ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

Э.Капусцик

Галилеева инвариантность в теории поля

ДУБНА

ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Выпуск 12

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р2 - 10677

Э.Капусцик

ГАЛИЛЕЕВА ИНВАРИАНТНОСТЬ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Дубна 1977

Капусцик Э. P2 - 10677

Галилиеева инвариантность в теории поля

В лекциях излагаются методы построения классической и квантовой теории поля с принципом инвариантности относительно группы Галилея. Важность этого вопроса заключается в необходимости четкого определения релятивистских эффектов теории поля.

Обсуждаются методы построения представлений группы Галилея и необходимость использования проективных представлений этой группы, строится теория нерелятивистских волновых уравнений для частиц произвольного спина и показывается существование нерелятивистской электродинамики, которая предсказывает правильные значения магнитных моментов элементарных частиц.

Лекции заканчиваются обсуждением галилеево-инвариантных квантовых теорий полей, которые существенно отличаются от релятивистских теорий.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Kapuscik E. P2 - 10677

The Galilean Invariance in Field Theory

In the lecture notes the methods of construction of classical and quantum field theories with the principle of invariance with respect to the Galilei group are presented. The importance of this problem consists in the necessity of rigorous determination of relativistic effects in field theory.

The methods of construction of the representations of the Galilei group and the necessity of using the projective representations of this group are discussed, the theory of nonrelativistic wave equations for particles of arbitrary spin is constructed and it is shown that there exists a nonrelativistic electrodynamics which predicts the correct values of the magnetic moments of elementary particles.

The lecture notes end with the discussion of the Galilean invariant quantum field theories which essentially differ from the relativistic theories.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

Введение

Принципы инвариантности играют важную роль в теоретической физике. Для физических систем, для которых законы природы известны, принципы инвариантности позволяют более глубоко понять смысл этих законов, а для физических систем с неизвестными или недостаточно известными законами природы принципы инвариантности позволяют ограничивать возможную форму таких законов и, как правило, помогают их найти.

Среди всех известных принципов инвариантности, пожалуй, наиболее существенным является принцип относительности, впервые явным образом сформулированный Галилеем. Конечно, Галилей не мог сформулировать этот принцип в общем виде, так как не располагал еще нужным математическим аппаратом. Принцип относительности, известный сегодня как принцип галилеевой относительности, был сформулирован только после создания теоретической механики. Сначала никто не обращал на него особого внимания: считалось, что он настолько естествен, что всегда имеет место. Значение принципа галилеевой относительности было понято только после создания релятивистской теории с принципом относительности Эйнштейна; тогда стало ясно, что у него очень узкая область применимости.

Задачей предлагаемых лекций является ознакомление читателей с основными вопросами галилеево-инвариантных теорий поля. Знакомство с этими вопросами, несомненно, позволит лучше понять смысл многих утверждений, высказываемых относительно релятивистских и нерелятивистских теорий поля. Галилеево-инвариантные теории представляют не только методический интерес. У них есть и большая научная ценность, судить о которой можно, только обладая хорошими знаниями в этой области.

От читателя требуются некоторые предварительные знания. Знакомство с основами теории групп и ее представлений постоянно предполагается в первых двух параграфах настоящих лекций. Дальше мы предполагаем, что читатель знаком с теорией волновых уравнений хотя бы в объеме релятивистски инвариантной классической теории поля. Чтение последнего параграфа, посвященного вопросам квантовой теории поля, требует довольно большой подготовки в области общих принципов квантовой теории поля.

В заключение мы приводим основные литературные источники, знакомство с которыми, на наш взгляд, необходимо. В основном тексте не даем никаких ссылок, чтобы избежать искажений действительных вкладов авторов в развитие этой области науки.

Материал лекций подобран так, чтобы на примере теорий с галилеевой инвариантностью продемонстрировать методы, которые обычно применяются в построении релятивистски инвариантных теорий.

Группа Галилея и ее представления

Обозначим пространственные координаты точек пространства-времени через x_1, x_2 и x_3 (сокращенно $\vec{x}$), а временную координату - через t. Собственным преобразованием Галилея будем называть следующее линейное преобразование временно-пространственных координат:

$$x_i \to x_i' = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} x_j + v_i t + a_i \quad , \quad i = 1, 2, 3, \qquad \text{(I)}$$
$$t \to t' = t + b$$

где R_{ij} - матричные элементы трехмерной ортогональной матрицы R, а числа v_i, a_i и b - произвольные вещественные параметры. Матрица R описывает некоторое вращение трехмерного пространства координат, тройка $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ задает скорость движения одной инерциальной системы отсчета относительно другой, а тройка $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и параметр b - это параметры пространственно-временных сдвигов. Таким образом, всякое собственное преобразование Галилея определяется IO независимыми параметрами.

Всякое собственное преобразование Галилея оставляет неизменным временной интервал двух любых событий, так как из (I) следует, что

$$t_2' - t_1' = t_2 - t_1 .$$

Оно оставляет неизменным также расстояние между двумя одновременными событиями, так как

$$|\vec{x}_2' - \vec{x}_1'| = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$$

при $t_2 = t_1$. И наоборот, можно доказать, что единственными линейными преобразованиями пространственно-временных координат, оставляющими неизменными эти величины, как раз и являются собственные преобразования Галилея. Здесь предположение о линейности преобразований существенно в отличие от релятивистского пространства-времени, где теорема Земана утверждает, что всякий автоморфизм пространства-времени, сохраняющий причинное упорядочение точек, обязательно сводится к линейным преобразованиям Лоренца.

В дальнейшем вместо (I) будем писать

$$\vec{x} \to \vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a},$$

где $R\vec{x}$ обозначает вектор $\vec{x}$, подвергнутый вращению, которое описывается матрицей R.

Множество всех собственных преобразований Галилея образует IO-параметрическую группу $\mathcal{G}$, называемую группой Галилея. Обозначая через $g(R,\vec{v},\vec{a},b)$ любое преобразование Галилея, из (I) получаем следующий групповой закон композиции

$$g(R_1,\vec{v}_1,\vec{a}_1,b_1)\circ g(R_2,\vec{v}_2,\vec{a}_2,b_2) = g(R_1R_2, \vec{v}_1+R_1\vec{v}_2, \vec{a}_1+R_1\vec{a}_2+b_2\vec{v}_1, b_1+b_2)$$

и, поскольку произведение двух ортогональных матриц является ортогональной матрицей, композиция двух преобразований Галилея опять является преобразованием Галилея.

Из закона композиции получаем, что преобразование

$$e = g(\mathbb{1},\vec{0},\vec{0},0)$$

это единичный элемент группы, а элемент

$$g(R^{-1}, -R^{-1}\vec{v}, R^{-1}(\vec{a}-b\vec{v}), -b)$$

является обратным элементу $g(R,\vec{v},\vec{a},b)$.

Математически группа Галилея есть некомпактная и несвязная группа Ли. Заменяя в ней подгруппу вращений $\mathcal{R}$ группой двумерных унитарных матриц, переходим к универсальной накрывающей группе. Положение здесь такое же, как и в случае с группой Пуанкаре, и не будем больше останавливаться на этом вопросе.

