

C 324

K-14



ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

Д.И.КАЗАКОВ, Д.В.ШИРКОВ

**Суммирование асимптотических рядов
в квантовой теории поля**

ДУБНА

341
К-102

ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

С 324	
К-14	II5828 82
Казаков, Д.И. и	
Ширков, Д.В.	
Суммирование асимптотических рядов в	
P2-80-462. 1980. 2р. 50к	
4/1/81-3/1/82	28
20/3-06	324



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

P2-80-462

Д.И.Казаков, Д.В.Ширков

С 324
К-14

СУММИРОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ
В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

115828

Казаков Д.И., Ширков Д.В.

P2-80-462

Суммирование асимптотических рядов в квантовой теории поля

Проблема исследования ультрафиолетовых асимптотик в квантовой теории поля в последние годы натолкнулась на специфические трудности, связанные с асимптотическим характером степенных разложений квантовой теории возмущений. В работе содержится обзор современного состояния этого вопроса. В начале излагается метод перевала в континуальном интеграле, с помощью которого в последние годы получено много важных результатов. Далее приведена сводка результатов по асимптотическим рядам в задачах квантовой теории поля и квантовой механики. Затем рассматривается проблема "суммирования" подобных рядов, возникающая при попытках выхода в область немалых значений константы связи g .

Kazakov D.I., Shirkov D.V.

P2-80-462

Summation of the Asymptotic Series in Quantum Field Theory

The problem of investigation of ultraviolet asymptotics in quantum field theory has met recently with specific difficulties related to the asymptotic character of power expansions of quantum perturbation theory. This article is a review on the present status of this problem. First, we discuss the saddle-point method for the path integral, by which many important results have been obtained in the last years. Then a sketch of results is given concerning the asymptotic series in problems of quantum field theory and quantum mechanics. Next we consider the problem of "summation" of such series, which arises in attempting to reach the region of not small values of the coupling constant g .

I. Введение

Теория возмущений (ТВ) является основным инструментом расчетов и исследований в широком круге задач квантовой физики. Популярность теории возмущений основана на наличии большого количества физически содержательных задач, в которых имеется малый численный параметр (константа связи) $g \ll 1$. В этих условиях для практических целей оказывается достаточным вычисление нескольких первых членов ряда теории возмущений. Необходимость изучения структуры степенных разложений в целом (их сходимости, аналитические свойства и т.д.), как правило, оказывается актуальной лишь при весьма специфических обстоятельствах. Подобная ситуация возникает, как известно, в задаче исследования импульсных асимптотик (ультрафиолетовых и иногда инфракрасных) квантовой теории поля, когда фактическим параметром разложения оказывается произведение малой константы связи g на большой логарифм $L = \ln k^2$. Суммирование логарифмических вкладов привело около четверти века назад к известному полюсному выражению для эффективного электромагнитного взаимодействия $\alpha(k)$, пропорционального фотонному пропагатору ^{/1/}:

$$\alpha \rightarrow \alpha(k) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln k^2} \quad (I.I)$$

Этот внешне парадоксальный результат сразу привлек внимание и послужил стимулом для создания регулярного метода исследования асимптотик, известного как метод ренормализационной группы ^{/2/}.

В аппарате ренормгруппы центральное место занимает так называемая β -функция, определяющая поведение эффективно (или инвариантного) заряда взаимодействия $\bar{g}(k^2)$ и входящая в уравнение Ли для \bar{g} :

$$\frac{d\bar{g}(k^2)}{d \ln k^2} = \beta[\bar{g}(k^2)]. \quad (1.2)$$

Оказалось, что вычисления $\beta(g)$ по обычной теории возмущений позволяют получить несколько первых членов ее степенного разложения:

$$\beta_{т.в.}(g) = \beta_2 g^2 + \beta_3 g^3 + \beta_4 g^4 + \dots$$

однако из-за роста коэффициентов β_k область, в которой это разложение может служить средством количественной информации, очень мала.

Существенный прогресс был достигнут 3-4 года назад^{/3/} в результате эффективного использования так наз. метода функционального перевала. С его помощью для ряда моделей удалось определить асимптотику коэффициентов степенного разложения:

$$\beta(g) \sim \sum_k \beta_k g^k \quad (1.3)$$

при больших k . Оказалось, что в этой области коэффициенты β_k растут, вообще говоря, факториально ($\beta_k \sim k!$).

Таким образом, использование метода функционального перевала привело к ясному осознанию того факта, что степенные разложения (т.е. разложения обычной теории возмущений) в квантовой теории поля имеют характер асимптотических рядов. Это свойство ранее было установлено для широкого круга задач квантовой механики и квантовой статистики и, таким образом, оказалось типичным для всей квантовой физики. В квантовой теории поля оно подозревалось^{/4/} еще в начале 50-х годов.

На повестку дня встала "задача восстановления" функции $\beta(g)$ исходя из нескольких первых членов ее разложения по

степеням g , а также из асимптотического вида коэффициентов степенного разложения f_k при больших k .

В такой постановке задача не определена. Поэтому необходимо найти и сформулировать недостающие условия. Принципиальное отличие асимптотических разложений от обычных степенных рядов состоит в том, что они не полностью определяют функцию. Требуется постулировать еще и процедуру суммирования, для чего оказывается необходимым знать аналитические свойства искомой функции. Один и тот же асимптотический ряд может служить разложением различных функций с отличающимися аналитическими свойствами.

Рассмотрим асимптотический ряд

$$F(z) \sim \sum (-z)^k \frac{\Gamma(2k+1/2)}{\Gamma(k+1)}. \quad (1.4)$$

Согласно формулам (2.3) (см. ниже) при действительных положительных значениях $z=g$ этот ряд совпадает с разложением функции $I(g)$, определенной интегралом (2.2):

$$I(g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2 - gx^4}$$

Поэтому можно считать, что при комплексных значениях z сумма $F(z)$ равна аналитическому продолжению $I(z)$, определенному, например, через цилиндрические функции формулами (2.4). Это продолжение является аналитической функцией в комплексной плоскости z , разрезанной вдоль отрицательной действительной полуоси. На берегах этого разреза аналитическое продолжение принимает комплексное значение.

С другой стороны, при z действительном и отрицательном, $z = -\gamma$, ряд (1.4) согласно (3.2) совпадает с разложением интеграла (3.1):

$$\frac{1}{2} J(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2(1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}x)^2},$$

который определяет функцию $J(-z)$, аналитическую в комплексной плоскости переменной z с разрезом вдоль положительной действительной полуоси (3.4). Эта функция принимает комплексные значения на берегах разреза и действительна на отрицательной действительной полуоси. Таким образом, асимптотическое разложение (1.4) соответствует по крайней мере двум функциям с совершенно различными аналитическими свойствами. Полный произвол оказывается

гораздо шире и является функциональным. Это означает, что к $I(q)$ или $J(\gamma)$ может быть добавлена произвольная функция, коэффициенты разложения которой в ряд по Z в точке $Z=0$ равны нулю. Поэтому для однозначного решения задачи требуется дополнительная информация об аналитических свойствах функции $f(q)$ и ее поведении при $g \rightarrow \infty$. Ее не удастся получить без явного обращения к теории сильной связи, которую еще предстоит построить в квантовой теории поля.

Однако уже на данном этапе в ряде случаев могут быть достигнуты весьма интересные физические результаты. Методы их получения основываются на модификациях известных способов суммирования асимптотических рядов¹⁵⁾ и содержат некоторые гипотезы относительно аналитических свойств искомой функции.

§2. Метод функционального перевала

Представление функций Грина в квантовой теории поля через континуальные интегралы является известным приемом, восходящим к Фейнмановскому интегралу по путям. Хорошо известно, что такие представления оказываются весьма удобными для изучения общих свойств функций Грина, не связанных с теорией возмущений. Оказывается также, что представление континуального интеграла может быть использовано для конструктивного вычисления, отличного от вычисления по теории возмущений. Такая возможность дает метод перевала для континуального интеграла, сформулированный Лэнджером¹⁶⁾ и Лэмом¹⁷⁾. Мы будем называть его методом функционального перевала. Он является обобщением обычного метода перевала из теории функций комплексной переменной. Напомним кратко основные черты метода перевала.

2.1. Метод перевала

Рассмотрим интеграл по контуру в комплексной плоскости:

$$I_\nu = \int_\Gamma dz \exp(-\nu f(z)), \quad (2.1)$$

где ν — большой параметр. Интеграл вычисляется следующим приемом: находим стационарную точку Z_0 функции комплексной переменной $f(z)$ из уравнения $f'(z_0) = 0$ и разлагаем

$f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности этой точки:

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)^2 \frac{f''(z_0)}{2} + \dots$$

Если фазу второй производной в точке Z_0 обозначить через 2φ : $\frac{1}{2} f''(z_0) = e^{2i\varphi} f_2$, то линия наискорейшего спуска определяется условием $z = z_0 + x e^{-i\varphi}$, где x — действительный параметр. Далее трансформируем контур интегрирования $\Gamma \rightarrow \Gamma_0$ так, чтобы он проходил через точку перевала по линии наискорейшего спуска (см. рис.1), и приближаем его прямой $\Gamma_0 \sim \Gamma_\infty$ в окрестности

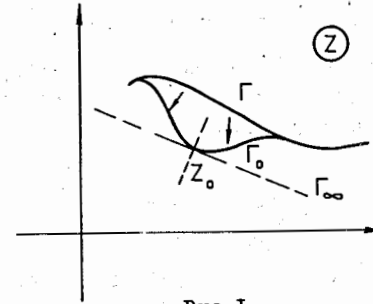


Рис.1

точки Z_0 , оставляя у функции $f(z)$ первые два члена разложения. Тогда получаем

$$\begin{aligned} I_\nu &= \int_{\Gamma_0} dz e^{-\nu f(z)} \approx \int_{\Gamma_0} dz e^{-\nu [f_0 + x^2 f_2]} = \\ &= e^{-\nu f_0} e^{-i\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\nu x^2 f_2} = \sqrt{\frac{\pi}{\nu f_2}} e^{-\nu f_0 - i\varphi} \end{aligned}$$

Погрешность полученной формулы определяется отбрасыванием члена с $f'''(z_0)$, а также аппроксимацией криволинейного контура прямой линией и имеет относительный порядок $O(1/\sqrt{\nu})$. Прежде чем перейти к вычислению функционального интеграла методом перевала, рассмотрим простой пример.

2.2. Простой пример

Обычный однократный интеграл

$$I(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\{-x^2 - qx^4\} \quad (2.2)$$

можно рассматривать в качестве 0-мерного аналога теории с потенциалом $V = g\varphi^4$. Он обладает рядом характерных свойств, присущих моделям квантовой теории поля. Так, степенное разложение подынтегрального выражения приводит к асимптотическому ряду, имеющему нулевой радиус сходимости, точно такой же структуры, что и ряд ТВ в квантовой теории поля. Именно:

$$I(q) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-g)^k I_k, \quad I_k = \frac{\Gamma(2k+1/2)}{\Gamma(k+1)} \quad (2.3)$$

В то же время интеграл (2.2) допускает точную квадратуру, выражаемую через модифицированную функцию Бесселя третьего рода или через функцию параболического цилиндра^{1/8/}:

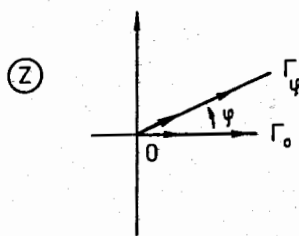
$$I(q) = e^{\frac{1}{8g}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{8g}\right) \frac{1}{\sqrt{4g}} = \frac{\pi}{(2g)^{1/4}} e^{\frac{1}{8g}} D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2g}}\right), \quad (2.4)$$

где $K_{\frac{1}{4}}$ — функция Макдональда, а $D_{-\frac{1}{2}}$ — функция параболического цилиндра. Функция $K_{\frac{1}{4}}(z)$ является четырех-, а $D_{-\frac{1}{2}}(z)$ — двухлистной функцией своего комплексного аргумента, аналитичной во всей комплексной плоскости с разрезом по лучу, выходящему из начала координат. Поэтому в данном примере мы имеем полную информацию о функции $I(q)$ и можем проверить, насколько наши методы исследования, которые мы в дальнейшем будем применять для изучения континуального интеграла, правильно воспроизводят ее особенности. Поскольку в реальном случае мы имеем дело с континуальным интегралом, то рассмотрим функцию $I(q)$, заданную интегралом (2.2).

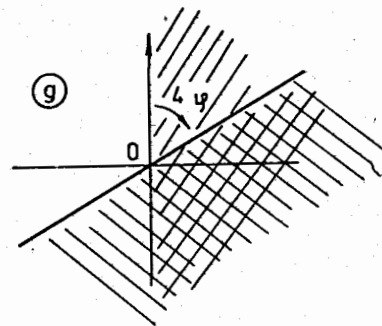
Аналитическое продолжение. Как функция комплексной переменной q интеграл (2.2) определен в полуплоскости $\text{Re} q \geq 0$. При $q \rightarrow \infty$ $I(q) \rightarrow \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{4}) q^{-1/4}$. Аналитическое продолжение в левую полуплоскость может быть получено поворотом контура интегрирования $x \rightarrow z = x e^{i\varphi}$ (см. рис.2а). Новый интеграл определяет функцию

$$I_{\varphi}(q) = 2 \int_{\Gamma_{\varphi}} dz e^{-z^2 - qz^4} = 2 e^{i\varphi} \int_0^{\infty} dx e^{-x^2 e^{2i\varphi} - qx^4 e^{4i\varphi}}$$

в полуплоскости, повернутой вокруг начала координат на угол (-4φ) (см. рис. 2б).



а



б

Рис.2

Для приведения правой части (2.2) к стандартному "перевальному" типу (2.1) произведем замену переменной $x = t/\sqrt{q}$, после чего интеграл примет вид

$$I(q) = \frac{1}{\sqrt{q}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2+t^4}{q}}$$

Здесь $1/q = \nu$ играет роль большого параметра, а $t^2+t^4 = \frac{1}{\nu}(t)$. Решая уравнение $f'(t) = 0$, получаем $t_0 = 0$, $t_{1,2} = \pm i/\sqrt{2}$ или $x_0 = 0$, $x_{1,2} = \pm i/\sqrt{2g}$. Линии наискорейшего спуска направлены вдоль действительной и мнимой осей соответственно (см. рис.3). Таким образом, единственной перевальной точкой, лежащей на пути интегрирования так, что контур интегрирования проходит по линии наискорейшего спуска, является точка $x_0 = 0$, разложение в окрестности которой приводит к обычному степенному разложению (2.3) интеграла $I(q)$. Вклады других перевальных точек взаимно сокращаются.

Для того чтобы использовать перевальные точки $x_{1,2}$, совершим аналитическое продолжение $I(q)$ на левую часть комплексной плоскости $q: q \rightarrow q e^{i\theta}$ путем поворота контура

интегрирования. Угол поворота при этом определяется условием сходимости интеграла. Его удобно фиксировать, потребовав, чтобы фактор, определяющий сходимость, $\exp(-qz^4)$, оставался действительным, что означает, что контур интегрирования нужно повернуть в обратном направлении на угол $\theta/4$: $x \rightarrow z = x e^{-i\theta/4}$. Точки перевала при этом поворачиваются на угол $(-\theta/2)$, а линии наискорейшего спуска не меняют своего направления (см. рис.3).

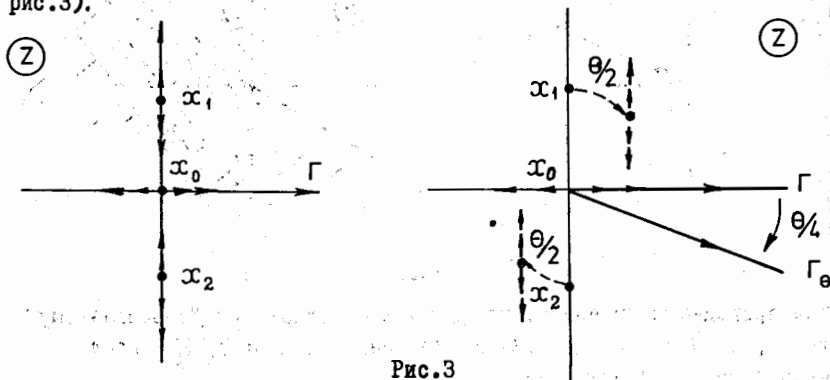


Рис.3

Расходимость интеграла (2.2) в области $\text{Re} q < 0$ говорит о существовании особенности функции $I(q)$, ограничивающей область аналитичности. Такая особенность находится в начале координат. Как следует из явного вида функции $I(q)$ (2.4), эта особенность является существенно особой точкой, а также точкой ветвления и служит началом разреза. Проявление этих свойств можно увидеть и из асимптотического разложения (2.3), например, написав дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет это разложение, и исследовав поведения функции, являющейся решением этого уравнения при $q \rightarrow 0$ и $q \rightarrow \infty$. Таким образом, интеграл (2.2) задаёт функцию, аналитичную в плоскости q , с разрезом, выходящим из точки $q=0$, с существенно особой точкой в нуле. Этот разрез удобно направить вдоль отрицательной действительной полуоси. Тогда, производя вращение в плоскости q на угол π против/ по часовой стрелке, $q \rightarrow q e^{\pm i\pi}$, мы получаем значение $I(q)$ на верхнем/нижнем берегах разреза. Соответственно

$$I_+(-q) = I(q e^{i\pi}) = 2 \int_{\Gamma_+} dz e^{-z^2 + qz^4}$$

$$I_-(-q) = I(q e^{-i\pi}) = 2 \int_{\Gamma_-} dz e^{-z^2 + qz^4}$$

контуры Γ_+ и Γ_- изображены на рис.4. Точки перевала $x_{1,2}$ при этом оказываются на действительной оси.

