморфизма группы P. (Докажите!)

Используя запись инфинитезимального преобразования Лоренца в виде

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}, \qquad \text{причем} \qquad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu},$$

можно записать для группы Пуанкаре унитарный оператор

$$U(a, I+\omega) = I + i a_\mu P^\mu - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu},$$

где эрмитовы операторы P^μ суть генераторы сдвигов и эрмитовы операторы $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$ – генераторы четырехмерных вращений. Коммутационные соотношения генераторов P^μ и $J^{\mu\nu}$ имеют вид

$$[J^{\mu\nu}, P^\sigma] = i(g^{\nu\sigma}P^\mu - g^{\mu\sigma}P^\nu) \tag{6.32}$$

и

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \tag{6.33}$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}) \tag{6.34}$$

и определяют алгебру Пуанкаре.

Для выяснения физического смысла операторов Казимира, нахождение которых является теперь следующей нашей задачей, полезно определить оператор

$$W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu J^{\rho\sigma}, \tag{6.35}$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ – абсолютно антисимметричный тензор 4-го ранга, причем $\varepsilon_{0123} = 1$.

Оператор W_μ, называемый вектором Паули – Любанского, удовлетворяет следующим свойствам:

$$\begin{gathered} W^\mu P^\mu = 0, \\ [P^\mu, W^\sigma] = 0, \\ [J^{\mu\nu}, W^\sigma] = i(g^{\nu\sigma}W^\mu - g^{\mu\sigma}W^\nu), \\ [W^\mu, W^\nu] = -i\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} W^\rho P^\sigma. \end{gathered} \tag{6.36}$$

Компоненты вектора W^μ простым образом выражаются через $J^{\mu\nu}$ и P^μ:

$$W^0 = \vec{J}.\vec{P}$$

и $$\vec{W} = -\vec{J}.P^0 - \vec{K}\times\vec{P},$$

где $\vec{J} \equiv (J^{23}, J^{31}, J^{12})$, $\vec{P} \equiv (P^1, P^2, P^3)$ и $\vec{K} \equiv (J^{01}, J^{02}, J^{03})$.

Задача классификации всех неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре может быть сведена, как и ранее (см. главу УI), к нахождению всех представлений перестановочных соотношений (6.32)-(6.34) с помощью эрмитовых операторов P^μ, $J^{\mu\nu}$. Для этого прежде всего надо найти операторы Казимира. Для группы Пуанкаре имеются два оператора Казимира; оператор квадрата массы

$$P^2 \equiv P_\mu P^\mu = m^2 \tag{6.37}$$

и

$$W^2 \equiv W_\mu W^\mu = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu} P^2 - J_{\mu\nu} J^{\rho\nu} P^\mu P_\rho, \tag{6.38}$$

при $m^2 \neq 0$ (как будет показано ниже) оператор квадрата спина.

Формула (6.37) выражает связь между энергией, импульсом и массой, так как генераторы P^0 и P^i (i = 1,2,3) представляют операторы энергии и импульса соответственно. Для установления физического смысла W^2 обратим внимание на тот факт, что оператор

$$L^{\mu\nu} = i\left(\Pi^\mu \frac{\partial}{\partial \Pi_\nu} - \Pi^\nu \frac{\partial}{\partial \Pi_\mu}\right) \tag{6.39}$$

удовлетворяет перестановочным соотношениям (6.32) и (6.34), так же, как и оператор $J^{\mu\nu}$. $L^{\mu\nu}$ действует только на переменные Π^μ, и оператор $J^{\mu\nu}$ можно представить в общем виде

$$J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu},$$

где $S^{\mu\nu}$ коммутирует с P^μ и удовлетворяет (6.34). $S^{\mu\nu}$ действует только на внутренние степени свободы системы, которая описывается функцией $\Phi(p,\xi)$, где ξ – степень свободы, связанная со спином. Таким образом, можно интерпретировать $L^{\mu\nu}$ и $S^{\mu\nu}$ как орбитальный и спиновый угловые моменты системы соответственно.

Смысл оператора $W_\mu W^\mu = W^2$ становится более наглядным, если совершить преобразование Лоренца в "систему покоя", в которой $P^i = 0$, $P^0 = m$. В этой системе вектор Паули – Любанского совпадает с "вектором спина" $J^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}$ и

$$W^0 = 0,$$

$$W^i = m\, \varepsilon^{ijk} J_{jk},$$

$$W^\mu = m\,(0, J^{23}, J^{31}, J^{12}) = m\,(S^1, S^2, S^3),$$

причем

$$[S_k, S_\ell] = i\, \varepsilon_{k\ell m} S_m .$$

Операторы S_i подчиняются перестановочным соотношениям для момента количества движения W_i. Следовательно, собственные значения $W^2 = S^2$ суть $s(s+1)$ с $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \ldots$, а S_i являются генераторами неприводимого $(2s+1)$ – мерного представления трехмерной группы вращений. Таким образом, в системе покоя оператор W^i равен оператору полного количества движения, умноженному на m $(m \neq 0)$.

Для физических приложений важны представления группы P, у которых $p^2 = m^2 > 0$, а также такие, когда $p^2 = 0$.

