ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

В.В.Нестеренко, А.М.Червяков

Сингулярные лагранжианы. Классическая динамика и квантование

ДУБНА

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В.В.Нестеренко, А.М.Червяков

Р2-86-323

СИНГУЛЯРНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ. КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И КВАНТОВАНИЕ

(Лекции для молодых ученых)

Дубна 1986

ГЛАВА I. ДИНАМИКА СИСТЕМ С СИНГУЛЯРНЫМИ ЛАГРАНЖИАНАМИ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ I. Введение

Большинство полевых моделей, представляющих интерес для физики элементарных частиц, описываются сингулярными или вырожденными лагранжианами /I-6/. Это все калибровочные теории, общая теория относительности, репараметризационно-инвариантные модели. Вырожденные вариационные задачи возникают и в некоторых технических проблемах /7/.

Динамика системы, описываемой сингулярным лагранжианом, развивается не во всем фазовом пространстве, а только на его подмногообразии, задаваемом связями между каноническими переменными и калибровочными условиями. Это приводит к определенным трудностям при построении гамильтонова формализма.

Данные лекции построены в основном на результатах наших исследований по теории сингулярных лагранжианов /8-12/.

Наш подход отличается от стандартного изложения рассматриваемой проблемы тем, что еще в рамках лагранжева формализма строится полный набор связей между каноническими переменными, и только после этого методом неопределенных множителей Лагранжа выводятся уравнения движения в фазовом пространстве (обобщенные гамильтоновы уравнения). Такое изложение обладает, на наш взгляд, следующими двумя преимуществами:

I) метод неопределенных множителей Лагранжа требует знания всего набора связей между каноническими переменными;

2) не возникает проблемы: какие связи следует включать в гамильтониан, а какие нет, так как метод множителей Лагранжа однозначно требует включения в гамильтониан всех связей из полного набора.

В общем случае уравнения движения в фазовом пространстве, получаемые таким путем, оказываются более широкими, чем исходные уравнения Эйлера в конфигурационном пространстве. Однако на физическом подмногообразии фазового пространства дополнительные слагаемые в эффективном гамильтониане, ответственные за неэквивалентность с уравнениями Эйлера, исчезают.

В интересных с физической точки зрения случаях сингулярность лагранжиана обусловлена инвариантностью теории по отношению к преобразованиям с произвольными функциями времени и координат. Следствия такой инвариантности формулируются второй теоремой Нетер /8,13/. В лекциях, в отличие от работ /1-6/, широко используется эта теорема. С ее помощью устанавливаются свойства скобок Пуассона первичных связей, доказывается инвариантность лагранжевых связей в процессе эволюции. Обсуждается постановка задачи Коши в теориях с вырожденными лагранжианами.

При квантовании систем, описываемых вырожденными лагранжианами, основное внимание уделяется методу континуального интегрирования в фазовом пространстве. Вначале рассмотрено квантование этим методом системы со связями первого рода и инволютивными между собой калибровочными условиями. Далее дан простой последовательный вывод формулы для гамильтонова функционального интеграла в теориях со связями первого и второго рода (как стационарными, так и нестационарными). Калибровочные условия могут быть неинволютивны между собой и содержать время явно. В отличие от других работ, большое внимание уделяется доказательству гамильтоновости теории на физическом подмногообразии Γ^* фазового пространства Γ. Показано, что Δ^{-1}, где Δ -детерминант Фаддеева - Попова, есть не что иное, как элемент объема подпространства $\overline{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma^*$ в неканонических координатах, задаваемых связями и калибровочными условиями.

В этих лекциях мы старались по мере возможности не дублировать материал по теории вырожденных лагранжианов, изложенный в известных обзорах /1,3-6/. Поэтому квантование систем с вырожденными лагранжианами иллюстрируется одним примером - построением квантовой теории свободного поля Максвелла. Большое число интересных с физической точки зрения приложений рассмотрено в работах /3,5/.

Ряд вопросов, излагаемых в лекциях, мы обсуждали с Л.Д. Фаддеевым, Л.В. Прохоровым, Г.П. Пронько, А.В. Разумовым. Мы выражаем им свою благодарность. Особенно признательны мы И.В. Тютину, который прочитал текст лекций и сделал ряд полезных замечаний.

§ 2. Особенности уравнений Эйлера для вырожденных лагранжианов. Лагранжевы связи

Для упрощения формул мы будем рассматривать систему с конечным числом степеней свободы n, описываемую лагранжианом $L(q, \dot{q})$, $q = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Лагранжиан называется сингулярным или вырожденным, если ранг r симметричной матрицы

$$\lambda_{ij}(q, \dot{q}) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad \dot{q}_i = \frac{d q(t)}{d t} \tag{2.1}$$

меньше, чем число степеней свободы n. Как следствие этого, имеем

$$\det(\lambda_{ij}) \equiv 0. \tag{2.2}$$

Мы будем предполагать, что ранг матрицы $\lambda(q, \dot{q})$ равен r во всей области изменения переменных q и $\dot{q}$. Тот случай, когда на некоторых подмногообразиях $2n$ - мерного пространства $\{q_i, \dot{q}_i, i = 1, \ldots, n\}$ матрица $\lambda(q, \dot{q})$ может иметь меньший, чем r, ранг, обсуждается, например, в книге /4/. Мы считаем, что $r > 0$, то есть случай вырожденных лагранжианов, линейных по скоростям $\dot{q}$, здесь не исследуется.

Рассмотрим особенности лагранжевой динамики, к которым приводит сингулярность лагранжиана. Уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\ ,\quad i = 1, \dots, n \qquad (2.3)$$

с учетом (2.I) можно записать так:

$$L_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \lambda_{ij}(q, \dot{q})\ddot{q}_j - \ell_i(q, \dot{q}) = 0\ ,$$
$$i, j = 1, \dots, n\ , \qquad (2.4)$$

где через $\ell_i(q, \dot{q})$ обозначены те части уравнений Эйлера, которые не содержат $\ddot{q}$:

$$\ell_i(q, \dot{q}) = -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_i}\ . \qquad (2.5)$$
$$i, j = 1, \dots, n.$$

По повторяющимся индексам будем предполагать, как обычно, суммирование в соответствующих пределах.

Если ранг матрицы λ_{ij} меньше n, то эта матрица имеет $m = n - r$ собственных векторов $\overset{s}{\xi}_i(q, \dot{q})$, $s = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$ с нулевым собственным значением

$$\lambda_{ij}(q, \dot{q})\overset{s}{\xi}_j(q, \dot{q}) \equiv \overset{s}{\xi}_j(q, \dot{q})\lambda_{ij}(q, \dot{q}) \equiv 0\ . \qquad (2.6)$$

Существенно, что равенства (2.6) выполняются тождественно по q и $\dot{q}$.

Покажем, что уравнения Эйлера (2.4) представляют собой r линейно-независимых уравнений второго порядка, которые могут быть записаны в нормальной форме, и $m = n - r$ уравнений первого или нулевого порядка.

Проектируя уравнения (2.4) на собственные нулевые векторы матрицы (2.I), получаем m уравнений, не содержащих $\ddot{q}$

$$B_s(q, \dot{q}) = \overset{s}{\xi}_i(q, \dot{q})\ell_i(q, \dot{q}) = \overset{s}{\xi}_i\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0\ . \qquad (2.7)$$
$$s = 1, \dots, m.$$

Теперь рассмотрим уравнения (2.4) как систему из n линейных неоднородных алгебраических уравнений с неизвестными $\ddot{q}_j$, $j = 1, \dots, n$. Ранг основной матрицы этой системы равен r. Условием совместности данной системы являются уравнения (2.7) (теорема Фредгольма для системы линейных неоднородных алгебраических уравнений; см., например, /I4/). Если уравнения (2.7) выполнены[x], то из системы (2.4) можно найти r "ускорений" $\ddot{q}_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, r$ в виде функций

[x] Для совместности (2.3) не требуется, чтобы уравнения (2.7) выполнялись тождественно по функциям $q(t)$ и $\dot{q}(t)$. Достаточно, если они выполняются только на решениях полной системы (2.3).

q, $\dot{q}$ и оставшихся $n-r$ "ускорений"

$$\ddot{q}_\alpha = Q_\alpha(q_1,\ldots,q_n;\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n;\ddot{q}_{r+1},\ldots,\ddot{q}_n),\ \alpha=1,\ldots,r. \quad (2.8)$$

Таким образом, уравнения Эйлера для сингулярных лагранжианов (1.3) эквивалентны системе из r уравнений второго порядка (2.8) и m уравнений (2.7), порядок которых меньше 2.

Если ранг r_1 функциональной матрицы

$$\frac{\partial B_s(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i},\quad s=1,\ldots,m;\ i=1,\ldots,n \quad (2.9)$$

меньше m, то $m-r_1$ уравнений (2.9) можно заменить эквивалентными конечными, недифференциальными уравнениями, не содержащими скоростей $\dot{q}$

$$C_{s'}(q)=0,\quad s'=1,\ldots,m-r_1. \quad (2.10)$$

Возможны ситуации, когда часть уравнений (2.7) или они все выполняются тождественно.

В общем случае уравнения (2.7) будем называть лагранжевыми связями, так как они устанавливают зависимость между q и $\dot{q}$. При выводе уравнений Эйлера (2.3) из соответствующей вариационной задачи обобщенные координаты и скорости рассматривались как независимые величины. Поэтому уравнения (2.3) для вырожденных лагранжианов, в принципе, могут привести к противоречию. Например, для $L=q$ из (2.3) получаем $1=0$. Такие случаи мы заранее исключаем из рассмотрения, считая, что все уравнения, следующие из (2.3), непротиворечивы.

Уравнения Эйлера (2.3) для вырожденных лагранжианов будут непротиворечивы, если m лагранжевых связей (2.7) образуют инвариантное подмногообразие I (или иначе: являются инвариантными соотношениями) для нормальной системы из r уравнений второго порядка (2.8) (см. Приложение А). Это означает, что любое решение уравнений (2.8) в пространстве $\{q,\dot{q}\}$, имеющее хотя бы одну общую точку с подмногообразием I, целиком лежит в этом подмногообразии.

Доказать это утверждение для произвольного вырожденного лагранжиана, очевидно, нельзя. Это показывает простой пример, приведенный выше. Однако в важном с точки зрения приложений случае, когда сингулярность лагранжиана обусловлена инвариантностью действия при преобразованиях с произвольными функциями времени, данное утверждение можно доказать с использованием тождеств Нётер (см. § 3).

В случае нормальной вариационной задачи, когда ранг матрицы λ в (2.1) равен n, общее решение уравнений Эйлера (2.4) зависит от $2n$ произвольных констант, которые определяются данными Коши.

Для вырожденного лагранжиана это не так. На произвол в общем решении уравнений Эйлера для такого лагранжиана существенно влияет конкретный вид лагранжевых связей (2.7). Мы рассмотрим здесь только два предельных случая максимального и минимального произвола в общем решении уравнений движения для сингулярного лагранжиана.

Если лагранжевы связи (2.7) удовлетворяются тождественно, то общее решение уравнений движения содержит максимальный произвол, а именно, это решение зависит от $m=n-r$ произвольных функций времени и $2(n-m)$ произвольных констант. Действительно, в рассматриваемом случае уравнения Эйлера (2.4) сводятся только к уравнениям второго порядка (2.8), и число этих уравнений равно $r=n-m$. Полагая в (2.8) координаты $q_{r+1}(t),\ldots,q_n(t)$ равными произвольным функциям времени и решая эту систему уравнений по отношению к $q_\alpha(t)$, $\alpha=1,\ldots,r$, мы получим решение исходной системы уравнений (2.4), содержащее m произвольных функций времени и $2(n-m)$ произвольных констант.

Противоположным является случай, когда все m лагранжевых связей (2.7) являются конечными недифференциальными уравнениями типа (2.10) с $r_1=0$. Кроме того, предположим, что ранг функциональной матрицы

$$\frac{\partial C_{s'}(q)}{\partial q_{r+s''}},\quad s',s''=1,\ldots,m \quad (2.11)$$

равен m. Учитывая это, мы можем определить из соотношений (2.10) m последних координат q_{r+s}, $s=1,\ldots,m$ как функции первых r координат q_α, $\alpha=1,\ldots,r$, подставить эти выражения в уравнения второго порядка (2.8). Тем самым координаты q_{r+s}, $s=1,\ldots,m$ будут исключены из уравнений Эйлера. Общее решение уравнений (2.8) содержит $2(n-m)$ произвольных констант. Это и есть минимальный произвол в общем решении уравнений движения в случае вырожденного лагранжиана.

Обсудим постановку задачи Коши для уравнений Эйлера (2.3) в случае вырожденных лагранжианов. Будем предполагать для определенности, что лагранжевы связи (2.7) не удовлетворяются тождественно и что они являются инвариантными соотношениями для нормальной системы (2.8). Начальные данные для уравнений (2.3) не могут быть выбраны произвольно. Они должны удовлетворять лагранжевым связям (2.7). В этом смысле уравнения Эйлера для вырожденных лагранжианов можно считать "переопределенными".

Но в то же время, если начальные данные $q_i(t_0)$ и $\dot{q}_i(t_0)$ выбраны так, что они удовлетворяют лагранжевым связям (2.7), то на n переменных $q_i(t)$ останется только $r=n-m$ уравнений второго порядка в нормальной форме (2.8). При этом не надо заботиться о выполнении связей (2.7) в последующие моменты времени, так как мы считаем, что они образуют инвариантное подмногообразие для системы (2.8). В этом смысле вся система уравнений Эйлера (2.3) может рассматриваться как "недоопределенная".

§ 3. Свойства инвариантности действия и сингулярность лагранжиана

Динамические системы, описываемые сингулярными лагранжианами, обычно обладают симметриями калибровочного типа. Их уравнения движения и функционал действия инвариантны по отношению к преобразованиям, содержащим произвольные функции времени. В действительности в интересных с физической точки зрения случаях именно эта инвариантность приводит к сингулярности соответствующего лагранжиана.

Следствия, вытекающие из инвариантности действия по отношению к преобразованиям, определяемым произвольными функциями координат и времени, дает вторая теорема Нетер [8,13,15]. Рассмотрим эту теорему сразу для полевого случая, когда обобщенными лагранжевыми координатами является набор полевых функций $q_1(x),\ldots,q_n(x)$, $x=\{x_0=t, x_1,\ldots,x_{d-1}\}$. Пусть лагранжева плотность зависит только от полевых функций $q(x)$ и их первых производных $\partial q(x)$. Определим функционал действия

$$S[q(x)]=\int_\Omega dx\,\mathcal{L}(q,\partial q). \tag{3.1}$$

Рассмотрим следующее преобразование независимых переменных x и полевых функций $q(x)$, задаваемое набором из m произвольных функций координат и времени $\varepsilon_s(x)$, $s=1,\ldots,m$

$$\bar{x}_\mu=\Phi_\mu(x,q,\partial q,\partial^2 q,\ldots;\varepsilon_s(x))=x_\mu+\delta x_\mu,$$

$$\bar{q}_i(\bar{x})=\Psi_i(x,q,\partial q,\partial^2 q,\ldots;\varepsilon_s(x))=q_i(x)+\delta q_i(x), \tag{3.2}$$

$$\mu=0,1,\ldots,d-1,\quad i=1,\ldots,n,\quad s=1,\ldots,m.$$

Как обычно, мы предполагаем, что тождественные преобразования соответствуют нулевым значениям $\varepsilon_s(x)$, $s=1,\ldots,m$. Полные вариации δx_μ и δq_i в первом порядке по ε_s записываются в следующем виде:

$$\delta x_\mu=\varepsilon_s\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial\varepsilon_s}\Big|_{\varepsilon_s=0}=\varepsilon_s\,\delta\overset{s}{x}_\mu,$$

$$\delta q_i=\varepsilon_s\frac{\partial\Psi_i}{\partial\varepsilon_s}\Big|_{\varepsilon_s=0}=\varepsilon_s\,\delta\overset{s}{q}_i. \tag{3.3}$$

Введем, как обычно вариацию формы полевых функций

$$\bar{\delta}q_i(x)=\bar{q}_i(x)-q_i(x). \tag{3.4}$$

Операция $\bar{\delta}$ по определению перестановочна с дифференцированием

$$\bar{\delta}q_{i,\mu}(x)=\partial_\mu\bar{\delta}q_i(x). \tag{3.5}$$

Индекс после запятой означает частную производную по соответствующей компоненте x_μ.

Полная вариация и вариация формы связаны следующим соотношением:

$$\delta q_i(x)=\bar{\delta}q_i(x)+q_{i,\mu}\,\delta x_\mu. \tag{3.6}$$

Равенство это выполняется с точностью до $\varepsilon_s(x)$ включительно. Формула, аналогичная (2.6), имеет место и для частной производной полевой функции любого порядка [8]

$$\delta q_{i,\mu\nu\rho\ldots}=\bar{\delta}q_{i,\mu\nu\rho\ldots}+q_{i,\mu\nu\rho\ldots\sigma}\,\delta x_\sigma. \tag{3.7}$$

Мы часто будем использовать полную производную по координатам, которая учитывает как явную зависимость от x, так и зависимость от x через $q_i(x)$ и $\partial q_i(x)$

$$d_\mu\equiv\frac{d}{dx_\mu}=\frac{\partial}{\partial x_\mu}+q_{i,\mu}\frac{\partial}{\partial q_i}+q_{i,\mu\nu}\frac{\partial}{\partial q_{i,\nu}}. \tag{3.8}$$

Предположим, что при преобразовании (2.2) лагранжева плотность преобразуется следующим образом:

$$\mathcal{L}(q,\partial q)\to\bar{\mathcal{L}}(\bar{q},\bar{\partial}\bar{q})=\mathcal{L}(\bar{q},\bar{\partial}\bar{q})+\frac{dC_\mu}{dx_\mu}+\alpha(\bar{x},\bar{q},\bar{\partial}\bar{q}), \tag{3.9}$$

где величины C_μ линейны по параметрам – функциям $\varepsilon_s(x)$, а $\alpha(\bar{x},\bar{q},\bar{\partial}\bar{q})$ содержат $\varepsilon^2(x)$ и более высокие члены. В этом случае говорят, что лагранжиан форм-инвариантен с точностью до дивергенции. Закон преобразования лагранжиана (3.9) гарантирует ковариантность уравнений движения для полевых функций $q_i(x)$.

Полная вариация лагранжиана при преобразовании (3.2) может быть представлена в следующем виде:

$$\delta\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}(\bar{q},\bar{\partial}\bar{q}) - \mathcal{L}(q,\partial q) = \mathcal{L}(\bar{q},\bar{\partial}\bar{q}) - \mathcal{L}(q,\partial q) + \frac{dC_\mu}{dx_\mu} =$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{i,\mu}}\delta q_{i,\mu} + \frac{dC_\mu}{dx_\mu} . \tag{3.10}$$

С помощью (3.6) и (3.7) формула (3.10) переписывается так:

$$\delta\mathcal{L} = \delta_q\mathcal{L} + \frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu}\delta x_\mu + \frac{dC_\mu}{dx_\mu} , \tag{3.11}$$

где $\delta_q\mathcal{L}$ означает вариацию $\mathcal{L}$, соответствующую вариациям формы q и ∂q :

$$\delta_q\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\bar{\delta} q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{i,\mu}}\bar{\delta} q_{i,\mu} . \tag{3.12}$$

Теперь мы возвратимся к функционалу действия (3.1) и поставим ему в соответствие новый функционал

$$\bar{S}[\bar{q}(\bar{x})] = \int_{\bar{\Omega}} d\bar{x}\, \bar{\mathcal{L}}(\bar{q},\bar{\partial}\bar{q}), \tag{3.13}$$

где $\bar{\Omega}$ означает ту область в пространстве $\bar{x}$, в которую переходит Ω при преобразовании (3.2). Вычислим вариацию δS

$$\delta S = \bar{S}[\bar{q}(\bar{x})] - S[q(x)] =$$

$$\int_{\bar{\Omega}} d\bar{x}\,\bar{\mathcal{L}}(\bar{q},\bar{\partial}\bar{q}) - \int_{\Omega} dx\,\mathcal{L}(q,\partial q) . \tag{3.14}$$

Интегрирование по $\bar{x}$ в (3.14) можно заменить интегрированием по x. Якобиан при такой замене переменных равен следующему выражению:

$$\frac{\partial(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \det\left\| \delta_{\mu\nu} + \frac{d\delta x_\mu}{dx_\nu} \right\| =$$

$$\prod_{\mu=0}^{d-1}\left(1 + \frac{d\delta x_\mu}{dx_\mu}\right) + O(\varepsilon^2) = 1 + \sum_{\mu=0}^{d-1}\frac{d\delta x_\mu}{dx_\mu} + O(\varepsilon^2) . \tag{3.15}$$

Формула (3.14) теперь переписывается так:

$$\delta S = \int dx\left[\bar{\mathcal{L}}(\bar{q},\bar{\partial}\bar{q}) - \mathcal{L}(q,\partial q) + \mathcal{L}(q,\partial q)\frac{d\delta x_\mu}{dx_\mu}\right] =$$

$$\int_{\Omega} dx\left[\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}(q,\partial q)\frac{d\delta x_\mu}{dx_\mu}\right] . \tag{3.16}$$

В формулу (3.16) входит полная вариация лагранжиана, которая выражается, согласно (3.10), через полные вариации полевых функций и полные вариации их первых производных. С помощью (3.11) можно перейти к соответствующим вариациям формы

$$\delta S = \int dx\left[\delta_q\mathcal{L} + \frac{d}{dx_\mu}(\mathcal{L}\delta x_\mu + C_\mu)\right] . \tag{3.17}$$

Выделим явно в (3.17) левые части уравнений движения (лагранжевы выражения). Для этого воспользуемся равенством

$$\delta_q\mathcal{L} = L_j\bar{\delta} q_j - \frac{dF_\mu}{dx_\mu} , \tag{3.18}$$

где

$$L_j = \frac{d}{dx_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{j,\mu}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} , \tag{3.19}$$

$$F_\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{j,\mu}}\bar{\delta} q_j . \tag{3.20}$$

Подставляя (3.18) в (3.17), получаем

$$\delta S = -\int_{\Omega} dx\left[L_j\bar{\delta} q_j + \frac{d}{dx_\mu}(F_\mu - \mathcal{L}\delta x_\mu - C_\mu)\right] . \tag{3.21}$$

Мы будем говорить, что действие (3.1) инвариантно при преобразованиях (3.2), если $\delta S = 0$.

Вторая теорема Нетер. Пусть действие S инвариантно относительно преобразований координат и полевых функций, зависящих от m произвольных функций $\varepsilon_s(x)$, $s=1,\ldots,m$ и их производных до k-го порядка включительно. Тогда имеют место m тождеств, включающих лагранжевы выражения и их производные до k -го порядка.

Рассмотрим для простоты случай $k = 1$. Вариацию формы функций зададим выражением

$$\bar{\delta} q_i(x) = \gamma_i^s\varepsilon_s(x) + \gamma_{i\mu}^s\varepsilon_{s,\mu}(x) , \tag{3.22}$$

где коэффициенты γ_i^s и $\gamma_{i\mu}^s$ являются заданными функциями

x, q, ∂q, $\partial^2 q$ и т.д. Подставляя (3.22) в (3.21) и приравнивая δS нулю, получаем

$$\delta S = -\int\limits_{\Omega} dx \Big\{ \Big[L_i \overset{s}{\gamma}_i - \frac{d}{dx_\mu}\big(L_j \overset{s}{\gamma}_{j\mu}\big)\Big] \varepsilon_s(x) - \frac{d}{dx_\mu}\Big(F_\mu - C_\mu + L_j \overset{s}{\gamma}_{j\mu} \varepsilon_s(x)\Big)\Big\} = 0 . \qquad (3.23)$$

При этом мы воспользовались тождеством

$$L_j \overset{s}{\gamma}_{j\mu} \varepsilon_{s,\mu} = \frac{d}{dx_\mu}\big(L_j \overset{s}{\gamma}_{j\mu} \varepsilon_s\big) - \frac{d}{dx_\mu}\big(L_j \overset{s}{\gamma}_{j\mu}\big)\varepsilon_s . \qquad (3.24)$$

Теперь мы выберем функции $\varepsilon_s(x)$, $s = 1, \ldots, m$ так, чтобы они и все их производные, встречающиеся в $F_\mu - C_\mu + L_j \overset{s}{\gamma}_{j\mu} \varepsilon_s$, исчезали на границе области интегрирования Ω, например, $z_i \in \Omega$, $\varepsilon_s(x) \sim \delta^{(d)}(x - z_i)$. После интегрирования по частям в (3.23) получаем

$$\delta S = -\int dx \Big[L_j \overset{s}{\gamma}_j - \frac{d}{dx_\mu}\big(L_j \overset{s}{\gamma}_{j\mu}\big)\Big] \varepsilon_s(x) = 0 . \qquad (3.25)$$

Так как функции $\varepsilon_s(x)$, $s = 1, \ldots, m$ внутри области интегрирования произвольны, то уравнение (3.25) дает m тождеств

$$L_j \overset{s}{\gamma}_j - \frac{d}{dx_\mu}\big(L_j \overset{s}{\gamma}_{j\mu}\big) \equiv 0 , \qquad (3.26)$$
$$s = 1, \ldots, m .$$

Тождества (3.26) обычно называются тождествами Бьянки /16,17/.

Покажем теперь, что если выполнены условия второй теоремы Нетер, то соответствующий лагранжиан заведомо сингулярный /8/. Мы ограничимся такими преобразованиями (3.2), для которых коэффициенты $\overset{s}{\gamma}_i$ и $\overset{s}{\gamma}_{i\mu}$ в (3.22) содержат производные по времени полевых функций $q_j(x)$ не выше первого порядка. Подставим в тождества (3.26) явный вид лагранжевых выражений

$$L_i = -\lambda_{ij} \ddot{q}_j + \bar{L}_i , \qquad (3.27)$$

где

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} , \qquad (3.28)$$

а $\bar{L}_i$ не содержит вторых производных по времени от полевых функций $\ddot{q}_j$. В результате слагаемые, содержащие вторые производные по времени от полевых функций, приведут к появлению в тождествах (3.26) третьих производных по времени от $q_j(x)$. Коэффициенты при этих производных должны тождественно по своим аргументам обращаться в ноль

$$\lambda_{ij} \overset{s}{\gamma}_{j0} \equiv 0 , \quad i, j = 1, \ldots, n , \quad s = 1, \ldots, m . \qquad (3.29)$$

Таким образом, матрица λ_{ij} имеет m нулевых собственных векторов, которыми являются коэффициенты $\overset{s}{\gamma}_{j0}$, $j = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, m$, и её ранг равен $n - m$. Значит, исходная лагранжева плотность $\mathcal{L}(q, \partial q)$ является вырожденной.

Изложенные выше рассуждения о сингулярности лагранжиана остаются в силе и в том случае, если $\mathcal{L}(q, \partial q)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\mathcal{L}(q, \partial q) = \mathcal{L}_1(q, \dot{q}) + \mathcal{L}_2(q, \partial_\alpha q), \quad \alpha = 1, \ldots, d-1 , \qquad (3.30)$$

причем $\mathcal{L}_2$ не содержит производных по времени и относительно преобразований, фигурирующих во второй теореме Нетер, инвариантна только часть действия, соответствующая $\mathcal{L}_1(q, \dot{q})$. В определение матрицы λ_{ij} согласно (3.28) войдет только первое слагаемое из (3.30), и формула (3.29) будет по-прежнему верна.

Лагранжиан типа (3.30) описывает, например, калибровочное поле с массой

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu^2 , \qquad G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \qquad (3.31)$$

В § 6 мы покажем, используя тождества Нетер (3.26), что из инвариантности действия относительно преобразований, содержащих произвольные функции времени, следует не только сингулярность лагранжиана, но и утверждение о том, что соответствующие первичные гамильтоновы связи на q и p находятся в инволюции между собой, по крайней мере, в слабом смысле.