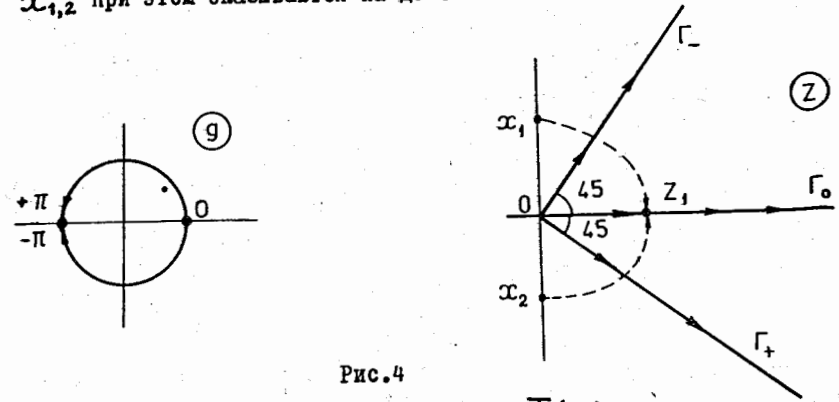


Рис.4

Вычисление скачка. Скачок функции $I(q)$ на разрезе записывается в виде

$$\Delta(-q) = I_+(-q) - I_-(-q) = 2 \int_{\Gamma} dz e^{-z^2 + qz^4}$$

где контур $\Gamma = \Gamma_+ - \Gamma_-$ состоит из двух полупрямых, расположенных в правой полуплоскости. Производя замену переменных $z \rightarrow z/\sqrt{q}$, имеем

$$\Delta(-q) = \frac{2}{\sqrt{q}} \int_{\Gamma} e^{-\frac{\varphi(z)}{q}} dz, \quad \varphi(z) = z^2 - z^4.$$

Из условия $\varphi'(z) = 0$ находим точки перевала $z_0 = 0, z_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, причем в данном случае основной вклад определяется точкой z_1 . Линия наискорейшего спуска представляет из себя гиперболу, $(\text{Re} z)^2 - (\text{Im} z)^2 = 1/2$, которая в перевальном приближении может быть заменена вертикальной прямой $z = 1/\sqrt{2} + i\zeta$.

Сдвигая контур интегрирования $\Gamma \rightarrow \Gamma_0$ так, чтобы он проходил по линии наискорейшего спуска (см.рис.5), а затем по касательной к линии наискорейшего спуска в точке перевала $\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_\infty$ (см. рис.5), получаем

$$\varphi(z) \approx \varphi(z_1) + (z-z_1)^2 \frac{\varphi''(z_1)}{2} = \frac{1}{4} - 2(z-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} + 2\frac{z}{3}^2.$$

В результате находим

$$\begin{aligned} \Delta(-g) &= \frac{2}{\sqrt{g}} \int_{\Gamma_0} dz e^{-\frac{\varphi(z)}{g}} \approx 2 \frac{-i e^{-\frac{1}{4g}}}{\sqrt{g}} \int_{-\infty}^{\infty} d\frac{z}{3} e^{-\frac{2z}{3g}} (1+O(g)) = \\ &= -2i \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{4g}} (1+O(g)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Относительная погрешность вычисления скачка равна $O(g)$, а не $O(\sqrt{g})$, как это следует из п.2.1, т.к. в интеграл (2.5) дан вклад только четные по $\frac{z}{3}$ члены разложения экспоненты.

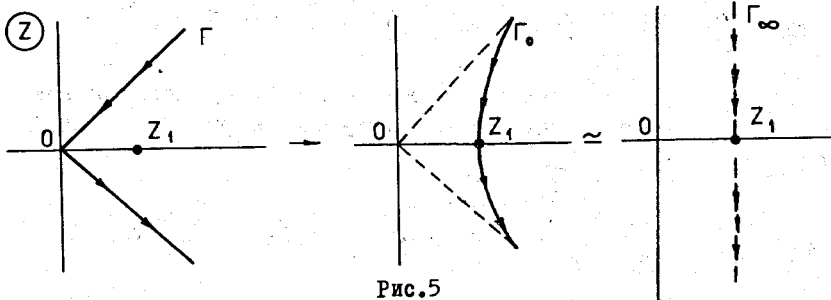


Рис.5

Окончательный результат. Применяя теорему Коши, мы можем теперь восстановить функцию $I(g)$ по формуле

$$I(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dg'}{g'-g} I(g') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^0 \frac{dg'}{g'-g} \Delta(g') + A_R. \quad (2.6)$$

Контур C изображен на рис.6. Величина A_R представляет собой вклад большого круга радиуса R и определяется поведением $I(g')$ на бесконечности. Она может быть исключена с помощью условия нормировки. Поскольку при $|g| \rightarrow \infty$ скачок $\Delta(-g)$

(2.5) стремится к константе, то в интеграле (2.6) достаточно произвести одно вычитание. Тогда, учитывая, что $I(0) = \sqrt{\pi}$, получаем

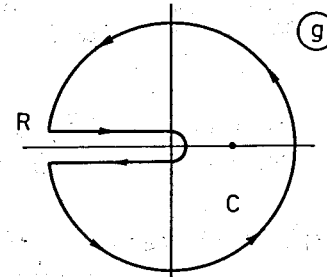


Рис.6

$$I(g) \approx \sqrt{\pi} - \frac{ig\sqrt{2\pi}}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{dg' e^{\frac{1}{4g'}}}{(g'-g)g'} = \sqrt{\pi} - \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dg' e^{-\frac{1}{4g'}}}{(g'+g)g'}. \quad (2.7)$$

Этот интеграл и представляет собой искомый результат. Отметим, что если исходный интеграл (2.2) являлся аналогом континуального интеграла, то интеграл вида (2.7) есть обычный интеграл типа Коши и в квантовом случае. Задача состоит в нахождении скачка

$\Delta(g)$, который в квантовом случае вычисляется методом перевала в континуальном интеграле (этому посвящен раздел 2.3). Поэтому погрешность формулы (2.7) определяется точностью вычисления скачка. Она правильно передает поведение функции (2.4) в окрестности точки $g=0$, но имеет неправильное поведение при больших g .

Метод "К-перевала". Остановимся на еще одном способе применения метода перевала при использовании функционального интеграла, а именно: рассмотрим задачу вычисления коэффициентов высших порядков ряда ТВ по константе связи. Разлагая подынтегральное выражение (2.2) в ряд по g и переставляя операции интегрирования и суммирования, получаем

$$I(g) = \sum_{k=0}^{\infty} (-g)^k I_k,$$

где

$$I_k = \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x^{4k} = \frac{2}{k!} \int_0^{\infty} dx e^{-x^2 + 4k \ln x}$$

Заменой переменной $x = \sqrt{k}t$ коэффициент I_k может быть представлен в виде интеграла, который при больших k принимает "перевальный" вид:

$$I_k = \frac{2\sqrt{k}}{k!} \int_0^{\infty} dt e^{-k(t^2 - 4 \ln t) + 2k \ln k} = \frac{2k^{2k + \frac{1}{2}}}{k!} \int_0^{\infty} dt e^{-kf(t)} \quad (2.8)$$

где $f(t) = t^2 - 4 \ln t$, а большим параметром служит величина k . Отсюда находим $f'(t) = 0$, $t_0 = \sqrt{2}$. Тогда $f(t) \approx (2 - 4 \ln \sqrt{2}) + 2(t - \sqrt{2})^2$, и линия наискорейшего спуска определяется условием $t = \sqrt{2} + \frac{t}{3}$.

Из формулы (2.8) для коэффициентов разложения получаем

$$\tilde{I}_k = \sqrt{2\pi} \frac{1}{k!} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right). \quad (2.9)$$

В данном случае формула (2.9) представляет собой не что иное, как формулу Стирлинга, однако метод ее получения может быть обобщен на случай континуального интеграла. Такой метод получения коэффициентов степенного разложения мы будем называть методом К-перевала.

Заметим, что результат (2.9) содержится уже в формуле (2.7). Разложение в степенной ряд по g подынтегрального выражения (2.7), полученного методом перевала для интеграла, в целом дает коэффициенты

$$\tilde{I}_k \approx \frac{4^k \Gamma(k)}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \quad (2.10)$$

отличающиеся от выражений (2.9) членами $O(1/k)$. Тот факт, что мы вычислили скачок с точностью $O(g)$, приводит к тому, что мы знаем коэффициенты с точностью $O(1/k)$. В дальнейшем коэффициенты разложения, полученные методом перевала по k , будем отмечать тильдой сверху (как в формуле (2.9)), а коэффициенты, полученные разложениями перевальных формул типа (2.7), отмечать двумя тильдами. Последний способ получения

коэффициентов будем также называть методом g -перевала.

Как было установлено, формальное разложение по степеням выражения, полученного методом g -перевала, дает асимптотический ряд, коэффициенты которого асимптотически совпадают с результатами вычислений методом К-перевала. Для получения выражений, эквивалентных результатам g -перевала из формул, полученных с помощью К-перевала, необходимо суммировать соответствующие асимптотические ряды (эта задача рассматривается ниже). Таким образом, метод g -перевала, вообще говоря, приводит к результатам более общим, чем метод К-перевала, и потому при прочих равных обстоятельствах является более предпочтительным.

2.3. Функциональный перевал

Общая схема. Рассмотрим теперь особенности метода функционального перевала на примере вычисления евклидова континуального интеграла для функций Грина действительного скалярного поля:

$$G_E^{(N)}(x_1, \dots, x_N; g) = \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \rangle_0 = \frac{\int \delta\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) e^{-S_E[\varphi]}}{\int \delta\varphi e^{-S_E[\varphi]}} \quad (2.11)$$

где

$$S_E[\varphi] = \int d^D x_E \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + g V(\varphi) \right] \quad (2.12)$$

есть евклидово действие. Для вычисления интеграла (2.11) методом перевала мы должны:

- 1) найти стационарную точку действия $S_E[\varphi]$, определяемую решением классических уравнений движения $\delta S_E[\varphi] / \delta \varphi = 0$ с конечным действием $S[\varphi_{kl}] < \infty$;
- 2) разложить действие в окрестности классического решения, оставляя первые два члена разложения:

$$S[\varphi_{kl} + \psi] = S[\varphi_{kl}] + \frac{1}{2} \psi S''[\varphi_{kl}] \psi + O(\psi^3);$$

3) вычислить квазигауссов интеграл по новой переменной $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi_{\text{кл}}(x)$, имеющей смысл интеграла по квантовым флуктуациям вокруг классического решения $\varphi_{\text{кл}}$. Для этого вычисления необходимо диагонализировать квадратичную форму $\psi S''[\varphi_{\text{кл}}]\psi$.

Возможность реализации этой программы зависит от вида потенциала взаимодействия. Это прежде всего относится к существованию решений уравнений движения в евклидовом пространстве, обладающих конечным действием, получивших название инстантонов^{/9/}. Физический смысл евклидовых инстантонных полевых конфигураций состоит в том, что они описывают квантовомеханическое туннелирование в реальном (Минковского) пространстве. Это становится понятным из следующего квазиклассического рассмотрения.

Для частицы, совершающей одномерное движение в потенциале V , уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -V'(x).$$

Его первый интеграл может быть записан как

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = E. \quad (2.13)$$

При этом классическая частица заданной энергии совершает движение в разрешенной области, например, между точками x_1 и x_2 на рис.7а. Переход же в точку x_3 может быть осуществлен лишь с помощью туннелирования сквозь барьер, разрешенного только в квантовой механике.

При переходе в евклидово пространство или, иначе говоря, к мнимому времени $t \rightarrow -it$ первый интеграл уравнения движения приобретает вид

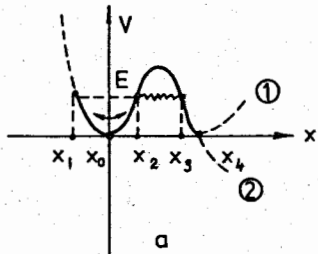
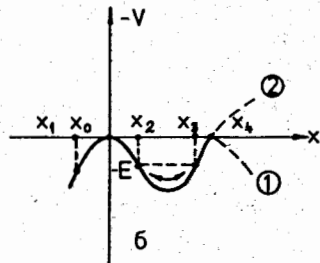


Рис.7



$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) = -E \quad (2.14)$$

и отличается от (2.13) знаком потенциала. В таком потенциале для классической частицы с энергией $(-E)$ разрешенной областью движения будет как раз область между точками x_2 и x_3 (рис.7б), т.е. область туннелирования при реальном времени.

Таким образом, квантовомеханическое туннелирование ($x_2 \rightarrow x_3$) на языке евклидовой теории описывается уравнением движения классической частицы. Частица с нулевой энергией, находящаяся в вакууме (x_0), в квантовом случае будет туннелировать в другие состояния с $E=0$ (если такие существуют). В нашем примере - в точку x_4 . В евклидовом пространстве это будет соответствовать классическим траекториям с нулевой энергией, то есть инстантонам.

Поэтому существование инстантонных решений, осуществляющих точку стационарности действия, связано с возможностью туннелирования в системе. Это может происходить при наличии нескольких вырожденных вакуумных состояний (кривая 1 на рис.7а) или при наличии нижележащего уровня (или отсутствии нижнего состояния) (кривая 2 на рис.7а). В обоих случаях происходит туннелирование из вакуума теории возмущений, описываемое инстантонными конфигурациями в евклидовом пространстве.

Вычисление квазигауссова интеграла по квантовым флуктуациям в окрестности инстантонного решения оказывается возможным лишь в ренормируемых теориях. Это связано с наличием ультрафиолетовых расходимостей, которые, как мы увидим ниже, устраняются обычной перенормировкой параметров теории.

Модель φ^4 в евклидовом пространстве. Конкретизируем описанную процедуру на примере скалярной теории с гамильтонианом

$$H[\varphi] = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + g \frac{\varphi^4}{4!} \quad (2.15)$$

в 4-мерном евклидовом пространстве x .

^x Эта задача впервые была рассмотрена Липатовым^{/3/} (см. также^{/10/}).

I. Классические евклидовы уравнения движения имеют вид

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = -\Delta_4 \varphi + \frac{g \varphi^3}{3!} = 0, \quad (2.16)$$

причем решения, обладающие конечным действием, могут быть получены аналитически:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{4g}{-g}} \frac{\lambda}{(x-x_0)^2 + \lambda^2},$$

где x_0 и λ - произвольные параметры. Таким образом, при $g > 0$, т.е. когда классический потенциал ограничен снизу, по полной аналогии с нульмерным примером, рассмотренным выше, мы получаем одну действительную и две комплексные перевальные точки. Разложение вокруг $\varphi_0 = 0$ дает нам обычную теорию возмущений, а использование решений $\varphi_{1,2}$ требует аналитического продолжения континуального интеграла в область $g < 0$. Такое аналитическое продолжение сопровождается вращением контура интегрирования вдоль одного из направлений в функциональном пространстве, реальное воплощение которого мы отложим до третьего шага описанной выше процедуры, где его можно проделать явно.

После этого, как и в случае нульмерного аналога (2.2), вычисляется скачок интеграла (2.11) на разрезе в g -плоскости при $g < 0$. Для того чтобы отчетливее проследить аналогию с интегралом (2.2), выделим зависимость от константы связи g в явном виде:

$$G^{(N)}(\dots, g) = \frac{\int \delta \varphi \varphi_1 \dots \varphi_N e^{-S_0[\varphi] - g S_I[\varphi]}}{\int \delta \varphi e^{-S_0[\varphi] - g S_I[\varphi]}} = \frac{\int \delta \varphi \varphi_1 \dots \varphi_N e^{-S_0[\varphi] - g S_I[\varphi]}}{\int \delta \varphi e^{-S_0[\varphi]}} (1 + O(g)). \quad (2.17)$$

Полученный интеграл является континуальным обобщением интеграла (2.2). Пользуясь аналогией с нульмерным интегралом (2.2), а также исходя из квантовомеханической трактовки теории с потенциалом $V = g \varphi^4$ при $g < 0$ мы делаем заключение, что как функция константы связи интеграл (2.17) имеет особенность в точке $g = 0$, которая является точкой ветвления и служит началом разреза. Его можно, как и в случае функции (2.2), провести вдоль отрицательной действительной полуоси. Скачок на этом разрезе мы и будем вычислять методом перевала.

2. Итак, совершая аналитическое продолжение $g \rightarrow g e^{\pm i\pi}$, мы получаем классические решения в виде

$$\varphi_{\kappa\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{\lambda} \tilde{\psi}\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right), \quad \tilde{\psi}(x) = \frac{\sqrt{4g}}{x^2+1}. \quad (2.18)$$

В свете сказанного выше наличие таких решений связано с тем фактом, что при $g < 0$ нижнее состояние в теории отсутствует и вакуум ТВ оказывается метастабильным за счет туннелирования, описываемого решениями евклидовых уравнений движения.

Классическое действие для решений (2.18) имеет характерный вид $S[\varphi_{\kappa\lambda}] = 16\pi^2/g$ и не зависит от параметров x_0 и λ . Поэтому полевые конфигурации с различными значениями этих параметров будут давать одинаковый вклад в функциональный интеграл, и необходимо проинтегрировать по всем таким конфигурациям с различными x_0 и λ . Сдвигая переменную интегрирования:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi_{\kappa\lambda}(x) + \psi(x)$$

и разлагая действие в окрестности $\varphi_{\kappa\lambda}(x)$ с фиксированными x_0 и λ , для скачка интеграла (2.17) на разрезе при $g < 0$ находим

$$\Delta G^{(N)}(-g) \approx \varphi_{\kappa\lambda}(x_1) \dots \varphi_{\kappa\lambda}(x_N) e^{-S[\varphi_{\kappa\lambda}]} \times \frac{\int \delta' \psi e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \psi [-\Delta_4 - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^2(x)] \psi}}{\int \delta \psi e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \psi [-\Delta_4] \psi}} \quad (2.19)$$

где штрих у $\delta' \psi$ означает, что совершен поворот контура интегрирования в функциональном пространстве описанным ниже способом, так что интегрирование производится вдоль "линии наискорейшего спуска" в функциональном пространстве.