В первом случае $(p^2 = m^2 > 0)$ знак энергии $p_0/|p_0|$ коммутирует со всеми генераторами группы и, следовательно, является инвариантом, т.е. оператором Казимира. Таким образом, при любых значениях P^μ и W^μ имеется два (неунитарных) неприводимых представления, соответственно двум значениям $p_0/|p_0|$. Например, неприводимое представление типа $p^2 = m^2$ с $p_0 > 0$ характеризуется двумя индексами (m, s), причем m – любое положительное число, а s – также положительное целое или полуцелое число. Индекс m характеризует массу системы, обладающей определенными трансформационными свойствами (её состояния преобразуются по неприводимому представлению группы Пуанкаре), и индекс s –спин этой системы.

Замечание

В квантовой теории поля система частиц описывается квантовыми полями, трансформационные свойства которых мы будем дальше рассматривать. Здесь следует отметить, что операторы Казимира группы Лоренца L_{HR} перестают быть операторами Казимира группы Пуанкаре, потому что не коммутируют с генераторами сдвига. Вместе с тем поля обычно классифицируются по группе Лоренца (спиноры, тензоры, спин-тензоры, векторы), а неприводимые представления группы Пуанкаре выделяются наложением соответствующих дополнительных условий.

Поэтому зависимость волновой функции частицы от кинематических переменных определяется неприводимым представлением (m, s) группы P. Неприводимое представление бесконечномерно и это следует из того факта, что любая частица может находиться в бесконечно большом числе линейно независимых состояний. Для каждой пары (m, s) и данного знака энергии имеется одно и только одно неприводимое представление группы Пуанкаре. При полуцелом s – представление двузначно.

В случае $p^2 = m^2$, $p^0 < 0$ и $W^2 = S^2 = s(s+1)$ имеем систему, характеризующую частицу с отрицательной энергией, физическое значение которой можно установить только на языке вторичного квантования.

Резюмируем сказанное. Неприводимое представление типа $p^2 = m^2$, $p^0 > 0$, $p^0 < 0$ характеризуется двумя индексами (m_+, s), (m_-, s) соответственно. Представление группы P является однозначным, если s –целое число, и двузначным, когда s – полуцелое.

Большей частью нас будут интересовать случаи s = 0, 1/2, 1.

а) При s = 0 неприводимое представление описывает положительно-частотные m_+ (отрицательно-частотные m_-) решения релятивистски-ковариантного уравнения для частиц со спином 0 – уравнения (Клейна-Гордона);

б) при $s = 1/2$ – положительно (отрицательно) – частотные решения уравнения для частиц со спином 1/2 – уравнения Дирака;

в) при $s = 1$ – положительно (отрицательно) – частотные решения уравнения для частиц со спином 1, например, уравнения Прока. Состояния $W^{\pm}$, Z^{0} бозона тоже преобразуются по данному представлению, т.е. $(m_{+}, 1)$.

Второй класс представлений, интересных для физики, дает случай нулевой массы. Если $P^2 = 0$, но $P^{\mu} \neq 0$, что соответствует частицам с нулевой массой, то имеются два различных типа представлений.

Если $W^{\mu} W_{\mu} = s^2 = 0$ и $P^2 = 0$, то для характеристики представления недостаточно двух квантовых чисел (m , s). Из первой формулы (6.36)

$$W_{\mu} P^{\mu} = 0$$

получается, что $\vec{P}.\vec{W} = P^0 W^0 = \pm |\vec{P}||\vec{W}|$, откуда следует $\vec{W} = \mathcal{A}\vec{P}$.

Кроме того, $P^0 W^0 = \mathcal{A}\,\vec{P}.\vec{P} = \mathcal{A} P^2$, т.е. $W^0 = \mathcal{A} P^0$, и в результате имеем

$$W^{\mu} = \mathcal{A} P^{\mu}, \tag{6.40}$$

где $\mathcal{A}$ – оператор "спиральности".

Чтобы оправдать интерпретацию $\mathcal{A}$ как оператора спиральности частицы, заметим, что из соотношения (6.40) и того факта, что $P^0 \neq 0$, можно всегда определить $(P^0)^{-1}$, и из свойств W^{μ} оператор $\mathcal{A}$ приобретает вид

$$\mathcal{A} = W^0 (P^0)^{-1} \equiv \frac{\vec{J}.\vec{P}}{P^0} . \tag{6.41}$$

Если теперь рассмотреть перестановочные соотношения $\mathcal{A}$ с P^{μ} и $J^{\mu\nu}$, используя определение вектора Паули – Любанского в системе покоя, получим

$$\left[\frac{\vec{J}.\vec{P}}{P^0} , P^{\mu} \right] = 0 \tag{6.42}$$

и

$$\left[\frac{\vec{J}.\vec{P}}{P^0} , J^{\mu\nu} \right] = \frac{i}{P^0} \left\{ g^{\mu 0} \left(W^{\nu} - \frac{W^0}{P^0} P^{\nu} \right) - g^{\nu 0} \left(W^{\mu} - \frac{W^0}{P^0} P^{\mu} \right) \right\}. \tag{6.43}$$