Обсудим теперь, в чем состоит смысл тождеств Нетер (3.26). Если закон преобразования полевых функций (3.22) таков, что $\overset{s}{\gamma}_{i\mu} \equiv 0$ (точечная релятивистская частица, релятивистская струна /18/), то нётеровские тождества (3.26) означают линейную зависимость левых частей уравнений Эйлера. В этом случае m уравнений Эйлера являются следствием остальных $r = n - m$ уравнений. Число независимых уравнений меньше числа неизвестных функций.

Пусть теперь $\gamma^s_{i\mu} \neq 0$. Запишем уравнения Эйлера в следующем виде:

$$L_j \equiv \lambda_{jk}\ddot{q}_k - \ell_j(q_i, \partial q_i, \bar{\partial}^2 q_i) = 0, \quad i,j,k = 1,2,\dots,n, \tag{3.32}$$

где $\bar{\partial}^2 q$ означает вторые производные, отличные от $\ddot{q}_i$. В силу (3.29) уравнения (3.32) представляют собой систему из $r = n-m$ уравнений второго порядка, разрешенных относительно $\ddot{q}_\alpha$

$$L^{(2)}_\alpha \equiv \ddot{q}_\alpha - Q_\alpha(q_i, \partial q_i, \bar{\partial}^2 q_\beta) = 0, \quad \alpha, \beta = 1,\dots,r, \quad i = 1,\dots,n, \tag{3.33}$$

и m уравнений, содержащих производные полевых функций по времени не выше первого порядка (m лагранжевых связей)

$$B_s(q, \partial q, \bar{\partial}^2 q) \equiv \gamma^s_{j0}(q, \partial q)\ell_j(q, \partial q, \bar{\partial}^2 q) = 0, \quad s = 1,\dots,m. \tag{3.34}$$

Благодаря тождествам Нётер (3.26) лагранжевы связи (3.34) можно рассматривать как условия на начальные данные для нормальной системы уравнений (3.33). Докажем это утверждение, т.е. покажем, что если начальные данные в момент времени $t = t_0$: $\{q_i(t_0, x_1, x_2, \dots, x_{d-1}), \dot{q}_i(t_0, x_1, x_2, \dots, x_{d-1}), \ i = 1,\dots,n\}$ выбраны так, что удовлетворяются уравнения (3.34), то эти уравнения будут выполнены и во все последующие моменты времени, если эволюция системы во времени подчиняется уравнениям (3.33).

Лагранжевы выражения L_j, $j = 1,\dots,n$, входящие в тождества Нётер (3.26), можно представить в виде линейной комбинации уравнений второго порядка (3.33) и лагранжевых связей (3.34)

$$L_j = \sum_{\alpha=1}^{r} C_{j\alpha}(q, \partial q) L^{(2)}_\alpha + \sum_{s=1}^{m} d_{js}(q, \partial q) B_s, \quad j = 1,\dots,n. \tag{3.35}$$

Подставим (3.35) в тождества (3.26) и учтем уравнения (3.33). В результате получим однородную систему уравнений в частных производных первого порядка на левые части лагранжевых связей B_s :

$$\frac{\partial B_s}{\partial t} = \sum_{k=1}^{d-1} a_{sk}\frac{\partial B_s}{\partial x_k} + \sum_{s'=1}^{m} b_{ss'} B_{s'}, \quad s = 1,2,\dots,m. \tag{3.36}$$

Коэффициенты a_{sk} и $b_{ss'}$ выражаются через γ^s_j, $\gamma^s_{j\mu}$ и d_{js}. Решением системы (3.36), удовлетворяющим начальным данным

$$B_s|_{t=t_0} = 0, \tag{3.37}$$

является нулевое решение $B_s = 0$ при $t > t_0$. В силу теоремы единственности, других решений для (3.36), (3.37) нет.

Таким образом, благодаря тождествам Нётер для уравнений Эйлера (3.32) в теории с вырожденным лагранжианом можно непротиворечиво сформулировать задачу Коши для начальных данных, удовлетворяющих лагранжевым связям (3.34).

Напомним, что это утверждение доказано здесь для преобразований симметрии (3.22) с коэффициентами γ^s_i и $\gamma^s_{j\mu}$, содержащими производные полевых функций по времени не выше первого порядка.

§ 4. Фиксирование калибровочного произвола в лагранжевом формализме

Как было показано в § 2, в решениях уравнений движения для вырожденных лагранжианов может присутствовать функциональный произвол. При исследовании физических задач необходимо уметь избавиться от этого произвола. Для этой цели на искомые решения уравнений Эйлера (2.3) накладывают дополнительные требования, привлекая физические или геометрические соображения.

Если сингулярность лагранжиана является следствием инвариантности действия по отношению к преобразованиям, содержащим произвольные функции времени (мы их будем называть калибровочными преобразованиями), то очевидным требованием для условий, фиксирующих функциональный произвол в теории (калибровочных условий), является их неинвариантность по отношению к калибровочным преобразованиям. Это требование необходимо дополнить условиями достижимости и однозначности калибровочных условий.

Достижимость калибровочного условия означает существования калибровочного преобразования, переводящего произвольную конфигурацию переменных $(q_i(t), i=1,\dots,n; t)$ в конфигурацию $(\bar{q}_i(\bar{t}), i=1,\dots,n, \bar{t})$, удовлетворяющую калибровочному условию.

Однозначность требует единственности решения калибровочного условия для переменных $(\bar{q}_i(\bar{t}), i=1,\dots,n; \bar{t})$.

В качестве примера рассмотрим релятивистское действие точечной частицы

$$S = -m\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\dot{x}^2}\, d\tau, \tag{4.1}$$

где $x^\mu(\tau)$ – траектория частицы в n -мерном пространстве-времени с сигнатурой метрики $g_{\mu\nu} = diag(+,-,-,\dots)$, $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$, $\mu = 0,1,\dots,n-1$. Лагранжиан в (4.1) сингулярный, так как матрица

$$\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^\mu\partial\dot{x}^\nu} = -\frac{m}{(\dot{x}^2)^{3/2}}(g_{\mu\nu}\dot{x}^2 - \dot{x}_\mu\dot{x}_\nu) \tag{4.2}$$

имеет нулевой собственный вектор $\dot{x}^\nu$

$$\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\nu \equiv 0. \tag{4.3}$$

Других нулевых собственных векторов у матрицы $\lambda_{\mu\nu}$ нет. Это согласуется с тем, что действие (4.I) инвариантно относительно преобразований

$$\bar{\tau} = f(\tau) \tag{4.4}$$

с одной произвольной функцией $f(\tau)$ (см. предыдущий §, посвященный второй теореме Нётер). Таким образом, ранг матрицы $\lambda_{\mu\nu}$ равен $n-1$. Уравнения Эйлера в рассматриваемом случае имеют вид

$$-\frac{(\dot{x}^2)^{3/2}}{m}\lambda_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu = \ddot{x}_\mu\dot{x}^2 - \dot{x}_\mu(\dot{x}_\nu\ddot{x}_\nu) = 0. \tag{4.5}$$

Их проекция на нулевой собственный вектор $\dot{x}^\mu$ матрицы $\lambda_{\mu\nu}$ обращается в ноль тождественно (тождество Нётер). Поэтому соотношений (2.7), содержащих только первые производные координат по времени, здесь нет.

В качестве дополнительного условия можно потребовать

$$\dot{x}^2 = C, \tag{4.6}$$

где C – фиксированная константа. Тогда система (4.5) сводится к следующим уравнениям, разрешенным относительно ускорений:

$$\ddot{x}_\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4.7}$$

Дополнительное условие (4.6) является инвариантным соотношением (см. Приложение А) для уравнений (4.7), поэтому комбинация (4.6) и (4.7) не приводит к новым ограничениям на данные Коши.

Другой выбор калибровочного условия

$$x^0 = \tau \tag{4.8}$$

приводит, согласно (4.5), к следующим уравнениям для пространственных компонент радиус-вектора $\vec{x}(t)$:

$$\ddot{\vec{x}}(1 - \dot{\vec{x}}^2) + \dot{\vec{x}}(\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}}) = 0. \tag{4.9}$$

Из (4.9) следует $(\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}}) = 0$, поэтому окончательные уравнения совпадают с (4.7):

$$\ddot{\vec{x}}(t) = 0 \tag{4.10}$$

ГЛАВА 2. ОБОБЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

§ 5. Первичные связи в фазовом пространстве и их свойства

Перейдем теперь к рассмотрению гамильтоновой динамики для систем с сингулярными лагранжианами. Определим, как обычно, канонически сопряженные импульсы

$$p_j = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.I}$$

В силу того, что ранг матрицы

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial p_i(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_j}, \quad i,j = 1, \ldots, n \tag{5.2}$$

меньше n (см. § 2), импульсы $p_i(q,\dot{q})$ не являются независимыми функциями скоростей $\dot{q}$. Между p_i существует $m = n - r$ связей. Действительно, уравнения (5.I) мы можем разрешить относительно r обобщенных скоростей $\dot{q}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, r$, выразив их как функции первых r импульсов p_α, $\alpha = 1, \ldots, r$, всех координат q_j, $j = 1, \ldots, n$ и оставшихся $m = n - r$ скоростей $\dot{q}_{r+1}, \ldots, \dot{q}_n$

$$\dot{q}_\alpha = h_\alpha(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_r; \dot{q}_{r+1}, \ldots, \dot{q}_n), \quad \alpha = 1, \ldots, r. \tag{5.3}$$

Мы опять считаем, что в матрице λ_{ij} линейно независимы первые r строк. Подставив r функций (5.3) в оставшиеся m соотношений (5.I), получим m связей между q и p, которые не содержат скоростей $\dot{q}$ вовсе /19/.

$$p_{r+s} = g_{r+s}(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_r), \quad s = 1, \ldots, m. \tag{5.4}$$

Обычно вместо связей (5.4), разрешенных относительно части импульсов, используется эквивалентный им набор связей следующего вида:

$$\varphi_s(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)=\varphi_s(q,p)=0,\ s=1,\ldots,m. \qquad (5.5)$$

Если связи (5.5) эквивалентны, то для функций φ_s, $s=1,\ldots,m$ должно выполняться условие

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial\varphi_s(q,p)}{\partial p_i}\right\|=m,\quad s=1,\ldots,m,\ i=1,\ldots,n. \qquad (5.6)$$

Отметим, что связи (5.4) и, следовательно, (5.5), могут не содержать координат q_i вовсе, но импульсы должны входить в них обязательно.

Мы рассматриваем лагранжианы, не зависящие явно от времени t. В противном случае и связи (5.4) и (5.5) могли бы содержать время t явно.

Связи (5.4) по терминологии Бергмана и Дирака /I/ называются первичными связями, так как они непосредственно следуют из вида лагранжиана и обусловлены тем, что ранг матрицы (5.2) меньше n. Эти связи, как будет показано в § 7, не исчерпывают всех ограничений, которым подчиняются q и p в случае сингулярных лагранжианов. В теории могут быть вторичные гамильтонианы связи, порождаемые лагранжевыми связями (2.7).

Ряд свойств первичных гамильтоновых связей (5.4) или (5.5), в частности, касающихся их скобок Пуассона между собой и с каноническим гамильтонианом, можно установить, находясь еще в рамках лагранжева формализма /I0/.

I. Собственные векторы $\overset{(s)}{\xi}_j(q,\dot q)$, $s=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$ матрицы λ, соответствующие нулевым собственным значениям, могут быть вычислены по формуле

$$\overset{(s)}{\xi}_j(q,\dot q)=\left.\frac{\partial\varphi_s(q,p)}{\partial p_j}\right|_{p=\frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial\dot q}}. \qquad (5.7)$$

Чтобы показать это, подставим определение (5.I) в (5.5). В результате мы получим тождества по отношению к q и $\dot q$

$$\varphi_s(q,p)=\varphi_s\left(q,\frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial\dot q}\right)\equiv 0. \qquad (5.8)$$

Дифференцирование этих тождеств по $\dot q_i$ дает

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial\dot q_i}=\frac{\partial\varphi_s}{\partial p_j}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q_i\partial\dot q_j}=\frac{\partial\varphi_s}{\partial p_j}\lambda_{ij}=0. \qquad (5.9)$$

Векторы $\overset{(s)}{\xi}$, $s=1,\ldots,m$ определены с точностью до произвольного множителя, общего для всех компонент $\overset{(s)}{\xi}_i$, $i=1,\ldots,n$. Поэтому, учитывая (5.9), можно считать, что векторы $\overset{(s)}{\xi}$ определяются выражением (5.7). Одновременно мы установили следующее важное свойство нулевых собственых векторов $\overset{(s)}{\xi}(q,\dot q)$ матрицы λ. Эти векторы, рассматриваемые как функции q, $\dot q$, всегда могут быть выбраны так, что при учете определения (5.I) они перейдут в функции только от q и p (зависимость от скоростей $\dot q$ исчезнет полностью).

В силу условия (5.6) нулевые собственные векторы матрицы λ, определяемые по формуле (5.7), линейно независимы.

2. Уравнения

$$\frac{d\varphi_s(q,p)}{dt}=\frac{d}{dt}\varphi_s\left(q,\frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial\dot q}\right)=\frac{\partial\varphi_s}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial\varphi_s}{\partial p_i}\dot p_i=0, \qquad (5.I0)$$

$$s=1,\ldots,m,\ i=1,\ldots,n$$

с учетом уравнений движения (2.3) и уравнений первичных связей (5.5) сводятся к лагранжевым связям (2.7) /22/. Заменим в (5.I0) частные производные $\partial\varphi_s/\partial q_i$ из уравнений, получающихся дифференцированием по q_i уравнений связей (5.8). Эти уравнения выполняются тождественно по своим аргументам q и $\dot q$, поэтому такое дифференцирование законно

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial q_i}+\frac{\partial\varphi_s}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}=0,\quad s=1,\ldots,m. \qquad (5.II)$$

Подставляя (5.II) в (5.I0) и заменяя, согласно уравнениям Эйлера (2.3), $\dot p_i$ на $\partial L/\partial q_i$, получаем

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial p_j}\left(\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\dot q_i-\frac{\partial L}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial\varphi_s}{\partial p_j}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q_j\partial q_i}\dot q_i-\frac{\partial L}{\partial q_j}\right)=0. \qquad (5.I2)$$

Если учесть (5.7) и (2.5), то уравнения (5.I2) в точности совпадут с лагранжевыми связями (2.7). Таким образом, мы доказали еще и следующее утверждение: при выполнении уравнений движения (2.3) и лагранжевых связей (2.7) первичные связи (5.5) остаются стационарными во времени.

3. Для скобок Пуассона первичных связей между собой имеет место следующее слабое равенство:

$$\overset{(s)}{\xi}_i \overset{(s')}{\xi}_j \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^2 h}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} \right) =$$

$$\overset{(s)}{\xi}_i \overset{(s')}{\xi}_j \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right) \overset{\varphi_{s''}}{\approx} (\varphi_{s'}, \varphi_s), \tag{5.13}$$

$$s, s', s'' = 1, \ldots, m.$$

Здесь (f, g) – скобка Пуассона функций $f(q,p)$ и $g(q,p)$

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \tag{5.14}$$

а знак $\overset{\varphi}{\approx}$ означает слабое равенство /1/ при выполнении условий $\varphi = 0$, т.е. проводится дифференцирование в выражении, стоящем слева от этого знака, а потом полагается $\varphi = 0$. Чтобы доказать (5.13), достаточно подставить в левую часть этих равенств формулы (5.7) и (5.11).

4. Линейные дифференциальные операторы (векторные поля)

$$\overset{(s)}{X} = \overset{(s)}{\xi}_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}, \quad s = 1, \ldots, m \tag{5.15}$$

обладают свойством

$$\overset{(s)}{X} p_i \equiv \overset{(s)}{X} \frac{\partial h(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} = \overset{(s)}{\xi}_j \frac{\partial^2 h(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = 0, \tag{5.16}$$

$$s = 1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть мы имеем некоторую функцию координат и скоростей $f(q, \dot{q})$. Если эта функция с учетом определения (5.1) может быть представлена как некоторая новая функция $\bar{f}(q,p)$, зависящая только от координат и импульсов, то действие операторов $\overset{(s)}{X}$ на $f(q, \dot{q})$, очевидно, равно нулю

$$\overset{(s)}{X} f(q, \dot{q}) = \overset{(s)}{\xi}_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \bar{f}\left(q, p = \frac{\partial h}{\partial \dot{q}}\right) = \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \overset{(s)}{\xi}_j = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, m.$$

5. Скобки Пуассона первичных связей (5.5) определяются действием линейных дифференциальных операторов $\overset{(s)}{X}$ на лагранжевы связи (2.7)

$$(\varphi_s, \varphi_{s'}) \overset{\varphi}{\approx} \overset{(s')}{X} B_s. \tag{5.18}$$

Докажем эту формулу прямым вычислением

$$\overset{(s)}{X} B_{s'} = \overset{(s)}{\xi}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \overset{(s')}{\xi}_j \left(- \frac{\partial^2 h}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial h}{\partial q_j} \right) =$$

$$\overset{(s)}{\xi}_i \overset{(s')}{\xi}_j \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^2 h}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} \right) - \overset{(s)}{\xi}_i \overset{(s')}{\xi}_j \dot{q}_k \frac{\partial^3 h}{\partial q_k \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} + \overset{(s)}{\xi}_i \ell_j \frac{\partial \overset{(s')}{\xi}_j}{\partial \dot{q}_i}. \tag{5.19}$$

Последний член (5.19) обращается в нуль, так как векторы $\overset{(s)}{\xi}_j$ всегда можно выбрать зависящими только от q и p (см. формулу (5.7)). Равенство нулю второго члена (5.29) становится очевидным после следующего преобразования:

$$\overset{(s)}{\xi}_i \overset{(s')}{\xi}_j \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) = \overset{(s)}{\xi}_i \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\overset{(s')}{\xi}_j \frac{\partial^2 h}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) - \tag{5.20}$$

$$\overset{(s)}{\xi}_i \frac{\partial^2 h}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \dot{q}_k \frac{\partial \overset{(s')}{\xi}_j}{\partial q_k} = 0.$$

Первое слагаемое в правой части (5.19) с учетом (5.13) можно переписать так:

$$\overset{(s)}{\xi}_i \overset{(s')}{\xi}_j \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^2 h}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} \right) = \overset{(s)}{\xi}_i \overset{(s')}{\xi}_j \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right) \overset{\varphi}{\approx}$$

$$\overset{\varphi}{\approx} (\varphi_{s'}, \varphi_s).$$

Таким образом, формула (5.18) доказана.

Следствие из утверждения 5. Если лагранжевы связи (2.7) выполняются тождественно или же они могут быть переписаны в виде выражений, содержащих только q и p, то в такой теории первичные связи (5.5) находятся в инволюции по крайней мере в слабом смысле.

Утверждение 5 дает нам в рамках лагранжева формализма достаточный критерий существования в теории первичных связей, неинволютных между собой (связей второго рода см. § 8). Если лагранжевы связи (2.7) с учетом определения (5.I) не могут быть представлены в виде соотношений, содержащих только q и p (очевидно, это может случиться только при $m \geqslant 2$), то в такой теории заведомо есть связи второго рода. Этот критерий по своему построению является достаточным, но не необходимым. Он не работает в том случае, когда первичные связи находятся в инволюции только между собой, но не со вторичными связями. Рассмотрим для иллюстрации несколько простейших примеров x).

I. В теории с лагранжианом

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}_1^2-\dot{q}_2 q_3 \qquad (5.2I)$$

есть одно уравнение Эйлера второго порядка $\ddot{q}_1=0$ и две лагранжевы связи $\dot{q}_3=0$, $\dot{q}_2=0$. Канонические импульсы имеют вид $p_1=\dot{q}_1$, $p_2=-q_3$, $p_3=0$. Из лагранжевых связей нельзя исключить скорости $\dot{q}_2$ и $\dot{q}_3$. Поэтому первичные связи в теории $\varphi_1=p_2+q_3$, $\varphi_2=p_3$ должны быть связями второго рода: $(\varphi_1,\varphi_2)=1$. В этой теории вторичных связей нет.

2. Рассмотрим пример, где есть связи второго рода, но первичные связи находятся между собой в инволюции

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}_1^2+(\dot{q}_2+q_3)q_3+(\dot{q}_3+q_2)q_2 . \qquad (5.22)$$

Здесь опять одно уравнение Эйлера второго порядка $\ddot{q}_1=0$ и две лагранжевы связи $q_2=0$, $q_3=0$. Используя выражения для импульсов $p_1=\dot{q}_1$, $p_2=q_3$, $p_3=q_2$, получаем две первичные связи $\varphi_1=p_2-q_3$, $\varphi_2=p_3-q_2$. Так как лагранжевы связи не зависят от скоростей, то первичные связи в теории находятся в инволюции $(\varphi_1,\varphi_2)=0$. Лагранжевы связи не зависят от скоростей и дают вторичные связи $\omega_1(q,p)=q_1=0$, $\omega_2(q,p)=q_3=0$. В совокупности все связи φ_1 , φ_2 , ω_1 , ω_2 – второго рода, но предложенный выше критерий здесь не работает, так как не равны нулю скобки Пуассона между первичными и вторичными связями

$$(\varphi_1,\omega_1)=-1 , \quad (\varphi_2,\omega_2)=-1 .$$

6. Скобки Пуассона первичных связей $\varphi_s(q,p)$ с каноническим гамильтонианом $H=p_i\dot{q}_i-L$ определяются формулой

x) Эти примеры сообщил авторам Л.В. Прохоров.

$$(\varphi_s,H)\overset{\varphi}{\approx}B_s(q,\dot{q})+\dot{q}_{r+s'}(\varphi_s,\varphi_{s'}) . \qquad (5.23)$$

Для доказательства этого утверждения нам потребуются частные производные по q и p от канонического гамильтониана. Учитывая (5.3) и (5.4), получаем

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}=p_\alpha\frac{\partial h_\alpha}{\partial q_i}+\frac{\partial g_{r+s}}{\partial q_i}\dot{q}_{r+s}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\partial h_\alpha}{\partial q_i}= \frac{\partial g_{r+s}}{\partial q_i}\dot{q}_{r+s}-\frac{\partial L}{\partial q_i} , \qquad (5.24)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha+p_\beta\frac{\partial h_\beta}{\partial p_\alpha}+\frac{\partial g_{r+s}}{\partial p_\alpha}\dot{q}_{r+s}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\frac{\partial h_\beta}{\partial p_\alpha}= \dot{q}_\alpha+\frac{\partial g_{r+s}}{\partial p_\alpha}\dot{q}_{r+s} , \qquad (5.25)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{r+s}}=0 , \qquad s=1,\dots,m,\ i=1,\dots,n . \qquad (5.26)$$

Подставим теперь формулы (5.24)-(5.26) в скобки Пуассона (φ_s,H)

$$(\varphi_s,H)=\frac{\partial\varphi_s}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi_s}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\overset{\varphi}{\approx} -\overset{(s)}{\xi}_j\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\overset{(s)}{\xi}_i\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\overset{(s)}{\xi}_j\left(\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)- \dot{q}_{r+s'}\overset{(s)}{\xi}_j\left(\frac{\partial g_{r+s'}}{\partial q_i}+\frac{\partial p_j}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g_{r+s'}}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial p_j}{\partial q_{r+s}}\right)= B_s(q,\dot{q})+\dot{q}_{r+s'}(\varphi_s,\varphi_{s'}),\quad s,s'=1,\dots,m \qquad (5.27)$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.7), а первичную связь $\varphi_{s'}(q,p)$, согласно (5.4), представили так:

$$\varphi_{s'}(q,p)=g_{r+s'}(q,p_\alpha)-p_{r+s'} . \qquad (5.28)$$

Левая часть формулы (5.23) является функцией q, p; поэтому и правая часть этого равенства должна зависеть только от q и p. Если первичные связи $\varphi_s(q,p)$, $s = 1, \ldots, m$ находятся в инволюции, хотя бы в слабом смысле, то второе слагаемое в правой части (5.23), рассматриваемое как функция q, $\dot q$, обращается в ноль. В этом случае лагранжевы связи $B_s(q,\dot q)$ представимы как функции q и p, что непосредственно следует и из формулы (5.18).

§ 6. Инвариантность действия и свойства первичных связей

Если действие

$$S = \int L(q,\dot q)\,dt \tag{6.1}$$

инвариантно относительно преобразований координат q и времени t, содержащих m произвольных функций времени $\varepsilon_s(t)$, $s = 1, \ldots, m$, то, как было доказано в § 3, лагранжиан $L(q,\dot q)$ – вырожденный, так как матрица λ имеет в этом случае m собственных векторов с нулевым собственным значением. Здесь покажем, используя вторую теорему Нётер, что первичные связи между q и p, соответствующие этим собственным векторам, находятся в инволюции между собой по крайней мере в слабом смысле [x)].

Будем рассматривать следующий закон преобразования формы функций $q(t)$, в который входят m произвольных функций времени $\varepsilon_s(t)$, $s = 1, \ldots, m$ и их производные по t до порядка σ включительно

x) Следует отметить, что при попытке установить свойства скобок Пуассона первичных связей в теориях, инвариантных при преобразованиях с произвольными функциями времени, путем рассмотрения динамики сразу в фазовом пространстве /20/, возникает проблема неоднозначности сопоставления заданному преобразованию конфигурационного пространства соответствующего канонического преобразования /5/.

$$\bar\delta q_i(t) = \bar q_i(t) - q_i(t) =$$
$$\sum_{\rho=0}^{\sigma} \gamma^s_{i\rho}(t, \overset{(0)}{q}, \overset{(1)}{q}, \ldots, \overset{(\sigma-\rho)}{q})\,\overset{(\rho)}{\varepsilon}_s ,$$
$$\overset{(\rho)}{f} \equiv \frac{d^\rho f}{dt^\rho}, \quad 0 \le \rho \le \sigma, \quad \overset{(0)}{f}(t) = f(t), \tag{6.2}$$
$$i = 1, \ldots, n, \; s = 1, \ldots, m .$$

В этом случае тождества Нётер (3.26) обобщаются следующим образом /15/:

$$\sum_{\rho=0}^{\sigma} (-1)^\rho \frac{d^\rho}{dt^\rho}\left[\gamma^s_{i\rho}(t, \overset{(0)}{q}, \overset{(1)}{q}, \ldots, \overset{(\sigma-\rho)}{q}) L_i(\overset{(0)}{q}, \overset{(1)}{q}, \overset{(2)}{q})\right] \equiv \tag{6.3}$$
$$\equiv 0 ,$$

где $L_i(\overset{(0)}{q}, \overset{(1)}{q}, \overset{(2)}{q})$, $i = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, m$, означают левые части уравнений Эйлера (2.4). Равенства (6.3) выполняются тождественно по отношению к функциям $q_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, то есть для произвольных функций $q_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, в левой части формул (6.3) должны обращаться в ноль коэффициенты при каждой из функций $q_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ и при всех ее производных по t, встречающихся в (6.3).