3. Интеграл по квантовым флуктуациям в (2.19) формально может быть выражен через функциональный детерминант:

$$\frac{\int \delta' \psi e^{-\frac{1}{2} \int d^4 x \psi [-\Delta_4 - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^2(x)] \psi}}{\int \delta \psi e^{-\frac{1}{2} \int d^4 x \psi [-\Delta_4] \psi}} = \left[\frac{\text{Det}(-\Delta_4 - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^2(x))}{\text{Det}(-\Delta_4)} \right]^{-1/2} = \left(\text{Det} \left[\frac{-\Delta_4 - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^2(x)}{-\Delta_4} \right] \right)^{-1/2} \quad (2.20)$$

Эта формула является бесконечномерным обобщением хорошо известной формулы для детерминанта оператора, заданного в матричном виде, и может быть получена путем предельного перехода от конечно-кратной аппроксимации континуального интеграла. Деление на оператор понимается в виде действия обратного оператора.

Вычисление функционального детерминанта (2.20) достигается путем диагонализации квадратичной формы, стоящей в числителе и знаменателе. Это может быть сделано различными способами (см., например, /3,6,II,I2,I3/). В частности, в рассматриваемом примере весьма элегантно является использование $O(5)$ -формализма /3,I3/, заключающегося в переходе на 5-мерную гиперсферу. Мы опишем, однако, другой способ /6/, применимый к широкому кругу задач.

Вычисление интеграла по квантовым флуктуациям. Рассмотрим задачу на собственные значения (с.з.) в поле классического решения:

$$\left[\frac{\Delta_4 + \frac{1}{2} \tilde{\psi}^2(x)}{\Delta_4} \right] \psi_k(x) = E_k \psi_k(x), \quad (2.21)$$

где собственные функции ψ_k нормированы условием

$$\int d^4 x \psi_k(x) [-\Delta_4] \psi_m(x) = \delta_{km}. \quad (2.22)$$

Решая уравнение (2.21) с условием нормировки (2.22), мы добиваемся одновременной диагонализации квадратичных форм, стоящих в числителе и знаменателе (2.20) на одних и тех же собственных функциях. Здесь нет кажущегося на первый взгляд противоречия с тем, что операторы $\Delta_4 + \frac{1}{2} \tilde{\psi}^2(x)$ и Δ_4 не коммутируют, т.к. получаемые собственные функции оператора (2.21) не являются таковыми для этих операторов. При этом, однако, мы добиваемся желаемой диагонализации, а также получаем автоматическое сокращение одинаковых бесконечных вкладов в числителе и знаменателе, обусловленных наличием у операторов непрерывного спектра.

Уравнение (2.21) представляет собой уравнение со сферически симметричным потенциалом $V(x) = -\frac{1}{2} \tilde{\psi}^2(x) = -\frac{24}{(1+x^2)^2}$. Записывая дифференциальный оператор Δ_4 в сферических координатах и выделяя угловую зависимость

$$\psi_{\{k\}}(x) = \psi_{k,\ell}(r) Y_{\ell, m_1, m_2}(\theta, \varphi, \eta),$$

$$\{k\} = \{k, \ell, m_1, m_2\}, \quad \ell = 0, 1, \dots; \quad m_1 = 0, 1, \dots, \ell; \quad m_2 = 0, 1, \dots, \ell,$$

где Y_{ℓ, m_1, m_2} - четырехмерные сферические функции /14/, получаем

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{24}{(1+r^2)^2} \right] \psi_{k,\ell}(r) = E_{k,\ell} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell^2}{r^2} \right] \psi_{k,\ell}(r). \quad (2.23)$$

Здесь с.з. оператора Казимира 4-мерной группы вращений равны $L^2 = \ell(\ell+2)$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$, а степень вырождения $\delta_\ell = (\ell+1)^2$. Заменой переменной уравнение (2.23) сводится к гипергеометрическому. Решения получившегося уравнения,

^x В D -мерном случае с.з. оператора Казимира группы вращений и степень вырождения имеют вид

$$L^2 = \ell(\ell+D-2), \quad \delta_\ell = \frac{\Gamma(\ell+D-2)\Gamma(D+2\ell-2)}{\Gamma(\ell+1)\Gamma(D-1)}.$$

убывающие на бесконечности, определяют дискретный спектр с.з. задачи (2.21), (2.22):

$$E_{k,\ell} = \frac{(k+\ell-1)(k+\ell+4)}{(k+\ell+1)(k+\ell+2)}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (2.24)$$

а остальные функции принадлежат к непрерывному спектру. С.з. непрерывного спектра также могут быть выражены формулой (2.24), где k пробегает непрерывный ряд значений от $-\infty$ до ∞ . Однако, как будет показано ниже (см. замечание после формулы (2.36)), вклад непрерывного спектра операторов взаимно сокращается. Поэтому весь вклад в функциональный детерминант (2.20) определяется дискретным спектром задачи (2.21), (2.22), т.е. мы можем ограничиться в континуальном интеграле (2.19) интегрированием по функциям, убывающим на бесконечности.

Разлагая далее переменную интегрирования ψ по полной ортонормированной системе функций дискретного спектра $\psi_{\{k\}}$ как по базису в функциональном пространстве:

$$\psi(x) = \sum_{\{k\}} \sum_{\{k\}} \psi_{\{k\}}(x), \quad (2.25)$$

представим функциональный интеграл в виде бесконечного произведения обычных интегралов вдоль "направлений", задаваемых функциями $\psi_{\{k\}}$:

$$\int \delta\psi = \prod_{\{k\}} \int \frac{d\sum_{\{k\}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.26)$$

Тогда для квадратичной формы в (2.19) имеем

$$\int d^4x \psi \left[-\Delta_4 - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^2(x) \right] \psi = \sum_{\{k\}} \sum_{\{k\}}^2 E_{k,\ell}$$

и

$$\int d^4x \psi \left[-\Delta_4 \right] \psi = \sum_{\{k\}} \sum_{\{k\}}^2$$

откуда для интеграла (2.20) получаем

$$\frac{\int \delta' \psi e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \psi \left[-\Delta_4 - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^2(x) \right] \psi}}{\int \delta \psi e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \psi \left[-\Delta_4 \right] \psi}} = \quad (2.27)$$

$$= \frac{\prod_{\{k\}} \int \frac{d\sum_{\{k\}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{\{k\}}^2 E_{k,\ell}}}{\prod_{\{k\}} \int \frac{d\sum_{\{k\}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{\{k\}}^2}}$$

причем мера интегрирования в (2.26) определена так, чтобы нормировочный интеграл в знаменателе (2.27), призванный обеспечить обращение всего выражения в единицу в отсутствие взаимодействия, равнялся бы 1.

Таким образом, функциональный интеграл свелся к бесконечному произведению обычных интегралов гауссова типа. Дальнейшее вычисление требует конкретизации области интегрирования по переменным $\sum_{\{k\}}$. Здесь мы, наконец, подошли к проблеме определения пространства функций, в котором происходит интегрирование, и к явному воплощению поворота контура интегрирования по одному из направлений в этом пространстве, связанного с необходимостью аналитического продолжения в g -плоскости.

Вернемся к вопросу о спектре уравнения (2.23). Из формулы (2.24) получаем

$$E_{0,0} = -2; \quad E_{1,0} = 0; \quad E_{0,1} = 0; \quad E_{k,\ell} > 0 \quad \text{при } k+\ell > 1.$$

Поэтому линия наискорейшего спуска в функциональном пространстве для интеграла в числителе (2.27) представляет собой гиперплоскость, определяемую равенствами

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Im} \sum_{k,l,m_1,m_2} = 0, \quad k+l > 1, \\ \text{Re} \sum_{0,0,0,0} = 0 \end{array} \right. \quad (2.28)$$

при произвольных $\sum_{1,0,0,0}$ и $\sum_{0,1,m_1,m_2}$.

Тот факт, что контур интегрирования вдоль направления, задаваемого функцией $\psi_{0,0}$, проходит по мнимой оси, и является выражением поворота контура интегрирования в функциональном пространстве в полном соответствии с вертикальной линией наискорейшего спуска в модельном интеграле (2.5) (см. также рис.5). Появление отрицательного уровня энергии (так же, как изменение знака g в интеграле (2.2)) приводит к формальной расходимости интеграла (2.27) и необходимости поворота контура интегрирования вдоль направления, задаваемого соответствующей собственной функцией.

Нулевые моды. Особого рассмотрения требует наличие нулевых с.з. $E_{0,1}$ и $E_{1,0}$, связанных с существованием так называемых нулевых мод. Нулевые моды обусловлены существованием симметрий исходного гамильтониана. Если гамильтониан обладает какой-либо группой симметрии, а классические решения нарушают некоторую подгруппу этой группы, то параметрам нарушенной подгруппы отвечают свободные параметры в классическом решении $\varphi_{kl}(x)$. Нулевые же моды уравнения типа (2.23) являются производными классического решения по этим параметрам. Так, гамильтониан (2.15) инвариантен относительно группы конформных преобразований, включающей группу вращений и трансляций в 4-мерном евклидовом пространстве, а также группу специальных конформных и масштабных преобразований. Классические решения (2.18) нарушают подгруппу трансляций и подгруппу масштабных преобразований. Этому отвечают параметры x_0 и λ в формуле (2.18). Нулевые моды имеют вид

$$\psi_{1,0,0,0} \sim \frac{d\varphi_{kl}}{d\lambda} = \sqrt{\frac{48}{g}} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\frac{(x-x_0)^2}{\lambda^2} - 1}{\left[\frac{(x-x_0)^2}{\lambda^2} + 1\right]^2},$$

$$\psi_{0,1,m_1,m_2} = \psi_{0,1}^M \sim \frac{d\varphi_{kl}}{dx_0^M} = -2\sqrt{\frac{48}{g}} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\frac{(x-x_0)^M}{\lambda}}{\left[\frac{(x-x_0)^2}{\lambda^2} + 1\right]^2} \quad (2.29)$$

Степень вырождения нулевых уровней δ_l определяется размерностью нарушенной подгруппы и для уровней $E_{1,0}$ и $E_{0,1}$ равна соответственно 1 и 4.

Таким образом, независимость действия от параметров x_0 и λ вытекает из свойств симметрии гамильтониана (2.15) и приводит к появлению направлений в функциональном пространстве, задаваемых соответствующими нулевыми модами, вдоль которых действие постоянно. Формально наличие нулевых мод приводит к появлению расходимостей в интеграле (2.27). Однако эти расходимости пропорциональны объему соответствующей подгруппы симметрии (например, объему группы трансляции - хорошо известные объемные расходимости) и должны быть правильно выделены. Вклад нулевых мод обычно выделяется либо введением δ -функции в функциональный интеграл с помощью метода Фаддеева-Попова (см., например, /15/), что приводит к выделению объема группы симметрии и интегрированию по пространству функций, ортогональному нулевой моде, либо с помощью метода коллективных координат /16/. В последнем случае интеграл вдоль нулевой моды заменяется на интеграл по соответствующему параметру подгруппы симметрии с учетом якобиана преобразования. Оба этих метода весьма схожи. Остановимся на первом из них.

Вернемся для этой цели к исходному интегралу (2.17) и вставим в интеграл в числителе следующее представление единицы:

$$1 = \int_{\Omega} d\rho \Delta[\varphi(x, \rho_0)] \delta\left(\int dx \varphi(x, \rho_0) [-\Delta_4] \frac{d\varphi_{kl}(x, \rho)}{d\rho}\right) \quad (2.30)$$

где ρ есть параметр группы симметрии (например, x_0 или λ), ρ_0 есть некоторое фиксированное значение этого параметра, а интегрирование идет по всему объему группы Ω . Функционал $\Delta[\varphi]$, называемый детерминантом Фаддеева-Попова, выбирается так, чтобы обеспечить обращение правой части (2.30) в единицу. Его явный вид мы найдем ниже. Тогда в (2.17) получаем

$$\int \delta\varphi_1 \dots \varphi_N e^{-S[\varphi]} = \int_{\Omega} d\rho \Delta[\varphi(x, \rho_0)] \times \times \quad (2.31)$$

$$\times \delta\left(\int dx \varphi(x, \rho_0) [-\Delta_4] \frac{d\varphi_{kl}(x, \rho)}{d\rho}\right) e^{-S[\varphi]} \varphi_1 \dots \varphi_N =$$

$$= \int_{\Omega} \delta\varphi \int_{\Omega} d\rho \Delta[\varphi(x, \rho)] e^{-S[\varphi]} \varphi_1 \dots \varphi_n \delta\left(\int dx \varphi(x, \rho) [-\Delta_4] \frac{d\varphi_{\kappa\lambda}(x, \rho)}{d\rho}\right)$$

В последнем равенстве мы произвели замену переменных в функциональном интеграле $\varphi(x, \rho_0) \rightarrow \varphi(x, \rho)$ и воспользовались инвариантностью действия $S[\varphi]$ и меры интегрирования $\delta\varphi$. Представляя далее φ в виде $\varphi = \varphi_{\kappa\lambda}(x, \rho) + \psi(x, \rho) = \varphi_{\kappa\lambda}(x, \rho) + \sum_n \xi_n \psi_n$ и пользуясь условием ортогональности (2.22) и связью между нулевой модой и классическим решением (2.29), находим

$$\delta\left(\int dx \varphi(x, \rho) [-\Delta_4] \frac{d\varphi_{\kappa\lambda}(x, \rho)}{d\rho}\right) = \delta\left(\xi_0 \left\| \frac{d\varphi_{\kappa\lambda}}{d\rho} \right\|\right),$$

где норма определяется в согласии с (2.22) и равна

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int dx \varphi(x) [-\Delta_4] \varphi(x)},$$

а ξ_0 означает коэффициент перед нулевой модой ψ_0 в разложении (2.25). С учетом этого равенства (2.31) принимает вид

$$\int_{\Omega} \delta\varphi \int_{\Omega} d\rho \frac{\Delta[\varphi(x, \rho)]}{\left\| \frac{d\varphi_{\kappa\lambda}}{d\rho} \right\|} \delta(\xi_0) e^{-S[\varphi]} \varphi_1 \dots \varphi_n. \quad (2.32)$$

Появление $\delta(\xi_0)$ приводит к тому, что интеграл по ξ_0 в (2.27) пропадает, т.е. интегрирование идет по пространству функций, ортогональных нулевой моде (что было явным образом заложено при выборе представления единицы в виде (2.30), а вместо него появляется интеграл по параметру группы симметрии с якобианом преобразования

$$J(\rho) = \frac{\Delta[\varphi(x, \rho)]}{\left\| \frac{d\varphi_{\kappa\lambda}}{d\rho} \right\|}$$

Для вычисления якобиана J обратимся вновь к формуле (2.30). Разлагая $\frac{d\varphi_{\kappa\lambda}}{d\rho}$ в ряд по ρ в точке ρ_0 , получим

$$1 = \int_{\Omega} d\rho \Delta[\varphi(x, \rho_0)] \delta\left(\int dx \varphi(x, \rho_0) [-\Delta_4] \left(\frac{d\varphi_{\kappa\lambda}(x, \rho_0)}{d\rho} + (\rho - \rho_0) \frac{d^2\varphi_{\kappa\lambda}(x, \rho_0)}{d\rho^2} + \dots\right)\right) =$$

$$= \int_{\Omega} d\rho \Delta[\varphi(x, \rho_0)] \delta\left(\xi_0 \left\| \frac{d\varphi_{\kappa\lambda}(x, \rho_0)}{d\rho} \right\| + (\rho - \rho_0) \int dx \varphi(x, \rho_0) \times [-\Delta_4] \frac{d^2\varphi_{\kappa\lambda}(x, \rho_0)}{d\rho^2} + \dots\right)$$

Так как нас интересует значение $\Delta[\varphi]$ при $\xi_0 = 0$, то имеем

$$1 = \Delta[\varphi(x, \rho_0)] / \left| \int dx \varphi(x, \rho_0) [-\Delta_4] \frac{d^2\varphi_{\kappa\lambda}(x, \rho_0)}{d\rho^2} \right|,$$

откуда находим явное выражение для функционала $\Delta[\varphi]$.

Тогда для якобиана J получаем

$$J(\rho) = \frac{\left| \int dx \varphi(x, \rho) [-\Delta_4] \frac{d^2\varphi_{\kappa\lambda}(x, \rho)}{d\rho^2} \right|}{\left\| \frac{d\varphi_{\kappa\lambda}}{d\rho} \right\|} = \frac{\int \frac{d\varphi}{d\rho} [-\Delta_4] \frac{d\varphi_{\kappa\lambda}}{d\rho} dx}{\left\| \frac{d\varphi_{\kappa\lambda}}{d\rho} \right\|} \quad (2.33)$$

В случае наличия нескольких нулевых мод ψ_{0i} и соответственно нескольких параметров ρ_i , формула (2.33) принимает вид

$$J(\rho_i) = \frac{\text{Det} \int dx \frac{d\varphi}{d\rho_i} [-\Delta_4] \frac{d\varphi_{\kappa\lambda}}{d\rho_i}}{\prod_i \left\| \frac{d\varphi_{\kappa\lambda}}{d\rho_i} \right\|} \quad (2.34)$$

Подставляя φ в виде $\varphi = \varphi_{\kappa\lambda} + \psi$ и ограничиваясь в главном перевальном приближении вкладом классических полей, получаем

$$J(\rho_i) = \prod_i \left\| \frac{d\varphi_{\kappa\lambda}}{d\rho_i} \right\| \quad (2.35)$$

Отброшенные члены приводят к поправкам типа $O(g)$. Интегрирование по ρ_i (в нашем случае по x_0 и λ) соответствует учету всех перевальных конфигураций (2.18) с различными значениями параметров, приводящих к одному и тому же значению действия.