Вычисляя (6.43), мы использовали тождество $[P^0 (P^0)^{-1}, J^{\mu\nu}] = 0$, откуда следует

$$[(P^0)^{-1}, J^{\mu\nu}] = i\,(P^0)^{-2} (g^{\nu 0} P^{\mu} - g^{\mu 0} P^{\nu}).$$

Из результата $W^{\mu} = \mathcal{A} P^{\mu}$ сразу видно, что перестановочные соотношения $\left[\frac{\vec{J}.\vec{P}}{P^0}, J^{\mu\nu}\right] = 0$, оператор $\frac{\vec{J}.\vec{P}}{P^0}$ коммутирует со всеми генераторами группы P и, следовательно, является дополнительным оператором группы Казимира. Если представление является неприводимым, то оператор $\mathcal{A}$ по лемме Шура является константой, умноженной на единичную матрицу. Действуя оператором $\mathcal{A}$ на вектор состояния $\phi(P, \xi)$, получим

$$\mathcal{A}\,\phi(P,\xi) \equiv \frac{\vec{J}.\vec{P}}{P^0}\,\phi(P,\xi) = \pm\lambda\,\phi(P,\xi).$$

Поскольку $P^0 = \pm |\vec{P}|$, имеем представления (0_+) или (0_-). Далее, $\vec{L}.\vec{P} = 0$, откуда следует, что λ является собственным значением оператора $\frac{\vec{S}.\vec{P}}{|\vec{P}|}$, и, таким образом, $\mathcal{A}$ есть оператор проекции момента спина частицы на направление её движения, т.е. <u>спиральность</u> безмассовой частицы.

Если $\lambda \neq 0$, то при фиксированном значении вектора импульса P^{μ} имеются два независимых состояния, соответствующих двум возможным состояниям спиральности. Если $\lambda = 0$, то существует только одно состояние.

В результате имеются представления, для которых $P^2 = 0$, $P^{\mu} \neq 0$, $W^2 = 0$ и которые отличаются значением параметра λ

$$\lambda = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \ldots .$$

Они обозначаются символом $(0_+, \lambda)$ или $(0_-, \lambda)$, если $P^0 > 0$ или $P^0 < 0$ соответственно.

Состояния нейтрино и фотона с опеределенной спиральностью преобразуются по представлениям типа $(0_+, \lambda)$ или $(0_-, \lambda)$.

Мы перечислим здесь неприводимые представления группы Пуанкаре, для которых $P^2 = m^2 > 0$ и $P^0 > 0$, $P^0 < 0$ и $P^2 = 0$ с $P_0 < 0$, $P_0 > 0$.

Замечание

В представлениях, имеющих отношение к описанию физических частиц, энергетический спектр положителен и снизу ограничен нулевым значением, $P^0 \geq 0$, как и должно быть у реальной частицы.

§ 4. Суперсимметрия

Как известно, требование релятивистской инвариантности является одним из основных требований в квантовой теории поля, однако лишь часть возможных инвариантных теорий Пуанкаре реализуется в природе. Можно думать, что это связано с существованием более высоких симметрий, так что теории, обладающие более высокими симметриями, и реализуются в природе.

Существуют различные возможности для расширения группы Пуанкаре. Как известно, группы внутренней симметрии приводят к классификации элементарных частиц по внутренним квантовым числам типа заряда, изоспина, странности, унитарного спина. В то же время такая важнейшая характеристика частиц, как масса, полностью остается за рамками групп внутренней симметрии. Поэтому было бы привлекательным найти такую группу симметрий, которая бы одновременно давала классификацию частиц по внутренним квантовым числам и по массам. Поскольку понятие массы частиц в рамках квантовой теории поля связано с инвариантом P^2 группы Пуанкаре, то искомая группа должна быть нетривиальным объединением групп внутренней симметрии и группы Пуанкаре. Такая группа была бы одновременно и нетривиальной реализацией групп внутренней симметрии. Тривиальное решение – прямое произведение группы внутренней симметрии и группы Пуанкаре – дает одинаковые массы частиц в мультиплетах групп внутренней симметрии. Решение этой задачи дает теорема О'Раферти. Из неё вытекает, что в предположении о конечности искомой группы Ли, положительности метрики (пространство состояний является гильбертовым), дискретности собственных значений P^2, соответствующих массам частиц, и наблюдаемости P^2 спектр масс внутри мультиплетов групп внутренней симметрии либо состоит из одной точки, либо непрерывен.

Таким образом, никакая конечная группа Ли симметрии не дает возможности объяснить наблюдаемый спектр масс частиц.

Итак, мы видим, что попытка объединения групп внутренней симметрии с пространственно-временными группами симметрии не приводит к новому типу групп.

Генераторы группы Пуанкаре $J^{\mu\nu}$ и P^{σ} обладают тензорной природой: относительно преобразований Лоренца $J^{\mu\nu}$ ведет себя как антисимметричный тензор, а P^{σ} – как вектор. Общей чертой упомянутых расширений группы Пуанкаре является то, что к генераторам $J^{\mu\nu}$, P^{σ} добавлялись генераторы, также обладающие тензорной природой.