Однако структура группы Галилея значительно сложнее структуры группы Пуанкаре. Обсудим это на примере ротационно-инвариантных подгрупп группы Галилея. Наиболее важными такими

подгруппами являются следующие:

$\mathcal{T} = \{g(\mathbb{1},\vec{0},\vec{0},b) \mid \forall b\}$ – подгруппа временных сдвигов,

$\mathcal{S} = \{g(\mathbb{1},\vec{0},\vec{a},0) \mid \forall \vec{a}\}$ – подгруппа пространственных сдвигов,

$\mathcal{V} = \{g(\mathbb{1},\vec{v},\vec{0},0) \mid \forall \vec{v}\}$ – подгруппа чистых преобразований Галилея,

$\mathcal{R} = \{g(R,\vec{0},\vec{0},0) \mid \forall R, RR^T=\mathbb{1}\}$ – подгруппа вращений.

С помощью этих подгрупп можно описать все остальные ротационно-инвариантные подгруппы группы Галилея. Итак, подгруппу пространственно-временных сдвигов получаем как прямое произведение $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$, обозначаемое через $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$. Это инвариантная абелева подгруппа группы $\mathcal{G}$, и фактор-группа $\mathcal{G}/(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$ является полупрямым произведением $\mathcal{R}$ и $\mathcal{V}$, обозначаемым через $\mathcal{R}\wedge\mathcal{V}$. Таким образом, получаем следующее разбиение группы Галилея:

$$\mathcal{G} = (\mathcal{R}\wedge\mathcal{V})\wedge(\mathcal{S}\times\mathcal{T}).$$

Для сравнения напомним здесь, что для группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ фактор-группа $\mathcal{P}/(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$ совпадает с простой группой однородных преобразований Лоренца $\mathcal{L}$, и соответствующее разбиение группы имеет вид

$$\mathcal{P} = \mathcal{L}\wedge(\mathcal{S}\times\mathcal{T}).$$

Уже это показывает, что группа Галилея сложнее группы Пуанкаре. К тому же, в группе Пуанкаре подгруппа сдвигов $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$ есть максимальная инвариантная абелева подгруппа. Группа Галилея содержит еще и другую инвариантную абелеву подгруппу. Эта шестипараметрическая подгруппа является прямым произведением $\mathcal{V}\times\mathcal{S}$. Фактор-группа $\mathcal{G}/(\mathcal{V}\times\mathcal{S})$ есть прямое произведение $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$, в результате получаем другое разбиение группы $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} = (\mathcal{R}\times\mathcal{T})\wedge(\mathcal{V}\times\mathcal{S}).$$

Используя другие, неабелевы инвариантные подгруппы группы Галилея, мы можем выписать ряд других разбиений группы $\mathcal{G}$, но так как мы этим не будем пользоваться в дальнейшем, то здесь этого делать не будем. Отметим только, что разбиение

$$\mathcal{G} = \mathcal{R}\wedge[\mathcal{T}\wedge(\mathcal{S}\times\mathcal{V})]$$

обеспечивает простоту описания ротационной инвариантности в нерелятивистской физике, а разбиение

$$\mathcal{G} = \mathcal{T}\wedge[\mathcal{R}\wedge(\mathcal{V}\times\mathcal{S})]$$

связано с абсолютным характером времени в нерелятивистской физике.

Собственная группа Галилея - это часть полной группы Галилея, где кроме собственных преобразований имеем еще и две дискретные операции: пространственное отражение I_s, задаваемое в виде

$$I_s:\quad \vec{x}\to\vec{x}\,'=-\vec{x}, \qquad t\to t'=t,$$

и временное отражение I_t, задаваемое формулой

$$I_t:\quad \vec{x}\to\vec{x}\,'=\vec{x}, \qquad t\to t'=-t.$$

Таким образом, полная группа Галилея имеет четыре связные компоненты: собственную группу $\mathcal{G}$, группу Галилея с пространственными отражениями $I_s\mathcal{G}$, группу Галилея с временными отражениями $I_t\mathcal{G}$ и группу Галилея с пространство-временными отражениями $I_sI_t\mathcal{G}$. Подгруппами полной группы, помимо группы $\mathcal{G}$, являются: ортохронная группа Галилея $\mathcal{G}\cup I_s\mathcal{G}$, специальная группа Галилея $\mathcal{G}\cup I_t\mathcal{G}$ и группа $\mathcal{G}\cup I_sI_t\mathcal{G}$.

Дискретные операции I_s и I_t задают два внешних автоморфизма группы Галилея, определенные формулами

$$I_s:\ g(R,\vec{v},\vec{a},b)\longrightarrow g(R,-\vec{v},-\vec{a},b),$$

$$I_t:\ g(R,\vec{v},\vec{a},b)\longrightarrow g(R,-\vec{v},\vec{a},-b).$$

Кроме этих автоморфизмов, существуют еще три важных внешних автоморфизма группы Галилея. Это:

пространственные дилатации (растяжения) D_s, задаваемые формулой

$$D_s:\ g(R,\vec{v},\vec{a},b)\longrightarrow g(R,\lambda\vec{v},\lambda\vec{a},b),\quad \forall\lambda\in R^1,$$

временные дилатации D_t, задаваемые формулой

$$D_t:\ g(R,\vec{v},\vec{a},b)\longrightarrow g(R,\lambda^{-1}\vec{v},\vec{a},\lambda b),$$

и пространственно-временные дилатации D_{st}, задаваемые формулой

$$D_{st}:\ g(R,\vec{v},\vec{a},b)\longrightarrow g(R,\vec{v},\lambda\vec{a},\lambda b).$$

С физической точки зрения существование двух независимых дилатаций, временных и пространственных, связано с тем, что в нерелятивистской физике временные и пространственные масштабы независимы. В релятивистской физике эти масштабы связаны скоростью света и поэтому там имеет смысл только операция D_{st}.

Наконец, обсудим связь преобразований Галилея с преобразованиями Пуанкаре. Для этого выпишем общий вид преобразования Пуанкаре

$$\vec{x}\to\vec{x}\,'=R\vec{x}+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot R\vec{x})\vec{\beta}+\gamma c\vec{\beta}t+\vec{a} \tag{2}$$

$$t\to t'=\gamma\left(t+\frac{1}{c}\vec{\beta}\cdot R\vec{x}\right)+b,$$

где, как обычно,

$$\gamma=(1-\vec{\beta}^2)^{-1/2}, \qquad \vec{\beta}=\vec{v}/c.$$

В (2) использованы явным образом те же самые параметры преобразования, что и в (I). Нерелятивистский предел формул (2) получим, если предположим, что

$$|\vec{\beta}|\ll 1.$$

Но этого еще недостаточно. Дело в том, что в (2) параметр $\vec{\beta}$ умножается на величины, которые могут быть вовсе немалы. Предполагая добавочно, что нас интересуют события с координатами $\vec{x}$ и t такими, что

$$ct \gg |\vec{x}|,$$

точнее,

$$t \sim \frac{|\vec{x}|}{|\vec{\beta} c|},$$

из (2) получаем преобразования Галилея (I). Таким образом, преобразования Галилея образуют нерелятивистский предел преобразований Пуанкаре только в глубоко времениподобной области пространства-времени.