Возвращаясь к интегралу (2.27) с учетом (2.28), (2.29), (2.32), (2.35), имеем (при фиксированных x_0 и λ)

$$\left(\frac{\text{Det} [-\Delta_4 - \frac{1}{2} \tilde{\Psi}^2(x)]}{\text{Det} [-\Delta_4]} \right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{-i00} \frac{d\tilde{\xi}_{0,0,0,0}}{\sqrt{2\pi}} \prod_{k,l>1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\xi}_{\{k\}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{0,0,0,0} \tilde{\xi}_{0,0}^2} E_{0,0} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\{k\} \\ k+l>1}} \sum_{\{k\}} \tilde{\xi}_{\{k\}}^2 E_{k,l}}}{\prod_{\{k\}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\xi}_{\{k\}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{\{k\}} \tilde{\xi}_{\{k\}}^2}} \cdot (2.36)$$

$$\cdot \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \left\| \frac{d\varphi_{k,l}}{dx_0^M} \right\|^4 \left\| \frac{d\varphi_{k,l}}{d\lambda} \right\| =$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^{5/2}} \left\| \frac{d\varphi_{k,l}}{dx_0^M} \right\|^4 \left\| \frac{d\varphi_{k,l}}{d\lambda} \right\| \prod_{\substack{k,l \\ k+l \neq 1}} |E_{k,l}|^{-\frac{\delta_l}{2}}$$

Появление здесь в показателе степени множителя δ_l объясняется δ_l -кратным вырождением уровней $E_{k,l}$ уравнения (2.23). Подставляя (2.24) и (2.29) в (2.36), получаем

$$(\text{Det})^{-1/2} = -i \frac{1}{g^{5/2}} \frac{(2\pi)^{5/2}}{\lambda^5} 2^{10} \left(\frac{3}{5}\right)^{5/2} \prod_{\substack{k,l \\ k+l \neq 1}} \left| \frac{(k+l-1)(k+l+4)}{(k+l+1)(k+l+2)} \right|^{-\frac{\delta_l}{2}} \quad (2.36')$$

где $\delta_l = (l+1)^2$. Заметим здесь, что наличие непрерывного спектра задачи (2.21), (2.22) приводит, вообще говоря, к дополнительному множителю в формуле (2.36) вида

$$\prod_{\substack{-\infty < s < \infty \\ l=0,1,2,\dots}} |E_{s,l}|^{-\frac{\delta_l}{2}} = \prod_l e^{-\frac{\delta_l}{2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \ln |E_{s,l}|}$$

где $E_{s,l}$ дается формулой (2.24), связанному с интегрированием по функциям, не убывающим на бесконечности. Однако, как легко убедиться, интеграл в экспоненте оказывается равным нулю, и указанный множитель равен 1 и не дает дополнительного вклада в искомый детерминант.

В полученном выражении (2.36') произведение по k может быть вычислено в замкнутой форме:

$$l=0 \quad \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{\infty} \frac{(k-1)(k+4)}{(k+1)(k+2)} = -\frac{1}{5};$$

$$l=1 \quad \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+5)}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{10};$$

$$l \geq 2 \quad \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(k+l-1)(k+l+4)}{(k+l+1)(k+l+2)} = \frac{\Gamma(l+1)\Gamma(l+2)}{\Gamma(l-1)\Gamma(l+4)}.$$

Отсюда для скачка функции Грина на разрезе (2.19) находим

$$\Delta G^{(N)}(-g) = -i \int_V d^4 x_0 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{1}{g^{N+5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} (2\pi)^{5/2} 2^{10} \left(\frac{3}{5}\right)^{5/2} \times \prod_{l=2}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(l+1)\Gamma(l+2)}{\Gamma(l-1)\Gamma(l+4)} \right]^{-\frac{(l+1)^2}{2}} e^{-\frac{16\pi^2}{g} \frac{1}{\lambda^{N+4}} \tilde{\Psi}(x_1 - x_0) \dots \tilde{\Psi}(x_N - x_0)}, \quad (2.37)$$

где функции $\tilde{\Psi}(x_i)$ дается формулой (2.18). Оставшееся произведение по l удобно представить в виде

$$\prod_{l=2}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(l+1)\Gamma(l+2)}{\Gamma(l-1)\Gamma(l+4)} \right]^{-\frac{(l+1)^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{l=2}^{\infty} (l+1)^2 \ln \frac{l(l-1)}{(l+2)(l+3)}} \quad (2.38)$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{12} \sum_{l=2}^{\infty} (l+1)(l+2)(2l+3) \ln \left[1 - \frac{6}{(l+1)(l+2)} \right] \right\} \cdot 10^{-5/2}.$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$\frac{(l+1)^2}{6} = \frac{(l+1)(l+2)(2l+3)}{6} - \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} \quad \left(\delta_l(D) = \delta_l(D+1) - \delta_{l-1}(D+1) \right)$$

Ультрафиолетовые расходимости. Легко видеть, что сумма в экспоненте (2.38) расходится в области больших l . Это есть общее свойство функциональных детерминантов типа (2.20), являющееся проявлением ультрафиолетовых расходимостей в теории, которые возникают, если размерность пространства-времени $D \geq 2$. Действительно, обратимся вновь к интегралу, стоящему в числителе (2.20). В диаграммном представлении он является суммой однопетлевых диаграмм с различным числом вставок вершин вида $-\frac{1}{4} \tilde{\Psi}^2(x) \Psi^2(x)$ во внутреннюю линию (см. рис.8).

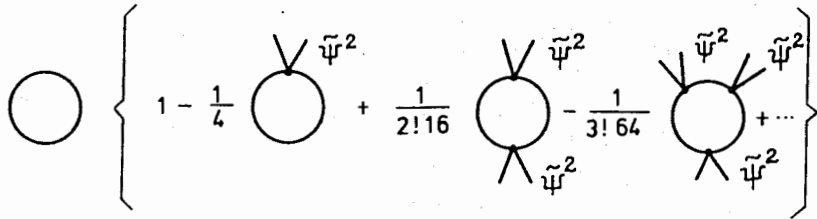


Рис.8

Полученные однопетлевые диаграммы полностью совпадают с диаграммами обычной теории возмущений в модели с гамильтонианом (2.15) и, следовательно, содержат те же ультрафиолетовые расходимости. При этом общий множитель на рис.8 сокращается с интегралом в знаменателе, а диаграммы с одной и двумя вершинными вставками расходятся и требуют введения контрчленов. Вычитание расходимостей в этих диаграммах соответствует на языке ℓ -представления (2.38) вычитанию первых двух членов разложения логарифма и дает

$$\Pi = e^{-\frac{1}{12}} \left\{ \sum_{\ell=2}^{\infty} (\ell+1)(\ell+2)(2\ell+3) \left[\ln \left(1 - \frac{6}{(\ell+1)(\ell+2)} \right) + \frac{6}{(\ell+1)(\ell+2)} + \frac{18}{(\ell+1)^2(\ell+2)^2} \right] \right\} \cdot 10^{-5/2} e^{\Delta S} \quad (2.39)$$

где контрчлены ΔS имеют вид

$$\Delta S = \frac{1}{4} \int d^4x \tilde{\psi}^2 \left(\frac{x-x_0}{\lambda} \right) \frac{1}{\lambda^2} \Delta_c(0) - \frac{1}{16} \int d^4x d^4y \tilde{\psi}^2 \left(\frac{x-x_0}{\lambda} \right) \frac{1}{\lambda^2} \Delta_c^2(x-y) \tilde{\psi}^2 \left(\frac{y-x_0}{\lambda} \right) \frac{1}{\lambda^2}$$

и допускают конечный предел, связанный с нормировкой массы и заряда, как и в обычной ТВ. Здесь $\Delta_c(x)$ - причинная функция безмассового скалярного поля. Выражая перенормированные параметры теории m_R, g_R соотношениями

$$m = m_R = 0, \quad (2.40)$$

$$g = g_R - \alpha g_R^2 + \dots,$$

где коэффициент α определяется однопетлевым вкладом в четыреххвостную функцию Грина при соответствующем выборе условий нормировки, и производя перенормировку, для скачка N -хвостной функции Грина на разрезе согласно (2.37), (2.39) находим

$$\Delta G^{(N)}(x_1, \dots, x_N; -g) \approx -i \int_V d^4x_0 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{N+5}} \cdot \tilde{\Psi} \left(\frac{x_1-x_0}{\lambda} \right) \dots \tilde{\Psi} \left(\frac{x_N-x_0}{\lambda} \right) e^{-\frac{16\pi^2}{g_R} \frac{C}{g^{\frac{N+5}{2}}}} \quad (2.41)$$

где

$$C = \pi^{5/2} \frac{3^{5/2} 2^{12}}{5^{5/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{12} \sum_{\ell=2}^{\infty} (\ell+1)(\ell+2)(2\ell+3) \times \right. \\ \left. \times \left[\ln \left(1 - \frac{6}{(\ell+1)(\ell+2)} \right) + \frac{6}{(\ell+1)(\ell+2)} + \frac{18}{(\ell+1)^2(\ell+2)^2} \right] \right\} \times \\ \times e^{-\frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda^2 M^2}} \quad (2.42)$$

а M - параметр нормировки.

Окончательный результат. Подставляя (2.41) в интеграл Коши типа (2.6), окончательно получаем

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N; g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{dg'}{g' - g} \Delta G^{(N)}(\dots, g') =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_V d^4 x_0 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{N+5}} \int_0^\infty \frac{dg'}{g' + g} e^{-\frac{16\pi^2}{g'}} \frac{C}{(g')^{\frac{N+5}{2}}} \cdot$$

$$\cdot \tilde{\psi}\left(\frac{x_1 - x_0}{\lambda}\right) \dots \tilde{\psi}\left(\frac{x_N - x_0}{\lambda}\right). \quad (2.43)$$

Относительная точность полученной формулы определяется точностью вычисления скачка $\Delta G^{(N)}$ в методе перевала и равна $O(g)$. Поэтому выражение (2.43) определяет полные функции Грина $G^{(N)}(x_1, \dots, x_N; g)$ в области $g < 1$ и не может быть непосредственно продолжено в область больших констант связи, так же как это имело место в случае формулы (2.7). Выпишем также выражение для фурье-образа функций Грина (2.43):

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_N) G^{(N)}(p_1, \dots, p_N; g) =$$

$$= \prod_{i=1}^N \int d^4 x_i e^{i p_i x_i} G^{(N)}(x_1, \dots, x_N; g).$$

Имеем

$$\tilde{G}^{(N)}(p_1, \dots, p_N; g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^\infty \frac{dg'}{g' + g} e^{-\frac{16\pi^2}{g'}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(g')^{\frac{N+5}{2}}} \lambda^{3N-4} \varphi(p_1, \lambda) \dots \varphi(p_N, \lambda) \cdot C, \quad (2.44)$$

где

$$\varphi(p) = \int e^{i p x} \tilde{\psi}(x) d^4 x = \frac{4\pi^2}{\sqrt{p^2}} \sqrt{48} K_1(\sqrt{p^2}), \text{ а } K_1 -$$

функция Макдональда.

Выражения (2.43) и (2.44), полученные в теории с лагранжианом взаимодействия $g\varphi^4$, имеют характерный вид и могут быть обобщены на случай произвольной теории с невырожденным классическим минимумом. Единственными ограничениями являются условие существования классических решений с конечным действием и условие ренормируемости теории в обычном смысле. Обобщения имеет вид

$$\tilde{G}^{(N)}(p_1, \dots, p_N; g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \int_\Omega dR \int_0^\infty \frac{dg'}{g' + g} e^{-\frac{S_{\text{кл}}}{(g')^{1/\alpha}}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(g')^{\frac{N+D+1+n_0}{2}}} \lambda^{3N-4} \varphi^R(p_1, \lambda) \dots \varphi^R(p_N, \lambda) \cdot C(R).$$

Здесь g есть параметр разложения ТВ (это не обязательно константа связи, а может быть ее квадрат или другая степень, определяемая, как и константа α , видом взаимодействия), $S_{\text{кл}}$ — классическое действие на инстантонном решении, D — размерность пространства, n_0 — число нулевых мод, связанных с возможными внутренними симметриями задачи. Интегрирование по dR соответствует интегрированию по группе внутренней симметрии, а якобиан преобразования включен в $C(R)$. Индекс R у поля φ^R соответствует тому, что классическое решение может обладать определенным видом внутренней симметрии. Отметим также, что интеграл по λ может отсутствовать, т.к., если в теории есть размерные параметры, например, масса, то это нарушает масштабную инвариантность действия, масштаб классического решения становится фиксированным, соответствующая нулевая мода отсутствует и не требует специального выделения.

Разложение подынтегрального выражения в (2.43) или (2.44) в ряд по g так, как и в нульмерном случае, позволяет получить коэффициенты степенного разложения ТВ:

$$G^{(N)}(\dots, q) \sim \sum_k G_k^{(N)}(\dots) (-q)^k,$$

$$\tilde{G}_k^{(N)}(p_1, \dots, p_N) = \frac{1}{(4\pi^2)^{\frac{N+5}{2} + k}} \Gamma(k + \frac{N+5}{2}) \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \lambda^{3N-4} \varphi(p_1, \lambda) \dots \varphi(p_N, \lambda) C \quad (2.46)$$

Как уже указывалось, относительная точность коэффициентов (2.46), полученных методом g -перевала, равна $O(1/k)$.

Выражение для коэффициентов разложения (2.46) также имеет прямое обобщение. Согласно формуле (2.45) получаем

$$\tilde{G}_k^{(N)}(p_1, \dots, p_N) = \frac{\alpha \Gamma(\alpha k + \frac{N+D+1+\kappa_0}{2})}{[S_{\kappa\lambda}]^{k\alpha + \frac{N+D+1+\kappa_0}{2}}} \times \quad (2.47)$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \lambda^{3N-4} \int_{\Omega} dR \varphi^R(p_1, \lambda) \dots \varphi^R(p_N, \lambda) C(R).$$

Метод "к-перевала". Коэффициенты степенного разложения типа (2.46) могут быть получены также методом k -перевала аналогично тому, как это имело место в 0-мерном примере (2.8). При этом k -тый член разложения записывается в виде

$$G_k^{(N)}(\dots) = \frac{\int \delta\varphi \varphi_1 \dots \varphi_N e^{-S_0} \frac{1}{k!} S_{\text{I}}^k}{\int \delta\varphi e^{-S_0}} =$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{\int \delta\varphi \varphi_1 \dots \varphi_N e^{-S_0 + k \ln S_{\text{I}}}}{\int \delta\varphi e^{-S_0}} \quad (2.48)$$

Классическое уравнение движения, определяющее точку перевала, в этом случае есть

$$\frac{\delta S_0}{\delta\varphi} - \frac{k}{S_{\text{I}}} \frac{\delta S_{\text{I}}}{\delta\varphi} = 0 \quad (2.49)$$

Оно совпадает с соответствующим уравнением в методе g -перевала типа (2.16) с точностью до замены $g \rightarrow -k/S_{\text{I}}$. Квадратичная форма, которая возникает при выделении классического решения и интегрировании по квантовым флуктуациям в (2.48):

$$-\frac{1}{2} \int dx \psi(x) \left[-\Delta_4 - \frac{k}{S_{\text{I}}} S_{\text{I}}'' \right] \psi(x) - \frac{1}{2} \int dx dy \psi(x) S_{\text{I}}'(x) S_{\text{I}}'(y) \times \psi(y) \frac{k}{S_{\text{I}}^2}, \quad (2.50)$$

содержит дополнительное слагаемое по сравнению со второй вариацией действия в методе g -перевала. Роль его сводится, как мы увидим ниже, к компенсации вклада отрицательного собственного значения. В случае гамильтониана (2.15) имеем (ср. с (2.19))

$$-\frac{1}{2} \int dx \psi(x) \left[-\Delta_4 - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^2(x) \right] \psi(x) - \frac{1}{2} \int dx dy \psi(x) \times \frac{\tilde{\psi}^3(x)}{3!} \frac{\tilde{\psi}^3(y)}{3!} \psi(y) \int \tilde{\psi}^4 dx. \quad (2.51)$$

Разлагая далее $\psi(x)$ по полной системе собственных функций задачи (2.21), (2.22) и учитывая, что собственная функция, соответствующая отрицательному собственному значению, равна $\psi_{0,0}(x) = \tilde{\psi}(x) / \|\tilde{\psi}(x)\|$, а $\tilde{\psi}(x)$ есть классическое решение, удовлетворяющее уравнению $-\Delta_4 \tilde{\psi}(x) - \frac{1}{3!} \tilde{\psi}^3(x) = 0$, получаем вместо (2.51)

$$-\frac{1}{2} \sum_{\{k\}} \sum_{\{l\}}^2 E_{k,l} - 2 \sum_{0,0,0,0}^2 \quad (2.52)$$

Или с учетом того, что согласно (2.24) $E_{0,0} = -2$,

$$-\frac{1}{2} \sum_{\{k\} \neq 0} \sum_{\{k\}}^2 E_{k,e} - \sum_{0,0,0,0}^2 \quad (2.53)$$

Таким образом, роль второго слагаемого в (2.50), (2.51) сводится к изменению коэффициента перед $\sum_{0,0,0,0}^2$ так, чтобы он стал отрицательным (ср. с показателем экспоненты в числителе формулы (2.36)). В результате интегрирование по $\sum_{0,0,0,0}$ происходит вдоль действительной оси и не приводит к появлению мнимой единицы, как в (2.36).

Дальнейшая процедура вычисления интеграла (2.48) полностью совпадает с описанной выше. Выражение, полученное методом k -перевала, идентично (2.46) с точностью до замены $\Gamma(k + \frac{N+5}{2}) \rightarrow k! k^{\frac{N+3}{2}}$. Сравнение полученных формул с точными значениями коэффициентов ряда ТВ приведено в следующем разделе.

§3. Асимптотика коэффициентов ряда теории возмущений и сравнение с точными результатами

В настоящем разделе мы дадим сводку результатов вычислений асимптотик (при больших k) коэффициентов ряда теории возмущений в различных моделях квантовой механики и квантовой теории поля. Параллельно мы приводим известные точные результаты и проводим сравнение с ними.

3.1. Нульмерные аналоги

Наиболее простым нульмерным аналогом является интеграл (2.2), разобранный выше. Напомним, что полученные там формулы для точных (2.3) и приближенных ((2.9), (2.10)) коэффициентов степенного разложения $I_k, \tilde{I}_k, \hat{I}_k$ отличаются друг от друга членами порядка $1/k$ и при $k \rightarrow \infty$ монотонно стремятся друг к другу (см. также кривую $D=0$ на рис.10, стр. 45).