Нетривиальное расширение может быть получено дополнением десяти генераторов группы Пуанкаре набором спинорных операторов. При этом оказывается, что соответствующая алгебра содержит антикоммутаторы спинорных генераторов между собой.

Супералгебра Пуанкаре

Супералгебра Пуанкаре является спинорным расширением алгебры Пуанкаре. Кроме генераторов преобразований Лоренца J^{ab}, 4-сдвигов P^a, она содержит также спинорные генераторы суперсдвигов (или суперсимметрии) Q_α, $\bar{Q}_{\dot\alpha}$. Алгебра группы Пуанкаре (6.32)-(6.34) расширяется соотношениями

$$[J_{ab}, Q_\alpha] = \tfrac{1}{2}(\sigma_{ab})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta, \qquad [J_{ab}, \bar{Q}_{\dot\alpha}] = \tfrac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{ab})_{\dot\alpha}^{\ \dot\beta} \bar{Q}_{\dot\beta}, \tag{6.44}$$

из которых видно, что Q_α и $\bar{Q}_{\dot\alpha}$ суть спиноры (I/2, 0) и (0, I/2) группы Лоренца, коммутирующие со сдвигами

$$[Q_\alpha, P_a] = [\bar{Q}_{\dot\alpha}, P_a] = 0, \tag{6.45}$$

причем их коммутационные соотношения между собой имеют вид

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}\} = 2(\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha} P_a = 2P_{\alpha\dot\alpha}, \tag{6.46}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \qquad \{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 0. \tag{6.47}$$

Последние соотношения содержат антикоммутаторы.

Супералгебра (6.32)-(6.34) и (6.44)-(6.47), которая содержит J^{ab}, P^a и два спинорных генератора, является простейшим расширением алгебры Пуанкаре. В случае, когда число генераторов спинорного характера равно $2N$ (N взаимно сопряженных пар, $Q_{\dot\alpha i} = (Q_\alpha^i)^+$, $i = 1, 2, \ldots, N$), говорят о N – расширенной суперсимметрии (СУСИ). (В такой классификации сама группа Пуанкаре есть $N=0$ СУСИ). Соответствующая супералгебра получается следующим образом: соотношения (6.32)- (6.34) не меняются, в (6.44)-(6.47) следует заменить Q_α на Q_α^i, а $\bar{Q}_{\dot\alpha}$ на $\bar{Q}_{\dot\alpha i}$, соотношение (6.46) превращается в

$$\{Q_\alpha^i, \bar{Q}_{\dot\alpha j}\} = 2\delta_i^j \sigma^a_{\alpha\dot\alpha} P_a,$$

а в правых частях (6.47) могут появиться операторы $Z^{ij} = -Z^{ji}$, которые коммутируют между собой и со всеми генераторами алгебры

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = \varepsilon_{\alpha\beta} Z^{ij}, \qquad \{\bar{Q}_{\dot\alpha i}, \bar{Q}_{\dot\beta j}\} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \bar{Z}_{ij}$$

и называются центральными зарядами. Перейдем к классификации представлений алгебры (6.32)-(6.34), (6.44)-(6.47). Для этого необходимо найти операторы Казимира. Они имеют вид

$$C_1 = P_a P_a, \qquad C_2 = K_{ab} K_{ab}, \tag{6.48}$$

где $K_{ab} = P_a K_b - P_b K_a$

и

$$K_a = \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} P_b J_{cd} - \frac{1}{8} (\sigma_a)_{\alpha\dot\beta} [Q^\alpha, \bar Q^{\dot\beta}]. \tag{6.49}$$

Вектор K_a является обобщением вектора Паули – Любанского. Отметим, что K_{ab} коммутирует со всеми спинорными генераторами

$$[K_{ab}, Q_\alpha] = 0, \qquad [K_{ab}, \bar Q_{\dot\alpha}] = 0.$$

Рассмотрим те представления, в которых $C_1 = P^2 = m^2 > 0$. Перейдем в систему покоя, в которой 4-импульс имеет только одну ненулевую компоненту $P_a = (M, 0, 0, 0)$.

В этой системе $K_{il} = 0$ (i, l = I,2,3) и $K_{oi} = -K_{io} = \frac{M^2}{2} Y_i$, где

$$Y_i = \varepsilon_{ikl} J_{kl} - \frac{1}{4M} (\sigma_i)_{\alpha\beta} [Q^\alpha, \bar Q^\beta].$$

Нетрудно убедиться, что

$$[Y_i, Q_\alpha] = 0, \qquad [Y_i, Y_j] = i \varepsilon_{ijk} Y_k,$$

и пространственные компоненты Y_i образуют алгебру $SU(2)$.

Оператор Казимира C_2 равен

$$C_2 = -2 K_{oi} K_{io} = -2 M^4 Y(Y+1),$$

где Y – целое или полуцелое число (Y = 0, I/2, I, 3/2I, ...). Величину Y называют <u>суперспином.</u>

Рассмотрим неприводимое представление с массой m и суперспином Y (супермультиплет).