Приравнивая нулю коэффициент при $\overset{(\sigma+2)}{q_i}$, $i = 1, \ldots, n$ в (6.3), получаем

$$\gamma^s_{i\sigma}(t,q)\,\lambda_{ij}(q,\dot q) = 0, \tag{6.4}$$
$$s = 1, \ldots, m, \quad i, j = 1, \ldots, n .$$

Мы будем предполагать, что коэффициенты $\gamma^s_{i\sigma}(t,q)$, $s = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$ в законе преобразования (6.2), рассматриваемые как набор из m векторов с n компонентами, линейно независимы. В этом случае из (6.4) следует, что ранг матрицы λ равен $n-m$ и, как было показано в § 5, в теории имеют место m первичных связей типа (5.4) или (5.5). Эти связи, очевидно, линейны по импульсам, так как $\gamma^s_{i\sigma}(t,q)$ не зависят от p. Набор линейно-независимых векторов $\gamma^s_{i\sigma}(t,q)$ связан невырожденным преобразованием [x)] с собственными векторами $\xi^s_i(q)$, определяемыми формулой (5.7).

x) Предполагается, что все нулевые векторы матрицы λ связаны с инвариантностью действия (6.1) при преобразованиях (6.2).

$$\gamma^{s}_{i\sigma}(t,q)=\sum_{s'=1}^{m}C^{s}_{s'}(t,q)\overset{(s')}{\xi}_{i}(q), \qquad (6.5)$$

$$\mathrm{rank}\,\|C^{s}_{s'}(t,q)\|=m, \qquad (6.6)$$

$$s,s'=1,\dots,m\ ,\quad i=1,\dots,n.$$

Покажем теперь, что первичные связи в рассматриваемом случае находятся в инволюции по крайней мере в слабом смысле. Для этого мы выпишем в явном виде равные нулю коэффициенты при $q_i^{(\sigma+1)}$, i = I, ..., n в тождествах Нётер (6.3)

$$\gamma^{s}_{i\sigma-1}(t,q,\dot q)\lambda_{ik}(q,\dot q)-$$

$$\gamma^{s}_{i\sigma}(t,q)\left(\frac{\partial^3 L}{\partial q_j\partial\dot q_i\partial q_k}\dot q_j+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q_i\partial q_k}-\frac{\partial^2 L}{\partial q_i\partial\dot q_k}\right)=0. \qquad (6.7)$$

Спроектируем теперь равенства (6.7) на $\overset{(s')}{\xi}_k(q)$

$$\gamma^{s}_{i\sigma}(t,q)\overset{(s')}{\xi}_k(q)\left(\dot q_j\frac{\partial}{\partial q_j}\lambda_{ik}(q,\dot q)+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q_i\partial q_k}-\frac{\partial^2 L}{\partial q_i\partial\dot q_k}\right)=0. \qquad (6.8)$$

Первое слагаемое в (6.8) обращается в ноль

$$\gamma^{s}_{i\sigma}(t,q)\overset{(s')}{\xi}_k(q)\dot q_j\frac{\partial}{\partial q_j}\lambda_{ik}(q,\dot q)=$$

$$\gamma^{s}_{i\sigma}(t,q)\dot q_j\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\overset{(s')}{\xi}_k(q)\lambda_{ik}(q,\dot q)\right)- \qquad (6.9)$$

$$-\gamma^{s}_{i\sigma}(t,q)\lambda_{ik}(q,\dot q)\dot q_j\frac{\partial}{\partial q_j}\overset{(s')}{\xi}_k(q)=0.$$

Оставшееся в (6.8) выражение можно переписать с учетом (6.5) и в следующем виде:

$$0=\sum_{s''=1}^{m}C^{s}_{s''}(t,q)\overset{(s'')}{\xi}_i(q)\overset{(s')}{\xi}_k(q)\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}-\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)\overset{\varphi}{\approx}$$

$$\overset{\varphi}{\approx}\sum_{s''=1}^{m}C^{s}_{s''}(t,q)(\varphi_{s'},\varphi_{s''}),$$

$$s,s',s''=1,\dots,m. \qquad (6.10)$$

Так как ранг матрицы $\|C^{s}_{s''}(t,q)\|$ равен m, то из (6.I0) получаем, что матрица $(\varphi_s(q,p),\varphi_{s''}(q,p))$ с учетом уравнений связей $\varphi_s=0$, s = I, ..., m имеет нулевой ранг, т.е.

$$(\varphi_s(q,p),\varphi_{s''}(q,p))\overset{\varphi}{\approx}0. \qquad (6.11)$$

Таким образом, первичные связи $\varphi_s(q,p)$ находятся в инволюции между собой по крайней мере в слабом смысле.

Следует отметить, что вывод о сингулярности лагранжиана можно сделать и в том случае, если действие (6.I) инвариантно по отношению к следующим преобразованиям:

$$\bar\delta q_i(t)=\bar q_i(t)-q_i(t)= \qquad (6.12)$$

$$\sum_{\rho=0}^{\sigma}\gamma^{s}_{i\rho}(t,q^{(0)},q^{(1)},\dots,q^{(\sigma-\rho)},q^{(\sigma-\rho+1)})\varepsilon_s^{(\rho)}(t).$$

По сравнению с законом преобразования (6.2) в коэффициенты в (6.I2) могут входить производные по времени от $q_i(t)$, порядок которых на I больше, чем в (6.2). Опять-таки здесь надо использовать тождества Нётер

$$\sum_{\rho=0}^{\sigma}(-1)^{\rho}\frac{d^{\rho}}{dt^{\rho}}\left[\gamma^{s}_{i\rho}(t,q^{(0)},q^{(1)},\dots,q^{(\sigma-\rho+1)})L_i(q,\dot q,\ddot q)\right]\equiv 0, \qquad (6.13)$$

$$i=1,\dots,n,\ s=1,\dots,m$$

и приравнивать нулю коэффициенты при $q_i^{(\sigma+2)}$

$$\gamma^{s}_{i\sigma}(t,q,\dot q)\lambda_{ij}(q,\dot q)=0,$$

$$s=1,\dots,m. \qquad (6.14)$$

Матрица $\lambda_{ij}(q,\dot q)$ имеет нулевые собственные векторы, зависящие от q и $\dot q$, т.е. она вырожденная. Соответствующие первичные связи в этом случае могут быть и нелинейными по импульсам. Можно показать, аналогично тому, как это было сделано для закона преобразования (6.2), что эти связи будут в инволюции, если коэффициенты $\gamma_{i\rho}^{s}$ в (6.12) удовлетворяют условию

$$\xi_k^{s'}(q,p)\frac{\partial \gamma_{i\rho}^{s}(t,q^{(0)},\ldots,q^{(\sigma-\rho+1)})}{\partial q_k^{(\sigma-\rho+1)}}=0\,, \tag{6.15}$$

$$s,s'=1,\ldots,m\,,\quad i,k=1,\ldots,n\,,\quad \rho=0,1,\ldots,\sigma\,.$$

Используя утверждения 5 и 6, из § 5 легко убедиться, что первичные связи, о которых идет речь в данном разделе, имеют скобки Пуассона с каноническим гамильтонианом, равные нулю в слабом смысле

$$(\varphi_s,H)\overset{\varphi_s,B_{s'}}{\approx}0\,,\quad s,s'=1,\ldots,m. \tag{6.16}$$

Первичные связи, являющиеся следствием инвариантности теории при преобразованиях с произвольными функциями времени, на самом деле являются связями первого рода /I/, то есть они находятся в инволюции не только между собой и каноническим гамильтонианом H, но и со всеми вторичными связями. Это утверждение проще всего доказать, если обратиться к гамильтоновой динамике (см. § 8).

В теории, инвариантной при преобразованиях с m произвольными функциями времени, общее решение лагранжевых уравнений движения (2.3) также содержит m произвольных функций времени. Как было показано Дираком /I/ (см. также § 9), полное описание системы с вырожденным лагранжианом в фазовом пространстве дают гамильтоновы уравнения, генерируемые обобщенным гамильтонианом, который является суммой канонического гамильтониана и линейной комбинации только первичных связей (см. § 9). Следовательно, весь функциональный произвол, имеющий место в лагранжевом формализме, сохранится и в решении обобщенных гамильтоновых уравнений только в том случае, если первичные связи в теории, число которых, как было показано выше, равно m, являются связями первого рода (/I/, стр. 422).

В общем случае в рассматриваемых теориях дополнительно к m первичным связям первого рода, обусловленным инвариантностью действия при преобразованиях с m произвольными функциями времени, могут присутствовать и первичные связи второго рода. Однако это не повлияет на сделанный здесь вывод, так как первичные связи второго рода не приводят к функциональному произволу в гамильтоновом формализме.

Изложенное выше доказательство интересно было бы провести с использованием второй теоремы Нётер.

§ 7. Нахождение вторичных гамильтоновых связей в рамках лагранжева формализма

Теперь мы перейдем к определению связей между q, p, дополнительных к первичным связям (5.5). Очевидно, что единственным источником таких связей могут быть только уравнения лагранжевых связей (2.7). Если среди лагранжевых связей (2.7) есть уравнения, не содержащие скоростей, то они сразу дают связи на обобщенные координаты (2.10). В общем случае в уравнения лагранжевых связей (2.7) необходимо подставить определение обобщенных импульсов (5.1). При этом возможны два случая /21/.

1) Зависимость от $\dot q$ в лагранжевых связях (2.7) остается. Это означает, что в теории нет вторичных связей, а первичные неинволютивны между собой (см. § 5).

2) Уравнения лагранжевых связей переходят в уравнения на q и p, не содержащие скоростей $\dot q$

$$\bar B_s(q,p)=0\,,\quad 1\le s\le m\,. \tag{7.1}$$

Далее необходимо продифференцировать по времени вторичные связи (7.1). Это дает новое уравнение первого порядка, содержащее только q и $\dot q$

$$\frac{d\bar B_s(q,p)}{dt}=\frac{d}{dt}\bar B_s\Big(q,\frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial \dot q}\Big)=0\,, \tag{7.2}$$

так как производную dp/dt в (7.2) мы можем заменить с помощью уравнений Эйлера (2.3) величиной $\partial L/\partial q$. В (7.2) мы должны опять подставить определение (5.1) и перейти к рассмотрению двух возможных случаев, изложенных выше. Такую процедуру необходимо продолжать до тех пор, пока мы после очередной подстановки в $d^k\bar B_s(q,p)/dt^k$ определения (5.1) не получим ничего нового по сравнению с предыдущими связями или же придем к случаю 1), то есть зависимость от $\dot q$ в $d^k\bar B_s(q,p)/dt^k$ после подстановки определения (5.1) останется.

Пусть изложенная выше процедура дает μ новых связей дополнительно к (5.4)

$$\omega_\sigma(q,p)=0\,,\ \sigma=1,\ldots,\mu\le k\times m\,,$$

$$\omega_\sigma(q,p)=\left\{\bar B_s(q,p),\frac{d}{dt}\bar B_s(q,p),\ldots,\frac{d^K}{dt^K}\bar B_s(q,p)\right\}.$$

Эти связи являются вторичными связями по терминологии Дирака /I/. Вместе с первичными связями (5.5) мы имеем $m+\mu=M$ ограничений на канонические координаты и импульсы

$$\Theta_A(q,p)=0\,,\quad A=1,\ldots,M=m+\mu\,, \tag{7.3}$$

$$\Theta_s(q,p)=\varphi_s(q,p)\,,\quad \Theta_{m+\sigma}(q,p)=\omega_\sigma(q,p)\,,$$
$$s=1,\ldots,m\,,\qquad \sigma=1,\ldots,\mu\,.$$

Набор условий (7.3) исчерпывает все связи между q и p, которые имеют место в теории с сингулярным лагранжианом. В дальнейшем мы будем считать, что связи (7.3) функционально независимы, т.е.

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial\Theta_A(q,p)}{\partial q\,\partial p}\right\|=M\,,\quad A=1,\ldots,M\,. \tag{7.4}$$

Если сингулярность лагранжиана обусловлена инвариантностью действия при преобразованиях с произвольными функциями времени, то дифференцирование по времени лагранжевых связей (2.7) не приводит к новым связям. Действительно, как было показано в § 3, лагранжевы связи в таких теориях, где имеют место тождества Нётер (3.26), являются инвариантными соотношениями для уравнений Эйлера второго порядка (3.33).

Пример. Рассмотрим вырожденный лагранжиан

$$h=\frac12\left[\vec q^{\,2}\dot{\vec q}^{\,2}-(\vec q\dot{\vec q})^2\right], \tag{7.5}$$
$$\vec q=(q_1,\ldots,q_n)\,,\quad \dot{\vec q}=(\dot q_1,\ldots,\dot q_n)\,.$$

Матрица

$$\lambda=\|\vec q^{\,2}\delta_{ij}-q_iq_j\|\,,\quad i,j=1,\ldots,n \tag{7.6}$$

имеет один собственный вектор с нулевым собственным значением $\xi_i^{(1)}(q,\dot q)=q_i$

$$\lambda_{ij}q_i=0\,,\quad i,j=1,\ldots,n\,. \tag{7.7}$$

Канонические импульсы определяются формулой

$$p_i=\frac{\partial h}{\partial\dot q_i}=\vec q^{\,2}\dot q_i-(\vec q\dot{\vec q})q_i\,,\quad 1\le i\le n\,. \tag{7.8}$$

В теории есть одна первичная связь

$$\varphi(q,p)=\vec q\vec p=0\,. \tag{7.9}$$

Проекция уравнений Эйлера

$$\vec q^{\,2}\ddot q_i-(\vec q\ddot{\vec q})q_i-2\dot{\vec q}^{\,2}q_i+2(\vec q\dot{\vec q})\dot q_i=0\,,\quad i=1,\ldots,n\,. \tag{7.10}$$

на q_i дает лагранжеву связь

$$\dot q^2q^2-(\vec q\dot{\vec q})^2=0\,. \tag{7.11}$$

С помощью определения (7.8) зависимость от $\dot q$ в (7.11) можно убрать. Это дает вторичную связь

$$\dot q^2q^2-(\vec q\dot{\vec q})^2=\frac{p^2}{q^2}=0\,,$$
$$\omega(q,p)=p^2=0\,. \tag{7.12}$$

Дифференцирование $\omega(q,p)$ по времени с учетом уравнений Эйлера (7.10) не приводит к новым связям

$$\frac{d}{dt}p^2=2p_i\dot p_i=2p_i(\dot q^2q_i-(\dot{\vec q}\vec q)\dot q_i)=$$
$$2(\vec p\vec q)\dot q^2-2(\vec p\dot{\vec q})(\dot{\vec q}\vec q)\overset{\varphi}{\approx}-2(\vec p\dot{\vec q})(\dot{\vec q}\vec q)= \tag{7.13}$$
$$-2\left[q^2\dot q^2-(\dot{\vec q}\vec q)\right](\dot{\vec q}\vec q)=-2\frac{p^2}{q^2}(\dot{\vec q}\vec q)\overset{\omega}{\approx}0\,.$$

Таким образом, в теории есть одна первичная связь (7.9) и одна вторичная связь (7.12).

§ 8. Уравнения движения в фазовом пространстве. Связи первого и второго рода

Если лагранжиан сингулярен, то преобразование Лежандра (переход от переменных q_i, $\dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$ к переменным q_i, p_i, $i = 1, \ldots, n$) является необратимым

$$\frac{\partial(q,p)}{\partial(q,\dot{q})} = \det(\lambda_{ij}) \equiv 0 . \qquad (8.1)$$

Гамильтониан, построенный по каноническим правилам

$$H(q,\dot{q},p) = p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q}) , \qquad (8.2)$$

не зависит от скоростей $\dot{q}$ и в случае сингулярных лагранжианов. Действительно, дифференцируя (8.2) и учитывая определение (5.1), получаем

$$dH(q,\dot{q},p) = dp_i \dot{q}_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = dp_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i . \qquad (8.3)$$

Теперь видно, что dH не содержит дифференциалов скоростей $d\dot{q}_i$, следовательно

$$H = H(q,p) . \qquad (8.4)$$

Перейдем теперь к выводу гамильтоновых уравнений движения с учетом полного набора связей (7.3). Для этого подставим в (8.3) уравнения Эйлера (2.3) и учтем (8.4). В результате получим

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \dot{p}_i\right) dq_i + \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} - \dot{q}_j\right) dp_j = 0 . \qquad (8.5)$$

Если бы дифференциалы dq_i и dp_i были независимыми, то мы могли бы приравнять нулю коэффициенты при каждом из них в равенстве (8.5). Но согласно (7.3), dq_i и dp_i связаны соотношениями

$$\frac{\partial \theta_A}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \theta_A}{\partial p_j} dp_j = 0 , \qquad (8.6)$$

$$A = 1, \ldots, M .$$

В силу условия (7.4) линейные по отношению к дифференциалам dq_i, dp_j уравнения (8.6) всегда можно разрешить, выразив M дифференциалов dq_i, dp_j как функции оставшихся $n-M$ дифференциалов и всего набора канонических переменных (q,p).

В таких ситуациях обычно используется метод неопределенных множителей Лагранжа /23/. Помножим каждое из равенств в (8.6) на неизвестный пока множитель λ_A и сложим эти уравнения почленно друг с другом и с соотношением (8.5)

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \lambda_A \frac{\partial \theta_A}{\partial q_i} + \dot{p}_i\right) dq_i + \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} + \lambda_A \frac{\partial \theta_A}{\partial p_j} - \dot{q}_j\right) dp_j = 0 . \qquad (8.7)$$

Теперь потребуем, чтобы множители λ_A, $A = 1, \ldots, M$ были выбраны так, чтобы обращались в ноль коэффициенты при зависимых дифференциалах в (8.6). Так как величины q_i и p_i, входящие в (8.7), являются функциями времени, то и множители λ_A, очевидно, должны зависеть от времени. После этого можно будет приравнять нулю и коэффициенты при оставшихся независимых дифференциалах. Окончательно получаем следующие уравнения движения[x)]:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_A \frac{\partial \theta_A}{\partial p_i} , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_A \frac{\partial \theta_A}{\partial q_i} , \qquad (8.8)$$

$$\theta_A(q,p) = 0 , \qquad (8.9)$$

$$i = 1, \ldots, n , \quad A = 1, \ldots, M .$$

С помощью скобок Пуассона (5.14) эти уравнения записываются так:

$$\frac{dq_i}{dt} = (q_i, H_T) , \quad \frac{dp_i}{dt} = (p_i, H_T) , \qquad (8.10)$$

$$\theta_A(q,p) = 0 , \quad A = 1, \ldots, M , \qquad (8.11)$$

где H_T – полный гамильтониан

$$H_T = H + \lambda_A(t)\,\theta_A(q,p) . \qquad (8.12)$$

Полная производная по времени любой функции $\psi(q,p,t)$ представима в следующем виде:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi, H) + \lambda_A(t)(\psi, \theta_A) =$$

x) Во всем фазовом пространстве система уравнений (8.8) или (8.10) в общем случае неэквивалентна исходным уравнениям Лагранжа – Эйлера (2.3) (см. § 9). Однако на физическом подмногообразии фазового пространства дополнительные слагаемые в H_T, ответственные за эту неэквивалентность, исчезают (см. § 16).

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + (\Psi, H_T).$$
(8.I3)

Перейдем теперь к определению множителей Лагранжа $\lambda_A(t)$ потребовав, чтобы связи (8.II) сохранялись во времени

$$\frac{d\theta_A}{dt} = (\theta_A, H) + \lambda_B(t)(\theta_A, \theta_B) = 0, \quad (8.I4)$$

$$A, B = 1, \ldots, M.$$

Пусть ранг матрицы (θ_A, θ_B) на подмногообразии фазового пространства, определяемом уравнениями связей (7.3), равен $2m_2$

$$\operatorname{rank}\|(\theta_A, \theta_B)\|\Big|_{\theta_C=0} = 2m_2, \quad (8.I5)$$

$$A, B, C = 1, \ldots, M.$$

Матрица (θ_A, θ_B) антисимметрична, поэтому ее ранг есть четное число. Связи (7.3) мы можем всегда перенумеровать так, что $2m_2$ последних строк матрицы (θ_A, θ_B) будут линейно независимыми. В силу ее антисимметрии линейно независимыми в этом случае окажутся и $2m_2$ последних столбцов. Матрица (θ_A, θ_B) имеет $m_1 = M - 2m_2$ нулевых собственных векторов $\overset{(a)}{\xi}_A(q,p)$

$$\overset{(a)}{\xi}_A(\theta_A, \theta_B) = 0, \quad (8.I6)$$

$$A, B = 1, \ldots, M, \quad a = 1, \ldots, m_1.$$

Будем рассматривать уравнения (8.I4) как систему линейных неоднородных уравнений с неизвестными $\lambda_B(t)$, $B = 1, \ldots, M$. Мы будем предполагать, что условие совместимости этой системы выполнено

$$\overset{(a)}{\xi}_A(\theta_A, H) = 0 \quad (8.I7)$$

$$A = 1, \ldots, M, \quad a = 1, \ldots, m_1.$$

В противном случае уравнения (8.I7) давали бы новые соотношения между q и p, которыми должны были быть дополнены связи (7.3)[x]. При выполнении связей (7.3) уравнения (8.I6) и (8.I7) можно переписать, очевидно, так:

[x] Мы предположили вначале, что набор связей (8.9) полный.

$$(\overset{(a)}{\xi}_A\theta_A, \theta_B) \overset{\theta_C}{\approx} 0, \quad (\overset{(a)}{\xi}_A\theta_A, H) \overset{\theta_C}{\approx} 0,$$
(8.I8)

$$A, B, C = 1, \ldots, M, \quad a = 1, \ldots, m_1.$$

Теперь перегруппируем связи (7.3) следующим образом /2I/:

$$\Phi_a = \overset{(a)}{\xi}_A\theta_A, \quad a = 1, \ldots, m_1, \quad (8.I9)$$

$$\Omega_\alpha = \theta_{m_1+\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, 2m_2 = M - m_1. \quad (8.20)$$

Учитывая (8.I8) и предположение о том, что у матрицы (θ_A, θ_B) линейно независимы последние $2m_2$ строк и столбцов, получаем

$$(\Phi_a, \Phi_b) \overset{\Phi,\Omega}{\approx} 0, \quad (\Phi_a, H) \overset{\Phi,\Omega}{\approx} 0, \quad (\Phi_a, \Omega_\alpha) \overset{\Phi,\Omega}{\approx} 0, \quad (8.2I)$$

$$\operatorname{rank}\|(\Omega_\alpha, \Omega_\beta)\| \overset{\Phi,\Omega}{\approx} 2m_2, \quad (8.22)$$

$$a, b = 1, \ldots, m_1, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, 2m_2.$$

Разбиение исходного набора связей $\theta_A(q,p)$, $A = 1, \ldots, M$ на связи $\Phi_a(q,p)$ и $\Omega_\alpha(q,p)$, согласно формулам (8.I9), есть разбиение на связи первого рода и второго рода. Эта классификация определяется следующим образом. Пусть мы имеем некоторый набор связей в теории с вырожденным лагранжианом. Связь между q и p называется связью первого рода, если ее скобка Пуассона со всеми другими связями из данного набора и с каноническим гамильтонианом равна в слабом смысле нулю (т.е. равна нулю с учетом всех уравнений связей из данного набора). Связи, которые не удовлетворяют этому условию, называются связями второго рода.

Согласно этому определению связи Φ_a, $a = 1, \ldots, m_1$ являются связями первого рода, а связи Ω_α, $\alpha = 1, \ldots, 2m_2$ – связями второго рода.

Запишем уравнения Гамильтона (8.8) с новым набором связей (8.I9), (8.20)

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_a\frac{\partial\Phi_a}{\partial p_i} + \mu_\alpha\frac{\partial\Omega_\alpha}{\partial p_i},$$
(8.23)

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_i} - \mu_\alpha \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial q_i}, \tag{8.24}$$

$$\Phi_a(q,p) = 0, \quad \Omega_\alpha(q,p) = 0,$$

$$i = 1,\dots,n, \quad a = 1,\dots,m_1, \quad \alpha = 1,\dots,2m_2, \quad m_1 + 2m_2 = M.$$

В силу уравнений (8.2I) связи первого рода $\Phi_a(q,p)$, a = I, ..., m_1 сохраняются во времени, т.е.

$$\frac{d\Phi_a(q,p)}{dt} = 0, \quad a = 1,\dots,m_1 \tag{8.25}$$

с учетом уравнений (8.23), (8.24).

Требование, чтобы сохранились во времени и связи второго рода $\Omega_\alpha(q,p)$, α = I, ... $2m_2$, позволяет определить множители Лагранжа $\mu_\alpha(t)$, α = I, ..., $2m_2$ в (8.23)

$$\frac{d\Omega_\alpha}{dt} = (\Omega_\alpha, H) + \mu_\beta (\Omega_\alpha, \Omega_\beta) = 0. \tag{8.26}$$

Согласно условию (8.22), матрица

$$\Delta_{\alpha\beta} = (\Omega_\alpha, \Omega_\beta)$$

имеет обратную

$$(\Delta^{-1})_{\alpha\gamma} (\Omega_\gamma, \Omega_\beta) = \delta_{\alpha\beta}. \tag{8.27}$$

Это позволяет записать решение линейных уравнений (8.26) в следующем виде:

$$\mu_\alpha = -(\Delta^{-1})_{\alpha\beta} (\Omega_\beta, H). \tag{8.28}$$

Таким образом, требуя, чтобы связи (8.24) сохранялись во времени, мы смогли определить только множители Лагранжа при связях второго рода в гамильтоновых уравнениях (8.23). Множители Лагранжа $\lambda_a(t)$ при связях первого рода остаются совершенно произвольными.

С учетом (8.28) уравнения движения (8.23) переписываются так:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i} - \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial P_i} (\Delta^{-1})_{\alpha\beta} (\Omega_\beta, H) + \lambda_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial P_i},$$

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial q_i} (\Delta^{-1})_{\alpha\beta} (\Omega_\beta, H) - \lambda_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_i}, \tag{8.29}$$

$$\Phi_a(q,P) = 0, \quad \Omega_\alpha(q,P) = 0, \tag{8.30}$$

$$i = 1,\dots,n, \quad a = 1,\dots,m_1, \quad \alpha,\beta = 1,\dots,2m_2, \quad m_1 + 2m_2 = M.$$

Уравнение (8.I3), описывающее эволюцию во времени любой функции $\Psi(q,p,t)$, принимает вид

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (\Psi, H) - (\Psi, \Omega_\alpha)(\Delta^{-1})_{\alpha\beta} (\Omega_\beta, H) + \lambda_a (\Psi, \Phi_a). \tag{8.3I}$$

С помощью формулы (8.3I) легко проверить, что связи (8.30) являются инвариантной системой для уравнений движения (8.29), т.е. полная производная по времени от функций $\Phi_a(q,P)$, $a = 1,\dots,m_1$, $\Omega_\alpha(q,P)$, α = I, ..., $2m_2$ равна нулю в силу уравнений (8.29) и (8.30). Следовательно, эти связи можно рассматривать как условия на начальные данные.

Уравнения (8.29) со связями (8.30) задают гамильтонов формализм для системы с сингулярным лагранжианом. Надо иметь в виду, что связи (8.30) используются только после вычисления всех скобок Пуассона в уравнениях (8.29) или (8.3I), то есть связи (8.30) накладываются в слабом смысле.

Если мы интересуемся только такими траекториями в фазовом прстранстве $q_i(t)$, $P_i(t)$, i = I, ..., n, которые лежат в подмногообразии, определяемом уравнениями связей (8.30), то уравнениям движения (8.29) можно придать обычный гамильтонов вид:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i}. \tag{8.32}$$

$$\Phi_a(q,p)=0\,,\quad \Omega_\alpha(q,p)=0\,,$$
$$i=1,\ldots,n\,;\quad a=1,\ldots,m_1\,,\quad \alpha=1,\ldots,2m_2\,,\qquad (8.33)$$

где

$$H^*=H-\Omega_\alpha(\Delta^{-1})_{\alpha\beta}(\Omega_\beta,H)+\lambda_a(t)\Phi_a\,.\qquad (8.34)$$

Таким образом, исследование динамики системы с вырожденным лагранжианом в фазовом пространстве сводится к нахождению таких решений обычных гамильтоновых уравнений (8.32), которые удовлетворяли бы инвариантным соотношениям (8.33). Если в теории есть связи первого рода, то в гамильтониан H^* входят произвольные функции времени $\lambda_a(t)$, $a=1,\ldots,m_1$. Естественно считать физическими наблюдаемыми величинами такие функции на фазовом пространстве $f(q,p,t)$, которые не зависят от множителей $\lambda_a(t)$. Эти функции должны удовлетворять уравнениям

$$(f,\Phi_a)\overset{\Phi,\Omega}{\approx}0\,,\quad a=1,\ldots,m_1\,.\qquad (8.35)$$

§ 9. Связь с подходом Дирака. Эквивалентность гамильтоновых и лагранжевых уравнений движения

Обобщенная гамильтонова динамика для систем с вырожденными лагранжианами в подходе Дирака /I/ строится несколько иначе по сравнению с изложенным выше методом. По заданному сингулярному лагранжиану Дирак определяет первичные связи (5.5) и вначале строит уравнения движения в фазовом пространстве с учетом только этих первичных связей

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}+\nu_s(t)\frac{\partial\varphi_s}{\partial p_i}\,,\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}-\nu_s(t)\frac{\partial\varphi_s}{\partial q_i}\,,\qquad (9.\mathrm{I})$$
$$i=1,\ldots,n\,,$$

$$\varphi_s(q,p)=0\,,\quad s=1,\ldots,m\,.\qquad (9.2)$$

Вторичные связи в подходе Дирака определяются с помощью следующей итерационной процедуры. Вначале требуется сохранение на фазовых траекториях первичных связей

$$\frac{d\varphi_s}{dt}=(\varphi_s,H)+\nu_{s'}(t)(\varphi_s,\varphi_{s'})=0\,,$$
$$s,s'=1,\ldots,m\,.\qquad (9.3)$$

Эти уравнения могут привести к появлению новых ограничений (связей) на канонические переменные q и p дополнительно к (9.2). Поэтому требуется проверить условие стационарности и для новых связей, что в свою очередь может привести к следующим новым связям и т.д. Эта процедура проводится до тех пор, пока не будет определен полный набор связей.