Весьма поучительным также оказывается интеграл

$$J(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2(1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}x)^2} \quad (3.1)$$

в котором функция $V(x) = x^2(1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}x)^2$, стоящая в экспоненте, имеет два минимума. Этот интеграл моделирует ситуацию в квантовой теории поля с потенциалом $V(\varphi) = \varphi^2(1 - g\varphi)^2$, т.е.

модель с двукратно вырожденным вакуумом. Разложение подынтегральной экспоненты в степенной ряд по γ приводит к знакопостоянному асимптотическому ряду:

$$J(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k J_k, \quad J_k = \frac{\Gamma(2k + 1/2)}{\Gamma(k+1)} \quad (3.2)$$

В то же время асимптотические значения коэффициентов \hat{J}_k , полученные методом g -перевала:

$$\hat{J}_k = 2 \cdot \frac{4^k \Gamma(k)}{\sqrt{2\pi}}, \quad (3.3)$$

в пределе $k \rightarrow \infty$ отличаются от J_k в два раза. Дело в том, что формальное разложение экспоненты по степеням γ соответствует разложению около одной из перевальных точек ($x=0$), тогда как в интеграл, вычисленный методом перевала, дают равные вклады обе перевальные точки ($x=0, x=2/\sqrt{\gamma}$).

Точное выражение для интеграла (3.1):

$$J(\gamma) = \frac{\pi}{\sqrt{4\gamma}} e^{-\frac{1}{8\gamma}} \left[I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{8\gamma}\right) + I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{8\gamma}\right) \right], \quad (3.4)$$

где $I_{\pm 1/4}$ - функция Бесселя мнимого аргумента, помимо вклада, представляемого асимптотическим рядом (3.2), содержит также слагаемое, не разложимое в ряд Тейлора по γ , пропорциональное $\exp(-\frac{1}{8\gamma})$, которое не проявляется в обычной теории возмущений. Эта ситуация типична для моделей с вырожденным минимумом.

3.2. Квантовая механика

Квантовомеханическая проблема определения уровней энергии также может быть сформулирована на языке функционального интеграла. Для гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} p^2 + V(x|g)$$

основной уровень энергии записывается в виде

$$E^{(0)}(g) = \frac{1}{2} + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{\beta} \ln \frac{\text{Tr} e^{-\beta H}}{\text{Tr} e^{-\beta H_0}} \right\}, \quad (3.5)$$

где под Tr понимается усреднение по полной системе собственных функций $\sum_n \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle$. Взятие предела позволяет выделить наименьший уровень энергии. Возникающие средние могут быть выражены через континуальный интеграл [17]:

$$\frac{\text{Tr} e^{-\beta H}}{\text{Tr} e^{-\beta H_0}} = \frac{\int_{x(0)=x(\beta)} \delta x(t) \exp \left\{ -\int_0^\beta dt \left[\frac{\dot{x}^2}{2} + V(x|g) \right] \right\}}{\int_{x(0)=x(\beta)} \delta x(t) \exp \left\{ -\int_0^\beta dt \frac{\dot{x}^2}{2} \right\}}, \quad (3.6)$$

где интегрирование идет по функциям $x(t)$, удовлетворяющим граничным условиям $x(0) = x(\beta)$. Вычисление функционального интеграла (3.6) может быть произведено как по обычной теории возмущений, так и методом перевала в функциональном пространстве.

Наиболее хорошо изученным примером является ангармонический осциллятор с потенциалом $V(x|g) = \frac{x^2}{2} + g x^4$ [18]. Вычисления методом g -перевала приводят к следующему выражению для скачка энергии основного состояния на разрезе при $g < 0$:

$$\Delta E^{(0)}(g) = i \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{3g}} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 - \frac{95}{24} g \dots \right), \quad (3.7)$$

причем в данном случае вычислена и первая поправка к перевальному выражению [19]. Отсюда получаем асимптотические оценки коэффициентов ряда ТВ [11, 19]:

$$E^{(0)}(g) = \sum_{k=0}^{\infty} g^k E_k^{(0)}, \quad E_k^{(0)} \approx -\Gamma(k+\frac{1}{2}) (3)^k \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \left(1 - \frac{95}{72} k \right). \quad (3.8)$$

(Этот результат был ранее получен в работах [20] методом ВКБ). Сравнение выражений (3.8) с первыми 75-ю точными значениями

коэффициентов приведено на рис.10 ($D=1$). Начиная с 3-го члена асимптотические формулы монотонно стремятся к точным значениям.

Формулы (3.8) могут быть обобщены на случай произвольного потенциала без вырождения и принимают вид [21]

$$E_k^{(0)} \approx -\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{2\pi^{3/2}} \sum_{l_{kl}} (-3)^k S(l_{kl}) x_+ \exp \left\{ \int_0^{x_+} dx \left[\frac{1}{\sqrt{2V(x-1)}} - \frac{1}{x} \right] \right\}, \quad (3.9)$$

где $S(l_{kl})$ означает действие на классической траектории нулевой энергии l_{kl} из точки 0 в точку x_+ (см. рис.9).

Такие траектории, так же как и в случае ангармонического осциллятора $\phi_{(1)}^4$, возникает при переходе к мнимому времени в потенциале, полученном аналитическим продолжением

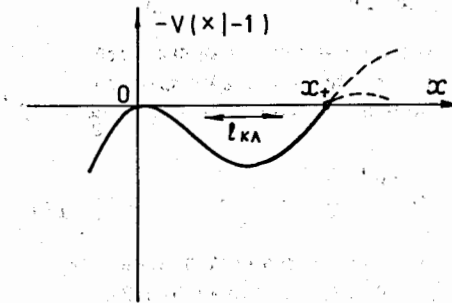


Рис.9

$V(x|g) \rightarrow V(x|-g)$. В результате в системе возникает неустойчивость основного состояния и появляется возможность туннелирования, описываемого в мнимом времени траекториями l_{kl} .

Специального рассмотрения требует случай вырожденного минимума. Метод перевала здесь обладает рядом особенностей. Подробно этот вопрос рассмотрен в обзоре [22]. В этом случае не существует классической траектории, удовлетворяющей граничным условиям

$x(0) = x(\beta)$, и основной вклад в функциональный интеграл дает квазиразрешения, соответствующие инстантон-антиинстантонной паре [23, 24]. Эти квазиразрешения, начинающиеся при $t = -\infty$ в одном вакууме, переходящие в другой и возвращающиеся при $t = +\infty$ опять в первый вакуум, являются лишь приближенными решениями уравнений движения, но удовлетворяют периодическим граничным условиям. Вычисление интеграла методом перевала вокруг таких квазиразрешений сводится к вычислению интеграла вокруг обычного решения, рассмотренному в §2. При этом происходит экспоненциально малое расщепление основного уровня, которое, в полном соответствии

с нульмерным аналогом, не улавливается обычной теорией возмущений.

Для потенциала $V(x|q)$ с двукратно вырожденным минимумом, нормированным условиями

$$V'(0|1) = 0, V''(0|1) = 1, V'(a|1) = 0, V''(a|1) = \nu^2,$$

асимптотические коэффициенты, полученные методом k -перевала вокруг квази решений указанного типа, имеют вид /21,23/

$$\tilde{E}_k^{(0)} = - \sum_{l_{k\lambda}} \frac{k! k^{\frac{1-\nu}{2\nu}}}{[2S(l_{k\lambda})]^{k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\nu}}} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2}} a^{1+\frac{1}{\nu}}}{\pi \nu^{\frac{1}{2\nu}} \Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\nu})} \times \exp \int_0^a dx \left[\frac{1}{\sqrt{2V(x|1)}} - \frac{1}{x[1-(\frac{x}{a})^\nu]} \right]. \quad (3.10)$$

В отличие от (3.9), ряд (3.10) является знакопостоянным. Это является общим свойством, присущим потенциалам с вырожденным минимумом (ср. также с (3.2)). В случае потенциала $V(x|1) = \frac{\pi^2}{2}(1-x)^2$ имеем /23/

$$\tilde{E}_k^{(0)} = -k! 3^{k+1} \frac{1}{\pi}. \quad (3.11)$$

Сравнение коэффициентов (3.11) с первыми 73 точными значениями аналогично приведенному на рис. 10 ($D=1$). Начиная с 3-го члена ряда мы опять наблюдаем монотонное стремление асимптотических формул к точным значениям.

Метод перевала в функциональном пространстве может быть также использован для получения коэффициентов разложения возбужденных уровней энергии. Модификация формулы (3.9) для p -го возбужденного уровня имеет вид /21/

$$\tilde{E}_k^{(p)} = - \frac{2^{p-1} \Gamma(k+p+\frac{1}{2}) \epsilon^k}{\pi^{3/2} p! [S(l_{k\lambda})]^{k+p+\frac{1}{2}}} \left\{ x_+ \exp \int_0^{x_+} dx \left[\frac{1}{\sqrt{2V(x|1)}} - \frac{1}{x} \right] \right\}^{2p+1} \quad (3.12)$$

3.3. Квантовая теория поля

Техника нахождения асимптотики коэффициентов ряда теории возмущений в квантовой теории поля при функциональной формулировке теории рассмотрена нами выше. Евклидовы функции Грина выражаются функциональным интегралом (2.11)

$$G_E^{(N)} = \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \rangle_0 = \frac{\int \delta\varphi \varphi_1 \dots \varphi_N e^{-S_E[\varphi]}}{\int \delta\varphi e^{-S_E[\varphi]}}$$

где евклидово действие S_E имеет вид (2.12).

Скалярные модели

Основные количественные результаты были получены в скалярных моделях, причем асимптотики коэффициентов высших порядков теории возмущений были найдены для функций Гелл-Манна-Лоу $\beta(g)$ и аномальных размерностей функций Грина.

Так, в случае логарифмических теорий с потенциалом

$$gV(\varphi) = g \frac{1}{(2N)!} \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \right)^N, \quad D = \frac{2N}{N-1}, \quad N > 2 \quad (3.13)$$

применение изложенного выше метода перевала для вычисления скачка функции $\beta(g)$ на разрезе при $g < 0$ приводит к следующему результату /25/:

$$\Delta \beta(g) = 2\pi c e^{-\frac{S_{k\lambda}}{(-g)^{\frac{1}{N-1}}} \frac{1}{(-g)^{\frac{b+1}{2(N-1)}}}} \quad (3.14)$$

Подстановка этого выражения в дисперсионный интеграл типа (2.6) дает выражение для коэффициентов ТВ, полученное также методом К-перевала /3,II/:

$$\beta(g) = \sum_{k \geq 2} g^k \beta_k, \quad \tilde{\beta}_k = [k(N-1)!] (-a)^k \cdot k \cdot b, \quad (3.15)$$

где

$$a = \frac{1}{S_{k\lambda}} = \frac{[(N-1)/2]^{N+1}}{N \pi^N (2N-1)!} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{2N}{N-1})}{\Gamma(\frac{N}{N-1})} \right\}^{N-1}, \quad b = \frac{N^2}{N-1} + \frac{N}{2} - 1. \quad (3.16)$$

Отметим, что решения с конечным действием, играющие решающую роль в методе перевала, для теорий с безразмерной константой связи типа (3.13) существуют лишь в безмассовом случае /25/.

Массовый член следует рассматривать как возмущение.

В класс теорий (3.13) при целочисленной размерности пространства попадает лишь теория $\varphi_{(3)}^6$ (случай $N=2$ будет рассмотрен особо), где известны два коэффициента разложения β -функции в случае /26/ $n=1$:

$$\beta(g) = \frac{10}{3} \frac{g^2}{(8\pi)^2} - \frac{74,52}{(8\pi)^4} g^3 + \dots \quad (3.17)$$

Знание лишь двух коэффициентов не позволяет судить об установлении асимптотики.

Значительно больше известно о модели $\varphi_{(3)}^4$. Потенциал взаимодействия имеет вид

$$gV(\varphi) = g \frac{1}{4!} \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \right)^2, \quad D=3, \quad (3.18)$$

и коэффициенты разложения β -функции равны

$$\tilde{\beta}_k = k! (-a)^k k^b c, \quad (3.19)$$

где /II/

$$a = (\pi \cdot 36,091)^{-1}, \quad b = 3 + \frac{\pi}{2}.$$

В этом случае, напротив, решение с конечным действием существует лишь, если масса не равна нулю, что является характерным для теорий с размерной константой связи /25/. Для $n=1$ коэффициент c вычислен и равен $c \approx 0,6898937$. В приложениях часто используют другую нормировку константы связи $g \rightarrow \frac{16\pi}{3} g$ /27/. В этом случае формула (3.19) может быть представлена в виде

$$\tilde{\beta}_k = (-)^k \Gamma(k + \frac{g}{2}) (0,1477422)^k \cdot 0,041175. \quad (3.20)$$

Для этой модели известны первые семь точных коэффициентов ряда ТВ /27/ ($n=1$):

$$\beta(g) = -g + g^2 - 0,4224965707g^3 + 0,3510695978g^4 - 0,376526828g^5 + 0,49554751g^6 - 0,749689g^7 + \dots \quad (3.21)$$

Сравнение их с формулой (3.20) приведено на рис.10 ($D=3$).

Большое количество результатов получено также в модели с гауссовым пропагатором в D -мерном пространстве /28/:

$$S[\varphi] = \int d^D x \left\{ \frac{\Lambda^2}{2} \varphi(x) e^{-\frac{\Delta x}{\Lambda^2} \varphi(x)} + \frac{g}{(2N)!} \varphi^{2N} \right\} \quad (3.22)$$

Приближения для коэффициентов разложения M -хвостной функции Грина

$$G^{(M)} = \sum_k G_k^{(M)} g^k$$

имеют вид

$$\tilde{G}_k^{(M)} = [k(N-1)]! (-a)^k k^b c, \quad (3.23)$$

где

$$a = \frac{(2N)^{N-1}}{(2N-1)!} \left[\frac{(2N(N-1))^{N-1}}{(2N-1)^{2N-1}} \right]^{D/2} \left\{ \frac{\Lambda^{D(N-1)-2N}}{(2\pi)^{\frac{D(N-1)}{2}}} \right\} b = \frac{D+M}{2} - 1. \quad (3.24)$$

В этой модели вычислены 8 членов ряда ТВ для $M=0,2,4$. Сравнение формул (3.23) и (3.24) с точными расчетами приведено в /28/. Наблюдается монотонное, хотя и медленное, стремление приближенных результатов к точным, причем тем лучше, чем ниже размерность пространства.

Модель $\varphi_{(4)}^4$. Наиболее хорошо изучена модель $\varphi_{(4)}^4$ с потенциалом

$$gV(\varphi) = g \frac{16\pi^2}{4!} \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \right)^2. \quad (3.25)$$

Эта модель была нами подробно рассмотрена в §2. Для функции $\beta(g)$, которая в данном случае пропорциональна производной от четыреххвостной функции Грина по $\ln p^2$ в точке нормировки, получены следующие асимптотические оценки коэффициентов /3,II,10/:

$$\beta(g) = \sum_{k \geq 2} g^k \beta_k, \quad \tilde{\beta}_k = k! (-a)^k k^b c, \quad (3.26)$$

причем

$$a=1, \quad b=3+\frac{n}{2}, \quad 16\pi^2 C = \begin{cases} 1,096. & n=1, \\ 0,543. & n=2, \\ 0,250. & n=3. \end{cases} \quad (3.27)$$

Выражения (3.26), (3.27) находятся в согласии с (3.15), (3.16). Значение коэффициента C соответствует симметричной точке вычитания четыреххвостной функции Грина: $P_i^2 = -\lambda, S = t = u = -\frac{4}{3}\lambda$. Вычисленные первые четыре коэффициента ряда ТВ модели (3.25) при $n=1$ и симметричной точке вычитания имеет вид

$$\beta(q) = \frac{3}{2}q^2 - \frac{17}{6}q^3 + 19,3q^4 - (146 \pm 2)q^5 + \dots \quad (3.28)$$

Сравнение формул (3.26), (3.27) и (3.28) представлено на рис. 10 ($D=4$). Как видно, в отличие от случаев $D=0$ и $D=1$, при $D=4$ мы еще далеки от асимптотического режима, и поправки $\sim 1/k$ еще очень велики.

Отдельный интерес представляет случай большого числа компонент n . При $n \neq 1$ формула (3.28) принимает вид

$$\beta(q) = \frac{n+8}{6}q^2 - \frac{6n+28}{12}q^3 + \frac{1,05n^2+33,51n+119,58}{8}q^4 - \frac{0,62n^3+42,1n^2+579n+1716}{16}q^5 + \dots \quad (3.29)$$

Таким образом, с ростом n точные коэффициенты β_k растут как n^{k-1} . В то же время приближенные значения ведут себя как

$$\beta_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta_k^{(1)} \left(\frac{n}{3}\right)! / \left(\frac{n}{2}\right)! \cdot n^2 \gamma^n \rightarrow 0$$

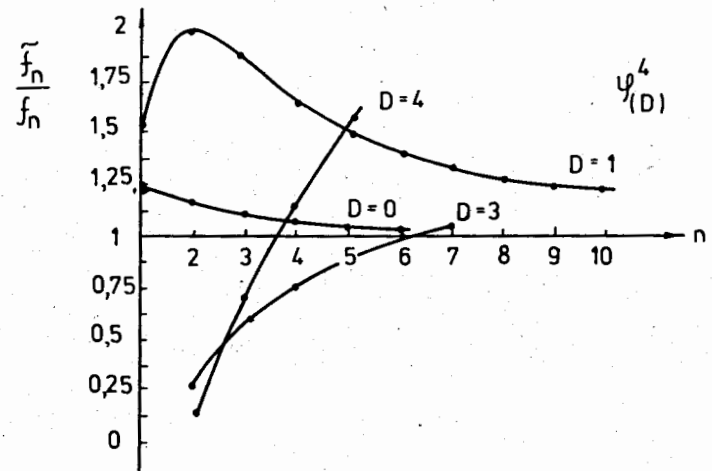


Рис. 10

Это различие, возможно, связано с тем, что при вычислении асимптотических коэффициентов методом перевала мы учитывали лишь одно перевальное решение уравнений движения. В случае $n \neq 1$ в работе /30/ получены и другие перевальные точки, отличающиеся изотопической структурой и имеющие большее значение действия. Поэтому при малых значениях n эти решения оказываются несущественными, однако при $n \rightarrow \infty$ они могут дать неисчезающий вклад.