В системе покоя антикоммутационные соотношения для Q_α имеют следующий вид:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \qquad \{\bar Q_{\dot\alpha}, \bar Q_{\dot\beta}\} = 0 \tag{6.50}$$

и

$$\{Q_\alpha, \bar Q_{\dot\alpha}\} = 2(\sigma^0)_{\alpha\dot\alpha} m = 2m \delta_{\alpha\dot\alpha},$$

где Q_α является двухкомпонентным спинором относительно пространственных вращений. В силу (6.50) операторы Q_α, $\bar Q_{\dot\alpha}$ можно интерпретировать как операторы уничтожения и рождения. Рассмотрим набор из $2Y+1$ векторов $|Y, Y_3>$ $(-Y < Y_3 < Y)$, являющийся базисом неприводимого представления группы (в системе покоя). Пусть вектор с наименьшим спином $|Y, Y_3; S_{min}>$ является "вакуумом" системы (6.50):

$$Q_\alpha |Y, Y_3; S_{min}> = 0.$$

Определим орторнормированные векторы

$$|Y, Y_3; n_1, n_2> = M^{-1/2(n_1+n_2)-n_1-n_2} \bar Q_1^{n_1} \bar Q_2^{n_2} |Y, Y_3; S_{min}>,$$

где пара (n_1, n_2) принимает значения (0,0),(0,I),(I,0),(I,I). Эти векторы образуют базис $4(2Y+1)$ -мерного неприводимого представления. Y в неприводимом представлении принимает значения

$$Y - \tfrac{1}{2}, \quad Y, Y, \quad Y + \tfrac{1}{2},$$

где Y – любой спин, целый или полуцелый. Характерное для СУСИ свойство супермультиплета состоит в том, что он содержит равное число состояний бозонов и фермионов.

В представлениях с P^2 = 0 спиральность принимает значения Y, $Y+\frac{1}{2}$, $-Y$, $-(Y+\frac{1}{2})$.

Полевые представления группы суперсимметрии рассматриваются на многообразии, состоящем из четырех пространственно-временных координат x_μ и четного числа двухкомпонентных спиноров θ^i, $\bar\theta^j$ $(i, j = 1, 2, \dots, N)$, компоненты которых не являются обычными числами, а обладают специальными алгебраическими свойствами, антикоммутируя друг с другом и имея квадраты, равные нулю. С математической точки зрения они образуют особую алгебру – алгебру Грассмана. Простейшая грассманова алгебра (соответствующая случаю N = I) содержит две двухкомпонентные образующие θ и $\bar\theta$, удовлетворяющие антикоммутационному условию $\theta\bar\theta = -\bar\theta\theta$ и соотношениям нильпотентности для компонент $\theta_1^2 = \theta_2^2 = \bar\theta_1^2 = \bar\theta_2^2 = 0$.

В алгебре СУСИ кроме P_a имеются также спинорные генераторы суперсдвигов Q_α, $\bar{Q}_{\dot\alpha}$. Если оставаться с 4 обычными вещественными координатами пространства-времени Минковского x^a, то суперсдвиги могут быть реализованы дифференциальными операторами; если ввести (как уже было сказано) дополнительные спинорные координаты θ^α, $\bar\theta^{\dot\alpha} = (\theta^\alpha)^+$, то имеем многообразие $\{x^a, \theta^\alpha, \bar\theta^{\dot\alpha}\}$. Полученное многообразие называется вещественным (восьмимерным) суперпространством $\mathbb{R}^{4/4}$. Вещественным потому, что оно имеет 4 вещественные бозонные координаты и 4 фермионные θ^α, $\bar\theta^{\dot\alpha}$. В $\mathbb{R}^{4/4}$ можно реализовать преобразования СУСИ:

$$x^{a'} = x^a + i\theta\sigma^a\bar\varepsilon - i\varepsilon\sigma^a\bar\theta,$$
$$\theta^{\alpha'} = \theta^\alpha + \varepsilon^\alpha, \qquad \bar\theta^{\dot\alpha'} = \bar\theta^{\dot\alpha} + \bar\varepsilon^{\dot\alpha}.$$

Параметры ε^α, $\varepsilon^{\dot\alpha}$ – грассмановы числа.

В пространстве-времени Минковского рассматриваются поля - функции от x^a. В $\mathbb{R}^{4/4}$ будут рассматриваться суперполя – функции от x^a, θ^α, $\bar\theta^{\dot\alpha}$. При преобразовании Пуанкаре (6.32)-(6.34) и суперсдвигах (6.44)-(6.47) они преобразуются по закону

$$\phi'_{(i)}(x', \theta', \bar\theta') = \Lambda^{(j)}_{(i)}\, \phi_{(j)}(x, \theta, \bar\theta), \tag{6.51}$$

где (i) – набор лоренцевых индексов, Λ – матричное представление группы Лоренца. В частности, при суперпреобразованиях

$$\delta\phi = (\varepsilon^\alpha Q_\alpha + \bar\varepsilon_{\dot\alpha}\bar{Q}^{\dot\alpha})\,\phi$$