Учитывая свойства первичных связей, установленные в § 5, можно утверждать, что и подход Дирака и способ нахождения полного набора связей в рамках лагранжева формализма, изложенный в § 7, полностью эквивалентны. Следовательно, исходными уравнениями в фазовом пространстве, которые позволяют восстановить всю динамику, являются уравнения (9.I) и (9.2). Легко показать их эквивалентность лагранжевым уравнениям (2.3). Для этого перейдем в уравнениях (9.I) и (9.2) от переменных q, p к переменным q, $\dot q$ с помощью определения (5.I). После подстановки (5.I) в (9.2) первичные связи обращаются в тождества по переменным q, $\dot q$. Дифференцирование этих тождеств по $\dot q_i$ дает соотношения (5.II), с помощью которых можно исключить $\partial\varphi_s/\partial q_i$ из второй половины уравнений (9.I)

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}+\nu_s(t)\frac{\partial\varphi_s}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\,.\qquad (9.4)$$

Теперь определим второе слагаемое в (9.4) из первой половины уравнений (9.I) и учтем (8.2)

$$\frac{dp_i}{dt}-\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\frac{dq_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}=-\frac{d}{dq_i}H(q,p)=$$
$$=-\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\frac{dq_j}{dt}+\frac{\partial L}{\partial q_i}\,.\qquad (9.5)$$

Окончательно получаем лагранжевы уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i}\,,\qquad (9.6)$$
$$i=1,\ldots,n\,.$$

Уравнения движения в фазовом пространстве (8.8) или (8.I0), полученные с помощью эффективного гамильтониана (8.I2), в котором стоит сумма всех связей (первичных и вторичных), в общем случае оказываются более широкими, чем исходные уравнения Лагранжа - Эйлера (2.3). В этом случае нельзя провести рассуждения, которые показали эквивалентность (9.I) и (9.6). Дело в том, что вторичные связи, входящие в полный набор (8.II), не обращаются в тождества после подстановки в них определения импульсов (5.I), как это имеет место для первичных связей. Поэтому вместо (9.6) из (8.8) получаем

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial h}{\partial q_i} - \mu_\sigma(t)\frac{d}{d q_i}\,\omega_\sigma\left(q,\, p = \frac{\partial h}{\partial \dot{q}_i}\right), \qquad (9.7)$$

где $\omega_\sigma(q,p) = 0$ - вторичные связи. Однако на физическом подмногообразии фазового пространства дополнительные слагаемые в правой части (9.7) исчезают (см. § I6).

Строить уравнения движения в фазовом пространстве с гамильтонианом (8.I2) оказывается удобно в тех случаях, когда приходится переходить от одного полного набора связей к эквивалентному полному набору связей (см. § I6, а также /2I,56/). При этом нет необходимости выделять в новом наборе связи, соответствующие исходным первичным и вторичным связям /6/.

§ I0. Скобки Дирака

Если в теории есть связи второго рода, то удобно использовать скобки Дирака /I/. Они строятся следующим образом. Пусть мы имеем $2m_2$ связей второго рода

$$\Omega_\alpha(q,p) = 0, \quad \alpha = 1,\dots,2m_2, \quad m_2 < n. \qquad (10.1)$$

Число связей второго рода в теории всегда четно /I/. В противном случае среди этих связей были бы связи первого рода. Антисимметричная матрица размерностью $2m_2 \times 2m_2$, составленная из скобок Пуассона связей (I0.I)

$$\Delta_{\alpha\beta} = \|(\Omega_\alpha, \Omega_\beta)\|, \qquad (10.2)$$

имеет обратную

$$(\Delta^{-1})_{\alpha\beta}\Delta_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}. \qquad (10.3)$$

Скобка Дирака двух функций $f(q,p)$ и $g(q,p)$ определяется так:

$$(f,g)^* = (f,g) - (f,\Omega_\alpha)(\Delta^{-1})_{\alpha\beta}(\Omega_\beta, g). \qquad (10.4)$$

Скобки Дирака подчиняются всем правилам, которые справедливы для обычных скобок Пуассона. Они антисимметричны относительно своих аргументов, линейны по ним, для них имеет место правило произведений

$$(f_1 f_2, g)^* = f_1(f_2, g)^* + (f_1, g)^* f_2 \qquad (10.5)$$

и они удовлетворяют тождеству Якоби

$$((f,g)^*,h)^* + ((g,h)^*,f)^* + ((h,f)^*,g)^* = 0. \qquad (10.6)$$

Важным является тот факт, что скобки Дирака, посчитанные для любой связи второго рода (I0.I) с произвольной функцией $f(q,p)$, тождественно равны нулю

$$(\Omega_\alpha, f(q,p))^* = 0, \quad \alpha = 1,\dots,2m_2. \qquad (10.7)$$

Это означает, что все связи 2-го рода можно положить равными нулю до вычисления скобок Дирака (I0.7) или, как говорят в этом случае, связи второго рода можно наложить в сильном смысле.

Скобки Дирака допускают следующую красивую геометрическую интерпретацию /24/. Дифференциал df любой функции динамических переменных $f(q,p)$ можно рассматривать как вектор, координатами которого являются частные производные f по координатам фазового пространства

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i. \qquad (10.8)$$

Скобки Пуассона (5.I4) могут рассматриваться как билинейная форма на этом векторном пространстве. Векторы $d\Omega_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,2m_2$ образуют подпространство, и мы можем строить ортогональное к нему подпространство, образованное всеми векторами, имеющими нулевую скобку Пуассона с каждым вектором $d\Omega_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,2m_2$.

Билинейная форма, задаваемая скобкой Пуассона и рассматриваемая на подпространстве векторов $d\Omega_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, 2m_2$, невырожденная. Поэтому все пространство векторов df есть прямая сумма подпространства $\{d\Omega_\alpha, \alpha = 1, \ldots, 2m_2\}$ и его ортогонального дополнения. Скобка Дирака возникает при проектировании на это ортогональное дополнение. Проекция df, очевидно, задается формулой

$$df^* = df - (f, \Omega_\alpha)(\Delta^{-1})_{\alpha\beta}\, d\Omega_\beta . \qquad (10.9)$$

Вектору df^* соответствует функция канонических переменных

$$f^* = f - (f, \Omega_\alpha)(\Delta^{-1})_{\alpha\beta}\, \Omega_\beta . \qquad (10.10)$$

Скобка Дирака двух динамических переменных f и g равна в слабом смысле скобке Пуассона их проекций

$$(f, g)^* \overset{\Omega}{\approx} (f^*, g^*) . \qquad (10.11)$$

Уравнения движения в фазовом пространстве (8.29)-(8.31) можно переписать с использованием скобок Дирака (10.4)

$$\frac{dq_i}{dt} = (q_i, H)^* + \lambda_a(t)\frac{\partial \Phi_a}{\partial p_i} ,$$

$$\frac{dp_i}{dt} = (p_i, H)^* - \lambda_a(t)\frac{\partial \Phi_a}{\partial q_i} , \qquad (10.12)$$

$$\Phi_a(q, p) = 0 , \ \Omega_\alpha(q, p) = 0 , \qquad (10.13)$$

$$i = 1, \ldots, n , \ a = 1, \ldots, m_1 , \ \alpha = 1, \ldots, 2m_2 ,$$

$$\frac{d\Psi(q, p, t)}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (\Psi, H)^* + \lambda_a(t)(\Psi, \Phi_a) . \qquad (10.14)$$

§ 11. Связи, явно зависящие от времени

Если исходный вырожденный лагранжиан явно зависит от времени, то и связи в такой теории могут содержать время явно. Мы приведем здесь основные формулы обобщенного гамильтонова формализма, учитывающие явную зависимость от времени связей

$$\Phi_a(q, p, t) = 0 , \ a = 1, \ldots, m_1 , \qquad (11.1)$$

$$\Omega_\alpha(q, p, t) = 0 , \ \alpha = 1, \ldots, 2m_2 . \qquad (11.2)$$

Условия (8.21), определяющие связи первого рода, теперь записываются так:

$$(\Phi_a, \Phi_b) \overset{\Phi,\Omega}{\approx} 0 , \ (\Phi_a, \Omega_\alpha) \overset{\Phi,\Omega}{\approx} 0 ,$$

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial t} + (\Phi, H) \overset{\Phi,\Omega}{\approx} 0 . \qquad (11.3)$$

Уравнения (8.28), определяющие множители Лагранжа при связях второго рода, принимают вид

$$\mu_\alpha(t) = -(\Delta^{-1})_{\alpha\beta}\left[(\Omega_\beta, H) + \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial t}\right] . \qquad (11.4)$$

Соответственно модифицируются и уравнения движения (8.29)

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial p_i}(\Delta^{-1})_{\alpha\beta}\left[(\Omega_\beta, H) + \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial t}\right] + \lambda_a(t)\frac{\partial \Phi_a}{\partial p_i} ,$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial q_i}(\Delta^{-1})_{\alpha\beta}\left[(\Omega_\beta, H) + \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial t}\right] - \lambda_a(t)\frac{\partial \Phi_a}{\partial q_i} , \qquad (11.5)$$

$$\Phi_a(q, p, t) = 0 , \ \Omega_\alpha(q, p, t) = 0 ,$$

$$i = 1, \ldots, n , \ a = 1, \ldots, m_1 , \ \alpha = 1, \ldots, 2m_2 . \qquad (11.6)$$

Эти уравнения потребуются нам при рассмотрении калибровочных условий, явно зависящих от времени.

§ 12. Калибровочные условия в обобщенном гамильтоновом формализме

Если в теории есть связи первого рода, то уравнения движения (8.29) содержат функциональный произвол, а именно, множители Лагранжа $\lambda_a(t), a = 1, \ldots, m_1$ при этих связях остаются неопределенными. Этот произвол можно убрать, наложив дополнительно к связям (8.30) еще m_1 условий на q и p /2/

$$\chi_a(q, p, t) = 0 , \ a = 1, \ldots, m_1 . \qquad (12.1)$$

Условия (12.1) должны удовлетворять требованию

$$\det \| (\chi_a, \Phi_b) \| \Big|_{\Phi = \Omega = \chi = 0} \neq 0 , \qquad (I2.2)$$

$$a, b = 1, \ldots, m_1 .$$

Только в этом случае уравнения

$$\frac{d\chi_a}{dt} = \frac{\partial \chi_a}{\partial t} + (\chi_a, H) - (\chi_a, \Omega_\alpha)(\bar{\Delta}^{-1})_{\alpha\beta}(\Omega_\beta, H) +$$

$$+ \lambda_b(t)(\chi_a, \Phi_b) = 0 , \qquad (I2.3)$$

$$a, b = 1, \ldots, m_1 , \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, 2m_2$$

позволяют найти все множители $\lambda_a(t)$, a = I, ..., m_1

$$\lambda_a(t) = -(\bar{\Delta}^{-1})_{ab}\left[\frac{\partial \chi_b}{\partial t} + (\chi_b, H) - (\chi_b, \Omega_\alpha)(\bar{\Delta}^{-1})_{\alpha\beta}(\Omega_\beta, H)\right], \qquad (I2.4)$$

где

$$(\bar{\Delta}^{-1})_{ab}(\chi_b, \Phi_c) = \delta_{ac} . \qquad (I2.5)$$

Условия (I2.I), устраняющие в обобщенной гамильтоновой динамике функциональный произвол, обычно называются калибровочными условиями. Это объясняется тем, что такой произвол вызван связями первого рода, которые являются, как правило, отражением инвариантности теории при преобразованиях конфигурационного пространства, содержащих произвольные функции времени (см. § 3). Такие преобразования в теориях с вырожденными лагранжианами принято называть калибровочными (см. § 4).

Из (I2.4) следует вывод: если канонический гамильтониан тождественно равен нулю (вырожденные лагранжианы, являющиеся однородными функциями первой степени по скоростям), то калибровочные условия (I2.I) должны явно зависеть от времени.

§ I3. Независимые канонические переменные и редукция гамильтоновых уравнений движения

Как было показано в § 8 и I2, основной особенностью теорий с вырожденными лагранжианами является то, что физическая динамика развивается не во всем фазовом пространстве Γ, а только на его подмногообразии Γ^*, определяемом связями (8.30) и калибровочными условиями (I2.I). Размерность Γ^* равна $2(n - m_1 - m_2)$. Существенно, что физическая динамика на Γ^* гамильтонова, т.е. она описывается гамильтоновой системой из $2(n - m_1 - m_2)$ уравнений с некоторым эффективным гамильтонианом. Число независимых канонических координат на Γ^* равно $\dim \Gamma^* = 2(n - m_1 - m_2)$. В данном параграфе мы докажем эти утверждения для теории, имеющей только связи первого рода, а калибровочные условия (I2.I) выберем инволютивными между собой. Именно такой случай чаще всего встречается в практике /3/. Общее исследование будет проведено в § I6.

Итак, мы рассматриваем систему, описываемую вырожденным лагранжианом, в которой нет связей второго рода, а имеется только m_1 функционально независимых связей первого рода

$$\Phi_a(q, p) = 0 , \quad a = 1, \ldots, m_1 , \qquad (I3.I)$$

$$(\Phi_a(q,p), \Phi_b(q,p)) \overset{\Phi}{\approx} 0 , \quad (\Phi_a(q,p), H(q,p)) \overset{\Phi}{\approx} 0 . \qquad (I3.2)$$

Чтобы зафиксировать функциональный произвол в теории, на канонические переменные q и p накладываем, дополнительно к (I3.I), m_1 калибровочных условий /I,25/

$$\chi_a(q, p, t) = 0 , \quad a = 1, \ldots, m_1 . \qquad (I3.3)$$

Калибровочные условия (I3.3) позволяют определить множители Лагранжа $\lambda_a(t)$, $a = 1, \ldots, m_1$ при связях первого рода в уравнениях движения (8.29), если $(m_1 \times m_1)$ матрица $\bar{\Delta}$ с элементами

$$\bar{\Delta}_{ab}(q, p, t) = (\chi_a(q, p, t), \Phi_b(q, p)) , \qquad (I3.4)$$

$$a, b = 1, \ldots, m_1$$

невырожденная во всем фазовом пространстве

$$\det \| \bar{\Delta}_{ab} \| \neq 0 . \qquad (I3.5)$$

Из (I3.5), в частности, следует, что калибровочные условия $\chi_a(q, p, t)$ должны быть функционально независимыми, так как

$$\bar{\Delta}_{ab} = \frac{\partial \chi_a}{\partial z^\mu} J_{\mu\nu} \frac{\partial \Phi_b}{\partial z^\nu} , \qquad (I3.6)$$

$$1 \leq a, b \leq m_1 , \quad 1 \leq \mu, \nu \leq n ,$$

где J – единичная симплектическая матрица, размером $(2n \times 2n)$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \det J \neq 0, \quad J^2 = -1, \qquad (13.7)$$

I – единичная матрица размером $(n \times n)$. Совокупность всех $2n$ канонических переменных q, p обозначена одной буквой Z:

$$Z^{\mu} = (Z^1, \ldots, Z^{2n}) = (q^1, \ldots, q^n, p^1, \ldots, p^n). \qquad (13.8)$$

Для дальнейшего удобно считать, что функции $\chi_a(q,p,t)$, $a=1,\ldots,m_1$ находятся в инволюции в сильном смысле

$$(\chi_a(q,p,t), \chi_b(q,p,t)) = 0, \quad a,b = 1,\ldots,m_1. \qquad (13.9)$$

Согласно изложенному в § 8 и в § 12, уравнения движения, описывающие динамику в фазовом пространстве, имеют вид

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi_a}{\partial p_i} (\bar{\Delta}^{-1})_{ab} \left[\frac{\partial \chi_b}{\partial t} + (\chi_b, H) \right],$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_i} (\bar{\Delta}^{-1})_{ab} \left[\frac{\partial \chi_b}{\partial t} + (\chi_b, H) \right], \qquad (13.10)$$

$$\Phi_a(q,p) = 0, \quad \chi_a(q,p,t) = 0, \quad i = 1,\ldots,n, \quad a,b = 1,\ldots,m_1. \qquad (13.11)$$

Полная производная по времени произвольной функции на фазовом пространстве $\psi(q,p,t)$ задается формулой

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi, H) - (\psi, \Phi_a)(\bar{\Delta}^{-1})_{ab} \left[\frac{\partial \chi_b}{\partial t} + (\chi_b, H) \right], \quad a,b = 1,\ldots,m_1. \qquad (13.12)$$

С помощью (13.12) легко показать, что условия (13.11) согласованы с уравнениями движения (13.10) в том смысле, что (13.11) задают инвариантное подмногообразие Γ^* размерности $2(n-m_1)$ для системы (13.10). Любая фазовая траектория, имеющая хотя бы одну общую точку с Γ^*, целиком лежит в Γ^*. Поэтому условия (13.11) можно трактовать как условия на данные Коши для системы (13.10).

Из уравнений (13.10) видно, что в том случае, когда гамильтониан H тождественно равен нулю (лагранжиан, однородный по скоростям), калибровочные условия (13.3) должны обязательно зависеть от времени явно.

Если мы интересуемся динамикой не во всем фазовом пространстве Γ, а на подмногообразии Γ^*, задаваемом связями и калибровочными условиями (13.11), то уравнения движения (13.10) можно переписать в явно гамильтоновом виде

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i}, \quad i = 1,\ldots,n. \qquad (13.13)$$

$$\Phi_a(q,p) = 0, \quad \chi_a(q,p,t) = 0, \quad a = 1,\ldots,m_1, \qquad (13.14)$$

где обобщенный гамильтониан определяется формулой

$$H^*(q,p,t) = H - \Phi_a(\bar{\Delta}^{-1})_{ab} \left[\frac{\partial \chi_b}{\partial t} + (\chi_b, H) \right]. \qquad (13.15)$$

Подмногообразие Γ^*, задаваемое уравнениями (13.14), остается инвариантным подмногообразием (см. Приложение А) и для гамильтоновых уравнений (13.12).

Если для канонической системы с $2n$ уравнениями известны k $(k \leq n)$ первых интегралов или инвариантных соотношений, находящихся в инволюции, то порядок такой системы можно понизить до $2(n-k)$ (теоремы С. Ли, Лиувилля /26,27/). Если же первые интегралы или инвариантные соотношения неинволютивны, то с их помощью порядок гамильтоновой системы понижается до $2n-k$. При этом необходимо иметь в виду, что использование для редукции канонической системы первых интегралов приводит к канонической системе, общее решение которой является общим решением исходных гамильтоновых уравнений. Если же для этой цели используются инвариантные соотношения, то общее решение редуцированной системы является некоторым частным решением исходной гамильтоновой системы, а именно таким решением, которое целиком лежит на подмногообразии фазового пространства, задаваемом инвариантными соотношениями.

В рассматриваемом нами случае именно это подмногообразие Γ^* является физическим фазовым пространством. Чтобы выделить из всей гамильтоновой системы (13.13) те уравнения, которые описывают динамику на физическом фазовом подпространстве Γ^* и сохранить при этом канонический вид редуцированной системы, необходимо выполнить каноническое преобразование переменных q, p. Следуя работе /2/, это преобразование выберем так, чтобы левые части калибровочных условий (13.3) превратились в часть новых координат

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q,p,t)\ , \quad \mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha(q,p,t), \qquad (13.16)$$
$$\alpha = 1,\dots,n-m_1\ ,$$
$$Q_{n-m_1+a} = \chi_a(q,p,t), \quad \mathcal{P}_{n-m_1+a} = \mathcal{P}_{n-m_1+a}(q,p,t), \qquad (13.17)$$
$$a = 1,\dots,m_1\ ,$$
$$(Q_i, \mathcal{P}_j)_{q,p} = \delta_{ij}\ . \qquad (13.18)$$

Конкретный вид функций $Q_\alpha(q,p,t)$, $\mathcal{P}_\alpha(q,p,t)$ и $\mathcal{P}_{n-m_1+a}(q,p,t)$ нам не потребуется. Существенно лишь, что каноническое преобразование (13.16)–(13.18) явно зависит от времени, так как явно зависят от времени калибровочные условия (13.3). Преобразование (13.16) – (13.18) будет каноническим, очевидно, только при выполнении условия (13.9).

Существование такого преобразования доказывается следующим образом. Часть преобразования задается калибровочными условиями

$$Q_{n-m_1+a} = \chi_a(q,p,t)\ , \quad a = 1,\dots,m_1\ ,$$

которые считаются известными функциями, удовлетворяющими (13.9). Новая координата $Q_1(q,p,t)$ определяется как решение системы m_1 линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка

$$(Q_1, \chi_a) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_i}\frac{\partial \chi_a}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_i}\frac{\partial \chi_a}{\partial q_i}\right) = 0\ , \qquad (13.18^{I})$$
$$a = 1,\dots,m_1\ .$$

Если функции $\chi_a(q,p,t)$ функционально независимы, то уравнения (13.18^{I}) линейно независимы. Кроме того, система уравнений (13.18^{I}) благодаря (13.9) является полной системой [52], т.е. обращаются тождественно в ноль следующие повторные скобки Пуассона:

$$(\chi_b,(Q_1,\chi_a)) - (\chi_a,(Q_1,\chi_b)) =$$
$$-(\chi_b,(\chi_a,Q_1)) - (\chi_a,(Q_1,\chi_b)) = (Q_1,(\chi_a,\chi_b)) = 0\ ,$$
$$a, b = 1, 2, \dots, m_1\ .$$

Здесь мы воспользовались тождеством Якоби для повторных скобок Пуассона [53]. Полная система, как известно [52], имеет $2(n-m_1)$ решения. Любое из них можно взять в качестве $Q_1(q,p,t)$. Далее эти рассуждения повторяются при построении $Q_2(q,p,t)$ с добавлением к $\chi_a(q,p,t)$, $a = 1,2,\dots,m_1$ найденной функции $Q_1(q,p,t)$. Таким путем строятся все функции

$Q_\alpha(q,p,t)$, $\alpha = 1,2,\dots,n-m_1$ в (3.16). Существование функций $\mathcal{P}_i(q,p,t)$, $i = 1,2,\dots,n$ в (12.16) и (13.17) следует из теоремы о пополнении (см., например, [54]).

Канонические преобразования типа (13.16), (13.17) рассматриваются в теории функциональных групп [28].

Гамильтоновы уравнения (13.14), связи (13.14) записываются теперь так:

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_i}\ , \quad \frac{d\mathcal{P}_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}\ , \qquad (13.19)$$
$$i = 1,\dots,n\ ,$$
$$\bar{\Phi}_a(Q,\mathcal{P},t) \equiv \Phi_a(q(Q,\mathcal{P},t), p(Q,\mathcal{P},t)) = 0\ , \qquad (13.20)$$
$$Q_{n-m_1+a} = 0\ , \quad a = 1,\dots,m_1\ . \qquad (13.21)$$

Здесь $\mathcal{H}(Q,\mathcal{P},t)$ – новый обобщенный гамильтониан, определяемый формулой

$$\mathcal{H}(Q,\mathcal{P},t) = \overset{*}{H}(q(Q,\mathcal{P},t), p(Q,\mathcal{P},t), t) + R(Q,\mathcal{P},t)\ . \qquad (13.22)$$

Функции

$$q_i(Q,\mathcal{P},t)\ , \ p_i(Q,\mathcal{P},t)\ ,$$
$$i = 1,\dots,n \qquad (13.23)$$

задают преобразование, обратное (13.16), (13.17). Второе слагаемое в (13.22) обусловлено явной зависимостью канонического преобразования (13.16), (13.17) от времени. Эта добавка к гамильтониану определяется следующими уравнениями:

$$\frac{\partial R(Q,\mathcal{P},t)}{\partial \mathcal{P}_i} = \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial t}\ , \qquad (13.24)$$
$$\frac{\partial R(Q,\mathcal{P},t)}{\partial Q_i} = -\frac{\partial \mathcal{P}_i(q,p,t)}{\partial t}\ , \quad i = 1,\dots,n\ .$$

Подмногообразие Γ^*, задаваемое в переменных Q, $\mathcal{P}$ уравнениями (13.20), (13.21), очевидно, остается инвариантным подмногообразием гамильтоновой системы (13.19). Рассматривая первую половину уравнений (13.19) при $i = n-m_1+a$, $a = 1,\dots,m_1$, получаем

$$\frac{dQ_{n-m_1+a}}{dt} = \frac{d\chi_a(q,p,t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_{n-m_1+a}} \overset{\bar{\Phi}_b,\, Q_{n-m_1+b}}{\approx} 0\ , \qquad (13.25)$$
$$a, b = 1,\dots,m_1\ .$$

Для определения функций $\mathcal{P}_{n-m_1+a}(t)$, $a=1,2,\dots,m_1$ нет необходимости рассматривать соответствующие гамильтоновы уравнения движения

$$\frac{d\mathcal{P}_{n-m_1+a}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_{n-m_1+a}} \qquad \bar{\Phi}_b,\ Q_{n-m_1+b} \approx 0,$$

$$a,b=1,2,\dots,m_1.$$

Их проще определить из уравнений связей (I3.20). Действительно, связи (I3.20) всегда можно разрешить относительно $\mathcal{P}_{n-m_1+a}$, a = I, ..., m_1, так как соответствующий якобиан отличен от нуля в силу (I3.5).