Критические индексы

Задача нахождения бета-функции и аномальных размерностей в модели φ^4 тесным образом связана с описанием критических явлений в окрестности точки фазового перехода в рамках теоретико-полевого подхода /31/. Критические индексы, характеризующие поведение различных статфизических величин вблизи критической температуры T_c , выражаются через аномальные размерности функций Грина модели φ^4 в инфракрасно-стабильной точке.

Так, например, корреляционная функция Γ и корреляционная длина ξ в окрестности точки фазового перехода подчиняются следующему скейлинговому закону:

$$\Gamma(\vec{x}) \sim |\vec{x}|^{2-D-\gamma}, \quad T = T_c,$$

$$\xi \sim t^{-\nu} (1 + \text{const} \cdot t^{\omega\nu} + \dots), \quad t \equiv T - T_c,$$

где D - размерность пространства, а T - температура, причем критические индексы γ , ν и ω связаны с аномальными размерностями функций Грина соотношениями ^{/32/} x

$$\gamma = 2\gamma_2(q_0), \quad \nu^{-1} = 2(1 - \gamma_m(q_0)), \quad \omega = 2\beta'(q_0). \quad (3.30)$$

Здесь γ_2 и γ_m - аномальные размерности пропагатора и массы соответственно.

Другие критические индексы, определяющие поведение, например, удельной теплоемкости или магнитной восприимчивости, соответственно α и χ , связаны с введенными выше линейными соотношениями ^{/31/}.

Существуют два несколько отличающихся подхода к нахождению критических индексов методами теории поля. В первом аномальные размерности вычисляются непосредственно в трехмерном пространстве (модель (3.18)). В этом случае критические индексы, определяемые согласно (3.30) так же, как и β -функция (3.21), представляются асимптотическими рядами по g типа (3.19), причем метод k -перевала дает следующие значения параметров ^{/11/}:

^X Эти соотношения несколько отличаются в разных работах, что связано с нормировкой γ_i и β (см., например, ^{/31/}).

$$a = 0,1477422, \quad b = \begin{cases} 3 + \frac{n}{2} & \text{для } \beta(g), \\ 2 + \frac{n}{2} & \text{--- } \gamma(g), \\ 3 + \frac{n}{2} & \text{--- } \nu^{-1}(g), \\ 5 + \frac{n}{2} & \text{--- } \omega(g). \end{cases} \quad (3.31)$$

Вычисленные первые точные значения коэффициентов имеют вид ^{/27/} ($n=1$)

$$\gamma(g) = 0,0109739369g^2 + 0,0009142223g^3 + 0,0017962229g^4 - 0,0065370g^5 + 0,0013878g^6, \quad (3.32)$$

$$\nu^{-1}(g) = 2 - \frac{1}{3}g + 0,063100137g^2 - 0,045224475g^3 + 0,037723346g^4 - 0,043746665g^5 + 0,058975378g^6 \text{ и т.д.}$$

Инфракрасно-стабильная точка определяется нулем β -функции (3.21), и для нахождения критических индексов нужно подставить значение $g = g_0$ в формулы (3.32).

Второй подход основан на так называемом ϵ -разложении Вильсона ^{/31/}. В этом случае аномальные размерности вычисляются в модели φ^4 в пространстве $4-\epsilon$ измерений. Инфракрасно-стабильная точка g_0 определяется нулем функции $\beta_\epsilon(g) = -\epsilon g + \beta(g)$, где $\beta(g)$ есть функция Гелл-Манна-Лоу модели $\varphi^4(4)$ в схеме минимальных вычитаний. Знание β -функции и аномальных размерностей γ_i позволяет построить ϵ -разложение Вильсона для критических индексов, имеющее вид асимптотического ряда по ϵ типа

$$\sum_k \epsilon^k k! (-a)^k \cdot k^b \cdot c,$$

причем метод асимптотических оценок дает значения параметров /11/

$$a = \frac{3}{n+8}, \quad b = \begin{cases} 4 + \frac{n}{2} & \text{для } g_0(\epsilon), \\ 3 + \frac{n}{2} & \text{--- } \eta(\epsilon), \\ 4 + \frac{n}{2} & \text{--- } \nu^{-1}(\epsilon), \\ 5 + \frac{n}{2} & \text{--- } \omega(\epsilon). \end{cases} \quad (3.33)$$

Точные значения коэффициентов ϵ -разложения для этих величин имеют вид ($n=1$) /32/

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\epsilon^2}{54} \left[1 + \frac{109}{108} \epsilon + \epsilon^2 \left(\frac{7217}{11664} - \frac{8}{9} \zeta(3) \right) \right] + O(\epsilon^5), \\ \nu^{-1} &= 2 - \frac{\epsilon}{3} - \frac{19}{162} \epsilon^2 - \left(\frac{937}{17496} - \frac{4}{27} \zeta(3) \right) \epsilon^3 - \\ &- \left(\frac{24857}{1889568} + \frac{40}{81} \zeta(5) - \frac{1}{9} \zeta(4) - \frac{119}{1458} \zeta(3) \right) \epsilon^4 + O(\epsilon^5), \\ \omega &= \epsilon - \frac{17}{27} \epsilon^2 + \epsilon^3 \left(\frac{1603}{2916} + \frac{2}{9} \zeta(3) \right) - \left(\frac{178417}{314928} + \right. \\ &+ \left. \frac{158}{243} \zeta(3) + \frac{40}{9} \zeta(5) - \frac{2}{3} \zeta(4) \right) \epsilon^4 + O(\epsilon^5) \end{aligned} \quad (3.34)$$

и т.д.,

где $\zeta(n)$ - дзета-функция Римана.

В конце нужно вернуться к физической размерности пространства $D=3$, т.е. значений $\epsilon=1$. Однако ввиду асимптотического характера ϵ -разложения непосредственная подстановка значения $\epsilon=1$ в формулы (3.34) приводит к очень неустойчивым результатам. То же самое относится к рядам (3.32) при $g=g_0$. Поэтому для вычисления критических индексов на основе формул (3.32) или (3.34) используются специальные методы суммирования асимптотических рядов, рассмотренные нами ниже в §4.

Спинорные и векторные поля

Результаты, полученные в моделях, включающих спинорные и векторные поля, заметно скромнее. Это относится прежде всего к методу асимптотических оценок коэффициентов высших порядков, что связано с усложнением структуры вакуума в таких теориях, с трудностью решения классических уравнений движения и вычисления квантовых поправок. Поэтому сравнение с первыми точными членами ряда ТВ здесь затруднено.

В модели скалярной электродинамики

$$H = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + |(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi|^2 + \frac{4\pi^2}{2} g |\phi|^4 \quad (3.35)$$

для функции Грина получены следующие оценки /33/:

$$\tilde{G} \sim \sum_k \left(\frac{d}{\pi} \right)^k k! (-0,0808)^k \cdot k^b \cdot c, \quad d \equiv \frac{e^2}{4\pi} \quad (3.36)$$

(в пренебрежении четверным взаимодействием) и /34/

$$\begin{aligned} \tilde{G} &\sim \sum_{k,l} \left(\frac{d}{\pi} \right)^{k+l} g^k \tilde{G}_{k,l}; \quad \tilde{G}_{k,l} = (-)^{k+l} \left(\frac{k}{4e} \right)^k \left(\frac{l}{4e} \right)^l \left[c \left(\frac{l}{k} \right) \right]^{k+l} \\ &c \left(\frac{l}{k} \right) \approx \left(1 + \frac{2k}{l} \right) \frac{2k+l}{k+l} \left(\frac{3l^2}{k^2} \right)^{\frac{k}{k+l}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

В неабелевой калибровочной теории в случае группы $SU(2)$ получена оценка коэффициентов разложения β -функции /24,22/:

$$\beta(g^2) \sim \sum_k (g^2)^k \beta_k, \quad \tilde{\beta}_k = -\Gamma\left(k + \frac{35}{3}\right) \frac{c}{(16\pi^2)^{k-1}} \quad (3.38)$$

Ряд в данном случае является знакопостоянным, что, как мы увидим ниже, является отражением бесконечнократного вырождения вакуума в неабелевой теории /35/. Здесь, как и в примерах (3.10), (3.11), перевальными конфигурациями, дающими основной вклад в функциональный интеграл, являются квазирешения типа инстантон-антиинстантонной пары.

Приведем для сравнения известные три члена ряда ТВ /36,37/:

$$\beta(q^2) = -\frac{11}{3} C_2 \frac{g^4}{16\pi^2} - \frac{34}{3} C_2^2 \frac{g^6}{(16\pi^2)^2} - \frac{2857}{54} C_2^3 \frac{g^8}{(16\pi^2)^3}, \quad (3.39)$$

где C_2 — квадратичный оператор Казимира, для группы $SU(n)$ равный n . Сравнение коэффициентов (3.38) и (3.39) осложняется тем, что из-за большой величины отношения $35/3$ запись формулы (3.38) в виде Γ -функции или в виде факториала и степени приводит при малых k к существенно различным результатам.

В моделях с фермионами также есть ряд оценок. Так, в модели Джавы в пренебрежении четверным взаимодействием в D -мерном пространстве для функции Грина имеем ^{/38,39/}

$$G \sim \sum_k (q^2)^k G_k, \quad \tilde{G}_k = \cos \frac{2\pi k}{D} \Gamma(k(1-\frac{2}{D})) a_D^k, \quad 2 < D < 4, \quad (3.40)$$

$$\tilde{G}_k = \Gamma(\frac{k}{2}) (\ln k)^k (-a_4)^k, \quad D=4,$$

а в КЭД в 4-мерном пространстве ^{/39,40/}

$$\tilde{G}_k \sim (-)^k \Gamma(\frac{k+\nu}{2}) a^{k+\nu}. \quad (3.41)$$

Сравнение с точными результатами здесь пока также затруднено.

§4. Задача восстановления функции

Мы рассмотрим теперь задачу восстановления функции $f(q)$ переменной константы связи, отправляясь от:

а) известных точных первых членов степенного разложения

f_k и

б) асимптотики коэффициентов \tilde{f}_k при больших k

с целью определения поведения функции $f(q)$ при $q \gg 1$. Мы видели, что спектральная формула типа (2.43) не может служить этой цели, так как правильно передает поведение $f(q)$ только в области $q < 1$. Поэтому мы рассматриваем ее как источник получения информации об асимптотике коэффициентов f_k с помощью метода g -перевала. Отметим также, что сам факт существования спектрального представления типа Коши предполагает

наличие определенных аналитических свойств у функции $f(q)$, которые в большинстве интересных случаев не являются точно установленными (см. ниже). Задачу комбинирования информации из двух источников мы кратко будем называть "задачей восстановления". Она осложняется асимптотическим характером рядов, составленных из коэффициентов \tilde{f}_k .

4.1. Улучшенная теория возмущений

Наиболее наивный способ действия состоит в представлении искомой функции f в виде суммы:

$$f(q) = \sum_{k=k_0}^N (f_k - \tilde{f}_k) q^k + \sum_{k=k_0}^{\infty} \tilde{f}_k q^k \quad (4.1)$$

при условии $f_k - \tilde{f}_k \approx 0$, при $k \geq N$.

Выполняя тем или иным способом суммирование во втором члене

$$\sum_k \tilde{f}_k q^k = \tilde{f}(q),$$

получаем

$$f(q) = P_N(q) + \tilde{f}(q), \quad P_N(q) = \sum_k q^k (f_k - \tilde{f}_k). \quad (4.2)$$

Как нетрудно показать, добавление к асимптотическим коэффициентам малых поправок $\tilde{f}_k \rightarrow \tilde{f}_k (1 + a/k)$ приводит к модификации суммы $\tilde{f}(q) \rightarrow \tilde{f}(q) (1 + aq)$, которая в области $q \gg 1$ не является малой. Поэтому этот простой метод не дает реального результата.

4.2. Метод Бореля

Интегральное представление. Основная трудность, связанная с факториальным ростом коэффициентов, обычно преодолевается путем использования интегрального преобразования Лапласа. Допустим, что функция $f(q)$ может быть представлена в виде

$$f(q) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{q} e^{-\frac{x}{q}} B(x). \quad (4.3)$$

Тогда степенной ряд для

$$B(x) = \sum_k \frac{f_k}{k!} x^k$$

может оказаться сходящимся в некоторой области. Такой метод суммирования под знаком интеграла Лапласа называется методом Бореля ^{/5/}. Метод Бореля допускает некоторые простые модификации, например,

$$f(q) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{q} e^{-\frac{x}{q}} \left(\frac{x}{q}\right)^{\alpha-\gamma} \left(x \frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma} B^{(\alpha, \gamma)}(x), \quad (4.4)$$

причем

$$B^{(\alpha, \gamma)}(x) = \sum_k x^k \frac{f_k}{\Gamma(k+1+\alpha-\gamma) k^{\gamma}}, \quad (4.5)$$

что позволяет получать желаемую степень убывания коэффициентов ряда для $B^{(\alpha, \gamma)}(x)$.

Метод Бореля позволяет однозначно восстановить функцию по ее асимптотическому ряду в том случае, если она представима в виде (4.3). Согласно теореме Ватсона ^{/41/} функция $f(q)$ может быть представлена в виде (4.3), если она удовлетворяет так называемому "сильному асимптотическому условию", означаящему, что:

а) функция $f(q)$ аналитична в области

$$D = \left\{ q \mid 0 < |q| < R, |\arg q| < \frac{\pi}{2} + \delta, \delta > 0 \right\},$$

б) ошибка, получаемая при обрывании суммы ряда ТВ на конечном числе членов:

$$f(q) = \sum_k^{N-1} f_k q^k + R_N(q),$$

равномерно ограничена в этой области следующим образом:

$$R_N(q) = O(N! q^N c^N N^{\alpha}) \text{ равномерно } \forall q \in D.$$

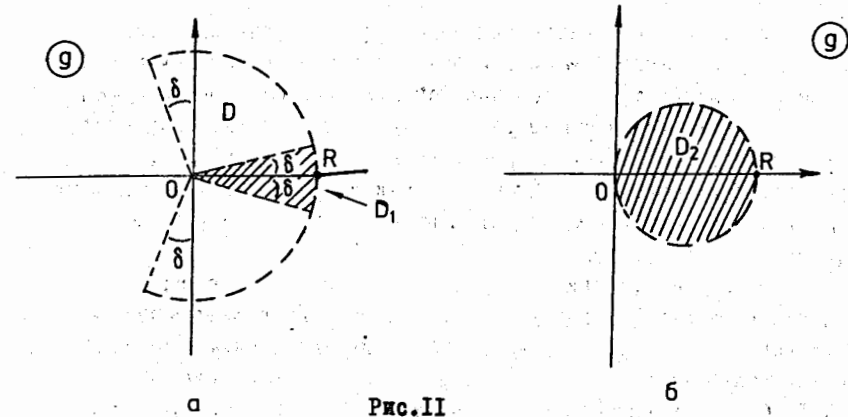


Рис. II

В случае, если функция удовлетворяет этим условиям, она может быть представлена в виде (4.3) в области $D_1 = \{q \mid 0 < |q| < R, |\arg q| < \delta\}$ (см. рис. IIa). Однако теорема Ватсона является только достаточным условием применимости метода Бореля. Недавние исследования установили ^{/42/}, что она может быть ослаблена требованием аналитичности функции в меньшей области $D_2 = \{q \mid \operatorname{Re} \frac{1}{q} > \frac{1}{R}\}$ (см. рис. IIб).

Проблема обоснования. Как легко убедиться, из вида асимптотики коэффициентов ряда ТВ при больших k :

$$\tilde{f}_k = k! (-\alpha)^k k^b c \quad (4.6)$$

вытекает справедливость второго условия из теоремы Ватсона. Доказательство же первого условия даже в ослабленном виде представляет собой значительную проблему и требует привлечения дополнительных соображений, связанных с физической сущностью рассматриваемой задачи.

Вид асимптотики коэффициентов \tilde{f}_k (4.6) позволяет определить положение и характер ближайшей особенности в плоскости борелевской переменной x . Так, ближайшая особенность функции $B^{(\alpha, \gamma)}(x)$ (4.5) при учете (4.6) находится в точке $x = -\frac{1}{\alpha}$, где $B^{(\alpha, \gamma)}(x)$ ведет себя как $(1+\alpha x)^{\alpha-b-1}$ или как $\ln(1+\alpha x)$, если $\alpha = b+1$ ^{/43/}. Таким образом, в случае знакопеременного ряда ($\alpha > 0$) особенность лежит в левой полуплоскости, интеграл (4.4) существует, и функция $f(q)$ суммируема по Борелю.

В случае же знакопостоянного ряда ($g < 0$) особенность лежит справа на пути интегрирования, и функция оказывается несуммируемой по Борелю. Наличие таких особенностей является сигналом о существовании вкладов в $f(g)$, не разложимых в ряд теории возмущений по g , которые, в свою очередь, являются проявлением физических особенностей задачи ^{/44/}. К такого рода вкладам приводит, как мы видели, учет инстантонных конфигураций, связанных со свойствами вакуума теории.

Так, если гамильтониан не ограничен снизу, то не существует основного состояния, а вакуум теории возмущений является метастабильным за счет туннелирования. Энергия имеет мнимую часть, пропорциональную амплитуде туннелирования, которая ведет себя как $e^{-1/g}$. Эта ситуация характерна для теорий с "неправильным" знаком константы связи (см. рис. I2a). Наглядной демонстрацией является модельный интеграл (2.2). При $g < 0$ у функции Макдональда появляется мнимая часть с характерной зависимостью типа $e^{-1/g}$.