Интересно посмотреть, во что переходят формулы (2) в остальных характеристических областях пространства Минковского. В области светового конуса, где

$$|\vec{x}| \sim ct,$$

из (2) получаем

$$\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{a}$$
$$t' = t + b.$$

Значит, в области светового конуса преобразования Пуанкаре в нерелятивистском пределе переходят в обычную трехмерную евклидову группу в сочетании с временными сдвигами. Наконец, в области, где

$$|\vec{x}| \sim \frac{|ct|}{|\vec{\beta}|},$$

из (2) получаем

$$\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{a}$$
$$t' = t + \frac{1}{c}\vec{\beta}\cdot R\vec{x} + b.$$

Таким образом, в глубоко пространственно-подобной области пространства Минковского, преобразования Пуанкаре в нерелятивистском пределе образуют новую группу, существенно отличную от группы Галилея. Эта группа носит название группы Кэрролла.

Приступим к изложению метода индуцированных представлений на примере группы $\mathcal{G}$, являющейся полупрямым произведением некоторой подгруппы H и абелевой инвариантной подгруппы N, т.е.

$$\mathcal{G} = H \wedge N.$$

Всякий элемент $g \in \mathcal{G}$ можно таким образом представить в виде пары

$$g = (h, n),$$

где $h \in H$ и $n \in N$, и закон композиции имеет вид

$$(h_1, n_1) \circ (h_2, n_2) = (h_1 h_2, n_1 + h_1(n_2)),$$

где $h(n)$ обозначает действие элемента h подгруппы H на элемент n подгруппы N, определяющее полупрямое произведение $H \wedge N$.

Подгруппа N – абелева группа, и поэтому все ее неприводимые унитарные представления одномерны. Пусть всякий элемент $n \in N$ определяется набором s параметров

$$n = \{n_1, \dots, n_s\},$$

тогда унитарные неприводимые представления группы N задаются набором s чисел

$$q = \{q_1, \dots, q_s\}$$

и операторы представления имеют вид

$$U(n_1, \dots n_s)\psi = \exp\{i \sum_{j=1}^{s} q_j n_j\}\psi,$$

где ψ является вектором одномерного гильбертова пространства. Множество всех наборов q образует линейное s-мерное пространство N', называемое пространством, дуальным к N.

Определим действие элементов $h \in H$ в пространстве N' с помощью формулы

$$h(q) = \{q'_1, \dots, q'_s\},$$

где числа q'_j определяются из равенства

$$\sum_{j=1}^{s} q'_j n_j = \sum_{j=1}^{s} q_j h^{-1}(n)_j .$$

Применяя к фиксированному элементу $q^\circ \in N'$ все элементы $h \in H$, получаем в N' некоторое многообразие, называемое орбитой точки q°.

Следующее понятие, которым будем пользоваться в дальнейшем, это понятие малой группы. Под этим названием будем понимать всякую подгруппу подгруппы H, которая оставляет инвариантной хотя бы одну точку из N'. Точнее, малая группа точки $q^\circ \in N'$ – это подгруппа H_{q° подгруппы H группы $\mathcal{G}$, состоящая из элементов h_{q° таких, что

$$h_{q^\circ}(q^\circ) = q^\circ.$$

Полупрямое произведение

$$K = H_{q^\circ} \wedge N$$

является подгруппой группы $\mathcal{G}$, которую будем использовать для индуцирования представлений всей группы $\mathcal{G}$. Предположим, что $\Delta(k)$, $k \in K$ обозначают операторы унитарного представления подгруппы K, действующие в гильбертовом пространстве L со скалярным произведением $<\,,\,>$. Обозначим через $\mathcal{H}$ гильбертово пространство L-значных функций f, определенных на всей группе $\mathcal{G}$, удовлетворяющих структурному условию

$$f(g \circ k) = \Delta(k^{-1}) f(g)$$

для $g \in \mathcal{G}$ и $k \in K$ и квадратично-интегрируемых по инвариантной мере $\mu(g)$ на $\mathcal{G}/K$. Скалярное произведение в $\mathcal{H}$ определено формулой

$$(f_1, f_2) = \int_{\mathcal{G}/K} <f_1(g), f_2(g)> d\mu(g).$$

В пространстве $\mathcal{H}$ естественным образом задано представление группы $\mathcal{G}$ в виде операции левого сдвига, т.е. представление $U(g)$ определено формулой

$$(U(g)f)(g') = f(g^{-1} \circ g').$$

Это унитарное представление группы $\mathcal{G}$ и называется индуцированным (по Макки) представлением и обозначается через

$$U = \Delta(K) \uparrow \mathcal{G}.$$

Благодаря структурному условию, функции $f(g)$ достаточно задавать лишь для одного представителя каждого смежного класса gK и из формулы

$$g \circ k = (h, n) \circ (h_{q^\circ}, n_1) = (h h_{q^\circ}, n + h(n_1))$$

видно, что каждый смежный класс однозначно определяется элементом $h \in H$. Выберем теперь в каждом смежном классе такой представитель, для которого вторая компонента равна нулю, т.е.

$$n_1 = -h^{-1}(n),$$

и так как

$$h h_{q^\circ}(q^\circ) = h(q^\circ) = q,$$

для нумерации разных классов смежности достаточно указать точку q, принадлежащую орбите точки q°. Полагая

$$f(q) \equiv f(h_{q \leftarrow q^\circ}, 0),$$

имеем

$$\begin{aligned}
(U(h,n)f)(q) &= (U(h,n)f)(h_{q\leftarrow q^\circ}, 0) = f((h,n)^{-1} \circ (h_{q\leftarrow q^\circ}, 0)) = \\
&= f((h^{-1}, -h^{-1}(n)) \circ (h_{q\leftarrow q^\circ}, 0)) = f(h^{-1} h_{q\leftarrow q^\circ}, -h^{-1}(n)) = \\
&= f((h_{q'\leftarrow q^\circ}, 0) \circ (h^{-1}_{q'\leftarrow q^\circ} h^{-1} h_{q\leftarrow q^\circ}, -h^{-1}_{q'\leftarrow q^\circ} h^{-1}(n))) = \\
&= \Delta(h^{-1}_{q\leftarrow q^\circ} h h_{q'\leftarrow q^\circ}, h^{-1}_{q\leftarrow q^\circ}(n)) f(h_{q'\leftarrow q^\circ}, 0) = \\
&= \Delta(h^{-1}_{q\leftarrow q^\circ} h h_{q'\leftarrow q^\circ}, h^{-1}_{q\leftarrow q^\circ}(n)) f(q').
\end{aligned}$$

где
$$q' = h^{-1}(q).$$
Поскольку
$$K = H_{q^\circ} \wedge N,$$
представление $\Delta(K)$ имеет вид
$$\Delta(h_{q^\circ}, n) f = \exp\Big\{ i \sum_{j=1}^{s} q_j^\circ n_j \Big\} \Gamma(h_{q^\circ}) f,$$
где $\Gamma(h)$ - неприводимое унитарное представление малой группы H_{q°. Таким образом, окончательно получаем
$$(U(h,n)f)(q) = \exp\Big\{i\sum_{j=1}^{s} q_j n_j\Big\}\big[\Gamma(h^{-1}_{q\leftarrow q^\circ}\, h\, h_{q'\leftarrow q^\circ}) f\big](q').$$
Заметим еще, что инвариантную меру $\mu(g)$ на $\mathcal{G}/K$ можно заменить инвариантной мерой на орбите.