генераторы Q_α, $\bar{Q}_{\dot\alpha}$ реализуются как дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= -i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}\,\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^a}, \\ \bar{Q}_{\dot\alpha} &= i\frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}} + \theta^\alpha(\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^a}. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Дифференцирование (слева) на алгебре Грассмана определяется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta = \delta^\beta_\alpha, \qquad \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta^\beta\theta^\gamma) = \delta^\beta_\alpha\theta^\gamma - \delta^\gamma_\alpha\theta^\beta.$$

Таким образом, суперсимметричные теории естественно описывать в явно ковариантном виде с использованием суперполей. Рассмотрим разложение скалярного суперполя $\phi(x, \theta, \bar\theta)$ по степеням грассмановых переменных. Ввиду их нильпотентности это разложение обрывается и превращается в полином:

$$\begin{aligned} \phi(x,\theta,\bar\theta) &= A(x) + \theta^\alpha\psi^\alpha(x) + \bar\varphi_{\dot\alpha}(x)\,\bar\theta^{\dot\alpha} + \theta^\alpha\theta_\alpha F(x) + \\ &+ \bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} G(x) + \theta^\alpha(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}A^a(x) + \\ &+ \bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\theta^\alpha\lambda_\alpha(x) + \theta^\alpha\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha}(x) + \\ &+ \theta^\alpha\theta_\alpha\,\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} D(x). \end{aligned} \tag{6.53}$$

В этом разложении учтена антикоммутативность спинорных переменных

$$\theta^\alpha\theta^\beta = \frac{1}{2}[\theta^\alpha, \theta^\beta] = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta^\gamma\theta_\gamma.$$

Коэффициенты в (6.53) – это не что иное, как обычные (скалярные и спинорные) поля – функции от x^a. Таким образом, скалярное суперполе $\phi(x, \theta, \bar\theta)$ объединяет конечное число бозонных и фермионных полей в единое целое, преобразующееся ковариантным образом (6.5I).

Ковариантность суперполей относительно суперпреобразований (6.52) приводит к тому, что при суперпреобразованиях "составляющие" лоренц-поля φ, ψ, ... преобразуются друг через друга. Поскольку среди них имеются поля, подчиняющиеся различным статистикам, возникает вопрос: что,таким образом, получается? Ответ: объединительные тенденции.

Заключение

Принципы симметрии означают инвариантность физических законов относительно тех или иных групп преобразований входящих в них физических величин. Фундаментальными пространство-временными симметриями являются группы Лоренца и Пуанкаре. Из внутренних симметрий отметим симметрию $U(1)$ электродинамики, симметрию $SU(2)\otimes U(1)$ единой теории электромагнитного и слабого взаимодействий и симметрию $SU(3)\otimes \otimes SU(2)\otimes U(1)$ так называемой теории великого объединения, включающей в единое описание также и сильное взаимодействие. Каждая последующая из этих теорий содержит предыдущую и все они относятся к так называемым калибровочным теориям. Калибровочными полями в них служат поля фотона, $W^\pm$- и Z^0 – бозонов и восьми глюонов, переносящие, соответственно, электромагнитное, слабое и сильное взаимодействия. Всего в природе имеется четыре вида фундаментальных взаимодействий. К перечисленным трем остается добавить гравитационные. В теории тяготения Эйнштейна гравитационное поле также можно считать калибровочным. Таким образом, переносчики всех четырех фундаментальных взаимодействий оказываются калибровочными полями. Следует подчеркнуть, что они являются бозонами, т.е. подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна.

Поля частиц (электронов и кварков), из которых состоит вещество, в обсуждаемых теориях имеют принципиально иную природу. Они являются фермионами и подчиняются статистике Ферми – Дирака с характерными для неё антикоммутационными перестановочными соотношениями. По этой причине поля материи не могут быть калибровочными в любой теории, симметрия которой задается обычной группой преобразований. При таких симметриях невозможно построить преобразования, смешивающие фермионы и бозоны. Чтобы восстановить равноправие между полями – переносчиками взаимодействия и полями вещества, между бозонами и фермионами, необходимо ввести симмметрии нового рода, суперсимметрии – СУСИ.

Во всех известных моделях квантовых теорий поля, включая электродинамику, возникает ряд трудностей, конкретно: в процессе вычислений в этих теориях возникают бесконечности, расходимости, которые искуственным образом отбрасываются. В СУСИ моделях теории поля возникает резкое сокращение числа расходимостей за счет взаимного сокращения вкладов фермионов и бозонов. Решение этой проблемы и есть одна из причин, почему СУСИ модели популярны. Нашей целью не является показ всех преимуществ СУСИ, а только косвенное ознакомление читателя, зачем она была построена и почему в физике элементарных частиц мы стремимся к объединительным тенденциям. СУСИ – это надежда на то, что теоретикам удастся построить единую (конечную) теорию поля.