Другой пример дает система с несколькими вырожденными минимумами, разделенными потенциальными барьерами (несколькими потенциальными ямами). Энергия нижнего состояния такой "системы ям" отличается от энергии нижнего состояния каждой из ям на экспоненциально малую величину ΔE , соответствующую возможности туннельного перехода между ямами (см. рис. I2б).

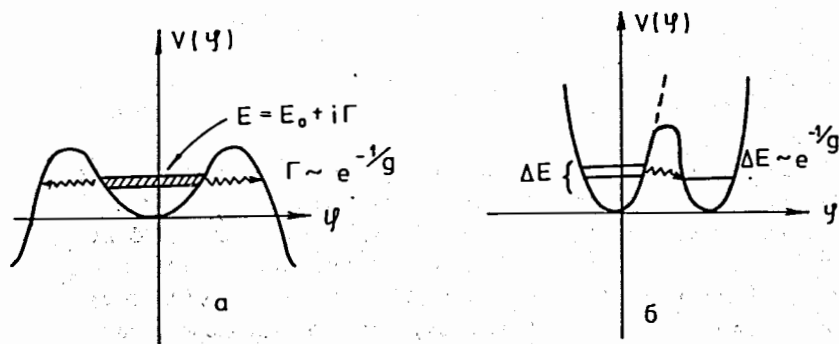


Рис. I2

Подобную картину мы наблюдаем и в случае модельного интеграла (3.1), где интерференция между двумя минимумами приводит к появлению экспоненциально малых вкладов $\sim e^{-1/g}$, а также в квантовомеханическом потенциале с вырождением. Теория Янга-Миллса сейчас представляется именно такой теорией, где туннелирование между различными вакуумами осуществляется за счет инстантонных конфигураций ^{/35,39/}.

К сожалению, в задачах квантовой теории поля не существует доказательства того, что функции Грина удовлетворяют сильному асимптотическому условию по константе связи. Их аналитические свойства по g неизвестны, что не позволяет проверить выполнение условия а) из теоремы Ватсона. Однако в квантовомеханической задаче определения уровней энергии ангармонического осциллятора (модель $\phi^4_{(1)}$), в двумерных и трехмерных моделях квантовой теории поля (модель $\phi^4_{(2)}, \phi^4_{(3)}$) суммируемость по Борелю доказана ^{/45,46/}. Единое представление функций Грина в этих моделях и в более реалистичной модели $\phi^4_{(4)}$ с помощью одинакового функционального интеграла позволяет надеяться на правомерность суммирования по Борелю и в этом случае. Увеличение размерности пространства приводит к одной существенной разнице - наличию расходимостей и необходимости процедуры перенормировок. Существуют аргументы в пользу того, что это может привести к наличию дополнительных сингулярностей в g -плоскости ^{/47/} и к появлению полюсов на пути интегрирования в (4.4), получивших название ренормалонов ^{/48/}.

Происхождение термина "ренормалонны" связывают с существованием определенного класса диаграмм, содержащих расходящиеся подграфы, дающие вклад в перенормировки. Так, например, в модели $\phi^4_{(4)}$ соответствующая последовательность диаграмм изображена на рис. I3.

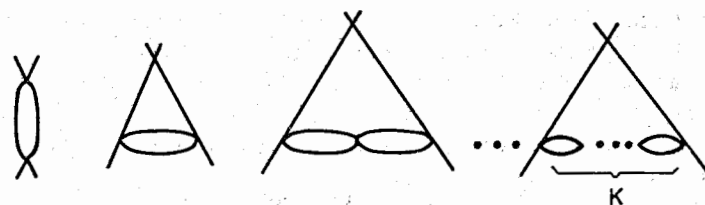


Рис. I3

Диаграмма, содержащая k петлевых вставок, дает аномально большой вклад $\sim k!$, конкурирующий с вкладом всех остальных диаграмм данного порядка ^{/48/}. В отдельных случаях диаграммы этого типа могут приводить к факториально растущему знакопостоянному ряду, что, как мы видели, приводит к полвсам на пути интегрирования в борелевской плоскости. Такая ситуация имеет место, например, при вычислении аномального магнитного момента в КЭД ^{/49/}. Эту трудность в ряде случаев можно обойти, изменяя контур интегрирования в x -плоскости ^{/50,51/}. Однако упомянутые аргументы не носят доказательного характера, и дополнительные сингулярности могут и не возникнуть. Например, в модели $\varphi^4(4)$ ряд ТВ для β -функции определяется только коэффициентами перед младшими логарифмическими членами. Для диаграмм, изображенных на рис.13, эти коэффициенты являются знакопеременными, хотя и факториально растущими, и, следовательно, не приводят к полвсу в правой части борелевской плоскости. Таким образом, в задаче восстановления β -функции особенности ренормального типа не возникают.

Приведенные соображения, равно как и аналоги в низшем числе измерений, не могут служить, конечно, обоснованием применимости или не применимости метода Бореля. Но они являются вескими аргументами в пользу того или другого. Поэтому применение метода суммирования по Борелю к асимптотическим рядам КТП всегда есть дополнительный Ansatz. Как мы увидим, в ряде случаев он приводит к весьма разумным результатам.

Аналитическое продолжение. В итоге задача сводится к определению борелевского образа $B(x)$, заданного степенным рядом (4.5), сходящимся в области $|x| < \frac{1}{|a|}$, причем характер и положение ближайшей особенности, ограничивающей круг сходимости, находятся из асимптотических формул для коэффициентов разложения типа (4.6). Необходимо продолжить функцию $B(x)$ из области, заданной степенным рядом, на весь бесконечный интервал интегрирования. Обычно такое аналитическое продолжение выполняется либо с помощью паде-аппроксимации ^{/52/}, либо с помощью конформного отображения.

В первом случае функция $B(x)$ приближенно представляется в виде отношения

$$B(x) \rightarrow B_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad (4.7)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — полиномы степени n и m соответственно. Коэффициенты этих полиномов определяются из разложения (4.7) в ряд по x и условия соответствия с формулой (4.5). При этом выполняется соотношение $n+m=N$, где N — число членов ряда (4.5). Наилучшего приближения, как правило, удается добиться, когда $n=m$ или $n=m-1$. Согласно структуре паде-аппроксиманта (4.7) метод оказывается удачным для функций, хорошо аппроксимируемых набором полвсов. Основным недостатком метода Паде является то, что представление (4.7), вообще говоря, неправильно передает аналитические свойства функции, т.е. искажает ее особенности. В некоторых случаях паде-аппроксиманты обладают полвсами, не имеющими отношения к реальной функции.

Указанными недостатками не обладает метод аналитического продолжения, основанный на конформном отображении. Он позволяет учесть не только факториальный характер роста коэффициентов ряда ТВ, но и структуру особенности в плоскости борелевской переменной, которая, как указывалось выше, является точкой ветвления типа $(1+ax)^{a-b-1}$ и служит началом разреза. Для знакопеременного ряда ($a > 0$) разрез проходит вдоль отрицательной части действительной оси от $x = -\frac{1}{a}$ до $-\infty$. Аналитическое продолжение функции $B(x) = \sum_k^N B_k x^k$ из круга сходимости на бесконечный интервал интегрирования $[0, \infty)$ осуществляется посредством конформного отображения $x \rightarrow w$, такового, что разрезанная плоскость борелевской переменной отображается во внутренность некоторой области, где функция не имеет особенностей, а разрез $[-\frac{1}{a}, -\infty)$ переходит в границу этой области. Обычно такой областью является круг единичного радиуса (см. рис.14).



Рис.14

Конформное отображение выбирается таким образом, чтобы новая переменная имела особенность, совпадающую с особенностью функции $B(x)$. После этого производится переразложение функции $B(x(w))$ в ряд Маклорена по w , в котором оставляется ровно столько членов, сколько их было в исходном. При этом очень существенным оказывается поведение $B(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Дело в том, что оборванный ряд Маклорена по переменной $w(x)$ при $x \rightarrow \infty$ стремится к константе. В то же время степенной рост борелевского образа $B(x) \sim x^\lambda$ при $x \rightarrow \infty$ отвечает степенному росту исходной функции $f(q) \sim q^\lambda$ при $q \rightarrow \infty$. Поэтому оказывается возможным фиксировать независимо показатель степени λ . Для этого следует применить описанную процедуру конформного отображения не к $B(x)$, а к функции $x^{-\lambda} B(x)$, т.е. положить

$$B(x) \rightarrow B_\lambda[x(w)] = \frac{x^\lambda}{w^\lambda} \sum_k^N w^k B_k^{(\lambda)}. \quad (4.8)$$

Такая процедура "обобщенного конформного отображения" была апробирована на ряде задач с известной асимптотикой суммы $f(q) \sim q^\lambda$ при $q \rightarrow \infty$. В работе ^{/53/} был предложен способ численного определения параметра λ из условия наименьшей сходимости процедуры для функции $f(q)$ с ростом N . Для этого ищется минимум модуля относительной ошибки:

$$\Delta_N(q) = 1 - \frac{f_{N-1}(q)}{f_N(q)} \quad (4.9)$$

при произвольном $q > 1$, где $f_N(q)$ получена с учетом N членов ряда ТВ. Численный эксперимент показывает наличие резкого минимума величин $|\Delta_N|$ при близких значениях λ для всех N . Такой анализ был проведен для ангармонического осциллятора $\varphi^4(1)$, для модели с гауссовым пропагатором (3.22) и для уравнения Томаса-Ферми, где известно поведение при $q \rightarrow \infty$. Во всех случаях наблюдался резкий минимум величин $|\Delta_N|$ при значениях λ , согласующихся с асимптотикой при $q \rightarrow \infty$ (см. также ^{/54/}).

4.3. Применение к задачам квантовой физики

Дадим теперь беглый обзор исследований, в которых рассматривались различные задачи квантовой физики в рамках сформулированной выше "задачи восстановления".

Улучшенная теория возмущений. Как уже указывалось, простейший вариант состоит в представлении искомой функции в виде (4.1), причем последняя сумма вычисляется по методу Бореля. Такой способ получил название улучшенной теории возмущений (УТВ). При этом предполагается, что разность $f_k - \tilde{f}_k$ довольно быстро стремится к нулю с ростом k .

УТВ была применена к ряду точно решаемых примеров, для которых коэффициенты \tilde{f}_k имеют вид (4.6) ^{/55/}. Так, в задаче взаимодействия электромагнитного поля с вакуумом заряженных частиц максвелловский лагранжиан приобретает нелинейную поправку (лагранжиан Гайзенберга-Эйлера), имеющую вид степенного ряда от переменной $e^2(N^2 - E^2)/m^4$ с коэффициентами вида $\tilde{f}_k = (-)^k 2(2k-3)! \pi^{-2k}$. В задаче определения уровней энергии электрона в ядре вблизи границы континуума возникает уравнение, где левая часть разлагается в степенной ряд с коэффициентами $\tilde{f}_k = -(2k)! (-4)^{-k} \pi^{-2k-1} k$. При решении релятивистского уравнения Томаса-Ферми, описывающего потенциал в вакуумной оболочке сверхкритического атома, возникает аналог функции Гелл-Манна-Лоу, которая представляется степенным рядом с коэффициентами $\tilde{f}_k = k! k^{7/2} (-2)^k c$. Все эти примеры допускают точное решение и позволяют проверить, насколько функции УТВ правильно описывают его поведение. УТВ применялась также к задаче определения основного уровня энергии ангармонического осциллятора ^{/55/} и к квантово-полевой задаче построения функции $\beta(q)$ в модели $\varphi^4(4)$ ^{/56/}.

Как правило, УТВ позволяет аппроксимировать точное решение в более широком интервале q , чем полиномы обычной ТВ. Однако в силу медленного установления асимптотики в большинстве случаев и главным образом за счет упомянутого влияния поправок $\sim 1/k$ УТВ не дает реального продвижения в область $q \gg 1$.

Метод Паде и Паде-Бореля. Некоторого расширения области применимости УТВ удается добиться, применяя к первой сумме в (4.1) метод Паде. Однако в силу асимптотического характера рассматриваемого ряда разность

$$f_k - \tilde{f}_k \sim k! a^k k^{b-1}$$

также имеет факториальный рост, вследствие чего метод Паде в случае УТВ, как и в случае обычной ТВ, лишь незначительно улучшает аппроксимационные свойства ^{/57/}. Естественным обобщением этого метода является так называемый метод Паде-Бореля, в котором сначала производится преобразование Бореля, а затем к борелевскому образу полиномов УТВ применяется метод Паде. Существенным моментом здесь является то, что метод Паде применяется уже к сходящемуся ряду. Применение метода Паде-Бореля позволяет примерно на порядок расширить интервал применимости ТВ (до $g \sim 10$) в задаче об основном уровне ангармонического осциллятора $\varphi^4_{(1)}$ ^{/57, 58/} и примерно в два раза (до значений $g/16\pi^2 \sim 0,6$ ^{/57/}) в задаче восстановления функции Гелл-Манна-Лоу в модели $g\varphi^4/4!$ в 4-мерном пространстве при 15% точности. Однако в силу упоминавшихся выше недостатков метода паде-аппроксимации метод Паде-Бореля приводит к искажению аналитических свойств борелевского образа, а следовательно, и искомой функции. Помимо этого представление (4.7) не учитывает поведение функции $B(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Метод конформ-Бореля. Рядом преимуществ обладает метод, объединяющий преобразование Бореля с конформным отображением под знаком интегрального представления, который для краткости будем называть "методом конформ-Бореля". Он является более гибким, чем предыдущие, и позволяет учесть характер особенности в x -плоскости, а также удовлетворить условию соответствия коэффициентов разложения полученной функции асимптотическим оценкам ^{/53/}. В рамках этого метода можно фиксировать значение параметра λ в (4.8) из соображений быстрой сходимости ряда последовательных приближений.

Этот метод успешно применялся к задачам вычисления критических индексов фазовых переходов в модели $\varphi^4_{(3)}$ ^{/58/} и в рамках ϵ -разложения Вильсона ^{/32/}, а также для восстановления бета-функции в модели $g\varphi^4_{(4)}$ в области $g \gtrsim 1$ ^{/53/}.

При этом функции вычислялись согласно формулам (4.4), (4.8) при варьировании параметров α , γ и λ . Конформное отображение выбиралось в виде

$$w(x) = \frac{\sqrt{1+\alpha x} - 1}{\sqrt{1+\alpha x} + 1}, \quad (4.10)$$

что соответствует корневому ветвлению функции $B(x)$ в точке $x = -\frac{1}{\alpha}$. Такой выбор, конечно, является далеко не единственным. Вообще, при произвольном характере ветвления типа $(1+\alpha x)^\nu$ конформное отображение удобно выбирать в виде

$$w(x) = \frac{(1+\alpha x)^\nu - 1}{(1+\alpha x)^\nu + 1} \quad (4.11)$$

Оно удовлетворяет всем необходимым требованиям.

§5. Физические результаты

Остановимся на физических результатах, полученных описанными выше методами в двух задачах квантовой физики: вычислении критических индексов фазовых переходов в рамках полевого подхода к критическим явлениям и определении высокоэнергетического поведения функций Грина в модели $\varphi^4_{(4)}$ квантовой теории поля.

5.1. Критические индексы

Первая задача решалась в рамках модели $\varphi^4_{(3)}$ методом Паде-Бореля ^{/27/} и методом конформ-Бореля ^{/58/}, а в рамках ϵ -разложения - методом конформ-Бореля ^{/32/}. Результаты этих работ, а также их сравнение с экспериментальными данными приведены в таблице I.

Таблица 1. Критические индексы ($O(n)$ φ^4 -модель)

	Конформ-Борель ϵ -разложение /32/	Конформ-Борель /58/ $\varphi^4(3)$	Паде-Борель /27/ $\varphi^4(3)$	Эксперимент /58/
$n=1$	η 0,0333±0,0001 ν 0,628 ±0,002 ω 0,781± 0,015	0,0315±0,0025 0,6300±0,0008 0,782± 0,010	0,021±0,02 0,627±0,01	0,016±0,14 0,625±0,005
$n=2$	η 0,0352±0,0001 ν 0,666 ±0,004 ω 0,779 ±0,015	0,0335± 0,0025 0,6693±0,0010 0,778 ±0,008		0,675±0,001
$n=3$	η 0,0354±0,0001 ν 0,700 ±0,007 ω 0,779 ±0,007	0,0340±0,0025 0,7054±0,0011 0,779 ±0,006		

Указанные здесь ошибки теоретических расчетов связаны с обрывом ряда ТВ и соответствуют учету последнего известного члена ряда. Относительные ошибки вычисляются согласно формуле (4.9). Мы видим, что использование метода конформ-Бореля позволяет добиться очень хорошей точности и получить согласованные результаты в обоих теоретических подходах.

Отметим, что в этих подходах суммировались существенно различные ряды ТВ, а именно: в первом случае ряда по g , а во втором - по ϵ . Результаты ТВ нужно было продолжить до нуля β -функции в первом случае и до $\epsilon=1$ - во втором. Замечательное согласие результатов обоих подходов свидетельствует об эффективности использованного метода суммирования.

Подчеркнем в связи с этим еще раз, что одним из важнейших моментов описанного выше метода суммирования, основанного на преобразовании конформ-Бореля, является фиксирование параметра λ , определяющего асимптотику функции на бесконечности. Зависимость критических индексов от выбора параметра λ в случае ϵ -разложения иллюстрируется в таблице 2 ($n=1$)/32/.