Применим теперь эту общую схему в случае группы Галилея. В качестве инвариантной абелевой подгруппы можем взять либо шестипараметрическую подгруппу $\mathcal{V}\times\mathcal{S}$, составленную из элементов типа $g(\mathbb{1},\vec{v},\vec{a},0)$, либо четырехпараметрическую подгруппу сдвигов $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$, составленную из элементов типа $g(\mathbb{1},\vec{0},\vec{a},b)$.

Исторически сначала была использована первая возможность, и только потом - вторая, главным образом для того, чтобы легче было сравнивать результаты для группы Галилея и группы Пуанкаре. Ниже мы сосредоточим внимание только на втором случае. Итак, имеем
$$N = \mathcal{S}\times\mathcal{T}$$
$$H = \mathcal{R}\wedge\mathcal{V},$$
что означает
$$n = g(\mathbb{1},\vec{0},\vec{a},b)$$
$$h = g(\mathcal{R},\vec{v},\vec{0},0).$$
Легко получить, что
$$h(n) = g(\mathbb{1},\vec{0},\mathcal{R}\vec{a}+b\vec{v},b).$$

Представления группы $N=\mathcal{S}\times\mathcal{T}$ запишем в виде
$$U(\vec{a},b)\Psi = \exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}(\vec{a}\cdot\vec{p}-bE)\Big\}\Psi.$$
Выбранные перед $\vec{a}\cdot\vec{p}$ и bE знаки и введение коэффициента $\hbar$ окажется удобным в дальнейшем. Каждое неприводимое унитарное представление задано четверкой чисел $(\vec{p},E)$, образующих дуальное пространство N'. Определим действие элемента $h=g(\mathcal{R},\vec{v},\vec{0},0)$ в пространстве N'. Для этого заметим, что
$$h^{-1} = g(\mathcal{R}^{-1},-\mathcal{R}^{-1}\vec{v},\vec{0},0)$$
и получаем
$$g(\mathcal{R},\vec{v},\vec{0},0)(\vec{p},E) = (\vec{p}\,',E'),$$
где
$$\vec{a}\cdot\vec{p}\,'-bE' = \mathcal{R}^{-1}(\vec{a}-b\vec{v})\cdot\vec{p}-bE.$$

Отсюда получаем
$$\vec{p}\,' = \mathcal{R}\vec{p}$$
$$E' = E+\vec{v}\cdot\mathcal{R}\vec{p}.$$
Видно теперь, каковы орбиты группы Галилея. Применяя все возможные элементы $g(\mathcal{R},\vec{v},\vec{0},0)$ к данной точке $(\vec{p}_\circ,E_\circ)$, получаем цилиндр с радиусом $\rho=\vec{p}_\circ^{\,2}$ (бесконечной длины).

Малая группа точки $(\vec{p}_\circ,E_\circ)$ определяется из условий
$$\mathcal{R}\vec{p}_\circ = \vec{p}_\circ$$
$$E_\circ+\vec{v}\cdot\mathcal{R}\vec{p}_\circ = E_\circ.$$
Нам нужно здесь различать два разных случая: первый, когда $\vec{p}_\circ\neq 0$, и второй, когда $\vec{p}_\circ=0$. В первом случае малая группа составлена из поворотов вокруг вектора $\vec{p}_\circ$ и скоростей в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{p}_\circ$. Такая группа изоморфна двумерной евклидовой группе, как это можно видеть из соответствующих законов композиции.

Прежде чем найти представления этой группы, выпишем еще явный вид комбинации элементов, составляющих эту группу. Имеем

$$h^{-1}_{q\leftarrow q^0} h\, h_{q'\leftarrow q^0} = g^{-1}(R_{\vec{p}\vec{p}_0}, \vec{v}_{EE_0}, \vec{0}, 0)\, g(R, \vec{v}, \vec{0}, 0)\, g(R_{\vec{p}'\vec{p}_0}, \vec{v}_{E'E_0}, \vec{0}, 0) =$$

$$= g(R^{-1}_{\vec{p}\vec{p}_0} R R_{\vec{p}'\vec{p}_0}, R^{-1}_{\vec{p}\vec{p}_0}(R\vec{v}_{E'E_0} + \vec{v} - \vec{v}_{EE_0}), \vec{0}, 0),$$

где $R_{\vec{p}\vec{p}_0}$ обозначает поворот, переводящий вектор $\vec{p}_0$ в вектор $\vec{p}$, а v_{EE_0} – скорость, переводящая при этом значение E_0 в E, согласно формулам

$$\vec{p} = R_{\vec{p}\vec{p}_0} \vec{p}_0$$

$$E = E_0 + \vec{v}_{EE_0} \cdot R_{\vec{p}\vec{p}_0} \vec{p}_0.$$

Представление двумерной группы Евклида также найдем методом индуцированных представлений. Всякий элемент этой группы будем обозначать через $(\alpha, \vec{w})$, где α есть угол поворота, а $\vec{w}$ – двумерный сдвиг. Правило композиции имеет вид

$$(\alpha_1, w_1) \circ (\alpha_2, \vec{w}_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \vec{w}_1 + R(\alpha_1)\vec{w}_2),$$

и эта группа записывается в виде

$$E^{(2)} = \mathcal{R}^{(2)} \wedge S^{(2)},$$

где $\mathcal{R}^{(2)}$ – повороты, а $S^{(2)}$ – сдвиги в двумерном пространстве. Пространство, дуальное к $S^{(2)}$, тоже двумерное векторное пространство, и в нем повороты действуют так же, как и на векторы $\vec{w}$. Применяя все возможные повороты к вектору $\vec{\nu} \in S^{(2)'}$, получаем, что орбиты $E^{(2)}$ – это круги с радиусом $\vec{\nu}^2$. Малая группа опять зависит от того, имеем ли $\vec{\nu} \neq 0$ или $\vec{\nu} = 0$. В первом случае должно быть

$$R(\alpha)\vec{\nu} = \vec{\nu},$$

что в двумерном пространстве возможно только для $\alpha = 0$. Таким образом, малая группа образована только из единичного элемента и группа K в этом случае совпадает с $S^{(2)}$. В результате получаем

$$(U(\alpha, \vec{w})\Psi)(\vec{\nu}) = exp\{i\vec{w}\cdot\vec{\nu}\}\Psi(R^{-1}(\alpha)\vec{\nu}).$$

Во втором случае, когда $\vec{\nu} = 0$, все повороты $R^{(2)}$ принадлежат малой группе, и имеем

$$U(\alpha, \vec{w})\Psi = exp\{i\sigma\alpha\}\Psi,$$

где σ – произвольный вещественный параметр.

Возвращаясь к группе Галилея, в зависимости от двух видов представлений малой группы получаем и два вида представлений группы Галилея, которые будем называть представлениями I и II типов.