ЛИТЕРАТУРА

Главы I и II

1. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. Москва:Наука, 1973.
2. Хамермеш М. Теория групп и её применение к физическим проблемам. М.: Мир, 1966.
3. Вигнер Е. Теория групп и её применение к квантовой механике. М.: ИЛ, 1947.
4. Любарский Т.Я. Теория групп и её применение в физике.М.: Физматгиз, 1958.
5. Джекобсон Н. Алгебра Ли. М.: Мир, 1964.
6. Желобенко Д.П. Лекции по теории групп Ли. ОИЯИ, Дубна, 1965; Желобенко Д.П., Штерн А.И. Представления групп Ли. М.: Наука, 1983.
7. Bacry H. Lectures on Group Theory and Particle Theory, Gordon and Breach Science Publ., N.Y. London–Paris,1977.
8. Niederle J. Preprint ICTP, 69/140, Trieste, Italy, 1969.
9. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
10. Теория групп и элементарные частицы (сб. статей под редакцией Д. Иваненко). М.: Мир, 1967.

Главы III и IV.

11. Наймарк М.А. Теория представлений групп. М.: Наука, 1976.
12. Lichtenberg D.B. Unitary Symmetry and Elementary Particles, Academic Press, New York and London, 1970.
13. Georgi H. Lie algebras in Particle Physics. The Benjamin Publ. Company, 1982.
14. Гельфанд И.М., Наймарк М.А. Унитарные представления классических групп. Труды мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, М., 1950.

Глава V.

15. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
16. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: ИЛ, 1963.
17. Смородинский Я.А. – УФН, 1964, 84, 3.
18. Райдер Д.Х. Элементарные частицы и симметрия. М.: Наука, 1983.
19. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и её приложения. М.: Мир, 1980.

Глава УI.

20. Наймарк М.А. Линейные представления группы Лоренца.М.: Физматгиз, I958.
21. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля.М.: ИЛ, I963.
22. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. М.: Наука, I980.
23. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, I986.
24. Огиевецкий В.И., Мезинческу Л. - УФН, I975, II7, 637.
25. Весс Ю., Беггер Дж. Суперсимметрия и супергравитация. М.: Мир,I986.
26. Белокуров В.В., Ширков Д.В. Теория взаимодействий частиц. М.: Наука, I986.

Рукопись поступила в издательский отдел
I2 октября I987 года.

ПЕРЕЧЕНЬ
лекций, вышедших с 1974 в ОИЯИ

Фаустов Р.Н. Связанная система частиц в квантовой электродинамике. Вып.1. ОИЯИ, Дубна, 1974.

Синаев А.Н. Современные аппаратурные системы модульной структуры, используемые при создании измерительно-вычислительных комплексов /КАМАК, ВЕКТОР/. Вып.2. ОИЯИ, 8507, Дубна, 1975.

Волков Д.В. Кварки как следствие дуальности. Вып.3. ОИЯИ, Р2-8765, Дубна, 1975.

Пальчик М.Я., Фрадкин Е.С. Введение в теорию конформно-инвариантных квантовых полей. Вып.4. ОИЯИ, 2-8874, Дубна, 1975.

Замори З. Микропроцессоры. Вып.5. ОИЯИ, Р10-8852, Дубна, 1975.

Биленький С.М. Вопросы физики нейтрино высоких энергий. Вып.6. ОИЯИ, 2-9026, Дубна, 1975.

Малкин И.А., Манько В.И. Инварианты, когерентные состояния и динамические симметрии квантовых систем. Вып.7. ОИЯИ, Р2-9228, Дубна, 1975.

Волков М.К., Первушин В.Н. Квантовая теория поля с киральным лагранжианом и физика мезонов низких энергий. Вып.8. ОИЯИ, Р2-9390, Дубна, 1976.

Басиладзе С.Г. Интегральные схемы с эмиттерной связью и их применение в наносекундной ядерной электронике. Вып.9. ОИЯИ, 13-9744, Дубна, 1976.

Аникин С.А. и др. Перенормированные составные поля в квантовой теории поля. Вып.10. ОИЯИ, Р2-10528, Дубна, 1977.

Шляпников П.В. Множественные процессы и инклюзивные реакции. Вып.11. ОИЯИ, Р2-10681, Дубна, 1977.

Капусцик Э. Галилеева инвариантность в теории поля. Вып.12. ОИЯИ, Р2-10677, Дубна, 1977.

Бутцев В.С. Явление возбуждения высокоспиновых ядерных состояний и механизм поглощения отрицательных π-мезонов. Вып.13,ОИЯИ,Р15-10847, Дубна, 1977.

Валуев Б.Н. Применение алгебры Клиффорда к решению задачи Изинга - Онсагера. Вып.14. ОИЯИ, Р17-11020, Дубна, 1977.

Капусцик Э. Нестандартные алгебры квантово-механических наблюдаемых. Вып.15. ОИЯИ, Р4-11497, Дубна, 1978.

Блохинцев Д.И. Квантовая механика. Лекции по избранным вопросам. Вып.16. ОИЯИ, Р2-11728, Дубна, 1978.

Ширикова Н.Ю. Начинающим работать на ЭВМ CDC-6500. Вып.17. ОИЯИ, Р11-11739, Дубна, 1978.

Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Непрерывные симметрии в теории поля. Вып.18. ОИЯИ, Р2-12029, Дубна, 1978.

Некоторые проблемы физики высоких энергий /сборник/. Вып.19. ОИЯИ, Р2-12080, Дубна, 1978.