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{P}_{n-m_1+b}} \bar{\Phi}_a(Q_\alpha, Q_{n-m_1+c}=0, \mathcal{P}, t) = \frac{\partial \bar{\Phi}_a(Q,\mathcal{P},t)}{\partial \mathcal{P}_{n-m_1+b}}\Big|_{Q_{n-m_1+c}=0} = \qquad \text{(I3.26)}$$

$$= (Q_{n-m_1+b}, \bar{\Phi}_a(Q,\mathcal{P},t))_{Q,\mathcal{P}}\Big|_{Q_{n-m_1+c}=0} = (\chi_b(q,p,t), \Phi_a(q,p))_{q,p}\Big|_{\chi_c(q,p,t)=0} \neq 0$$

Здесь $(\ ,\ )_{Q,\mathcal{P}}$ – скобки Пуассона в переменных Q, $\mathcal{P}$, а $(\ ,\ )_{q,p}$ – в переменных q, p, и мы воспользовались каноничностью Q, $\mathcal{P}$. Таким образом, связи (I3.20) всегда можно разрешить в следующем виде:

$$\mathcal{P}_{n-m_1+a}(t) = \Psi_a(Q_\alpha(t), \mathcal{P}_\alpha(t), t), \qquad \text{(I3.27)}$$

$$a = 1,2,\dots,m_1.$$

Рассмотрим оставшиеся гамильтоновы уравнения в системе (I3.I9) при $i=\alpha$ = I, ..., $n-m_1$ на подмногообразии Γ^*

$$\frac{dQ_\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}(Q,\mathcal{P},t)}{\partial \mathcal{P}_\alpha}\Big|_{\Gamma^*}, \quad \frac{d\mathcal{P}_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(Q,\mathcal{P},t)}{\partial Q_\alpha}\Big|_{\Gamma^*},$$

$$\alpha = 1,\dots,n-m_1.$$

В этих уравнениях вначале вычисляются частные производные в правых частях, и только потом должны учитываться уравнения (I3.20) и (I3.2I), задающие Γ^*. Однако (I3.25) позволяют до дифференцирования в $\mathcal{H}(Q,\mathcal{P},t)$ положить $Q_{n-m_1+a}=0$, a = I, ..., m_1 и подставить вместо $\mathcal{P}_{n-m_1+a}$, a = I, ..., m_1 результат разрешения связей (I3.20), т.е. функции (I3.27). Обозначим этот гамильтониан через $\mathcal{K}(Q_\alpha,\mathcal{P}_\alpha,t)$.

$$\mathcal{K}(Q_\alpha,\mathcal{P}_\alpha,t) = \mathcal{H}(Q,\mathcal{P},t)\big|_{\Gamma^*} \equiv \mathcal{H}(Q_\alpha, Q_{n-m_1+a}=0,$$

$$\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{P}_{n-m_1+a} = \Psi_a(Q_\beta,\mathcal{P}_\beta,t), t). \qquad \text{(I3.28)}$$

На Γ^* второе слагаемое в (I3.I5) исчезает, поэтому в $\mathcal{K}$ дают вклад канонический гамильтониан H и добавка R

$$\mathcal{K}(Q_\alpha,\mathcal{P}_\alpha,t) = \left[H(q(Q,\mathcal{P},t), p(Q,\mathcal{P},t), t) + R(Q,\mathcal{P},t)\right]\big|_{\Gamma^*}, \qquad \text{(I3.29)}$$

причем переход на Γ^* осуществляется путем описанной выше замены. Таким образом, интересующая нас динамика описывается канонической системой с $2(n-m_1)$ уравнениями и с гамильтонианом (I3.29)

$$\frac{dQ_\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{P}_\alpha}, \quad \frac{d\mathcal{P}_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_\alpha}, \quad \alpha = 1,\dots,n-m_1. \qquad \text{(I3.30)}$$

В качестве примера рассмотрим выделение независимых канонических переменных и нахождение физического гамильтониана в теории релятивистской струны в светоподобной калибровке /I8/. Динамика струны определяется действием

$$S = -\gamma \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}, \qquad \text{(I3.3I)}$$

где $x^\mu(\tau,\sigma)$ – параметрическое задание мировой поверхности струны, μ = 0,I, ..., $d-1$, d – размерность пространства-времени, в котором движется струна, $\dot{x} = \partial x/\partial\tau$, $x' = \partial x/\partial\sigma$, γ – константа с размерностью $[M]^2$. Так как лагранжиан струны является однородной функцией первой степени по скоростям $\dot{x}^\mu$, то канонический гамильтониан тождественно равен нулю. Теория инвариантна при преобразованиях

$$\bar{\tau} = f_1(\tau,\sigma),\quad \bar{\sigma} = f_2(\tau,\sigma),\quad \bar{x}^\mu(\bar{\tau},\bar{\sigma}) = x^\mu(\tau,\sigma)$$

с двумя произвольными функциями $f_i(\tau,\sigma)$, i = I,2. Имеются две первичные связи

$$\varphi_1 = \gamma^2 x'^2 + p^2 = 0, \qquad \text{(I3.32)}$$

$$\varphi_2 = x' p = 0 . \tag{13.33}$$

Вторичных связей в теории струны нет, так как здесь нет лагранжевых связей, т.е. уравнений Эйлера, не содержащих вторых производных по τ от координат струны. Связи (13.32) и (13.33) являются связями первого рода

$$(\varphi_1(\sigma), \varphi_1(\sigma')) = 4\gamma^2(\varphi_2(\sigma)+\varphi_2(\sigma'))\frac{\partial}{\partial\sigma'}\Delta(\sigma,\sigma'),$$
$$(\varphi_2(\sigma), \varphi_2(\sigma')) = (\varphi_2(\sigma)+\varphi_2(\sigma'))\frac{\partial}{\partial\sigma'}\Delta(\sigma,\sigma'), \tag{13.34}$$
$$(\varphi_1(\sigma), \varphi_2(\sigma')) = (\varphi_1(\sigma)+\varphi_1(\sigma'))\frac{\partial}{\partial\sigma'}\Delta(\sigma,\sigma').$$

Здесь $\Delta(\sigma,\sigma')$ –периодическая δ – функция

$$\Delta(\sigma,\sigma') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\delta(\sigma-\sigma'+2n\pi)+\delta(\sigma+\sigma'+2n\pi)],$$

$$(x_\mu(\tau,\sigma), p_\nu(\tau,\sigma')) = -g_{\mu\nu}\Delta(\sigma,\sigma'),$$
$$g_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,\dots).$$

Калибровочные условия выбираются в следующем виде:

$$\chi_1(\sigma) = n_\mu\left(x^\mu - \frac{P^\mu}{\gamma\pi}\tau\right) = 0,$$
$$\chi_2(\sigma) = n_\mu\left(p^\mu - \frac{P^\mu}{\pi}\right) = 0, \tag{13.35}$$

где $p_\mu(\tau,\sigma)$ – плотность канонического импульса

$$p_\mu(\tau,\sigma) = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}, \tag{13.36}$$

P^μ – полный импульс струны

$$P_\mu = \int_0^\pi d\sigma\, p_\mu(\tau,\sigma), \tag{13.37}$$

n^μ – постоянный изотропный вектор, не зависящий от τ и σ, $n^2=0$.

Скобки Пуассона калибровочных условий и связей определяются формулами

$$(\varphi_1(\sigma), \chi_2(\sigma')) = -2\gamma^2(nx')\Delta(\sigma,\sigma'),$$
$$(\varphi_2(\sigma), \chi_2(\sigma')) = \frac{nP}{\pi}\frac{\partial}{\partial\sigma'}\Delta(\sigma,\sigma'), \tag{13.38}$$
$$(\chi_1(\sigma), \chi_2(\sigma')) = -n^2\Delta(\sigma,\sigma') = 0.$$

Таким образом, благодаря изотропности вектора n^μ калибровочные условия (13.35) оказываются строго инволютивными между собой. Так как канонический гамильтониан в теории тождественно равен нулю, то параметр эволюции τ явно входит в калибровку (13.35).

Физическая динамика развивается на подпространстве фазового пространства Γ^*, определяемом уравнениями связей (13.32), (13.33) и калибровочными условиями (13.35). Найдем гамильтониан, задающий динамику на Γ^*, и соответствующие независимые канонические координаты. Для этого выполним следующее каноническое преобразование

$$Q^0(\tau,\sigma) = nx - \frac{nP}{\gamma\pi}\tau, \quad \mathcal{P}^0(\tau,\sigma) = mp,$$
$$Q^{d-1}(\tau,\sigma) = np, \quad \mathcal{P}^{d-1}(\tau,\sigma) = mx - \frac{mP}{\gamma\pi}\tau, \tag{13.39}$$
$$\vec{Q}_\perp(\tau,\sigma) = \vec{x}_\perp(\tau,\sigma), \quad \vec{\mathcal{P}}_\perp(\tau,\sigma) = \vec{p}_\perp(\tau,\sigma),$$

где m и n – изотропные постоянные векторы

$$m^\mu = (1/2, 0, \dots, 0, -1/2), \quad n^\mu = (1, 0, \dots, 0, 1),$$
$$m^2 = 0 = n^2, \quad (mn) = 1. \tag{13.40}$$

Значок $\perp$ означает "поперечные" компоненты вектора a^μ: $\vec{a}_\perp = (a^1, a^2, \dots, a^{d-2})$.

Для величины $R(Q,\mathcal{P},t)$, определяющей эффективный гамильтониан на Γ^*, получаем, согласно (13.24), уравнения

$$\frac{\partial R}{\partial\mathcal{P}^0} = \frac{nP}{\gamma\pi}, \quad \frac{\partial R}{\partial Q^{d-1}} = \frac{mP}{\gamma\pi}. \tag{13.41}$$

Таким образом,

$$R = \frac{nP}{\gamma\pi}\mathcal{P}^0 + \frac{mP}{\gamma\pi}Q^{d-1}. \tag{13.42}$$

Здесь следует иметь в виду, что для временных компонент Q^0 и $\mathcal{P}^0$

знаки в формулах (13.24) противоположны. Теперь мы должны вычислить R на Γ^*. Это дает

$$Q^{d-1}=0\,,\quad \mathcal{P}^0=mp=(p^0+p^{d-1})/2=\frac{\pi\gamma^2}{2}\left[(\gamma^{-1}\vec{p}_\perp)^2+\vec{x}_\perp'^{\,2}\right]/nP. \tag{13.43}$$

Следовательно, динамика независимых канонических переменных $\vec{x}_\perp(\tau,\sigma)$ и $\vec{p}_\perp(\tau,\sigma)$ на Γ^* определяется гамильтонианом

$$\mathcal{H}=\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^\pi d\sigma\left[(\gamma^{-1}\vec{p}_\perp)^2+\vec{x}_\perp'^{\,2}\right]. \tag{13.44}$$

Во всех многочисленных работах по теории релятивистской струны этот гамильтониан не выводился, а фактически подбирался по известным уравнениям для $\vec{x}_\perp$ и $\vec{p}_\perp$ /3,5/.

ГЛАВА 3. ПРОБЛЕМА КВАНТОВАНИЯ

§ 14. Операторное квантование

Основная цель, которая преследуется при построении обобщенного гамильтонова формализма для систем с сингулярными лагранжианами, это подготовка основы для перехода к квантовой теории таких систем. В общем случае эта задача не решена.

Рассмотрим вначале теорию, в которой присутствуют связи только первого рода. В принципе квантование такой системы может проводиться двумя путями: 1) с введением калибровочных условий и 2) без фиксирования калибровки.

Квантование без введения калибровочных условий. В квантовой теории канонически сопряженные координаты и импульсы являются операторами, алгебра которых задается правилом

$$[\hat{q}_j,\hat{p}_k]=\hat{q}_j\hat{p}_k-\hat{p}_k\hat{q}_j=i\hbar(q_j,p_k),\quad j,k=1,\ldots,n. \tag{14.1}$$

Далее требуется определить квантовые операторы, соответствующие классическому каноническому гамильтониану $H(q,p)$ и классическим связям $\varphi_s(q,p)$. Как известно, универсального рецепта для

этой процедуры нет. Основная проблема, возникающая здесь, это расстановка операторов $\hat{q}$ и $\hat{p}$ в $\hat{H}(\hat{q},\hat{p})$ и $\hat{\varphi}_s(\hat{q},\hat{p})$. При построении операторов $H(\hat{q},\hat{p})$ и $\hat{\varphi}_s(\hat{q},\hat{p})$ необходимо стремиться к тому, чтобы в правых частях коммутаторов, соответствующих скобкам Пуассона, операторы связей $\hat{\varphi}_{s''}(\hat{q},\hat{p})$ стояли справа от операторов коэффициентов $\hat{\alpha}_{ss'}^{s''}(\hat{q},\hat{p})$ и $\hat{\beta}_s^{s'}(\hat{q},\hat{p})$

$$[\hat{\varphi}_s,\hat{\varphi}_{s'}]=\hat{\alpha}_{ss'}^{s''}\hat{\varphi}_{s''}\,,\quad [\hat{\varphi}_s,\hat{H}]=\hat{\beta}_s^{s'}\hat{\varphi}_{s'}\,. \tag{14.2}$$

Только в этом случае, как это будет показано ниже, квантовая теория будет непротиворечивой.

В ряде случаев сохранить алгебру коммутаторов связей первого рода, замкнутой на квантовом уровне, не удается из-за появления аномальных чисто квантовых вкладов (так называемые центральные заряды, швингеровские члены). В результате классические связи первого рода в квантовой теории оказываются фактически связями второго рода (например, в теории релятивистской струны /18/). Это привносит дополнительные трудности в проблему квантования.

Чтобы построить оператор наблюдаемой величины в квантовой теории, необходимо решить операторное уравнение, следующее из (8.35)

$$[\hat{f},\hat{\varphi}_s]=\hat{\gamma}_s^{s'}\hat{\varphi}_{s'}\,,\quad s,s'=1,\ldots,m. \tag{14.3}$$

Волновая функция или вектор состояния определяется из решения уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t}=\hat{H}_T|\psi\rangle\,, \tag{14.4}$$

где $\hat{H}_T$ – оператор, соответствующий полной функции Гамильтона $H_T=H+\lambda_s(t)\varphi_s$. Точно так же, как это было в классической теории с решениями уравнений Гамильтона (В.22), в квантовом случае нас будут интересовать не все решения уравнения Шредингера, а только такие, которые удовлетворяют дополнительным условиям x)

$$\hat{\varphi}_s(\hat{q},\hat{p})|\psi\rangle=0\,,\quad s=1,\ldots,m. \tag{14.5}$$

Такие векторы состояния называются физическими.

x) Мы не будем обсуждать здесь известные трудности этого подхода, которые демонстрируются простым примером, когда связь первого рода линейна по импульсам. В этом случае (14.5) дает $p_x|\psi\rangle=\partial/\partial x|\psi\rangle=0$, т.е. $|\psi\rangle$ не зависит от x и, следовательно, не является квадратично интегрируемой функцией.

В квантовой теории со связями первого рода, которые трактуются с помощью уравнений (14.3), (14.5), приходится отказаться от возможности помножать связи $\hat{\varphi}_s(\hat{q},\hat{p})$, $s = 1,\dots,m$ на произвольный оператор и слева, и справа /29/. Это, очевидно, требуется для того, чтобы запретить образование коммутатора произвольного оператора со связями. Действительно, если бы это было возможно, то, вычисляя матричный элемент по физическим состояниям коммутатора нефизического оператора с $\hat{\varphi}_s$, мы получили бы противоречие с (14.5). Коммутаторы физических операторов со связями строить можно. Уравнения связей можно помножать на нефизические операторы только слева.

Кроме того, обычное правило эрмитова сопряжения сохраняется лишь для физических операторов $\hat{f}$ и $\hat{g}$

$$(\hat{f}\hat{g})^+ = \hat{g}^+\hat{f}^+, \quad [\hat{f},\hat{\varphi}_s] \approx 0, \quad [\hat{g},\hat{\varphi}_s] \approx 0, \quad s = 1,\dots,m. \tag{14.6}$$

На пространстве физических векторов состояний операторы связей должны быть самосопряженными (или эрмитовыми) операторами

$$\hat{\varphi}_s^+ \approx \hat{\varphi}_s, \quad s = 1,\dots,m. \tag{14.7}$$

Необходимо отметить, что обобщенный гамильтонов формализм для полевых систем со связями первого рода без фиксирования калибровки приводит к полевому уравнению, в которое входят произвольные функции (неопределенные множители Лагранжа). И это уравнение должно быть вторично проквантовано. Однако построить полный набор решений такого уравнения практически не удается. Поэтому иногда устраняют функциональный произвол путем фиксирования множителей Лагранжа (например, ковариантное квантование релятивистской струны /18/). Никаких общих правил для этого, к сожалению, нет /5/. Здесь приходится руководствоваться единственным требованием, чтобы гамильтонова теория после фиксирования множителей Лагранжа воспроизводила лагранжеву динамику.

<u>Квантование с фиксированием калибровки. Учет связей второго рода на квантовом уровне.</u> Как было показано в § 12, для устранения функционального произвола в обобщенной гамильтоновой динамике для системы со связями первого рода необходимо наложить столько калибровочных условий (12.1), сколько имеется в теории связей первого рода. В совокупности связи первого рода и калибровочные условия образуют набор связей второго рода. Единственный способ перенести такие связи в квантовую теорию - это учесть их в сильном операторном смысле. Для этой цели коммутатор двух операторов должен определяться через соответствующие скобки Дирака

$$[\hat{F},\hat{G}] = i\hbar (F,G)^{*}. \qquad (14.8)$$

Скобки Дирака определяются равенством

$$(F,G)^{*} = (F,G) - (F,\Omega_{\alpha})(\Delta^{-1})_{\alpha\beta}(\Omega_{\beta},G), \qquad (14.9)$$

где $\Omega_{\alpha}(q,p,t)$ – полный набор связей второго рода, $(\Delta^{-1})_{\alpha\beta}(\Omega_{\beta},\Omega_{\gamma}) = \delta_{\alpha\gamma}$. Основное свойство скобок Дирака состоит в следующем: любая динамическая переменная, описываемая функцией $g(q,p,t)$, имеет нулевые скобки Дирака со связями Ω_{α}, $\alpha = 1, \ldots, 2m_2$.

Выражения, получаемые для скобок Дирака в конкретных задачах, оказываются достаточно сложными. Это приводит к сложным коммутационным соотношениям в квантовой теории. Реализация таких операторов (в виде матриц, операций дифференцирования и т.д.) и составляет основную трудность в данном подходе, если не учитывать, конечно, проблему расстановки операторных множителей, которая имеет место и здесь.

§ 15. Квантование систем со связями первого рода методом континуального интегрирования в фазовом пространстве

С точки зрения приложений весьма эффективным методом квантования систем с вырожденными лагранжианами оказалось континуальное интегрирование в фазовом пространстве /2,30-32/. Важно иметь конечную формулу для функционального интеграла, в которой нет разделения на независимые (физические) и зависимые (нефизические) переменные. Интегрирование должно выполняться по всему фазовому пространству Γ. Это позволяет сохранить явно на квантовом уровне симметрии, имевшие место в исходной классической теории.

Итак, мы рассматриваем систему /9/, в которой есть связи только первого рода (13.1). В § 13 путем наложения калибровочных условий (13.3) были выделены в такой системе физические канонические переменные Q_{α}, $\mathcal{P}_{\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, n-m_1$ и был найден соответствующий гамильтониан $\mathcal{H}(Q_{\alpha},\mathcal{P}_{\alpha},t)$ (формула (13.28)), задающий динамику на физическом подмногообразии фазового пространства Γ^{*} (гамильтоновы уравнения (13.27)). При этом существенным моментом, упрощающим рассуждения, было предположение о строгой инволютивности калибровочных условий между собой (формула (13.9)). Однако это предположение не является принципиальным. В § 16 будут рассмотрены калибровочные условия, не инволютивные между собой.

Вначале мы запишем по стандартным правилам /33/ матричный элемент оператора эволюции

$$U(t'',t') = T\exp\left[-i\int_{t'}^{t''} \mathcal{H}(Q_{\alpha},\mathcal{P}_{\alpha},t)\,dt\right] \qquad (15.1)$$

с помощью континуального интегрирования по подмногообразию Γ^* фазового пространства

$$I = \langle Q''_1, \dots, Q''_{n-m_1} | U(t'',t') | Q'_1, \dots, Q'_{n-m_1} \rangle =$$

$$\int \exp\left\{ i \int_{t'}^{t''} [\mathcal{P}_\alpha \dot{Q}_\alpha - \mathcal{H}(Q_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, t)] dt \right\} \prod_{t,\gamma} \frac{dQ_\gamma(t) d\mathcal{P}_\gamma(t)}{2\pi}, \tag{15.2}$$

$$\alpha, \gamma = 1, \dots, n-m_1.$$

Теперь распространим функциональное интегрирование на все фазовое пространство Q_i, $\mathcal{P}_i$, $i = 1, \dots, n$, помножив (I5.2) на δ – функции, ограничивающие интегрирование по Q_{n-m_1+a}, $\mathcal{P}_{n-m_1+a}$, $a = 1, \dots, m_1$ подмногообразием Γ^*

$$\prod_{a,t} \delta(Q_{n-m_1+a}(t)) \delta(\mathcal{P}_{n-m_1+a}(t) - \Psi_a(Q_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, t)) =$$

$$\prod_{a,t} \delta(Q_{n-m_1+a}(t)) \delta(\bar{\Phi}_a(Q,\mathcal{P},t)) \det \left\| \frac{\partial \bar{\Phi}_b}{\partial \mathcal{P}_{n-m_1+a}} \right\|. \tag{15.3}$$

Здесь мы использовали формулу, обобщающую на многомерный случай известное свойство обычной δ – функции

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x-a)}{|f'(a)|}, \qquad f(a) = 0. \tag{15.4}$$

В результате для функционального интеграла I получаем следующее представление:

$$I = \int \exp\left\{ i \int_{t'}^{t''} [\mathcal{P}_i \dot{Q}_i - \mathcal{H}(Q,\mathcal{P},t)] dt \right\} \det \left\| \frac{\partial \bar{\Phi}_b}{\partial \mathcal{P}_{n-m_1+a}} \right\| \times$$

$$\prod_{a,t} \delta(Q_{n-m_1+a}) \delta(\bar{\Phi}_a(Q,\mathcal{P},t)) \prod_{t,i} \frac{dQ_i(t) d\mathcal{P}_i(t)}{2\pi}. \tag{15.5}$$

Сумму $\sum_{\alpha=1}^{m_1} \mathcal{P}_i \dot{Q}_i$, стоящую в показателе экспоненты в (I5.2), мы распространили на все переменные $\mathcal{P}_i$, $\dot{Q}_i$, $i = 1, \dots, n$, учитывая, что в подынтегральное выражение входит произведение δ -функций $\prod_{a,t} \delta(Q_{n-m+a}(t))$. В (I5.5) мы заменим $\mathcal{H}(Q_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, t)$ на $\mathcal{H}(Q,\mathcal{P},t)$, воспользовавшись (I3.29).

Теперь сделаем в (I5.5) замену функциональных переменных интегрирования*) с помощью канонического преобразования (I3.23), являющегося обратным к (I3.I6), (I3.I7). Учитывая (3.I8), получаем окончательное выражение для матричного элемента оператора эволюции в виде континуального интеграла по всему фазовому пространству q, p

$$I = \int \exp\left\{ i \int_{t'}^{t''} [p_i \dot{q}_i - H(q,p)] dt \right\} \det \| (\chi_a, \Phi_b) \| \times$$

$$\prod_a \delta(\Phi_a(q,p)) \delta(\chi_a(q,p,t)) \prod_{i,t} \frac{dq_i(t) dp_i(t)}{2\pi}. \tag{15.6}$$

Эта формула полностью совпадает с соответствующим выражением в работе /2/.

Основным моментом в нашем выводе формулы (I5.6) было доказательство того, что динамика на физическом подмногообразии фазового пространства, задаваемом уравнениями связей и калибровочными условиями, является гамильтоновой. Именно эта проблема является центральной при общем исследовании динамики в фазовом пространстве систем с вырожденными лагранжианами /34/. В статье /2/ и в монографиях /30,33,35/ гамильтоновость динамики на физическом подпространстве неявно предполагалась. Мы же даем последовательный вывод соответствующих гамильтоновых уравнений (I3.29), (I3.30). Впервые такое рассмотрение было проведено в работе /6/.

В качестве простого примера мы рассмотрим точечную релятивистскую частицу с лагранжианом

$$L = -m\sqrt{\dot{x}^2}, \tag{15.7}$$

где $x^\mu(\tau)$ –параметрическое задание траектории в пространстве Минковского, $\mu = 0,1,2,3$. В этой теории есть всего одна связь

$$\varphi = p^2 - m^2 = 0, \tag{15.8}$$

где

$$p_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = m\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}}. \tag{15.9}$$

Канонический гамильтониан тождественно равен нулю. Скобки Пуассона между канонически сопряженными координатами и импульсами имеют вид

$$(x_\mu, p_\nu) = -g_{\mu\nu}, \tag{15.10}$$

*) Мы не будем обсуждать здесь, допустимо ли делать такую замену переменных в функциональном интеграле /36–38/.

где $g_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1)$.В качестве калибровочного условия можно взять следующее равенство:

$$\chi = \tau - m x^0 = 0 \,, \qquad (15.11)$$

так как

$$(\chi, \varphi) = m(p^2, x^0) = 2 m p^0 \neq 0 \,. \qquad (15.12)$$

Континуальный интеграл по фазовому пространству x, p, согласно формуле (15.5), записывается в следующем виде:

$$I = \int \exp\{-i \int_{\tau'}^{\tau''} p_\mu \dot{x}^\mu d\tau\} 2 m p^0 \delta(\tau - m x^0) \delta(p^2 - m^2) \times \prod_\tau \prod_{\nu=0}^{3} \frac{dx^\nu(\tau) dp^\nu(\tau)}{2\pi} \,. \qquad (15.13)$$

С помощью канонической замены переменных

$$Q^0 = \tau - m x^0, \quad Q^i = x^i, \quad \mathcal{P}^0 = p^0, \quad \mathcal{P}^i = p^i, \quad i = 1,2,3 \qquad (15.14)$$

сведем интегрирование в (7) к интегрированию по фазовому подпространству Q^i, $\mathcal{P}^i$, i = 1,2,3. Для этого найдем, согласно формулам (13.24), (13.28) и (13.29), гамильтониан $\mathcal{H}(Q^i, \mathcal{P}^i)$, задающий динамику на этом подпространстве. Из (13.24) и (15.24) следует, что $R(Q, \mathcal{P})$ зависит только от $\mathcal{P}^0$

$$\frac{\partial R(Q, \mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}^0} = 1 \,, \quad R(Q, \mathcal{P}) = \mathcal{P}^0 \,. \qquad (15.15)$$

Для гамильтониана $\mathcal{H}(Q^i, \mathcal{P}^i)$ получаем выражение

$$\mathcal{H}(Q^i, \mathcal{P}^i) = \dot{R}(Q, \mathcal{P})\Big|_{\Gamma^*} = \pm \sqrt{\vec{\mathcal{P}}^2 + m^2} \,. \qquad (15.16)$$

Теперь мы можем переписать формулу (15.13) в следующем виде:

$$\overset{\pm}{I}(\vec{x}, t) = \int \exp\{i \int_{t'}^{t''} [p^j \dot{x}^j \mp \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}] dt\} \times \prod_t \prod_j \frac{dx^j(t) dp^j(t)}{2\pi} \,, \quad t = x^0 \,. \qquad (15.17)$$

Так как гамильтониан в (15.7) зависит только от p^i, i = 1,2,3, то функциональный интеграл в (15.17) можно вычислить явно /33/

$$\overset{\pm}{I}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[i \vec{p}\vec{x} \mp i t \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}] = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} e^{-ipx} \delta(p^0 \mp \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}) \,, \qquad (15.18)$$

$$\overset{\pm}{I}(\vec{x}, t) = 0 \,, \quad t < 0 \,.$$

Формула (15.18) дает функцию Грина для релятивистского уравнения Шредингера /39/

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} \mp \sqrt{-\nabla^2 + m^2}\right) \Psi = 0 \,.$$

§ 16. Гамильтонов функциональный интеграл в теориях со связями первого и второго рода

В данном параграфе будет дан простой последовательный вывод формулы для гамильтонова функционального интеграла в теориях со связями самого общего вида: связи могут быть первого, второго рода, и они могут содержать время явно /11/. Калибровочные условия могут быть неинволютивны между собой и также явно зависеть от времени. Большое внимание будет уделено доказательству гамильтоновости теории на физическом подмногообразии фазового пространства. Будет показано, что Δ^{-1}, где Δ – детерминант Фаддеева – Попова, есть не что иное, как элемент объема фазового подпространства $\bar{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma^*_B$ в неканонических координатах, задаваемых связями и калибровочными условиями. Это существенно упрощает интерпретацию конечной формулы для функционального интеграла.

Основной особенностью теорий с вырожденными лагранжианами, как уже отмечалось ранее, является то, что физическая динамика развивается не во всем фазовом пространстве Γ, а только на его подмногообразии Γ^*, определяемом связями и калибровочными условиями. Физическое подпространство Γ^* – это симплектическое многообразие, и на нем могут быть введены канонические координаты. То же самое справедливо и для $\overline{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma^*$, т.е. для дополнения Γ^* относительно Γ. В случае связей первого рода и калибровочных условий, находящихся между собой в инволюции, несложно указать соответствующие канонические координаты (см. § 13). Если же в теории присутствуют связи второго рода или же калибровочные условия неинволютивны между собой, то рассуждения § 13 здесь уже неприменимы. В этом случае необходимо использовать математическую теорему (см. /41/, теорема УП.24) о задании подмногообразия фазового пространства с помощью уравнений, имеющих каноническую форму. Это означает, что скобки Пуассона левых частей уравнений, определяющих подмногообразие, равны нулю или единице [ж)].