Для представления типа I пространство L состоит из функций, квадратично интегрируемых на круге с радиусом $\vec{\nu}_0^2$, а пространство $\mathcal{H}$ есть пространство функций $\Psi(\vec{\nu}, \vec{p}, E)$, квадратично интегрируемых относительно меры

$$\delta(\vec{\nu}^2 - \vec{\nu}_0^2)\,\delta(\vec{p}^2 - \vec{p}_0^2)\, d^2\nu\, d^3p\, dE.$$

В этом пространстве операторы представления имеют вид

$$[U(R, \vec{v}, \vec{a}, b)\Psi](\vec{\nu}, \vec{p}, E) = exp\{i[\tilde{\vec{v}}\cdot\vec{\nu} - \tfrac{1}{\hbar}(\vec{a}\cdot\vec{p} - bE)]\}\Psi(\tilde{R}^{-1}\vec{\nu}, R^{-1}\vec{p}, E - \vec{v}\cdot\vec{p}),$$

где

$$\tilde{R} = R^{-1}_{\vec{p}\vec{p}_0} R R_{\vec{p}'\vec{p}_0}$$

$$\tilde{\vec{v}} = R^{-1}_{\vec{p}\vec{p}_0}(R\vec{v}_{E'E_0} + \vec{v} - \vec{v}_{EE_0}).$$

Для представлений типа II пространство L одномерно и $\mathcal{H}$ есть пространство функций $\Psi(\vec{p}, E)$, квадратично интегрируемых по мере

$$\delta(\vec{p}^2 - \vec{p}_0^2)\, d^3p\, dE.$$

Операторы представления имеют вид

$$[U(R,\vec{v},\vec{a},b)\Psi](\vec{p},E)=\exp\{-\frac{i}{\hbar}(\vec{a}\cdot\vec{p}-bE)+i\sigma\gamma(R,\vec{p})\}\Psi(R^{-1}\vec{p},E-\vec{v}\cdot\vec{p}),$$

где $\gamma(R,\vec{p})$ - угол поворота $\tilde{R}$ вокруг вектора $\vec{p}_0$.

Наконец, опишем представления группы Галилея в случае, когда $\vec{p}_0=0$. Точно так же, как и для $\vec{p}_0\neq 0$, и здесь будем иметь два типа представлений, так как малая группа совпадает здесь со всей однородной группой Галилея $R\wedge V$, а эта группа изоморфна трехмерной евклидовой группе. Точно так же, как для двумерной евклидовой группы, ее орбиты являются сферами в трехмерном евклидовом пространстве с радиусом $\vec{k}_0^2$, и возникают два типа представлений в зависимости от того, имеем ли $\vec{k}_0\neq 0$ или $\vec{k}_0=0$. В первом случае получаем Ш тип представлений группы Галилея, где гильбертово пространство задано относительно меры

$$\delta(\vec{k}^2-\vec{k}_0^2)d^3k\,dE$$

и операторы представления имеют вид

$$[U(R,\vec{v},\vec{a},b)\Psi](\vec{k},E)=\exp\{\frac{i}{\hbar}bE+i\vec{v}\cdot\vec{k}+i\sigma\gamma(R,\vec{k})\}\Psi(R^{-1}\vec{k},E).$$

В случае $\vec{k}_0=0$ малая группа трехмерной евклидовой группы совпадает с группой трехмерных поворотов и ее неприводимые унитарные представления задаются матрицами $D^{l}(R)$. Таким образом получаем IУ тип представлений, где пространство L есть $(2l+1)$-мерное пространство, $\mathcal{H}$ есть пространство функций $\psi_\alpha(E)$, $\alpha=-l,\dots,+l$, и операторы представления действуют так:

$$[U(R,\vec{v},\vec{a},b)]_\alpha(E)=\exp\{\frac{i}{\hbar}bE\}\sum_{\beta=-l}^{+l}D_{\alpha\beta}(R)\Psi_\beta(E).$$

Посмотрим теперь, какова физическая интерпретация полученных гильбертовых пространств. Очевидно, что векторы представлений

типа Ш и IУ не могут представлять никакого физически интересного объекта, так как все векторы здесь инвариантны относительно пространственных сдвигов. Оказывается, что и векторы представлений типа I и П не могут описывать реальных физических систем. Чтобы это показать, сосредоточим внимание на I типе представлений (рассуждения в случае П типа аналогичны). Итак, предположим, что вектор Ψ, принадлежащий гильбертову пространству $\mathcal{H}_I$, описывает состояние, локализованное, например, в точке $\vec{x}=0$. Тогда состояние $U(1,\vec{0},\vec{a},0)\Psi$ должно быть локализовано в точке $\vec{x}=\vec{a}$ и эти два состояния должны быть ортогональны. Это означает, что

$$0=(\Psi,U(1,\vec{0},\vec{a},0)\Psi)=\int\delta(\vec{v}^2-\vec{v}_0^2)\delta(\vec{p}^2-\vec{p}_0^2)d^2v\,d^3p\,dE\,\psi^*(\vec{v}\vec{p}E)(U(1,\vec{0},\vec{a},0)\Psi)(\vec{v}\vec{p}E)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dE\int d^3p\,\delta(\vec{p}^2-\vec{p}_0^2)\int d^2v\,\delta(\vec{v}^2-\vec{v}_0^2)\exp\{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{p}\}\left|\Psi(\vec{v},\vec{p},E)\right|^2$$

для всех $\vec{a}\neq 0$. Интегрируя это выражение по всем направлениям $\vec{a}$, получаем с правой стороны

$$\frac{\sin ap_0}{ap_0}\int dE\int d^3p\,\delta(\vec{p}^2-\vec{p}_0^2)\int d^2v\,\delta(\vec{v}^2-\vec{v}_0^2)\left|\Psi(\vec{v},\vec{p},E)\right|^2.$$

Оставшийся интеграл - это просто нормировочный интеграл состояния Ψ и поэтому отличен от нуля. Первый фактор тоже не равен нулю, и, таким образом, видим, что состояния, локализованные в двух разных точках, не могут быть ортогональными. Этот результат несовместим с обычными представлениями о локализуемости объектов.

Точно так же можно показать, что в представлениях группы Галилея нет состояний с определенной скоростью, и окончательно заключаем, что пространства представлений группы Галилея не могут служить для описания физических объектов.

Выход из этого положения был найден при помощи введения так называемой расширенной группы Галилея.

Расширенная группа Галилея и ее представления

Для того чтобы получить физически интересные теории, в основе которых лежит группа Галилея, посмотрим более детально, каким образом описываются свойства симметрии в квантовой механике. Всякий физический объект описывается некоторым лучом $\underline{\Psi}$ соответствующего гильбертова пространства. При преобразованиях Галилея g он переходит в другой луч $\underline{\Psi}_g$, такой, что

$$\underline{\Psi}_{g=e} = \underline{\Psi}$$

и

$$(\underline{\Psi}_{g_1})_{g_2} = \underline{\Psi}_{g_1 \circ g_2},$$

где $g_1 \circ g_2$ обозначает композицию преобразований g_1 и g_2. При этом всегда требуется, чтобы

$$|(\underline{\Psi}, \underline{\phi})|^2 = |(\underline{\Psi}_g, \underline{\phi}_g)|^2,$$

где (Ψ, ϕ) обозначает значение скалярного произведения для любых векторов, принадлежащих лучам $\underline{\Psi}$ и $\underline{\phi}$, соответственно. Знаменитая теорема Вигнера утверждает, что всякое соответствие лучей, удовлетворяющее вышеуказанным требованиям, порождает определенное с точностью до фазового множителя унитарное или антиунитарное соответствие векторов гильбертова пространства. Поскольку для непрерывных групп преобразований всегда требуется, чтобы $|(\phi, \Psi_g)|$ непрерывно зависел от g, то антиунитарные соответствия исключаются. Итак, всякая группа симметрии g будет описываться семейством унитарных операторов $U(g)$, удовлетворяющих условию

$$U(g_1)U(g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1 \circ g_2),$$

где $|\omega(g_1, g_2)| = 1$. Легко проверяется, что условие

$$|(\Psi, \Phi)|^2 = |(\Psi_g, \Phi_g)|^2$$

тогда выполняется.