Таблица 2

λ	η	ν	ω	λ	η	ν	ω
0	0,0259	0,617	0,764	2	0,0334	0,630	0,679
1	0,0312	0,627	0,777	3	0,0334	0,638	-0,150

Использование критерия минимизации относительной ошибки дало в этих случаях следующие значения параметра λ :

$$\lambda = \begin{cases} 2,8 \div 2,9 & \text{для } \eta \\ 1,2 \div 1,3 & \text{--- } \nu^{-1} \\ 0,5 \div 0,6 & \text{--- } \omega \end{cases} \quad (5.1)$$

Интересно также проследить изменение значений критических индексов в зависимости от количества учтенных членов ряда ТВ. В таблице 3 приведены значения индексов (для $n=1$), полученные как непосредственной подстановкой значения $\epsilon=1$ в формулы (3.34), так и с применением метода суммирования (соответственно $\eta_N^{TB}, \nu_N^{TB}, \eta_N, \nu_N$). Как видно из таблицы, использование

Таблица 3

	N				N			
	1	2	3	4	1	2	3	4
η_N^{TB}	0,0185	0,0372	0,0289		ν_N^{TB} 0,6	0,645	0,597	0,731
η_N	0,0320	0,0332	0,0333		ν_N 0,620	0,626	0,625	0,628

специальных методов суммирования радикальным образом улучшило аппроксимирующие свойства ТВ.

5.2. Ультрафиолетовые асимптотики

Задача определения высокоэнергетических асимптотик в модели $\varphi^4(4)$ в рамках метода ренормгруппы сводится к задаче восстановления функции Гелл-Манна-Лоу. Главным интересом представляет вопрос о существовании нетривиального нуля у бета-функции и вид асимптотики $\beta(g)$ при $g \rightarrow \infty$.

Эта задача решалась методами УТВ /55,56/, Паде-Бореля /57/ и методом конформ-Бореля /53/. Наилучшего продвижения в область $g \gg 1$ удалось достигнуть последним методом. В модели с взаимодействием вида $\frac{16\pi^2}{4!} g \varphi^4$ он позволил восстановить бета-функцию вплоть до $g \sim 50$ с 10% точностью, т.е. увеличил область применимости на 2 порядка по сравнению с обычной ТВ. Функция $\beta(g)$ вычислялась согласно формулам (4.4), (4.8), причем параметры выбирались равными $\alpha = \gamma = 5$. Численный анализ /53/ минимума величин (4.9) дает значение параметра $\lambda \approx 1,9 \pm 0,2$, что приводит к асимптотике β -функции:

$$\beta(g) \sim 0,9 g^2 \text{ при } g \rightarrow \infty. \quad (5.2)$$

Окончательное выражение с учетом первых четырех точных коэффициентов (3.28) и асимптотических оценок (3.26), (3.27) имеет следующий вид:

$$\beta(g) = \int_0^\infty \frac{dx}{g} e^{-\frac{x}{g}} \left(x \frac{d}{dx}\right)^5 B(x), \quad (5.3)$$

$$B(x) = \frac{3}{128} x^2 (1 - 0,332x - 0,127x^2 + 0,024x^3 + \dots),$$

причем конформное отображение выбрано в форме (4.10) с $\alpha = 1$. Графики функции $\beta(g)$ с учетом одно-, двух-, трех- и четырех-петлевого приближений приведены на рис. 15.

Полученное поведение функции $\beta(g)$ приводит к нуль-зарядной ситуации, т.е. к тому, что независимо от значения затравочного заряда взаимодействия на малых расстояниях на больших расстояниях он оказывается полностью заэкранированным. В теории возникает фиктивный "духовый" полюс типа (I.I) с неправильным знаком вычета, т.е. такая теория оказывается внутренне противоречивой. Этот вывод качественно совпадает с результатами однопетлевого расчета $\beta_2(g) = 1,5 g^2$, но в отличие от последнего он учитывает эффекты высших петель, и формула (5.3) справедлива и при $g \gg 1$.

Подчеркнем еще раз, что полученные результаты основаны на предположении о суммируемости рядов ТВ по Борелю. Весьма существенным моментом является также выбор параметра показателя

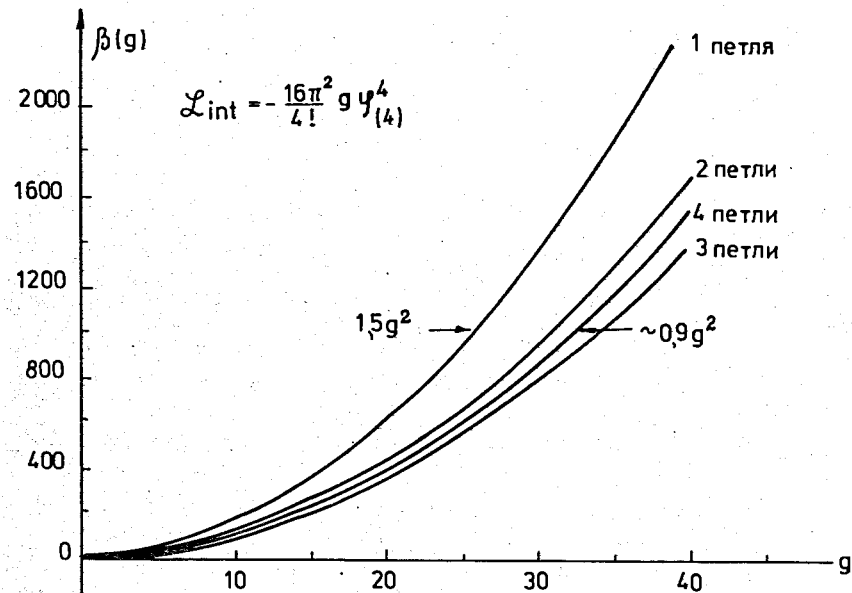


Рис.15

степенной асимптотики λ исходя из минимума относительной ошибки. Поскольку его значение оказывается очень критичным, то информация из области сильной связи была бы весьма кстати.

Тем не менее полученная внутренняя противоречивость скалярной теории φ^4 не означает, что эта теория не может быть использована для описания взаимодействия частиц вместе с другими полями и типами взаимодействий. Так, введение неабелевых калибровочных полей может исправить нульзарядное поведение модели в ультрафиолетовой области за счет антиэкранировки калибровочного заряда и привести к асимптотически свободной модели всех видов взаимодействий.

§ 6. Заключение

Таким образом, если два десятилетия назад могло казаться, что целый ряд задач квантовой физики, в частности, задача определения ультрафиолетовых асимптотик и решения парадокса "нуля-заряда", требуют лишь вычисления двух-трех коэффициентов в последующих

порядках теории возмущений, то в наши дни, когда разработана техника многопетлевых расчетов, очередным препятствием на пути к желанной цели является асимптотический характер разложений и недостаток информации из источников, не использующих идеи слабой связи.

Описанные в § 2 способы вычисления континуального интеграла методом перевала в функциональном пространстве, использующие нетривиальные решения классических евклидовых уравнений движения, представляют собой значительный прогресс и позволяют выйти за рамки теории возмущений. Однако, поскольку точность получаемых результатов составляет $O(g)$, то они справедливы лишь при малых значениях константы связи. Поэтому, несмотря на успехи "инстантонной физики", она работает только при малых g , и проблема сильной связи в квантовой теории поля не потеряла своей актуальности.

Основным аппаратом получения количественных результатов продолжает оставаться теория возмущений. Использование описанных выше методов восстановления функции по ее асимптотическому ряду позволило существенно расширить область применимости теории возмущений и добиться высокой точности. Это свидетельствует об эффективности развитых методов и их широких возможностях.

Мы практически не рассматривали в настоящем обзоре знакопостоянные асимптотические ряды. Способ получения асимптотических оценок в этом случае близок к описанному нами в § 2, но содержит некоторые дополнительные осложнения. Этот вопрос подробно рассмотрен в обзоре ^{122/}. Поскольку знакопостоянные ряды оказываются несуммируемыми методами Бореля, то они требуют его модификации. Две из них были предложены в работах ^{750, 51/}. Применение метода работы ^{751/}, близкого к описанному нами выше в случае знакопеременных рядов, дало неплохие результаты в квантовой механике. В то же время применение его в теории полей Янга-Миллса не позволяет получить надежных результатов и требует привлечения дополнительной информации. Наличие дополнительных трудностей при суммировании знакопостоянных асимптотических рядов является проявлением более сложной физической картины взаимодействия в системе и связано, в конечном счете, с усложнением структуры физического вакуума.

Таким образом, вслед за расцветом надежд, связанных с открытием нового способа получения информации об асимптотических

рядах ТВ и особенностях функций по переменной константы связи, вновь оказывается, что прогресс, достигнутый за десятилетия усилий, носит скорее количественный, чем качественный характер. Мы научились теперь выходить из области слабой связи до значений $g \sim 1$, однако этого оказывается недостаточно для получения надежных физических результатов в реалистических квантово-полевых случаях. Дальнейшее продвижение к большим значениям константы связи требует преодоления трудностей, связанных с асимптотическим характером разложений, и, в конечном счете, конструктивного выхода в область сильной связи.

Мы хотели бы поблагодарить наших коллег в Лаборатории теоретической физики за обсуждение проблем, затронутых в настоящих лекциях, и особенно А.Т.Филиппова, прочитавшего рукопись и сделавшего ряд полезных замечаний. Мы благодарны также А.А.Владимирову и О.В.Тарасову, в соавторстве с которыми были получены некоторые обсуждаемые здесь результаты. Выражаем признательность Е.Б.Богомолову, В.П.Гердту, Г.В.Ефимову, Н.В.Красникову, Д.А.Кубышину, В.А.Мещерякову, В.С.Попову и М.А.Смонднеру за многочисленные плодотворные обсуждения.

Литература

1. Ландау Л.Д., Абрикосов А.А., Халатников И.М. ДАН СССР, 1954, 95, с.773; с.1177; 96, с.261; Фрадкин Е.С. ЖЭТФ, 1955, 28, с.750;
Ландау Л.Д., Померанчук И.Я. ДАН СССР, 1955, 102, с.489.
2. Stuecelberg E.C.G., Peterman A. Helv.Phys.Acta., 1953, 26, p.499; Gell-Mann M., Low F. Phys.Rev., 1954, 95, p.1300;
Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. ДАН СССР, 1955, 103, с.203, см. также Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., "Наука", 1976, глава IX.
3. Липатов Л.Н. ЖЭТФ, 1977, 72, с.411.
4. Hurst C. Proc.Roy.Soc., 1952, 214A, p.44;
Thirring W. Helv.Phys.Acta., 1953, 26, p.33;
Petermann A. Helv.Phys.Acta, 1953, 26, p.291.

5. См., например, Харди Г. Расходящиеся ряды. ИИЛ, М., 1951;
Dingle R.B. Asymptotic Expansions. London-New-York, Academic Press, 1973.
6. Langer J.S. Ann.Phys., 1967, 41, p.108.
7. Lam C.S. Nuovo Cim., 1967, 47A, p.451; 50A, p.504; 1968, 55A, p.258.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962, стр.353, ф-ла 3.469; стр.351, ф-ла 3.462.
9. Belavin A., Polyakov A., Schwarz A., Tyupkin Y. Phys.Lett., 1975, 59B, p.85;
Coleman S. "The Uses of Instantons". Lectures given at the "Ettore Majorana" International School of Subnuclear Physics, Erice, 1977. Sciuto S. "Topics on Instantons". Lectures given at CERN, April-May 1977.
10. Bogomolny E.B. Phys.Lett., 1977, 67B, p.193.
11. Brezin E., Le Guillou J.-C., Zinn-Justin J. Phys.Rev., 1978, D15, p.1544.
12. 't Hooft G. Phys.Rev., 1976, D14, p.3432.
13. Belavin A., Polyakov A. Nucl.Phys., 1977, B123, p.429.
14. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., "Наука", 1965.
15. Попов В.И. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М., Атомиздат, 1976;
Faddeev L.D., Popov V.N. Phys.Lett., 1967, 25B, p.30.
16. Боголюбов Н.Н. УМН, 1950, 2, с.3; Избр.труды, 1970, т.2, с.499, Киев, "Наукова Думка";
Gervais J.L. Sakita V. Phys.Rev., 1975, D11, p.2943;
Jevicki A. Nucl.Phys., 1976, B117, p.365.
17. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М., "Мир", 1968.
18. Ное Ф.Т., MacMillen D., Montroll E.W. Phys.Rep., 1978, с 43, p.305.
19. Collins J.C., Soper D.E. Ann.of Phys., 1978, 112, p.209.
20. Bender C.M., Wu T.T. Phys.Rev., 1969, 184, p.1231;
Phys.Rev.Lett., 1971, 27, p.461; Phys.Rev., 1972, D7, p.1620.
21. Brezin E. Proceedings of the European Particle Physics Conference, Budapest, 1977, p.1231-1254.
22. Богомольный Е.Б., Липатов Л.Н., Фатеев В.А.
Rev. of Sov.Science., 1980, с, 3.
23. Brezin E., Parisi G., Zinn-Justin J. Phys.Rev., 1977, D16, p.408.
24. Bogomolny E.B., Fateyev V.A. Phys.Lett., 1977, 71B, p.93.
25. Dürfel B.D., Kazakov D.I., Shirkov D.V. Preprint JINR, E2-10720, Dubna, 1977.
26. Казаков Д.И., Ломидзе Л.Р., Махалдиани Н.В., Владимиров А.А. Препринт ОИЯИ, E2-8085, Дубна, 1974.
27. Baker G.A., Nickel B.G., Green M.S., Meiron P.I. Phys.Rev. Lett., 1976, 36, p.1351.
28. Bervillier C., Drouffe J.M., Godreche C., Zinn-Justin J. Phys.Rev., 1978, D17, p.2144.
29. Диттес Ф.М., Кубышин Ю.А., Тарасов О.В. ТМФ, 1978, 37, с.66.
30. Носоа А. ОУ-НЕТ 21 Preprint, Тоёонака, 1977.
31. Вильсон К., Когут Д. Ренормализационная группа и ϵ -разложение. "Мир", М., 1975;
Brezin E., Le Guillou J.C., Zinn-Justin J. Phys.Rev., 1973, D8, p.434,
32. Казаков Д.И., Тарасов О.В., Владимиров А.А. ЖЭТФ, 1979, 77, с.1035.
33. Itzykson C., Parisi G., Zuber J.-B. Phys.Rev.Lett., 1977, 38, p.306.
34. Buchvostov A.P., Lipatov L.N. Phys.Lett., 1977, 70B, p.48.
35. Callan C.G., Dashen R.F., Gross G.J. Phys.Lett., 1976, 63B, p.334.
36. Владимиров А.А., Тарасов О.В. ЖФ, 1977, 25, с.1104.
37. Vladimirov A.A., Tarasov O.V., Zharkov A.Yu. Phys.Lett., 1980, 93B, p.429.
38. Parisi G. Phys.Lett., 1977, 66B, p.382.
39. Itzykson C., Parisi G., Zuber J.B. Phys.Rev., 1977, D16, p.996.
40. Bogomolny E.B., Fateyev V.A. Phys.Lett., 1978, 76B, p.210.
41. Харди Г. Расходящиеся ряды. ИИЛ, М., 1951, теорема № 136.
42. Sokal A.D. J.Math.Phys., 1980, 21, p.261.
43. Truesdell C.A. Ann.of Math., 1945, 46, p.114.
44. Brezin E., Le Guillou J.-C., Zinn-Justin J. Phys.Rev., 1977, D15, p.1558;
Parisi G. Preprint LPTENS 77/13 (Lectures given at the 1977 GARGESE Summer Institute).

45. Graffi S., Grecchi V., Simon B. Phys.Lett., 1970, 32B, p.68L.
46. Eckmann J.P., Magnen J., Sénéor R. Commun.Math.Phys., 1975, 39, p. 251; Magnen J., Sénéor R. Ibid. 1977, 56, p. 237.
47. 't Hooft G. In: Deeper Pathways in High-Energy Physics, Ed. by B.Kursunoglu a.o. New York-London, Plenum Press, 1977, p.699.
48. 't Hooft G. Lectures given at the "Ettore Majorana" International School of Subnuclear Physics, Erice, 1977. Parisi G. Phys.Lett., 1978, 76B, p.65.
49. Lautrup B. Phys.Lett., 1977, 69B, p.109.
50. Khuri N.N. Phys.Lett., 1979, 82B, p.83.
51. Kazakov D.I. Preprint JINR, E2-80-62, Dubna, 1980.
52. См., например, J. Zinn-Justin. Phys.Rep., 1971, 1C, p.55.
53. Казаков Д.И., Тарасов О.В., Ширков Д.В. ТМФ, 1979, 38, с.15.
54. Tarasov O.V. Lett.Math.Phys., 1979, 3, p.143.
55. Попов В.С., Елецкий В.Л., Турбинер А.В. ЖЭТФ, 1978, 74, с.445.
56. Shirkov D.V. Lett.Nuovo Cim., 1977, 18, p.452.
57. Елецкий В.Л., Попов В.С. ЯФ, 1978, 28, с.1109.
58. Guillou J.C. Le, Zinn-Justin J. Phys.Rev.Lett., 1977, 39, p.95.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

§ 1 . Введение	3
§ 2 . Метод функционального перевала	6
2.1. Метод перевала	6
2.2. Простой пример	8
Аналитическое продолжение	8
Вычисление скачка	11
Окончательный результат	12
Метод "К-перевала"	13
2.3. Функциональный перевал	15
Общая схема	16
Модель Φ^4 в евклидовом пространстве	17
Вычисление интеграла по квантовым флуктуациям	20
Нулевые моды	24
Ультрафиолетовые расходимости	29
Окончательный результат	31
Метод "К-перевала"	34
§ 3 . Асимптотика коэффициентов ряда теории возмущений и сравнение с точными результатами	36
3.1. Нульмерные аналоги	36
3.2. Квантовая механика	37
3.3. Квантовая теория поля	40
Скалярные модели	41
Модель $\Phi^4(4)$	43
Критические индексы	45
Спинорные и векторные поля	49
§ 4 . Задача восстановления функции	50
4.1. Улучшенная теория возмущений	51
4.2. Метод Бореля	51
Интегральное представление	51
Проблема обоснования	53
Аналитическое продолжение	56

4.3. Применение к задачам квантовой физики	59
Улучшенная теория возмущений	59
Метод Паде и Паде-Бореля	59
Метод конформ-Бореля	60
§ 5. Физические результаты	61
5.1. Критические индексы	61
5.2. Ультрафиолетовые асимптотики	63
§ 6. Заключение	65
Литература	67

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля 1980 года.