Далее необходимо показать, что динамика на физическом подмногообразии фазового пространства Γ^* гамильтонова (т.е. уравнения движения на Γ^* являются гамильтоновыми) и найти соответствующий гамильтониан. Обычно в работах, посвященных квантованию систем с вырожденными лагранжианами методом континуального интегрирования в фазовом пространстве, это не доказывается, а неявно предполагается заранее /2,30/. При этом считается, что эффективным гамильтонианом, генерирующим динамику на Γ^*, является сужение канонического гамильтониана H на Γ^*. То, что в общем случае это не так, очевидно на примере вырожденных лагранжианов, однородных по скоростям. Канонический гамильтониан в таких теориях тождественно равен нулю. Гамильтоновость динамики на Γ^* доказана в работе /6/.

<u>Классификация связей</u>. Рассмотрим систему с конечным числом степеней свободы n, описываемую вырожденным лагранжианом $L(q,\dot{q},t)$. Для общности мы предполагаем явную зависимость от времени в лагранжиане L, тем самым в рассмотрение будут включены и связи, явно зависящие от времени.

Будем считать, что нам известен полный набор функционально независимых связей в теории (все первичные и все вторичные связи)

$$\theta_A(q,p,t) = 0\ , \quad A = 1,\ldots,M\ , \tag{16.1}$$

ж) В работе /42/ эта теорема доказывается заново без ссылки на /41/.

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial\theta_A}{\partial(q,p)}\right\|\Big|_{\theta_A=0} = M\ . \tag{16.2}$$

Согласно (16.2), уравнения связей (16.1) определяют в $2n$-мерном фазовом пространстве Γ с координатами q, p подмногообразие $\mathcal{M}$ коразмерности M.

Чтобы в наборе связей (16.1) выделить связи первого и второго рода (см. § 8), необходимо сделать некоторые предположения о свойствах антисимметричной матрицы $\|(\theta_A,\theta_B)\|$, A, $B = 1,\ldots,M$, элементы которой построены из скобок Пуассона связей $\theta_A(q,p,t)$, $A = 1,\ldots,M$. Пусть на подмногообразии $\mathcal{M}$

$$\operatorname{rank}\|(\theta_A,\theta_B)\|\big|_{\mathcal{M}} = 2m_2 < M\ . \tag{16.3}$$

Это означает, что матрица $\|(\theta_A,\theta_B)\|$ на $\mathcal{M}$ имеет $m_1 = M - 2m_2$ линейно независимых собственных векторов $\xi^a_A(q,p,t)$ с нулевыми собственными значениями [ж)]:

$$\xi^a_A(q,p,t)(\theta_A,\theta_B) = 0\ , \tag{16.4}$$

$$A,B = 1,\ldots,M\ ;\quad a = 1,\ldots,m_1\ .$$

Требование того, чтобы набор связей (16.1) был полон, записывается в следующем виде (см. § 8):

$$\xi^a_A\left[\frac{\partial\theta_A}{\partial t} + (\theta_A,H)\right]\Big|_{\mathcal{M}} = 0\ , \tag{16.5}$$

$$a = 1,\ldots,m_1\ .$$

Связи (16.1) можно перенумеровать так, что в матрице $\|(\theta_A,\theta_B)\|$ линейно независимыми будут $2m_2$ последних строк и соответственно $2m_2$ последних столбцов. Теперь от набора связей (16.1) перейдем к эквивалентному набору связей согласно формулам

ж) Коэффициенты в условии линейной независимости векторов ξ^a_A должны рассматриваться как функции q, p, t.

$$\Phi_a(q,p,t) = \xi^a_A(q,p,t)\,\Theta_A(q,p,t), \qquad (16.6)$$
$$a = 1,\ldots,m_1,$$
$$\Omega_\alpha(q,p,t) = \Theta_{m_1+\alpha}(q,p,t),\ \alpha = 1,\ldots,2m_2. \qquad (16.7)$$

В силу линейной независимости векторов $\xi^a_A(q,p,t)$ уравнения новых связей

$$\Phi_a(q,p,t) = 0\,,\ a = 1,\ldots,m_1\,, \qquad (16.8)$$

$$\Omega_\alpha(q,p,t) = 0\,,\ \alpha = 1,\ldots,2m_2 \qquad (16.9)$$

задают то же самое подмногообразие $\mathcal{M}$, что и уравнения исходных связей (16.1).

Учитывая (2.7) и (2.8), легко проверить, что на подмногообразии $\mathcal{M}$ выполняются равенства

$$(\Phi_a,\Phi_b) \overset{\Phi,\Omega}{\approx} 0\,,\quad \frac{\partial\Phi_a}{\partial t} + (\Phi_a, H) \overset{\Phi,\Omega}{\approx} 0\,,$$
$$(\Phi_a,\Omega_\alpha) \overset{\Phi,\Omega}{\approx} 0\,, \qquad (16.10)$$

$$\operatorname{rank}\|(\Omega_\alpha,\Omega_\beta)\| \overset{\Phi,\Omega}{\approx} 2m_2\,, \qquad (16.11)$$
$$a,b = 1,\ldots,m_1,\ \alpha,\beta = 1,\ldots,2m_2.$$

Таким образом, перегруппировка связей (16.6) и (16.7) выделяет связи первого рода (16.8) и связи второго рода (16.9), удовлетворяющие на $\mathcal{M}$ условиям (16.10), (16.11).

Как было показано в § 8, присутствие в теории связей первого рода приводит к функциональному произволу в уравнениях движения в фазовом пространстве Γ. Чтобы зафиксировать этот произвол, требуется дополнительно к связям (16.8) и (16.9) наложить на канонические переменные q, p еще m_1 калибровочных условий

$$\chi_a(q,p,t) = 0\,,\ a = 1,\ldots,m_1\,, \qquad (16.12)$$

подчиненных единственному условию

$$\det\|(\chi_a,\Phi_b)\|\Big|_{\Phi=\Omega=\chi=0} \neq 0\,. \qquad (16.13)$$

Эти условия вырезают из $\mathcal{M}$ физическое подмногообразие Γ^* фазового пространства. Размерность Γ^*, очевидно, равна $2(n-m_1-m_2)$.

Требовать инволютивность калибровочных условий между собой /2,30,40/ мы не будем. Так как мы рассматриваем самый общий случай связей (16.1), зависящих явно от времени, то и калибровочные условия (16.12) должны явно зависеть от времени. Более того, если канонический гамильтониан в теории тождественно равен нулю (в этом случае лагранжиан $L(q,\dot q,t)$ - однородная по скоростям $\dot q$ функция первой степени), то калибровочные условия (16.12) вне зависимости от свойства связей первого рода (16.8) должны содержать время явно.

Для анализа уравнений движения на физическом подмногообразии Γ^* удобно перейти от набора связей (16.8), (16.9) и калибровочных условий (16.12) к эквивалентному набору из $2(m_1+m_2)$ условий в каноническом виде. Это достигается с помощью специального канонического преобразования к новым переменным Q, $\mathcal{P}$

$$Q_i = Q_i(q,p,t)\,,\quad \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i(q,p,t)\,, \qquad (16.14)$$

$$(Q_i,Q_j) = (\mathcal{P}_i,\mathcal{P}_j) = (Q_i,\mathcal{P}_j) - \delta_{ij} = 0\,, \qquad (16.15)$$
$$i,j = 1,\ldots,n$$

в терминах, в которых физическое подмногообразие Γ^* определяется уравнениями

$$Q_{r+\varkappa}(q,p,t) = 0\,;\quad \mathcal{P}_{r+\varkappa}(q,p,t) = 0\,, \qquad (16.16)$$
$$r = n-m_1-m_2\,,\ \varkappa = 1,\ldots,m_1+m_2.$$

Каноническими переменными на Γ^* являются Q_σ, $\mathcal{P}_\sigma$, $1 \le \sigma \le n-m_1-m_2$. Мы не будем останавливаться здесь на доказательстве этого утверждения, его можно найти в книге /41/, теорема УП. 24. Конкретный вид функций $Q_i(q,p,t)$, $\mathcal{P}_i(q,p,t)$, $1 \le i \le n$ нам не потребуется, отметим только, что они явно зависят от времени, так как явно зависят от времени связи (16.8), (16.9) и калибровочные условия (16.12).

Для сокращения записи совокупность связей и калибровочных условий в каноническом виде (I6.I6) мы будем обозначать иногда одной буквой

$$w_e(q,p,t)=0\,,\quad e=1,\dots,2(m_1+m_2)\,,$$

$$w_\varkappa(q,p,t)=Q_{\nu+\varkappa}(q,p,t)\,,\quad w_{m_1+m_2+\varkappa}(q,p,t)=P_{\nu+\varkappa}(q,p,t)\,, \qquad (I6.I7)$$

$$\nu=n-(m_1+m_2)\,,\quad \varkappa=1,\dots,m_1+m_2\,.$$

Матрица, элементами которой являются скобки Пуассона связей $w_e(q,p,t)$ между собой, равна единичной симплектической матрице размером $2(m_1+m_2)\times 2(m_1+m_2)$

$$\|(w_e,w_f)\|=\left\|\begin{matrix}0 & I_{m_1+m_2}\\ -I_{m_1+m_2} & 0\end{matrix}\right\|\equiv J_{2(m_1+m_2)}\,, \qquad (I6.I8)$$

где I – единичная матрица размером $(m_1+m_2)\times(m_1+m_2)$.

Уравнения движения в фазовом пространстве. Выведем уравнения движения в фазовом пространстве с учетом всех связей и калибровочных условий, записанных в каноническом виде (I6.I6). Канонический гамильтониан

$$H=p_i\dot q_i-L(q,\dot q,t) \qquad (I6.I9)$$

не зависит от скоростей $\dot q$. Дифференцируя (I6.I9) и учитывая определение (5.I), получаем

$$dH(q,\dot q,p,t)=dp_i\dot q_i+p_i\,d\dot q_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i-\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}d\dot q_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt=dp_i\dot q_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt\,. \qquad (I6.20)$$

Таким образом, dH не содержит дифференциалов скоростей $d\dot q_i$, следовательно,

$$H=H(q,p,t)\,, \qquad (I6.2I)$$

$$dH=\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i+\frac{\partial H}{\partial t}dt\,. \qquad (I6.22)$$

Учтем теперь в (I6.20) и (I6.22) уравнения Эйлера

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_i}\,,\quad i=1,\dots,n\,. \qquad (I6.23)$$

Это дает следующее равенство:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}+\dot p_i\right)dq_i+\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}-\dot q_i\right)dp_i+\left(\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial t}\right)dt=0\,. \qquad (I6.24)$$

Кроме того, дифференцирование связей (I6.I7) приводит к уравнениям

$$\frac{\partial w_e}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial w_e}{\partial p_i}dp_i+\frac{\partial w_e}{\partial t}dt=0\,, \qquad (I6.25)$$

$$e=1,\dots,2(m_1+m_2)\,.$$

Условие (I6.I8) означает, в частности, что уравнения $w_e(q,p,t)=0$, $e=1,\dots,2(m_1+m_2)$ функционально независимы. Это позволяет применить здесь метод неопределенных множителей Лагранжа. Окончательно динамика в фазовом пространстве описывается уравнениями[x)]

$$\dot q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}+\lambda_e(t)\frac{\partial w_e}{\partial p_i}\,,\quad \dot p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}-\lambda_e(t)\frac{\partial w_e}{\partial q_i}\,, \qquad (I6.26)$$

$$i=1,\dots,n\,,$$

$$w_e(q,p,t)=0\,,\quad e=1,\dots,2(m_1+m_2)\,. \qquad (I6.27)$$

Множители Лагранжа $\lambda_e(t)$ в уравнениях движения (I6.26) определяются из следующих условий:

$$\frac{dw_f}{dt}=\frac{\partial w_f}{\partial t}+(w_f,H)+\lambda_g(t)(w_f,w_g)=0\,, \qquad (I6.28)$$

$$f,g=1,\dots,2(m_1+m_2)\,.$$

---

x) Из (I6.24) и (I6.25) дополнительно к (I6.26) вытекает соотношение

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial t}+\lambda_e(t)\frac{\partial w_e}{\partial t}=0\,,$$

которое уравнением движения не является.

Учитывая, что связи $w_g(q,p,t)$ имеют канонический вид (I6.I7) (I6.I8), получаем

$$\lambda_f(t) = -\bar{J}_{fg}\left[\frac{\partial w_g}{\partial t} + (w_g, H)\right],$$
$$\bar{J} = J^{-1}_{2(m_1+m_2)}, \quad f,g = 1,\dots,2(m_1+m_2). \tag{I6.29}$$

После подстановки (I6.29) в (I6.26) уравнения движения записываются так:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial w_f}{\partial p_i}\bar{J}_{fg}\left[\frac{\partial w_g}{\partial t} + (w_g, H)\right],$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial w_f}{\partial q_i}\bar{J}_{fg}\left[\frac{\partial w_g}{\partial t} + (w_g, H)\right], \quad i = 1,\dots,n, \quad f,g = 1,\dots,2(m_1+m_2). \tag{I6.30}$$

Очевидно, что эти уравнения не гамильтоновы. Но нас интересует динамика не во всем фазовом пространстве Γ, а только на его физическом подмногообразии Γ^*, определяемом уравнениями связей (I6.27). На Γ^* уравнения (I6.30) можно переписать в явно гамильтоновом виде:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_T}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_T}{\partial q_i}, \quad i = 1,\dots,n, \tag{I6.3I}$$

$$w_f(q,p,t) = 0, \quad f = 1,\dots,2(m_1+m_2), \tag{I6.32}$$

где

$$H_T(q,p,t) = H - w_f\bar{J}_{fg}\left[\frac{\partial w_g}{\partial t} + (w_g, H)\right]. \tag{I6.33}$$

Уравнения связей (I6.32) являются неинволютивными инвариантными соотношениями для гамильтоновых уравнений движения (I6.3I)

$$\frac{dw_f}{dt} = \frac{\partial w_f}{\partial t} + (w_f, H_T)\big|_{\Gamma^*} = 0, \quad f = 1,\dots,2(m_1+m_2). \tag{I6.34}$$

С их помощью можно понизить порядок гамильтоновой системы (I6.3I) на $2(m_1+m_2)$. Для этого следует воспользоваться каноническим преобразованием (I6.I4). В новых переменных Q_i, $\mathcal{P}_i$ уравнения (I6.3I), (I6.32) переписываются так:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_i}, \quad \dot{\mathcal{P}}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}, \quad i = 1,\dots,n, \tag{I6.35}$$

$$Q_{\tau+\varkappa} = 0, \quad \mathcal{P}_{\tau+\varkappa} = 0, \tag{I6.36}$$
$$\tau = n-(m_1+m_2), \quad \varkappa = 1,\dots,m_1+m_2.$$

Новый гамильтониан $\mathcal{H}(Q,\mathcal{P},t)$ определяется формулой

$$\mathcal{H}(Q,\mathcal{P},t) = H_T(q(Q,\mathcal{P},t), p(Q,\mathcal{P},t), t) + R(Q,\mathcal{P},t). \tag{I6.37}$$

Здесь функции

$$q_i = q_i(Q,\mathcal{P},t), \quad p_i = p_i(Q,\mathcal{P},t), \quad i = 1,\dots,n \tag{I6.39}$$

задают каноническое преобразование, обратное к (I6.I4). Добавка $R(Q,\mathcal{P},t)$ к гамильтониану обусловлена явной зависимостью канонического преобразования (I6.I4) от времени. Эта величина определяется уравнениями

$$\frac{\partial R(Q,\mathcal{P},t)}{\partial \mathcal{P}_i} = \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial R(Q,\mathcal{P},t)}{\partial Q_i} = -\frac{\partial \mathcal{P}_i(q,p,t)}{\partial t}, \quad i = 1,\dots,n. \tag{I6.40}$$

После дифференцирования по t правые части уравнений (I6.40) должны быть представлены с помощью (I6.39) как функции Q, $\mathcal{P}$, t.

Уравнения движения (I6.35), (I6.36) представляют собой фактически гамильтонову систему только из $2\tau = 2(n-m_1-m_2)$ уравнений

$$\dot{Q}_\sigma = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{P}_\sigma}, \quad \dot{\mathcal{P}}_\sigma = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_\sigma}, \quad \sigma = 1,\dots,\tau = n-m_1-m_2 \tag{I6.4I}$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{K}(Q_\sigma, \mathcal{P}_\sigma, t) = \mathcal{H}(Q,\mathcal{P},t)\big|_{Q_{\tau+\varkappa} = \mathcal{P}_{\tau+\varkappa} = 0}, \quad \sigma = 1,\dots,\tau, \ \varkappa = 1,\dots,m_1+m_2. \tag{I6.42}$$

На Γ^* вклад в $\mathcal{K}(Q_\sigma, \mathcal{P}_\sigma, t)$ дают только канонический гамильтониан и $R(Q, \mathcal{P}, t)$

$$\mathcal{K}(Q_\sigma, \mathcal{P}_\sigma, t) = \left[H(q(Q,\mathcal{P},t), p(Q,\mathcal{P},t), t) + R(Q,\mathcal{P},t)\right]\Big|_{Q_{\nu+\varkappa} = \mathcal{P}_{\nu+\varkappa} = 0} \tag{I6.43}$$

Согласно (I6.34), оставшиеся уравнения в системе (I6.35) на Γ^* дают

$$\dot{Q}_{\nu+\varkappa} = 0 \,, \quad \dot{\mathcal{P}}_{\nu+\varkappa} = 0 \,, \qquad \nu = n - m_1 - m_2 \,, \ \varkappa = 1, \ldots, m_1 + m_2 \,, \tag{I6.44}$$

т.е. (I6.36) являются инвариантными соотношениями для (I6.35).

В работе /43/ сделан неправильный вывод о том, что R обращается в ноль на подмногообразии $\mathcal{M}$ и, следовательно, R на Γ^* также равно нулю. Наглядным примером, показывающим, что это не так, является случай сингулярных лагранжианов, однородных по скоростям (см. пример в § I5). Канонический гамильтониан для таких лагранжианов равен нулю тождественно и динамика на физическом подмногообразии фазового пространства Γ^* генерируется только R.

Построение функционального интеграла. Вначале мы представим по стандартным правилам /33/ матричный элемент оператора эволюции для гамильтоновой системы (I6.41)

$$U(t'', t') = T\exp\Big[-i \int_{t'}^{t''} \mathcal{K}(Q_\sigma, \mathcal{P}_\sigma, t)\, dt\Big] \,, \qquad \sigma = 1, \ldots, \nu \tag{I6.45}$$

в виде континуального интеграла по физическому подмногообразию Γ^* фазового пространства

$$I = \langle Q''_1, \ldots, Q''_\nu | U(t'', t') | Q'_1, \ldots, Q'_\nu \rangle =$$
$$\int \exp\Big\{ i \int_{t'}^{t''} [\mathcal{P}_\sigma \dot{Q}_\sigma - \mathcal{K}(Q_\tau, \mathcal{P}_\tau, t)]\, dt \Big\} \prod_{t,\rho} \frac{dQ_\rho(t)\, d\mathcal{P}_\rho(t)}{2\pi} \,, \tag{I6.46}$$
$$\sigma, \tau, \rho = 1, \ldots, \nu = n - m_1 - m_2 \,.$$

Теперь с помощью δ - функций распространим функциональное интегрирование на все фазовое пространство Q_i , $\mathcal{P}_i$, $i = 1, \ldots, n$

$$I = \int \exp\Big\{ i \int_{t'}^{t''} [\mathcal{P}_i \dot{Q}_i - H(Q,\mathcal{P},t) - R(Q,\mathcal{P},t)]\, dt \times$$
$$\prod_{\varkappa=1}^{n-\nu} \delta(Q_{\nu+\varkappa})\, \delta(\mathcal{P}_{\nu+\varkappa}) \prod_{i=1}^{n} \prod_{t} \frac{dQ_i(t)\, d\mathcal{P}_i(t)}{2\pi} \,. \tag{I6.47}$$

Учитывая δ - функции в (I6.47), мы распространили сумму $\sum_{\sigma=1}^{\nu} \mathcal{P}_\sigma \dot{Q}_\sigma$, стоящую в показателе экспоненты в (I6.46), на все переменные $\mathcal{P}_i$, $\dot{Q}_i$, $i = 1, \ldots, n$ и заменили эффективный гамильтониан $\mathcal{K}$ согласно (I6.43) суммой $H + R$.

Теперь совершим в (I6.47) замену функциональных переменных интегрирования с помощью канонического преобразования (I6.39), обратного к (I6.14). Мы не будем обсуждать здесь, насколько оправданна данная процедура, и лишь сошлемся на обширную литературу по этой проблеме /36-38/. После такой замены добавка R к каноническому гамильтониану в (I6.47) исчезает

$$I = \int \exp\Big\{ i \int_{t'}^{t''} [p_i \dot{q}_i - H(q,p,t)]\, dt \times$$
$$\prod_{\varkappa=1}^{n-\nu} \delta(Q_{\nu+\varkappa}(q,p,t))\, \delta(\mathcal{P}_{\nu+\varkappa}(q,p,t)) \prod_{t} \prod_{i=1}^{n} \frac{dq_i(t)\, dp_i(t)}{2\pi} \,. \tag{I6.48}$$

Чтобы воспользоваться формулой (I6.48), мы должны знать явный вид связей и калибровочных условий в канонической форме. Переход от исходного набора связей (I6.1) и калибровочных условий (I6.12) к набору связей и калибровочных условий в канонической форме (I6.16) является довольно сложной математической проблемой /41/ (требуется решение уравнений в частных производных). Поэтому необходимо научиться работать с исходным набором связей (I6.1) и калибровочных условий (I6.12).

Пусть исходный набор связей (I6.1) и калибровочных условий (I6.12) после замены q и p согласно (I6.39) имеет вид

$$\eta_e(Q_{\nu+\varkappa}, \mathcal{P}_{\nu+\varkappa}, t) = 0 \,, \tag{I6.49}$$
$$e = 1, \ldots, 2(m_1 + m_2) \,, \quad \varkappa = 1, \ldots, n - \nu \,, \quad \nu = n - m_1 - m_2 \,.$$

Канонические координаты Q_σ и $\mathcal{P}_\sigma$, $\sigma = 1, \ldots, \nu$ на Γ^* в уравнения связей (I6.49) не входят. Так как уравнения (I6.I6) и (I6.49) описывают одно и то же подмногообразие Γ^* фазового пространства, то из (I6.I6) следует (I6.49) и наоборот. Переменные $\eta_e(Q_{\nu+\varkappa},\mathcal{P}_{\nu+\varkappa},t)$, $e=1,\ldots,2(m_1+m_2)$ функционально независимы в силу (I6.2) и (I6.I3), поэтому их можно рассматривать как неканонические координаты на подмногообразии $\bar\Gamma$, являющемся дополнением Γ^* относительно Γ: $\bar\Gamma=\Gamma\setminus\Gamma^*$.

Теперь воспользуемся следующим тождеством:

$$1=\int\limits_{\bar\Gamma}\ldots\int(\det\|(\eta_f,\eta_g)\|)^{1/2}\times \prod_{h=1}^{2(m_1+m_2)}\delta(\eta_h(Q_{\nu+\varkappa},\mathcal{P}_{\nu+\varkappa},t))\prod_{\varkappa=1}^{n-\nu}dQ_{\nu+\varkappa}\,d\mathcal{P}_{\nu+\varkappa}. \tag{I6.50}$$

Чтобы доказать (I6.50), необходимо перейти в этой формуле к интегрированию по неканоническим переменным η_h и воспользоваться выражением для элемента объема фазового пространства в неканонических координатах (см. Приложение Б):

$$\prod_{\varkappa=1}^{n-\nu}dQ_{\nu+\varkappa}\,d\mathcal{P}_{\nu+\varkappa}=\frac{\partial(Q_{\nu+\varkappa},\mathcal{P}_{\nu+\varkappa})}{\partial(\eta_1,\ldots,\eta_{2(m_1+m_2)})}\prod_{e=1}^{2(m_1+m_2)}d\eta_e= \tag{I6.5I}$$

$$(\det\|(\eta_f,\eta_g)\|)^{-1/2}\prod_{e=1}^{2(m_1+m_2)}d\eta_e.$$

Подставляя (I6.50) в подынтегральное выражение (I6.46), получаем

$$I=\int\exp\{i\int_{t'}^{t''}[\mathcal{P}_i\dot Q_i-H(Q,\mathcal{P},t)-R(Q,\mathcal{P},t)]dt\}\times \prod_{e=1}^{2(m_1+m_2)}\delta(\eta_e(Q_{\nu+\varkappa},\mathcal{P}_{\nu+\varkappa},t))(\det\|(\eta_f,\eta_g)\|)^{1/2}\times \tag{I6.52}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_t\frac{dQ_i(t)d\mathcal{P}_i(t)}{2\pi}.$$

Как уже отмечалось выше, из (I6.49) следует (I6.I6). Поэтому мы смогли опять распространить сумму $\sum\mathcal{P}_\sigma\dot Q_\sigma$ в (I6.5I) на все переменные $\mathcal{P}_i$, $\dot Q_i$, $i=I,\ldots,n$ и подставили вместо $\mathcal{H}$ формулу (I6.43). С помощью замены функциональных переменных интегрирования в (I6.52), определяемой каноническим преобразованием (I6.39), мы получаем окончательную формулу для континуального интеграла

$$I=\int\exp\{i\int_{t'}^{t''}[p_i\dot q_i-H(q,p,t)]dt\}\prod_{e=1}^{2(m_1+m_2)}\delta(\eta_e(q,p,t))\times (\det\|(\eta_f,\eta_g)\|)^{1/2}\prod_{i=1}^{n}\prod_t\frac{dq_i(t)dp_i(t)}{2\pi}. \tag{I6.53}$$

Добавка R к каноническому гамильтониану, вызванная явной зависимостью от времени связей и калибровочных условий, исчезает при замене переменных (I6.39). В (I6.53) входит только исходный полный набор связей (I6.I) и калибровочных условий (I6.I2)

$$\eta_e(q,p,t)=\{\Theta_A(q,p,t),\ A=1,\ldots,M=m_1+2m_2;\ \chi_a(q,p,t),\ a=1,\ldots,m_1\},\ e=1,\ldots,2(m_1+m_2). \tag{I6.54}$$

Из-за δ - функций (I6.53), очевидно, безразлично, какой из наборов связей (I6.I) или (I6.8), (I6.9) используется при построении континуального интеграла.

Мера интегрирования в конечной формуле (I6.53) определяется величиной

$$\Delta=\{\det\|(\eta_f,\eta_g)\|\}^{1/2}.$$

Согласно (I6.5I), Δ^{-1} есть элемент объема фазового подпространства $\bar\Gamma=\Gamma\setminus\Gamma^*$ в неканонических координатах, задаваемых связями и калибровочными условиями (I6.54).

Связи второго рода присутствуют в следующих полевых моделях [3,5]: калибровочные поля с отличной от нуля массой, теория магнитных зарядов Дирака, квантование с использованием формализма светового фронта.

§ 17. Квантование свободного электромагнитного поля

Действие для электромагнитного поля

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{17.1}$$

инвариантно при калибровочных преобразованиях

$$\bar{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \varepsilon(x). \tag{17.2}$$

Поэтому у матрицы λ (2.1) есть один собственный вектор с нулевым собственным значением

$$\xi_\mu = \delta_{\mu 0}. \tag{17.3}$$

Значит, уравнения Эйлера для (17.1)

$$\partial^\mu F_\mu^{\ \nu} = \partial^\mu\partial_\mu A^\nu - \partial^\nu\partial^\mu A_\mu = 0$$

представляют собой систему из трех уравнений, содержащих производные по времени второго порядка

$$\partial^\mu F_\mu^{\ i} = \partial^\mu\partial_\mu A^i - \partial^i\partial^\mu A_\mu = 0, \quad i = 1,2,3 \tag{17.4}$$

и одной лагранжевой связи

$$\partial^\mu F_\mu^{\ 0} \underset{/8/}{=} \partial^i\partial_i A^0 - \partial^0\partial^i A_i = 0. \tag{17.5}$$

В силу тождества Нетер

$$\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv 0 \tag{17.6}$$

и уравнений (17.4) производная по времени от левой части (17.5) обращается в ноль

$$\partial_0\partial^\mu F_\mu^{\ 0} \equiv -\partial_i\partial^\mu F_\mu^{\ i} = 0. \tag{17.7}$$

Следовательно, лагранжеву связь (17.5) можно рассматривать как условие на начальные данные для системы из 3 уравнений второго порядка (17.4).