Для многих физических групп симметрии можно показать, что фазовый множитель ω всегда может быть выбран так, что он равен ± 1. Но для группы Галилея дело обстоит несколько иначе. Чтобы это увидеть, определим вид фазового множителя ω для группы Галилея.

Прежде всего, выпишем явный вид нашей формулы

$$U(R_1, \vec{v}_1, \vec{a}_1, b_1)\,U(R_2, \vec{v}_2, \vec{a}_2, b_2) = \\ = \omega(R_1 \vec{v}_1 \vec{a}_1 b_1; R_2 \vec{v}_2 \vec{a}_2 b_2)\,U(R_1 R_2, \vec{v}_1 + R_1 \vec{v}_2, \vec{a}_1 + R_1 \vec{a}_2 + b_2 \vec{v}_1, b_1 + b_2)$$

и определим ω как функцию своих аргументов. Решение задачи получим несколькими шагами. Сначала воспользуемся известным результатом для евклидовой группы, где нет фазового множителя, и этот факт примем без доказательства. Это означает, что имеем

$$U(R_1, \vec{0}, \vec{a}_1, 0)\,U(R_2, \vec{0}, \vec{a}_2, 0) = U(R_1 R_2, \vec{0}, \vec{a}_1 + R_1 \vec{a}_2, 0).$$

Но группа Галилея содержит в себе еще и другую подгруппу со структурой евклидовой группы, а именно – подгруппу $R \wedge V$. Отсюда следует, что

$$U(R_1, \vec{v}_1, \vec{0}, 0)\,U(R_2, \vec{v}_2, \vec{0}, 0) = U(R_1 R_2, \vec{v}_1 + R_1 \vec{v}_2, \vec{0}, 0).$$

Возьмем теперь подгруппу V и предположим, что

$$U(\mathbb{1}, \vec{u}, \vec{0}, 0)\,U(\mathbb{1}, \vec{v}, \vec{0}, 0)\,U^{-1}(\mathbb{1}, \vec{u}, \vec{0}, 0) = \exp\{i\varphi(u,v)\}\,U(\mathbb{1}, \vec{v}, \vec{0}, 0).$$

Если векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ параллельны, то сразу можем убрать фазовый множитель, так как в этом случае имеем дело с однопараметрической группой, а для всех таких групп нет фазового множителя. Таким образом, можем предположить, что векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$

перпендикулярны. Умножаем предыдущее равенство слева на оператор, соответствующий повороту на угол π вокруг вектора $\vec{u}$, а справа – на обратный к нему оператор, и получаем

$$U(1,\vec{u},\vec{0},0)U(1,-\vec{v},\vec{0},0)U^{-1}(1,\vec{u},\vec{0},0)=\exp\{i\varphi(u,v)\}U(1,-\vec{v},\vec{0},0).$$

При этом мы использовали тот факт, что при вышеуказанном повороте вектор $\vec{v}$ меняет знак, и что для подгруппы $R\wedge V$ нет фазового множителя. Умножая оба последних равенства и замечая, что

$$U(1,\vec{v},\vec{0},0)U(1,-\vec{v},\vec{0},0)=I,$$

получаем

$$\exp\{i\varphi(u,v)\}=1.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(u,v)=n\pi.$$

Но

$$\varphi(0,v)=\varphi(u,0)=0$$

и, следовательно, $n=0$ и

$$\varphi(u,v)\equiv 0.$$

Точно таким же способом получаем, что

$$U(1,\vec{0},\vec{a}_1,0)U(1,\vec{0},\vec{a}_2,0)U^{-1}(1,\vec{0},\vec{a}_1,0)=U(1,\vec{0},\vec{a}_2,0).$$

Перейдем к нахождению фазового множителя в равенстве

$$U(1,\vec{0},\vec{a},0)U(1,\vec{v},\vec{0},0)U^{-1}(1,\vec{0},\vec{a},0)=\exp\{i\varphi(\vec{a},\vec{v})\}U(1,\vec{v},\vec{0},0). \qquad (*)$$

В случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}$ перпендикулярны, можем повторить предыдущие рассуждения и заключить, что

$$\varphi(\vec{a},\vec{v})=0 \qquad \text{для} \qquad \vec{a}\perp\vec{v}.$$

Предположим теперь, что $\vec{a}$ параллельно $\vec{v}$. В этом случае φ зависит только от длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{v}$. Умножая вышенаписанное равенство (*) слева на $U(1,\vec{0},\vec{b},0)$ и справа на $U(1,\vec{0},-\vec{b},0)$,

где $\vec{b}\parallel\vec{a}$, получим

$$\varphi(a+b,v)=\varphi(a,v)+\varphi(b,v),$$

откуда следует, что $\varphi(a,v)$ – линейная функция a:

$$\varphi(a,v)=af(v).$$

Умножая рассматриваемое равенство (*) справа на $U(1,\vec{0},\vec{a},0)\cdot U^{-1}(1,\vec{v},\vec{0},0)U^{-1}(1,\vec{u},\vec{0},0)$ и слева на $U(1,\vec{u},\vec{0},0)$, где $\vec{u}\parallel\vec{v}$, получаем

$$f(u+v)=f(u)-f(-v),$$

откуда следует, что функция $f(v)$ линейно зависит от своего аргумента. Таким образом, можно положить

$$\varphi(a,v)=-\frac{m}{\hbar}av=-\frac{m}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{v},$$

где мы использовали запись, пригодную для любых направлений $\vec{a}$ и $\vec{v}$. Коэффициент $m/\hbar$ пока совершенно произвольный, но вещественный. Ниже увидим, что m равняется массе того физического объекта, который собираемся описывать с помощью представлений группы Галилея, а константа $\hbar$ равна константе Планка.

Полученный результат запишем в виде

$$U(1,\vec{0},\vec{a},0)U(1,\vec{v},\vec{0},0)=\exp\{-i\tfrac{m}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{v}\}U(1,\vec{v},\vec{0},0)U(1,\vec{0},\vec{a},0),$$

который показывает, что в случае $m\neq 0$ коммутативная подгруппа $V\times S$ группы Галилея описывается некоммутативным представлением.

Временные сдвиги образуют однопараметрическую группу и поэтому

$$U(1,\vec{0},\vec{0},b_1)U(1,\vec{0},\vec{0},b_2)=U(1,\vec{0},\vec{0},b_1+b_2).$$

Рассмотрим теперь равенство

$$U(R,\vec{0},\vec{0},0)U(1,\vec{0},\vec{0},b)U^{-1}(R,\vec{0},\vec{0},0)=\exp\{i\varphi(\alpha,\vec{n},b)\}U(1,\vec{0},\vec{0},b), \qquad (**)$$

где мы явным образом выделили зависимость фазового множителя от угла поворота α, оси поворота $\vec{n}$ и величины сдвига b.