Басиладзе С.Г. Электронная регистрирующая аппаратура физического эксперимента. Вып.20. ОИЯИ, Р13-12151, Дубна, 1979.

Ефремов А.В., Радюшкин А.В. Партоны, жесткие процессы и квантовая хромодинамика. Вып.21. ОИЯИ, Р2-12803, Дубна, 1979.

Говорков А.Б. Введение в теорию кварков. Вып.22, ОИЯИ, Р2-12803, Дубна, 1979.

Говорков А.Б. Цветные кварки и глюоны. Вып.23. ОИЯИ, Р2-80-6, Дубна, 1980.

Исаев П.С. Глубоконеупругое рассеяние лептонов на нуклонах. Партонная модель нуклона. Вып.24. ОИЯИ, Р2-80-325, Дубна, 1980.

Казаков Д.И., Ширков Д.В. Суммирование асимптотических рядов в квантовой теории поля. Вып.25. ОИЯИ, Р2-80-462, Дубна, 1980.

Ососков Г.А. Применение методов распознавания образов в физике высоких энергий. Вып.26. ОИЯИ, Р10-83-187, Дубна, 1983.

Малышев В.А. Элементарное введение в математическую физику бесконечно-частичных систем. Вып.27. ОИЯИ, Р17-83-363, Дубна, 1983.

Савушкин Л.Н., Фоменко В.Н. Введение в мезонную теорию ядерных взаимодействий и ядерных систем. Вып.28. ОИЯИ, Р4-83-369, Дубна,1983.

Биленький С.М. Осцилляции нейтрино. Вып.29. ОИЯИ, Р2-83-441, Дубна, 1983.

Бужек В. Введение в метод стохастического квантования. Вып.30. ОИЯИ, Р2-84-419, Дубна, 1984.

Шумовский А.С., Юкалов В.И. Фазовые состояния и переходы. Вып.31. ОИЯИ, Р17-85-676, Дубна, 1985.

Владимиров А.А. Введение в квантовые интегрируемые системы. Метод R-матрицы. Вып.32. ОИЯИ, Р17-85-742, Дубна, 1985.

Осипов В.А., Федянин В.К. Полиацетилен и двумерные модели квантовой теории поля. Вып. 33. ОИЯИ, Р17-85-809, Дубна, 1985.

Шуян Ш. Стохастичность в динамических системах. Вып. 34. ОИЯИ, Р17-86-211, Дубна, 1986.

Ефремов А.В. Введение в квантовую хромодинамику. Вып. 35. ОИЯИ, Р2-86-212, Дубна, 1986.

Нестеренко В.В., Червяков А.М. Сингулярные лагранжианы. Классическая динамика и квантование. Вып. 36. ОИЯИ, Р2-86-323, Дубна, 1986.

Пепёлышев Ю.Н. Регистрация нейтронов /современное состояние и перспективы развития/ Вып. 37. ОИЯИ, Р13-86-719, Дубна, 1986.

Боголюбов Н.Н./мл./, Шумовский А.С. Светоизлучение. Вып. 38. ОИЯИ, Р17-87-176, Дубна, 1987.

Пушкаров Д.И. Дефектоны в кристаллах. /Метод квазичастиц в квантовой теории дефектов/. Вып. 39. ОИЯИ, Р17-87-177, Дубна, 1987.

Никитюк Н.М. От современной алгебры к специализированным процессорам. Вып. 40. ОИЯИ, Р10-87-401, Дубна, 1987.

Требования, предъявляемые к серии брошюр
"Лекции для молодых ученых ОИЯИ"

Серия брошюр "Лекции для молодых ученых ОИЯИ" издаётся с целью повышения научно-профессионального кругозора и уровня молодых ученых и специалистов ОИЯИ в актуальных областях исследований, ведущихся по тематике Института. Выпуски должны представлять собой законченные циклы лекций, прочитанные в ОИЯИ и ориентированные прежде всего на молодых сотрудников Института.

Лекции должны иметь характер учебного пособия, предназначенного для первого ознакомления с рассматриваемой проблемой, а также содержать обзор её современного состояния. Они должны быть снабжены подробным оглавлением и основной литературой. Большие параграфы рекомендуется разбивать на подпараграфы с вынесенными в оглавление подзаголовками.

Весь текст, включая отдельные главы и параграфы, следует печатать, заполняя каждую страницу целиком.

Рукопись должна быть напечатана на специальных бланках, предназначенных для прямого репродуцирования, которые можно получить в издательском отделе. Все формулы и схемы должны быть вписаны аккуратно и ясно тушью или чернилами черного цвета. Разметка формул не производится, их нумерация должна находиться в конце строки справа в круглых скобках. Текст лекций печатается на машинке с черной (не серой) лентой через 1,5 интервала. Объём лекций не должен превышать 100 страниц машинописного текста.

Рукопись представляется в Редакционный совет серии брошюр "Лекции для молодых ученых ОИЯИ" Советом молодых ученых и специалистов ОИЯИ и Советами молодых ученых и специалистов лабораторий Института. Редакционный совет принимает окончательное решение о целесообразности ее публикации.

Редакционный совет