Согласно вышеизложенному, в электродинамике есть одна первичная связь и одна вторичная связь, задаваемая лагранжевой связью (17.5). Других связей в теории нет. Первичная связь непосредственно получается из определения канонически сопряженных импульсов

$$\pi^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = F^{0\mu}. \tag{17.8}$$

Следовательно, пространственные компоненты π^μ задаются вектором электрического поля

$$\pi^i = -E^i, \quad i = 1,2,3, \tag{17.9}$$

а нулевая компонента π^0 обращается в ноль. Это и есть первичная связь

$$\varphi = \pi_0 = 0; \tag{17.10}$$

Из (17.5) и (17.8) получаем вторичную связь

$$\omega = \partial_i\pi^i = 0 \quad, \text{т.е.}\ \operatorname{div}\vec{E} = 0. \tag{17.11}$$

Гамильтонова динамика без фиксирования калибровки. Канонический гамильтониан с помощью интегрирования по частям можно записать в следующем виде:

$$H = -\int d^3x(\pi^\mu\dot{A}_\mu + \mathcal{L}) = \int d^3x\left(\tfrac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \tfrac{1}{2}F_{0k}F^{0k} - \pi^i\partial_i A_0\right) = \tag{17.12}$$

$$\int d^3x\left(\tfrac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \tfrac{1}{2}\vec{\pi}^2 + A_0\partial_i\pi^i\right).$$

Скобки Пуассона определяются так:

$$(A_\mu(x), \pi_\nu(y))_{x_0=y_0} = -g_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}), \quad g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+,-,-,-). \tag{17.13}$$

Связи (17.10) и (17.11), очевидно, являются связями первого рода.

Динамика в фазовом пространстве генерируется полным гамильтонианом

$$H_T = H + \int[\lambda_1(t,\vec{x})\pi_0(t,\vec{x}) + \lambda_2(t,\vec{x})\partial_i\pi^i(t,\vec{x})]d^3x, \tag{17.14}$$

который дает следующие уравнения движения

$$\dot{A}_0 = (A_0, H_T) = -\lambda_1, \quad \dot{A}^i = (A^i, H_T) = \pi^i + \partial^i A^0 + \partial^i\lambda_2, \tag{17.15}$$

$$\dot{\pi}_0 = 0, \quad \dot{\pi}^i = (\pi^i, H_T) = -\partial_k F^{ki}. \tag{17.16}$$

Из (17.15) заключаем, что $A_0(t,\vec{x})$ является фактически произвольной функцией t и $\vec{x}$, которую можно включить в множитель Лагранжа $\lambda_2(t,\vec{x})$. Таким образом, нефизические переменные

A_0 и $\pi_0 = 0$ полностью устраняются из рассмотрения. Канонические уравнения для оставшихся переменных $A^i(t,\vec{x})$ и $\pi^i(t,\vec{x})$ записываются теперь так:

$$\dot{A}^i = \pi^i + \partial^i \bar{\lambda}_2 \,, \quad \bar{\lambda}_2 = \lambda_2 + A^0 \,, \tag{17.17}$$

$$\dot{\pi}^i = -\partial_k F^{ki} . \tag{17.18}$$

Уравнения (17.18) представляют собой вторую пару уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\, \vec{H} . \tag{17.19}$$

Из (17.17) и (17.18) получаем волновое уравнение с x) произвольной функцией $\bar{\lambda}_2(t,\vec{x})$

$$\ddot{A}^i = -\partial_k \partial^k A^i + \partial^i \partial_k A^k + \partial^i \dot{\bar{\lambda}}_2 . \tag{17.20}$$

Даже если положить здесь $\bar{\lambda}_2 = 0$, тем не менее работать с уравнением (17.20) практически неудобно. Эта трудность устраняется введением калибровочных условий.

<u>Квантование электромагнитного поля в радиационной калибровке</u>

Согласно общим правилам (см. § 12), связи первого рода (17.10) и (17.11) должны быть дополнены двумя калибровочными условиями. В радиационной калибровке полагают

$$\chi_1 = A^0(t,\vec{x}) = 0 \,, \tag{17.21}$$

$$\chi_2 = \partial_i A^i(t,\vec{x}) = 0 . \tag{17.22}$$

Требуя, чтобы χ_1 и χ_2 сохранялись при развитии динамики во времени согласно уравнениям (17.16), определяем множители Лагранжа

$$\lambda_1(t,\vec{x}) = 0 \,,$$

$$0 = (\partial_i A^i(t,\vec{x}), H_T) = \frac{1}{2}\int d^3y\, (\partial_i A^i(t,\vec{x}), \vec{\pi}^2(t,y)) + \tag{17.23}$$

$$\int d^3y\, \lambda_2(t,\vec{y}) (\partial_i A^i(t,\vec{x}), \partial_j \pi^j(t,y)) =$$

$$\int d^3y\, \pi^j(t,\vec{y}) \frac{\partial}{\partial x^j} \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) + \int d^3y\, \lambda_2(t,y) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^i} \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) . \tag{17.24}$$

x) Уравнение (17.20) после замены $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2 + A^0$ отличается от соответствующего уравнения Эйлера (17.4) ненулевой правой частью $-\partial^i \lambda_2(t,\vec{x})$, причем $\lambda_2(t,\vec{x})$ –произвольная функция. Только полагая $\lambda_2 = 0$, мы получаем эквивалентность гамильтоновых и лагранжевых уравнений. На физическом подмногообразии фазового пространства, определяемом калибровочными условиями (17.21), (17.22), это действительно так.

Теперь воспользуемся следующим соотношением, справедливым для произвольной функции f

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(|\vec{x}-\vec{y}|) = -\frac{\partial}{\partial y^i} f(|\vec{x}-\vec{y}|) . \tag{17.25}$$

Выражение (17.24) переписывается так:

$$0 = \partial_j \pi^j(t,\vec{x}) + \int d^3y \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^i} \lambda_2(t,\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \approx \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i} \lambda_2(t,\vec{x}) . \tag{17.26}$$

Таким образом, множитель Лагранжа $\lambda_2(t,\vec{x})$ должен быть решением уравнения Лапласа. Обычно требуется, чтобы $A_\mu(t,\vec{x})$ и, следовательно, множители Лагранжа при $|\vec{x}| \to \infty$ стремились к нулю. Но при таких граничных условиях уравнение Лапласа (17.26) имеет только нулевое решение (см., например, /44/ стр. 171).

Уравнения движения на подмногообразии фазового пространства Γ^*, определяемом уравнениями связей (17.10), (17.11) и калибровочными условиями (17.21), (17.22), принимают вид

$$\dot{A}_0 = 0 \,, \quad \dot{\pi}_0 = 0 \,, \tag{17.27}$$

$$\dot{A}^i = \pi^i \,, \quad \dot{\pi}^i = -\partial_k F^{ki} . \tag{17.28}$$

Из условий (17.28) следует волновое уравнение для пространственных компонент вектор-потенциала $A^i(t,\vec{x})$

$$\ddot{A}^i + \partial_k \partial^k A^i = 0 \,, \quad i,k = 1,2,3 . \tag{17.29}$$

Для $A^i(t,\vec{x})$ и $\pi^i(t,\vec{x})$ имеем стандартные фурье-представления

$$A^i(t,\vec{x}) = \int d^3k\, e^{-i\vec{k}\vec{x}} [e^{ik_0t} A^i(k_0,\vec{k}) + e^{-ik_0t} A^i(-k_0,\vec{k})] \,,$$

$$\pi^i(t,\vec{x}) = i\int k_0 d^3k\, e^{-i\vec{k}\vec{x}} [e^{ik_0t} A^i(k_0,\vec{k}) - e^{-ik_0t} A^i(-k_0,\vec{k})] \,, \tag{17.30}$$

$$k_0 = |\vec{k}| \,, \quad A^i(k_0,-\vec{k}) = \overset{*}{A}{}^i(-k_0,\vec{k}) .$$

В квантовой теории постулируются следующие коммутационные соотношения (см. формулу (14.9))

$$[A_\mu(t,\vec{x}), \pi_\nu(t,y)] = i(A_\mu(t,\vec{x}), \pi_\nu(t,y))^* . \tag{17.31}$$

Для определения скобок Дирака вычислим матрицу

$$\Delta_{ef} = (\theta_e(t,\vec{x}), \theta_f(t,\vec{y})),\quad e,f = 1,2,3,4, \qquad \text{(I7.32)}$$

$$\theta_1 = \pi^0,\quad \theta_2 = \partial_i \pi^i,\quad \theta_3 = A^0,\quad \theta_4 = \partial_i A^i, \qquad \text{(I7.33)}$$

$$\Delta = \left| \begin{matrix} 0 & 0 & \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\partial^2 \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})}{\partial x^i \partial y^i} \\ -\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2 \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})}{\partial x^i \partial y^i} & 0 & 0 \end{matrix} \right| . \qquad \text{(I7.34)}$$

Учитывая равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i} \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{x}), \qquad \text{(I7.35)}$$

легко найти обратную матрицу Δ^{-1}

$$\Delta^{-1} = \left| \begin{matrix} 0 & 0 & -\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \\ \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} & 0 & 0 \end{matrix} \right| . \qquad \text{(I7.36)}$$

Из (I7.3I) и (I7.36) следует, что A^0 и π^0 коммутируют между собой и со всеми пространственными компонентами A^i и π^i. Следовательно, на квантовом уровне A^0 и π^0 остаются классическими величинами. Отличным от нуля оказывается следующий коммутатор:

$$[A^i(t,\vec{x}), \pi^j(t,\vec{y})] = i\delta^{ij}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) - i\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}. \qquad \text{(I7.37)}$$

Чтобы получить коммутационные соотношения для $A^j(k_0,\vec{k},t)$, можно подставить в (I7.36) разложения (I7.29). Однако проще переписать уравнения (I7.II) и (I7.22) в импульсном пространстве и вычислить скобки Дирака для фурье-амплитуд $A^j(k_0,\vec{k},t)$.

Учитывая, что

$$A^i(k_0,\vec{k},t) = \frac{1}{2ik_0}\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \left[ik_0 A^i(t,\vec{x}) + \pi^i(t,x)\right], \qquad \text{(I7.38)}$$

получаем с помощью (I7.I3) следующее выражение для ненулевых скобок Пуассона фурье-амплитуд $A^i(k_0,\vec{k},t)$

$$(A^i(k_0,\vec{k},t), A^j(-k_0',\vec{k}',t)) = \frac{i}{2k_0}\delta^{ij}\frac{\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}')}{(2\pi)^3}. \qquad \text{(I7.39)}$$

В импульсном пространстве (I7.II) и (I7.22) записываются так:

$$\theta_1(\vec{k}) = A^j(k_0,\vec{k},t)k^j = 0,$$

$$\theta_2(\vec{k}) = A^j(-k_0,\vec{k},t)k^j = 0. \qquad \text{(I7.40)}$$

Матрица $\Delta^{-1} = (\theta_1(\vec{k}), \theta_2(\vec{k}'))^{-1}$ имеет вид

$$\Delta^{-1} = \left| \begin{matrix} 0 & \dfrac{2i}{k_0}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}') \\ -\dfrac{2i}{k_0}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}') & 0 \end{matrix} \right| . \qquad \text{(I7.4I)}$$

Вычисляя с помощью (I7.39) и (I7.4I) скобки Дирака для $A^j(k_0,\vec{k},t)$, получаем следующее выражение для ненулевого коммутатора величин $A^j(k_0,\vec{k},t)$

$$[A^i(k_0,\vec{k},t), A^j(-k_0',\vec{k}',t)] = -\frac{1}{2k_0}\frac{\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}')}{(2\pi)^3}\left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k_0^2}\right). \qquad \text{(I7.42)}$$

Удобно ввести разложение $A^j(k_0,\vec{k},t)$ на продольные и поперечные по отношению к импульсу $\vec{k}$ составляющие. Для этого с каждым трехмерным вектором $\vec{k}$ свяжем базис из двух ортов $e^i_1(\vec{k})$, $e^i_2(\vec{k})$, лежащих в плоскости, перпендикулярной $\vec{k}$, и единичного вектора вдоль направления $\vec{k}$ $e^i_3(\vec{k}) = k^i/k_0$, $k_0 = |\vec{k}|$. Разложим $A^j(k_0,\vec{k},t)$ по этому базису

$$A^j(k_0,\vec{k},t) = \sum_{\alpha=1}^{3} e^j_\alpha(\vec{k}) a_\alpha(k_0,\vec{k},t). \qquad \text{(I7.43)}$$

Подстановка (I7.43) в (I7.42) дает

$$[a_\alpha(k_0,\vec{k},t),a_\beta(-k_0',\vec{k}',t)]=-\frac{1}{2k_0}\frac{\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}')}{(2\pi)^3}(\delta_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha3}\delta_{\beta3}). \qquad (17.44)$$

Таким образом, продольные составляющие $a_3(k_0,\vec{k},t)$ оказываются коммутирующими классическими величинами. Согласно (17.40), их можно положить равными нулю. Операторами являются только поперечные амплитуды $a_1(k_0,\vec{k},t)$, $a_2(k_0,\vec{k},t)$, которые несущественным множителем отличаются от обычных фоковских операторов рождения и уничтожения /45/ поперечных фотонов $C^+_\alpha(\vec{k})$, $C_\alpha(\vec{k})$, $\alpha=1,2$:

$$[C_\alpha(\vec{k}),C^+_\beta(\vec{k}')]=\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}'), \qquad (17.45)$$

$$C_\alpha(\vec{k})=(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k_0}\,a_\alpha(-k_0,-\vec{k},t),\ \alpha,\beta=1,2.$$

Энергия электромагнитного поля, очевидно, определяется каноническим гамильтонианом (17.12), посчитанным на Γ^*

$$E=H|_{\Gamma^*}=(2\pi)^3\int d^3k\,\vec{k}^2(A^j(-k_0,\vec{k},t)A^j(k_0,-\vec{k},t)+A^j(k_0,\vec{k},t)A^j(-k_0,-\vec{k},t)). \qquad (17.46)$$

В оператор энергии дают вклад только поперечные амплитуды

$$\hat{E}=(2\pi)^3\int d^3k\,\vec{k}^2\sum_{\alpha=1}^{2}(\overset{*}{a}_\alpha(k_0,\vec{k},t)a_\alpha(k_0,\vec{k},t)+a_\alpha(k_0,\vec{k},t)\overset{*}{a}_\alpha(k_0,\vec{k},t))= \qquad (17.47)$$

$$\frac{1}{2}\int d^3k\,k_0[C_\alpha(\vec{k})C^+_\alpha(\vec{k})+C^+_\alpha(\vec{k})C_\alpha(\vec{k})].$$

§ 18. Квантование полей Янга – Миллса

Неабелева калибровочная симметрия и классическая динамика полей Янга – Миллса. Пусть имеется поле $\varphi(x)$, преобразующееся по неприводимому представлению ω некоторой простой компактной группы Ли G. Генераторы группы T^a, $a=1,2,\ldots,n$ образуют алгебру Ли группы G

$$[T^a,T^b]=if^{abc}T^c. \qquad (18.1)$$

Здесь f^{abc} – полностью антисимметричные действительные структурные константы. Введем матрицу "локальных" преобразований $\omega(x)$ поля $\varphi(x)$

$$\omega(x)=\exp\{i\sum_{a=1}^{n}T^a_\varphi\varepsilon^a(x)\}, \qquad (18.2)$$

где T^a_φ – генераторы группы G в представлении поля $\varphi(x)$, которые удовлетворяют соотношению

$$tr(T^a_\varphi T^b_\varphi)=C_\varphi\delta_{ab}, \qquad (18.3)$$

где число C_φ зависит от нормировки матриц T^a_φ.

Формула (18.3) означает возможность выбора диагональной евклидовой метрики в линейном пространстве, которым является алгебра Ли компактной простой группы G.

Чтобы построить теорию поля $\varphi(x)$, инвариантную относительно локальных калибровочных преобразований

$$\varphi'(x)=\omega(x)\varphi(x), \qquad (18.4)$$

необходимо в свободном лагранжиане этого поля сделать замену

$$\partial_\mu\varphi\to D_\mu\varphi\equiv\partial_\mu\varphi+igA^a_\mu(x)T^a_\varphi, \qquad (18.5)$$

где векторное калибровочное поле $A^a_\mu(x)$ (поле Янга – Миллса) преобразуется согласно закону

$$A'^a_\mu T^a_\varphi=\omega A^a_\mu T^a_\varphi\omega^{-1}+ig^{-1}(\partial_\mu\omega)\omega^{-1}. \qquad (18.6)$$

Левая часть последнего равенства принадлежит алгебре Ли группы G. В теории групп /48/ доказывается, что и правая часть (18.6) принадлежит этой алгебре. Закон преобразования для $A^a_\mu(x)$, следующий из (18.6), не зависит от конкретного представления генераторов T^a и в явном виде может быть выписан только для бесконечно малого преобразования

$$\omega(x) \simeq 1 + i\sum_{a=1}^{n} T_\varphi^a \varepsilon^a(x) . \tag{18.7}$$

Подстановка (18.7) в (18.6) и использование (18.3) дает

$$A'^a_\mu = A^a_\mu - f^{abc} A^c_\mu \varepsilon^b - g^{-1}\partial_\mu \varepsilon^a , \tag{18.8}$$

т.е. поле $A^a_\mu(x)$ преобразуется неоднородно. Закон преобразования для ковариантной производной (18.5) следующий:

$$D'_\mu \varphi' = \omega(x) D_\mu \varphi . \tag{18.9}$$

Напряженность поля Янга – Миллса определяется так:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu . \tag{18.10}$$

Из (18.6) и (18.10) получаем

$$F'_{\mu\nu}(x) = \omega(x) F_{\mu\nu}(x) \omega^{-1}(x) ,$$

где $F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} T^a_\varphi = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$. (18.11)

Как и для потенциалов $A^a_\mu(x)$, закон преобразования $F^a_{\mu\nu}(x)$, вытекающий из (18.11), не зависит от конкретного представления генераторов T^a. Для бесконечно малых преобразований (18.7) имеем

$$F'^a_{\mu\nu}(x) = F^a_{\mu\nu}(x) - f^{abc} \varepsilon^b F^c_{\mu\nu}(x) . \tag{18.12}$$

Напряженность поля Янга – Миллса преобразуется однородно.

Динамика поля Янга – Миллса определяется действием

$$S = -\frac{1}{4C}\int d^4x \, tr(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}\int d^4x \, F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} , \tag{18.13}$$

где $F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} T^a$. Здесь T^a -генераторы группы G в каком-либо представлении, удовлетворяющие условию $tr(T^a T^b) = C\delta_{ab}$. Инвариантность (18.13) при калибровочных преобразованиях (18.6) следует из (18.11), если учесть, что формула (18.11) справедлива для любого представления генераторов T^a.

В калибровочные преобразования (18.8) входят n (n -размерность G) произвольных функций координат и времени $\varepsilon^a(x)$, $a = 1, \ldots, n$. Поэтому матрица (2.1) в этом случае имеет n собственных векторов с нулевым собственным значением. Это означает, что $4n$ уравнений Эйлера

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} - g f^{abc} A^{b\mu} F^c_{\mu\nu} = 0 , \quad a, b, c = 1, \ldots, n \tag{18.14}$$

или в матричном виде

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + ig[A^\mu, F_{\mu\nu}] \equiv \nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0 \tag{18.15}$$

представляют собой систему $3n$ уравнений, содержащих производные по времени второго порядка

$$\partial^\mu F^a_{\mu j} - g f^{abc} A^{b\mu} F^c_{\mu j} = 0 , \quad j = 1, 2, 3 \tag{18.16}$$

и n лагранжевых связей

$$\partial^j F^a_{j0} - g f^{abc} A^{bj} F^c_{j0} = 0 . \tag{18.17}$$

В силу тождеств Нётер /8/

$$\nabla^\mu \nabla^\nu F_{\mu\nu} \equiv 0 \tag{18.18}$$

лагранжевы связи (18.17) можно рассматривать как условия на данные Коши для (18.15).

В фазовом пространстве есть n первичных связей и n вторичных связей, задаваемых лагранжевыми связями (18.17). Других связей в теории нет.

Из определения импульсов

$$\pi^a_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^{a\mu}} = F^a_{0\mu} \tag{18.19}$$

получаем первичные связи

$$\varphi^a_1 = \pi^a_0(x) = 0 , \quad a = 1, 2, \ldots, n . \tag{18.20}$$

Лагранжевы связи (18.16), записанные в терминах канонических переменных, дают вторичные связи

$$\varphi^a_2 = \partial^j \pi^a_j - g f^{abc} A^{bj} \pi^c_j \equiv \nabla^j \pi^a_j = 0 . \tag{18.21}$$

Скобки Пуассона определяются так:

$$(A^a_\mu(x), \pi^b_\nu(y)) = -\delta^{ab} g_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) .$$

Канонический гамильтониан после интегрирования по частям может быть записан так:

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{4} F^a_{ij} F^{aij} + \frac{1}{2} \pi^{ai} \pi^{ai} + \nabla^j \pi^a_j A^{a0} \right). \qquad (18.22)$$

Легко проверить непосредственным вычислением, что связи (18.20) и (18.21) являются связями первого рода.

Квантование в кулоновской калибровке. Кулоновская или радиационная калибровка задается условиями

$$\chi^a_1 = A^{a0}(x) = 0, \qquad (18.23)$$

$$\chi^a_2 = \partial^i A^a_i(x) = 0. \qquad (18.24)$$

Для построения функционального интеграла в фазовом пространстве с помощью формулы (15.6) необходимо вычислить определитель следующего оператора:

$$M^{ab}_c(x,y) = (\varphi^a_2, \chi^b_2) = (\delta^{ab}\Delta - gf^{abc} A^{cj}(y) \frac{\partial}{\partial x^j}) \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}), \qquad (18.25)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^i \partial x^i$ – 3-мерный оператор Лапласа. Определитель такого оператора трактуется как произведение его собственных значений. Условия (18.23) и (18.24) однозначно фиксируют калибровку только в том случае, если оператор $M^{ab}_c(x,y)$ не имеет нулевых собственных значений (нулевых мод). При таком условии оператор $M^{ab}_c(x,y)$ однозначно обратим, т.е. существует единственное решение уравнения

$$(\delta^{ab}\Delta - gf^{abc} A^{cj}(y) \frac{\partial}{\partial x^j})(M^{-1}_c)^{bd}(x,y) = \delta^{ad} \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}). \qquad (18.26)$$

В рамках теории возмущений это действительно так. Физический интерес представляют только такие решения уравнения (18.26), которые удовлетворяют условию

$$M^{-1}_c(x,y) \xrightarrow[|\vec{x}-\vec{y}| \to \infty]{} 0. \qquad (18.27)$$

При выполнении этого требования уравнение (18.26) эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$M^{-1ab}_c(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta^{ab}}{|\vec{x}-\vec{y}|} + gf^{abc} \int \frac{d^3z}{4\pi} \frac{A^{cj}(z)}{|\vec{x}-\vec{z}|} \frac{\partial}{\partial z^j} M^{-1bd}_c(z,y). \qquad (18.28)$$

Решение этого уравнения итерациями позволяет получить в любом заданном порядке теории возмущений однозначное выражение для M^{-1}_c.

Существование единственного решения уравнения (18.26) означает отсутствие решений однородного уравнения

$$(\delta^{ab}\Delta - gf^{abc} A^{cj}(x) \frac{\partial}{\partial x^j}) N^b(x) = 0, \qquad (18.29)$$

т.е. отсутствие нулевых мод у оператора $M^{ab}_c(x,y)$, удовлетворяющих условию (18.27).

Возможность однозначного фиксирования условиями (18.23) калибровочного произвола непосредственно связано с решением однородного уравнения (18.29). Пусть потенциалы $A^a_\mu(x)$ и $A'^a_\mu(x)$, связанные соотношением (18.8), одновременно удовлетворяют калибровочным условиям (18.23) и (18.24). Это означает, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^a(x) = 0, \qquad (18.30)$$

$$(\delta^{ab}\Delta - gf^{abc} A^{cj}(x) \frac{\partial}{\partial x^j}) \varepsilon^b(\vec{x}) = 0. \qquad (18.31)$$

Таким образом, уравнение, определяющее бесконечно малое калибровочное преобразование, которое связывает $A^a_\mu(x)$ и $A'^a_\mu(x)$, одновременно удовлетворяющие условиям кулоновской калибровки (18.23), (18.24), совпадает с уравнением на нулевые моды оператора $(M^{-1}_c)^{ab}(x,y)$.

В.Н. Грибовым /50/ было показано, что существуют такие потенциалы $A^{cj}(x)$, для которых уравнение (18.31) имеет ненулевое решение, удовлетворяющее условию (18.27). Следовательно, для таких конфигураций поля $A^{cj}(x)$ кулоновская калибровка не фиксирует однозначно вектор-потенциал неабелева калибровочного поля. Роль этой неоднозначности в динамике полей Янга – Миллса полностью не выяснена. При квантовании эта проблема обычно игнорируется на том основании, что в рамках теории возмущений оператор $M^{ab}_c(x,y)$ обратим.

В теории электромагнитного поля такая трудность вообще не возникает. Уравнение (18.31) в этом случае сводится к уравнению Лапласа, которое при условии (18.27) имеет только нулевое решение (см. формулу (17.26)).

Перейдем непосредственно к построению S – матрицы в теории Янга – Миллса в виде функционального интеграла с помощью формулы

$$I = N^{-1}\int \exp\left\{-i\int d^4x\left[\pi^{a\mu}\dot{A}^a_\mu + \tfrac{1}{4}F^a_{ij}F^{aij} - \tfrac{1}{2}\pi^{ai}\pi^a_i + \nabla^j\pi^a_j A^{a0}\right]\right\} \times$$
$$\prod_{a,x}\det M_c(A)\,\delta(A^a_0)\,\delta(\pi^a_0)\,\delta(\partial^i A^a_i)\,\delta(\nabla^j\pi^a_j)\,dA^{a\mu}(x)\,d\pi^{a\mu}(x). \quad (18.32)$$

Здесь N – нормировочный множитель. Интегрирование по π^{a0} снимается за счет $\delta(\pi^{a0})$. С интегрированием по A^{a0} можно поступить так: опустить в подинтегральном выражении $\delta(A^{a0})\,\delta(\nabla^j\pi^a_j)$, не менять показатель экспоненты и оставить функциональное интегрирование по $A^{a0}(x)$. Далее можно выполнить интегрирование по $\pi^{aj}(x)$. Зависимость от $\pi^{aj}(x)$ в показателе экспоненты в (18.32) определяется следующим выражением:

$$-\frac{i}{2}\left(\pi^{aj}\pi^a_j - 2\pi^{ai}\dot{A}^a_i - 2\partial_i\pi^{ai}A^{a0} + 2gf^{abc}\pi^{ai}A^c_i A^{b0}\right). \quad (18.33)$$

После интегрирования по частям в (18.33) и сдвига функциональной переменной

$$\pi^{aj}(x) \to \pi^{aj} - \dot{A}^{aj} + \partial^j A^{a0} + gf^{abc}A^{cj}A^{b0} \quad (18.34)$$

функциональный интеграл по $\pi^{aj}(x)$ принимает гауссовский вид, а в показателе экспоненты появляется дополнительное слагаемое $-\frac{i}{2}F^a_{i0}F^{ai0}$. Окончательно S -матрица представляется в виде функционального интеграла в конфигурационном пространстве $A^{a\mu}(x)$

$$S = \bar{N}^{-1}\int \exp\left\{-\frac{i}{4}\int d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\right\} \times \quad (18.35)$$
$$\prod_{a,x}\det M_c(A)\,\delta(\partial^i A^a_i)\,dA^{a\mu}(x).$$

Формула (18.35) порождает диаграммную технику для поля Янга – Миллса в кулоновской калибровке.