Умножая равенство (жж) слева на оператор, соответствующий повороту вокруг $\vec{n}$, на угол β и справа на обратный ему оператор, получаем

$$\varphi(\alpha,\vec{n},b)+\varphi(\beta,\vec{n},b)=\varphi(\alpha+\beta,\vec{n},b).$$

Взяв рассматриваемое равенство (жж) для двух разных значений параметра b и умножив полученные равенства, получим

$$\varphi(\alpha,\vec{n},b_1)+\varphi(\alpha,\vec{n},b_2)=\varphi(\alpha,\vec{n},b_1+b_2).$$

Это значит, что функция φ имеет вид

$$\varphi(\alpha,\vec{n},b)=\alpha\, b\,\varphi(\vec{n}).$$

Так как поворот на угол 2π не меняет физического описания, то имеем

$$\varphi(2\pi,\vec{n},b)=2\pi k\ , \qquad k=0,\pm1,\ldots$$

что в сочетании с линейной зависимостью φ от b дает единственное решение

$$\varphi(\alpha,\vec{n},b)\equiv 0.$$

Применяя уже известный трюк с поворотом на угол π вокруг вектора $\vec{a}$, получаем

$$\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{a},0)\,\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{0},b)=\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{0},b)\,\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{a},0)$$

и нам остается определить лишь только один фазовый множитель. в равенстве

$$\mathcal{U}(1,\vec{v},\vec{0},0)\,\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{0},b)\,\mathcal{U}^{-1}(1,\vec{v},\vec{0},0)=\exp\{i\varphi(\vec{v},b)\}\,\mathcal{U}(1,\vec{0},b\vec{v},b).$$

Применяя прием с поворотом на угол π вокруг оси, перпендикулярной вектору $\vec{v}$, получаем

$$\mathcal{U}(1,-\vec{v},\vec{0},0)\,\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{0},b)\,\mathcal{U}^{-1}(1,-\vec{v},\vec{0},0)=\exp\{i\varphi(\vec{v},b)\}\,\mathcal{U}(1,\vec{0},-b\vec{v},b).$$

Перепишем это равенство с использованием уже известных фазовых множителей. Имеем

$$\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{0},b)\,\mathcal{U}(1,\vec{v},\vec{0},0)=\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{0},b)\,\mathcal{U}^{-1}(1,-\vec{v},\vec{0},0)=$$

$$=\exp\{i\varphi(\vec{v},b)\}\,\mathcal{U}^{-1}(1,-\vec{v},\vec{0},0)\,\mathcal{U}(1,\vec{0},-b\vec{v},b)=$$

$$=\exp\{i\varphi(\vec{v},b)\}\,\mathcal{U}(1,\vec{v},\vec{0},0)\,\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{0},b)\,\mathcal{U}(1,\vec{0},-b\vec{v},0)=$$

$$=\exp\{2i\varphi(\vec{v},b)\}\,\mathcal{U}(1,\vec{0},b\vec{v},b)\,\mathcal{U}(1,\vec{v},\vec{0},0)\,\mathcal{U}(1,\vec{0},-b\vec{v},0)=$$

$$=\exp\{2i\varphi(\vec{v},b)\}\,\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{0},b)\,\mathcal{U}(1,\vec{0},b\vec{v},0)\,\mathcal{U}(1,\vec{v},\vec{0},0)\,\mathcal{U}(1,\vec{0},-b\vec{v},0)=$$

$$=\exp\{2i\varphi(\vec{v},b)-i\tfrac{m}{\hbar}b\vec{v}^{\,2}\}\,\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{0},b)\,\mathcal{U}(1,\vec{v},\vec{0},0).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(\vec{v},b)=\frac{m}{2\hbar}\,b\vec{v}^{\,2}.$$

Таким образом, мы закончили все подготовительные этапы.

Используя определение

$$\mathcal{U}(R,\vec{v},\vec{a},b)\equiv\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{0},b)\,\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{a},0)\,\mathcal{U}(1,\vec{v},\vec{0},0)\,\mathcal{U}(R,\vec{0},\vec{0},0),$$

прямым вычислением получаем

$$\omega(R_1\vec{v}_1\vec{a}_1b_1;R_2\vec{v}_2\vec{a}_2b_2)=\exp\left\{\frac{im}{\hbar}\left(\vec{v}_1\cdot R_1\vec{a}_2+\frac{1}{2}b_2\vec{v}_1^{\,2}\right)\right\}.$$

Иногда используется и другое определение

$$\mathcal{U}(R,\vec{v},\vec{a},b)\equiv\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{0},b)\,\mathcal{U}(\vec{v},\vec{a})\,\mathcal{U}(R,\vec{0},\vec{0},0),$$

где

$$\mathcal{U}(\vec{v},\vec{a})=\exp\left\{\frac{im}{2\hbar}\vec{a}\cdot\vec{v}\right\}\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{a},0)\,\mathcal{U}(1,\vec{v},\vec{0},0)=$$

$$=\exp\left\{-\frac{im}{2\hbar}\vec{a}\cdot\vec{v}\right\}\mathcal{U}(1,\vec{v},\vec{0},0)\,\mathcal{U}(1,\vec{0},\vec{a},0).$$

При таком определении получается другой вид фазового множителя:

$$\omega(R_1\vec{v}_1\vec{a}_1b_1;R_2\vec{v}_2\vec{a}_2b_2)=\exp\left\{-\frac{im}{2\hbar}\left(\vec{a}_1\cdot R_1\vec{v}_2-\vec{v}_1\cdot R_1\vec{a}_2+b_2\vec{v}_1\cdot R_1\vec{v}_2\right)\right\}.$$

В дальнейшем будем пользоваться исключительно первым определением, так как оно удобнее для наших целей.

С математической точки зрения вместо рассмотрения представлений группы $\mathcal{G}$ с точностью до фазового множителя ω можно перейти к некоторому расширению $\tilde{\mathcal{G}}$, являющемуся полупрямым произведением группы $\mathcal{G}$ и некоторой однопараметрической группы Θ, т.е.

$$\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \wedge \Theta,$$

где закон композиции для элементов группы $\tilde{\mathcal{G}}$, обозначаемых через (g,θ), имеет вид

$$(g_1,\theta_1)\circ(g_2,\theta_2) = (g_1\circ g_2,\ \theta_1+\theta_2+\xi(g_1,g_2))$$

и

$$\omega(g_1,g_2) = \exp\{i\xi(g_1,g_2)\}.$$

Принимая для операторов $U(g,\theta)$ представления группы $\tilde{\mathcal{G}}$ формулу

$$U(g,\theta) = \exp\{i\theta\}U(g),$$

видим, что всякое представление группы $\mathcal{G}$ с точностью до множителя, однозначно определяет стандартное представление группы $\tilde{\mathcal{G}}$.

В случае группы Галилея группа $\tilde{\mathcal{G}}$ (называемая расширенной группой Галилея) является одиннадцати-параметрической группой с другой структурой, нежели группа Галилея. Ее единственной максимальной абелевой инвариантной подгруппой является подгруппа $\mathcal{S}\times\mathcal{T}\times\Theta$. Фактор-группа $\tilde{\mathcal{G}}/(\mathcal{S}\times\mathcal{T}\times\Theta)$ тоже имеет максимальную инвариантную подгруппу $\mathcal{V}$, и, наконец, фактор-группа $(\tilde{\mathcal{G}}/(\mathcal{S}\times\mathcal{T}\times\Theta))/\mathcal{V}$ есть группа $\mathcal{R}$. Таким образом,

$$\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{R}\wedge[\mathcal{V}\wedge(\mathcal{S}\times\mathcal{T}\times\Theta)].$$

Отметим, что в случае $m=0$ группа $\tilde{\mathcal{G}}$ становится прямым произведением групп $\mathcal{G}$ и Θ.