<u>Переход к калибровке Лоренца</u>. Недостатком квантования с использованием кулоновской калибровки является отсутствие явной релятивистской инвариантности теории из-за множителей $\det M_c(A) \times \delta(\partial^i A^a_i)$ в (18.35). Эта трудность устраняется переходом в (18.35) к релятивистски- инвариантной калибровке, например, калибровке Лоренца

$$\partial^\mu A^a_\mu(x) = 0. \quad (18.36)$$

Общепринятым здесь является использование следующего несколько формального приема /30,31/. Введем функционал $\Delta_L(A)$ с помощью условия

$$\Delta_L(A)\int\prod_x \delta(\partial^\mu \overset{\omega}{A}{}^a_\mu(x))\,d\omega(x) = 1, \quad (18.37)$$

где

$$\overset{\omega}{A}{}^a_\mu T^a = \omega A^a_\mu T^a \omega^{-1} + ig^{-1}(\partial_\mu\omega)\omega^{-1} \quad (18.38)$$

и функциональное интегрирование ведется по инвариантной мере на группе G

$$d(\omega\omega^0) = d(\omega^0\omega) = d\omega. \quad (18.39)$$

Явное выражение для меры $d\omega(x)$ зависит от конкретной параметризации, введенной в групповом пространстве /51/. Но это выражение в дальнейшем не потребуется, а будет использоваться только тот факт, что для бесконечно малых калибровочных преобразований (18.7) мера $d\omega(x)$ определяется формулой

$$\prod_x d\omega(x) = \prod_{a,x}' d\varepsilon^a(x). \quad (18.39)$$

Функционал $\Delta_L(A)$ по своему построению калибровочно-инвариантен

$$\Delta_L(\overset{\omega}{A}) = \Delta_L(A). \quad (18.40)$$

Покажем, что на поверхность в конфигурационном пространстве, определяемой условием кулоновской калибровки $\partial^i A^a_i = 0$, функциональный определитель $\prod_x \det M_c(A)$ совпадает с $\Delta_c(A)$, где функционал $\Delta_c(A)$ вводится аналогично $\Delta_L(A)$

$$\Delta_c(A)\int\prod_x \delta(\partial^i \overset{\omega}{A}_i(x))\,d\omega(x) = 1. \quad (18.41)$$

Здесь калибровочные преобразования $\omega(x)$ удовлетворяют условию (18.30). Если выполнено условие (18.24), то $\omega(x) = 1$ является корнем аргумента δ – функции в (18.41), причем единственным в рамках теории возмущений. Следовательно, интегрировать в (18.41) в этом случае надо вблизи единицы в групповом пространстве. С помощью (18.39) получаем

$$\Delta_c(A)\int\prod_x \delta(M^{ab}\varepsilon^b(x))\,d\varepsilon^a(x)\Big|_{\partial^i A_i^a=0} = \Delta_c(A)\Big(\prod_x \det M^{ab}\Big)^{-1}\Big|_{\partial^i \bar A_i^a=0} = 1. \qquad (18.42)$$

Следовательно,

$$\Delta_c(A)\Big|_{\partial^i \bar A_i^a=0} = \prod_x \det M^{ab}. \qquad (18.43)$$

Вернемся к интегралу (18.35). Введем в подынтегральное выражение единицу, определяемую формулой (18.37), и воспользуемся соотношением (18.43)

$$S = \bar N^{-1}\int \exp\Big\{-\frac{i}{4}\int d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\Big\}\times$$
$$\prod_{a,x}\Delta_c(A)\,\delta(\partial^i A_i^a(x))\,\Delta_L(A)\int\prod_y \delta(\partial^\mu A^{\omega a}_\mu(y))\,d\omega(y)\,dA^{a\mu}(x). \qquad (18.44)$$

Теперь выполним замену функциональной переменной интегрирования $A^a_\mu \to A^{\omega^{-1} a}_\mu$. Якобиан такого преобразования, очевидно, равен I. В результате получаем

$$S = \bar N^{-1}\int \exp\Big\{-\frac{i}{4}\int d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\Big\}\times \qquad (18.45)$$
$$\prod_{a,x}\delta(\partial^\mu A_\mu(x))\,\Delta_L(A)\,\Delta_c(A)\int d\omega(x)\,\delta(\partial^i A_i^{\omega^{-1} a}(x))\,dA^{a\mu}(x).$$

Воспользовавшись определением (18.41), можно опустить в (18.45) функциональный интеграл по групповой мере $d\omega(x)$ и функционал $\Delta_c(A)$. Окончательно S -матрица в лоренцевской калибровке записывается так:

$$S = N^{-1}\int \exp\Big\{-\frac{i}{4}\int d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\Big\}\times$$
$$\prod_{a,x}\delta(\partial^\mu A^a_\mu(x))\,\Delta_L(A)\,dA^{a\mu}(x). \qquad (18.46)$$

Повторяя для функционала $\Delta_L(A)$ рассуждения, которые привели к формуле (18.43), убеждаемся, что

$$\Delta_L(A)\Big|_{\partial^\mu A^a_\mu=0} = \det M_L, \qquad (18.47)$$

где

$$M_L^{ab}(A) = \Box\,\delta^{ab} + gf^{abc}A^{c\mu}\partial_\mu, \quad \Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu. \qquad (18.48)$$

Для $\det M_L$ удобно использовать интегральное представление

$$\det M_L = \int \exp\Big\{i\int \bar c^a(x)\,M_L^{ab}\,c^b(x)\,d^4x\Big\}\prod_x d\bar c(x)\,dc(x), \qquad (18.49)$$

где $\bar c^a(x)$ и $c^a(x)$, $a=1,2,\dots,n$ – два набора антикоммутирующих скалярных функций – образующих алгебры Грассмана. Интегрирование по таким переменным подробно рассматривается в /30, 47,49/. Для вычисления (18.46) по теории возмущений удобно воспользоваться следующим представлением:

$$\prod_x \delta(\partial^\mu A^a_\mu(x)) = \lim_{\alpha\to 0}\exp\Big\{-\frac{i}{2\alpha}\int d^4x\,(\partial^\mu A^a_\mu)^2\Big\}. \qquad (18.50)$$

Здесь бесконечная константа

$$\prod_{a,x}\frac{n(1+i)}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}$$

опущена.

После подстановки (18.49) и (18.50) в (18.46) получаем

$$S = N^{-1}\int \exp\Big\{-\frac{i}{4}\int d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \frac{i}{2\alpha}\int d^4x\,\partial^\mu A^a_\mu\,\partial^\nu A^a_\nu \;+ \qquad (18.51)$$
$$i\int d^4x\,\bar c^a M_L^{ab} c^b\Big\}\prod_{a,x} dA^{a\mu}(x)\,d\bar c^a(x)\,dc^a(x).$$

Правила Фейнмана. В показателе экспоненты в (18.51) стоит эффективное действие поля Янга – Миллса, которое следует рассматривать при квантовании в калибровке Лоренца. Это действие порождает соответствующие правила Фейнмана.

С помощью интегрирования по частям выражение, квадратичное по $A^{a\mu}(x)$, в показателе экспоненты в (18.51) записывается так:

$$\frac{i}{2}\int d^4x\, A^{a\nu}(x)\,\delta^{ab}\Big[g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu\Big(1-\frac{1}{\alpha}\Big)\Big]A^{b\mu}(x). \qquad (18.52)$$

Если бы не было члена с α^{-1}, фиксирующего калибровку, то здесь возник бы проекционный оператор $g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu$, не имеющий обратного. Как известно, чтобы найти пропагатор поля Янга – Миллса, необходимо обратить оператор в (18.52). Проще всего это сделать в импульсном представлении. Записывая

$$D^{c\,ab}_{\mu\nu}(k)=\delta^{ab}\left[X(k^2)g_{\mu\nu}+Y(k^2)k_\mu k_\nu\right]$$

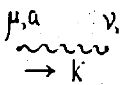
и требуя, чтобы

$$-\left[k^2 g_{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right]D^{c\,\nu\rho}(k)=\delta^{\rho}_{\nu},$$

получаем

$$X(k^2)=-\frac{1}{k^2},\quad Y(k^2)=\frac{1-\alpha}{k^4}.$$

Таким образом, пропагатор поля A^a_μ равен x)



$$D^{c\,ab}_{\mu\nu}(k)=-\frac{\delta^{ab}}{k^2+i0}\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i0}(1-\alpha)\right). \qquad (18.53)$$

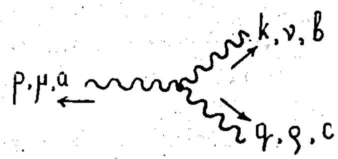
За самодействие поля Янга – Миллса в эффективном действии в (18.51) ответственны слагаемое 3- й степени по потенциалу A^a_μ

$$gf^{abc}\int d^4x\, A^b_\mu A^c_\nu \partial^\mu A^{a\nu}$$

и 4- й степени по A^a_μ

$$-\frac{1}{4}g^2 f^{abc} f^{ade}\int d^4x\, A^b_\mu A^c_\nu A^{d\mu} A^{e\nu}.$$

Правила Фейнмана для них таковы. Вклад тройной вершины

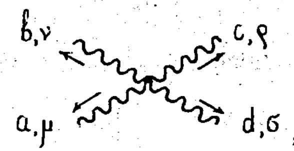


равен

$$-igf^{abc}\left[(p-k)_\rho g_{\mu\nu}+(k-q)_\mu g_{\nu\rho}+(q-p)_\nu g_{\mu\rho}\right]\delta(k+q+p) \qquad (18.54)$$

четверной вершине

x) Легко показать /30,31/, что пропагатор (18.53) можно использовать для расчета диаграмм Фейнмана не только при $\alpha=0$, но и при конечных значениях α.



сопоставляется следующее выражение:

$$g^2\{f^{abc}f^{cde}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})+f_{ace}f_{bde}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu})+$$
$$f_{ade}f_{cbe}(g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu}-g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho})\}\,\delta\left(\sum_{i=1}^{4}k_i\right). \qquad (18.55)$$

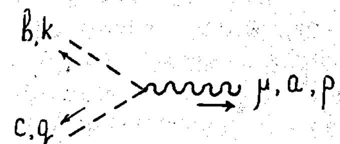
Выпишем вклад вспомогательных полей $\bar{C}^a(x)$ и $C^a(x)$ (полей духов) в эффективное действие:

$$\int d^4x\,\bar{C}^a(x)M_L^{ab}C^b(x)=\int d^4x\,\bar{C}^a(x)\left[\Box\delta^{ab}+gf^{abc}A^{c\mu}\partial_\mu\right]C^b(x).$$

Следовательно, пропагатор поля духов равен

$$D^{ab}=-\frac{\delta^{ab}}{p^2+i0}, \qquad (18.56)$$

а вершина взаимодействия C – частиц с полем Янга – Миллса



дает множитель

$$-i\frac{g}{2}f^{abc}(k-q)_\mu\,\delta(k+q+p). \qquad (18.57)$$

Если диаграмма содержит S замкнутых петель вспомогательного поля C, то вклад такой диаграммы следует помножить на $(-1)^S$.

<u>Взаимодействие с полями материи</u>. Введение взаимодействия поля Янга – Миллса с материальными полями практически не меняет изложенную выше схему квантования. Для определенности рассмотрим в качестве поля материи дираковское поле $\psi(x)$, преобразующееся по неприводимому унитарному представлению калибровочной группы G. Пусть T^a_ψ -генераторы группы G в этом представлении. Удлинняя производные по правилу (18.5) в свободном лагранжиане для поля $\psi(x)$

$$\mathcal{L}^0_\psi = i\bar\psi\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar\psi\psi \tag{18.58}$$

и учитывая (18.13), получаем полный лагранжиан для взаимодействующих полей $A^{a\mu}(x)$ и $\psi(x)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + i\bar\psi\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar\psi\psi - g\bar\psi\gamma_\mu T^a_\psi\psi A^{a\mu}. \tag{18.59}$$

Действие с $\mathcal{L}$ инвариантно относительно локальных калибровочных преобразований (18.4) и (18.6). В уравнениях (18.14) для $A^a_\mu(x)$ появляется правая часть

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} - gf^{abc}A^{b\mu}F^c_{\mu\nu} = j^a_\nu , \tag{18.60}$$

где $$j^a_\mu(x) = g\bar\psi\gamma_\mu T^a_\psi\psi.$$

Первичные связи в теории остаются теми же (см. (18.20)), для вторичных связей вместо (18.21) получаем из (18.60) при $\nu = 0$ следующее выражение:

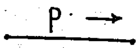
$$\varphi^a_2 = \partial^j\pi^a_j - gf^{abc}A^{bj}\pi^c_j + j^{0a} = 0. \tag{18.61}$$

Связи (18.20) и (18.61) по-прежнему являются связями первого рода.

Все рассуждения, которые привели к формуле (18.51), сохраняют силу и при замене (18.21) на (18.61), и при соответствующей модификации канонического гамильтониана (18.22). В результате в эффективном действии, стоящем в показателе экспоненты в (18.51), появляются дополнительные слагаемые

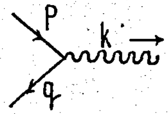
$$\int d^4x\left\{i\bar\psi\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar\psi\psi - g\bar\psi\gamma_\mu T^a_\psi\psi A^{a\mu}\right\}. \tag{18.62}$$

Они генерируют следующие правила Фейнмана. Пропагатор фермионного поля равен



$$S(p) = \frac{m + p_\mu\gamma^\mu}{m^2 - p^2 - i0}. \tag{18.63}$$

Вершина взаимодействия поля Янга – Миллса с полем ψ дает вклад



$$g\gamma^\mu T^a_\psi\,\delta(p+q+k). \tag{18.64}$$

Как обычно, замкнутые фермионные циклы приводят к множителю $(-1)^f$, где f – число таких циклов в данной диаграмме.

По квантовой теории полей Янга – Миллса существует обширная литература /30,31,33,35,47/.

Приложение А.

Инвариантные соотношения в теории дифференциальных уравнений

Понятие инвариантного соотношения (или инвариантного подмногообразия) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений /26/ тесно связано с понятием первых интегралов /46/.

Пусть мы имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,t), \quad i = 1,\dots,n. \tag{A.1}$$

Для простоты рассматриваем пока систему уравнений первого порядка. Подмногообразие V в $(n+1)$-мерном пространстве с координатами (x,t) называется инваринтным подмногообразием системы (A.1), если все решения этой системы $x_i(t)$, $i = 1,\dots,n$, имеющие хотя бы одну общую точку с V, целиком лежат в V. Уравнения

$$v_\mu(x,t) = 0, \quad \mu = 1,\dots,k < n+1, \tag{A.2}$$

которые задают инвариантное подмногообразие, называются инвариантными соотношениями.

Получим уравнение, которому удовлетворяют инвариантные соотношения (A.2). Пусть $x_i(t)$, $i=1,\dots,n$ –решение системы уравнений (A.1), удовлетворяющее (A.2). Подставляя это решение в (A.2), мы получаем тождество по отношению к переменной t. Дифференцирование этого тождества по t дает

$$\frac{dv_\mu(x,t)}{dt} = \frac{\partial v_\mu}{\partial t} + \frac{\partial v_\mu}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = 0. \tag{A.3}$$

Заменим dx_i/dt в (A.3) с помощью уравнений (A.1)

$$\frac{\partial v_\mu}{\partial t} + \frac{\partial v_\mu}{\partial x_i} f_i(x,t)\Big|_{v_\mu=0} = 0 \,. \qquad (А.4)$$

Очевидно, что условия (А.4) выполняются не для всех решений уравнений (А.I), а только для таких, которые удовлетворяют (А.2). Можно сказать, что уравнения (А.4) верны в слабом смысле только на подмногообразии (А.2) ·

$$\frac{d v_\mu}{dt} = \frac{\partial v_\mu}{\partial t} + \frac{\partial v_\mu}{\partial x_i} f_i(x,t) \approx 0 \,. \qquad (А.5)$$

Таким образом, инвариантные соотношения $v_\mu(x,t)$ характеризуются тем свойством, что их полная производная по времени обращается в ноль в силу исходных уравнений (А.I) и уравнений (А.2), задающих инвариантное подмногообразие. В случае уравнений второго порядка инвариантные соотношения зависят также и от первых производных функций $x_i(t)$.

Таким образом, инвариантные соотношения можно рассматривать как условия на данные Коши для соответствующей системы уравнений. Если начальные данные удовлетворяют инвариантным соотношениям, то решение исходных уравнений, отвечающее этим начальным данным, будет принадлежать инвариантному подмногообразию и во все последующие моменты времени.

Напомним определение первых интегралов для системы обыкновенных уравнений (А.I) (см., например, /46/). Первым интегралом системы обыкновенных уравнений первого порядка называется выражение, содержащее $x_i(t)$ и t и не равное тождественно константе, но принимающее постоянное значение, если вместо искомых функций подставить какое-либо решение исходной системы (А.I)

$$i_\nu(x(t),t) = C_\nu \,, \quad \nu = 1,\dots,m \,. \qquad (А.6)$$

Существенно, что все решения исходной системы обращают первые интегралы в константы, которые, конечно, разные для разных решений. Инвариантным же соотношениям удовлетворяют не все решения исходной системы, а только те, которые лежат на инвариантном подмногообразии. Если в уравнениях первых интегралов (А.6) мы зафиксируем каким-либо образом константы C_ν, то, очевидно, получим m инвариантных соотношений. Отсюда происходит другое название инвариантных соотношений как частных интегралов исходной системы уравнений.

Отметим, что инвариантные соотношения не обязательно получаются из первых интегралов. Они могут возникать при исследовании систем дифференциальных уравнений совершенно самостоятельно.

Аналогично тому, как были получены уравнения (А.5) или (А.6), мы можем вывести уравнение в частных производных первого порядка, которому удовлетворяют первые интегралы для системы (А.I)

$$\frac{\partial i_\nu}{\partial t} + \frac{\partial i_\nu}{\partial x_j} f_j(x,t) = 0 \,, \; j = 1,\dots,n \,. \qquad (А.7)$$

Это уравнение верно для всех x в отличие от уравнения (А.6), которое справедливо только на инвариантном подмногообразии (А.2).

Приложение Б.

Элемент объема фазового пространства в неканонических координатах

Получим формулу для элемента объема фазового пространства в произвольных неканонических координатах. Пусть Γ — $2n$ -мерное фазовое пространство с каноническими координатами $q_1, \dots, q_n$, $p_1, \dots, p_n$, а $2n$ функций $\xi_\mu = \xi_\mu(q,p)$, $\mu = 1,\dots,2n$ задают переход к новым в общем случае неканоническим координатам в Γ. Предполагается, что якобиан этого преобразования отличен от нуля

$$\det D \neq 0 \,, \qquad (Б.1)$$

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial q_i}{\partial \xi_k} & \dfrac{\partial q_i}{\partial \xi_s} \\[2mm] \dfrac{\partial p_i}{\partial \xi_k} & \dfrac{\partial p_i}{\partial \xi_s} \end{vmatrix} , \quad \begin{matrix} i,k = 1,\dots,n, \\ s = n+1,\dots,2n \,. \end{matrix} \qquad (Б.2)$$

Элемент объема $d\Gamma$ определяется формулой

$$d\Gamma = \prod_{i=1}^{n} dq_i\, dp_i = \det D \prod_{\mu=1}^{2n} d\xi_\mu \,. \qquad (Б.3)$$

Покажем, что $\det D$ можно представить в следующем виде:

$$\det D = (\det \| [\xi_\mu, \xi_\nu] \|)^{1/2}, \qquad (Б.4)$$

где $[\xi_\mu, \xi_\nu]$ - скобки Лагранжа

$$[\xi_\mu, \xi_\nu] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial p_i}{\partial \xi_\nu} - \frac{\partial p_i}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\nu} \right) . \qquad (Б.5)$$

Для этого рассмотрим произведение матриц $D^T J D$, где D^T – транспонированная матрица D, J – симплектическая единица

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad (Б.6)$$

I_n – единичная матрица $(n \times n)$, $\det J = 1$. Прямое вычисление дает

$$D^T J D = \| [\xi_\mu, \xi_\nu] \|, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, 2n. \qquad (Б.7)$$

Вычисляя определители от левой и правой частей этого равенства, получаем (Б.4). Скобки Лагранжа (Б.5) и скобки Пуассона (5.I4) связаны известным соотношением

$$\sum_{\mu=1}^{2n} [\xi_\mu, \xi_\nu] (\xi_\mu, \xi_\rho) = \delta_{\nu\rho}. \qquad (Б.8)$$

Поэтому формулу (Б.4) можно переписать так:

$$\det D = (\det \| [\xi_\mu, \xi_\nu] \|)^{-1/2}. \qquad (Б.9)$$

Вывод формулы (Б.4) для элемента объема симплектического многообразия в неканонических координатах во многом аналогичен получению выражения для элемента объема риманова многообразия. Пусть V_n –риманово многообразие с координатами η^μ, $\mu = 1, \ldots, n$ и римановой структурой (метрикой) $g_{\mu\nu}(\eta)$, $\det \| g_{\mu\nu} \| > 0$. Будем рассматривать V_n как подмногообразие плоского пространства достаточно большой размерности R^{n+k}. Пусть $x_1^a(\eta), \ldots, x_n^a(\eta)$, $a = 1, \ldots, n+k$ – координатные касательные векторы к V_n в точке η и $N_1^a(\eta), \ldots, N_k^a(\eta)$, $a = 1, \ldots, n+k$ – единичные нормали к V_n в этой точке. Тогда элемент объема V_n можно определить как объем параллелепипеда в R^{n+k}, построенного на векторах $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{N}_1, \ldots, \vec{N}_k$

$$dV_n = \det \mathcal{D} \, d\eta_1 \ldots d\eta_n, \qquad (Б.10)$$

где матрица $\mathcal{D}$ размером $(n+k) \times (n+k)$ имеет вид

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n+k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^{n+k} \\ N_1^1 & N_1^2 & \ldots & N_1^{n+k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_k^1 & N_k^2 & \ldots & N_k^{n+k} \end{vmatrix} \qquad (Б.11)$$

С помощью простых преобразований получаем известную формулу

$$\det \mathcal{D} = (\det \mathcal{D}^T \cdot \det \mathcal{D})^{1/2} = (\det(\mathcal{D}^T \cdot \mathcal{D}))^{1/2} = (\det \| (\vec{x}_\mu \cdot \vec{x}_\nu) \|)^{1/2} = (\det \| g_{\mu\nu} \|)^{1/2} \qquad (Б.12)$$

Литература

I. Дирак П. Лекции по квантовой механике. В кн.: "Принципы квантовой механики". М.: "Наука", 1979.
2. Фаддеев Л.Д. Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов. ТМФ, 1969, т. I, № I, 3-I8.
3. Hanson A.J., Regge T., Teitelboim C. Constrained hamiltonian systems. Preprint Princeton University, 1974. Contrib. centro Linceo interdisc. di scienze mat No 22, 1976.
4. Sudarshan E.C.G., Mukunda N. Classical dynamics – a modern perspective. New York: Wiley, 1974, p. 78-107.
5. Sundermeyer K. Constrained Dynamics. Lecture Notes in Physics, v. 169. Berlin: Springer – Verlag, 1982.
6. Гитман Д.М., Тютин Н.В. Каноническое квантование особенных теорий. Известия высших учебных заведений. Физика, 1983, т. 26, № 5, 3-22.
7. Гуревич А.С. Вестник Ленинградского университета, серия математика, механика и астрономия, 1959, № 19, в. 4, 64-77.
8. Barbashov B.M., Nesterenko V.V. Fortschr. Phys., 1983, v. 31, No 10, 535-567.
9. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М. ТМФ, 1985, т. 63, № I, 88-96.
I0. Нестеренко В.В., Червяков А.М. ТМФ, 1985, т. 64, № I, 82-91.
II. Nesterenko V.V. On the derivation of the formula for the Hamiltonian functional integral in theories with the first- and second – class constraints. Preprint E2-85-597, Dubna: JINR, 1985; ТМФ, 1986.
I2. Нестеренко В.В. Об интерпретации нётерских тождеств. Препринт ОИЯИ, Дубна: ОИЯИ, 1986, Р2-86-284.

13. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Непрерывные симметрии в теории поля. Лекции для молодых ученых. Вып. 18, Р2-12029. Дубна: ОИЯИ, 1978.
14. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления, стр. 45, М.: Наука, 1984.
15. Noether E. Göttinger Nachrichten. Math. Phys. Kl, 1918, H.2, S. 235.
Имеется перевод в сб. Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959.
16. Траутман А. Законы сохранения в общей теории относительности. Эйнштейновский сборник, 1967, стр. 308-344. М.:"Наука"- 1967.
17. Trautman A. Foundations and Current Problems of General Relativity. In Lectures on General Relativity, v.I,p.I; Brandies Summer Institute in Theoretical Physics. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1964.
18. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Динамика релятивистской струны. ЭЧАЯ, 1978, т. 9, в. 5, 709-758.
19. Гурса Э. Курс математического анализа,т.I,ч.I,М.-Л.:ГТТИ,1933.
20. Anderson L.J. and Bergmann P.G. Phys. Rev., 1951, v. 83, No 5, 1018-1025.
21. Shanmugadhasan S.J. Math. Phys., 1973, v. 14, No 6, 677-687.
22. R. Haag. Zeitschr. Angewandte Mathem. Mech., 1952, B. 32, H.7, 197-202.
23. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. I, М.:"Наука", 1965.
24. Goddard P., Hanson A.J., Ponzano G. Nucl. Phys., 1975, v.B89, No I, 76-92.
25. Dirac P.A.M. Phys. Rev., 1959, v. 114, No 3, 924-930.
26. Леви-Чивита Т., Амальди У. . Курс теоретической механики, т. 2, ч. 2, М.: ИЛ, 1951.
27. Hagihara Y. Celestial mechanics, vol I, Dynamical principles and transformation theory. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1970.
28. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947.
29. Дирак П.А.М. Лекции по квантовой теории поля. М.: Мир, 1971.
30. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.:"Наука", 1978.
31. Квантовая теория калибровочных полей. Сб. статей. М.:"Мир", 1977.
32. Фаддеев Л.Д., Попов В.Н. УФН, 1973, т. 111, № 3, 427.
33. Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
34. Künzle H.P. Ann. Inst. Henri Poincare, 1969, section A, v. 11, No 4, 393-414.
35. Коноплёва Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля.М.:Атомиздат,1972.

36. Прохоров Л.В. ЭЧАЯ, 1982, т. 13, в. 5, 1094-1156.
37. Gervais J., Jevicki A. Nucl. Phys., 1976, v. B 110, No 1, 93-112.
38. Schulman L.S. Techniques and applications of path integration. New York: John Wiley and Sons, 1981.
39. Физиев П.П. ТМФ, 1985, т. 62, № 2, 186-195.
40. Senjanovic P. Ann. Phys., 1976, v. 100, No 1/2, 227-261.
41. Schouten J.A., v.d. Kulk W. Pfaff's problem and its generalizations Oxford: Clarendon Press, 1949.
42. Maskawa T., Nakajima H. Progr. Theor. Phys., 1976, v. 56, No 4, 1295-1309.
43. Ditsas P. Canonical path integral quantization of gauge systems. Preprint TH-4042/84. Geneva: CERN, 1984.
44. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
45. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.:"Наука", 1984.
46. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз,1958.
47. Рамон П. Теория поля. Современный вводный курс. М.:"Мир", 1984.
48. Cornwell J.F. Group theory in physics, v. II, ch. 19. London, New York: Academic Press, 1984.
49. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования М.:"Наука", 1965; УФН, 1980, т. 132. в. 3, 497-548.
50. Gribov V.N. Nucl.Phys., 1978, v. B139, No 1, p.1.
51. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. Ш,ч I. М.: Физматгиз, 1957.
52. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. IУ, часть П. М.:"Наука", 1981.
53. Голдстейн Г. Классическая механика. М.:"Наука", 1975.
54. Татаринов Я.В. Лекции по классической динамике, стр. 253, М.: Издательство МГУ, 1984.
55. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т. I.М.:"Наука", 1970.
56. Dominici D., Gomis J.-J. Math. Phys., 1980, v. 21, No 8, 2124-2130; 1982, v. 23, No 2, 256-257.

СОДЕРЖАНИЕ

Рукопись поступила в издательский отдел
2I мая I986 года.