Построим теперь представления группы $\tilde{\mathcal{G}}$, которые часто называют физическими представлениями группы Галилея. Для этого представим группу $\tilde{\mathcal{G}}$ в виде

$$\tilde{\mathcal{G}} = H\wedge N,$$

где

$$N = \mathcal{S}\times\mathcal{T}\times\Theta\ , \quad H = \mathcal{R}\wedge\mathcal{V}.$$

Каждый элемент абелевой подгруппы N характеризуется таким образом пятью параметрами $(\vec{a}, b, \theta)$, а каждый элемент подгруппы H - парой $(R,\vec{v})$. Согласно закону композиции для группы $\tilde{\mathcal{G}}$, элементы $(R,\vec{v})$ определяют следующие гомоморфизмы N на N или, как говорят, действуют на $(\vec{a}, b, \theta)$:

$$(R,\vec{v})(\vec{a},b,\theta) = (R\vec{a}+b\vec{v},\ b,\ \theta+\tfrac{m}{\hbar}(\vec{v}\cdot R\vec{a}+\tfrac{1}{2}b\vec{v}^2)).$$

Элементы дуального пространства N' будем обозначать через $(\vec{p},E,\eta)$ и каждый такой элемент определяет одномерное, унитарное представление группы N в виде

$$U(\vec{a},b,\theta)\Psi = \exp\{-\tfrac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{a}-Eb)+i\eta\theta\}\Psi,$$

где коэффициент $\hbar$ выделен для дальнейшего удобства. Легко вычислить, что элементы $(R,\vec{v})$ следующим образом действуют в дуальном пространстве N':

$$(R,\vec{v})(\vec{p},E,\eta) = (R\vec{p}+\eta m\vec{v},\ E+\vec{v}\cdot R\vec{p}+\tfrac{1}{2}\eta m\vec{v}^2,\ \eta).$$

Из этой формулы видно, что группа $\mathcal{R}\wedge\mathcal{V}$ вовсе не действует на дуальное пространство Θ', что, конечно, означает, что параметр η путем соответствующего выбора единиц всегда может быть сделан равным I.

Зная действие $(R,\vec{v})$ в N', можем определить форму орбит группы $\tilde{\mathcal{G}}$. Если точка $(\vec{p}_0, E_0, \eta_0)$ принадлежит орбите, то одновременно ей принадлежат точки

$$\vec{p} = R\vec{p}_0 + \eta_0 m\vec{v}$$
$$E = E_0 + \vec{v}\cdot R\vec{p}_0 + \frac{1}{2}\eta_0 m\vec{v}^2$$
$$\eta = \eta_0 .$$

Эти три условия определяют некоторый параболоид с уравнением

$$\eta E - \frac{\vec{p}^2}{2m} = \Omega = \eta_0 E_0 - \frac{\vec{p}_0^2}{2m} .$$

Таким образом, орбиты расширенной группы Галилея определяются одним параметром Ω .

Рассмотрим теперь малые группы группы $\tilde{\mathcal{G}}$. Малая группа элемента $(\vec{p}_0, E_0, \eta_0)$ определяется уравнениями:

$$\vec{p}_0 = R\vec{p}_0 + \eta_0 m\vec{v}$$
$$E_0 = E_0 + \vec{v}\cdot R\vec{p}_0 + \frac{1}{2}\eta_0 m\vec{v}^2$$
$$\eta_0 = \eta_0 .$$

Последнее равенство тривиально, что еще раз подчеркивает несущественность выбора значения параметра η . Тривиально и второе равенство, так как оно является следствием первого. Таким образом, остается только равенство

$$\vec{p}_0 = R\vec{p}_0 + \eta_0 m\vec{v},$$

из которого видно, что для любого поворота R существует скорость

$$\vec{v}_{R,\vec{p}_0} = \frac{\vec{p}_0 - R\vec{p}_0}{\eta_0 m}$$

такая, что это равенство выполняется тождественно. Отсюда следует, что малая группа любой точки $(\vec{p}_0, E_0, \eta_0)$ любой орбиты Ω изоморфна группе вращений $\mathcal{R}$. Чтобы доказать, что это действительно изоморфизм, заметим, что из равенств

$$\vec{p} = R_1\vec{p} + \eta m\vec{v}_1 \qquad \text{и} \qquad \vec{p} = R_2\vec{p} + \eta m\vec{v}_2$$

следует

$$\vec{p} = (R_1R_2)\vec{p} + \eta m(\vec{v}_1 + R_1\vec{v}_2).$$

Представления группы вращений $\mathcal{R}$ хорошо известны. Они реализуются матрицами $D^s(R)$ в $(2s+1)$ – мерном пространстве L . Таким образом, поскольку всегда имеем дело с одинаковыми малыми группами и эти группы имеют только один тип представлений, то отсюда заключаем, что и расширенная группа Галилея обладает только одним типом представлений. Уже в этом месте видно существенное различие представлений групп $\mathcal{G}$ и $\tilde{\mathcal{G}}$.

Чтобы выписать явный вид представления группы $\tilde{\mathcal{G}}$, вычислим аргумент, фигурирующий в представлении малой группы. Используя методы предыдущего параграфа, находим

$$h^{-1}_{q\leftarrow q^0} h h_{q'\leftarrow q^0} = \left(R^{-1}_{\vec{p}\vec{p}_0} R R_{\vec{p}'\vec{p}_0},\ R^{-1}_{\vec{p}\vec{p}_0}(\vec{v} - \vec{v}_{EE_0} + R\vec{v}_{E'E_0})\right),$$

где $R_{\vec{p}\vec{p}_0}$ и v_{EE_0} определяются из формул

$$\vec{p} = R_{\vec{p}\vec{p}_0}\vec{p}_0 + \eta m\vec{v}_{EE_0},$$
$$E = E_0 + \vec{v}_{EE_0}\cdot R_{\vec{p}\vec{p}_0}\vec{p}_0 + \frac{1}{2}\eta m\vec{v}_{EE_0}^2$$

и аналогично для точки $(\vec{p}', E', \eta)$. Чтобы упростить это выражение, сделаем теперь специальный выбор точки на орбите, а именно – возьмем

$$(\vec{p}_0, E_0, \eta_0) = (\vec{0}, \Omega, 1).$$

В этом случае $R_{\vec{p}\vec{0}}$ произвольно и мы можем взять в качестве $R_{\vec{p}\vec{0}}$ тождественный поворот . Простые выкладки показывают, что тогда

$$h^{-1}_{q\leftarrow q^0} h h_{q'\leftarrow q^0} = (R, \vec{0}).$$

В дальнейшем будем пользоваться исключительно первым определением, так как оно удобнее для наших целей.

С математической точки зрения вместо рассмотрения представлений группы $\mathcal{G}$ с точностью до фазового множителя ω можно перейти к некоторому расширению $\tilde{\mathcal{G}}$, являющемуся полупрямым произведением группы $\mathcal{G}$ и некоторой однопараметрической группы Θ, т.е.

$$\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \wedge \Theta,$$

где закон композиции для элементов группы $\tilde{\mathcal{G}}$, обозначаемых через (g,θ), имеет вид

$$(g_1,\theta_1)\circ(g_2,\theta_2) = (g_1\circ g_2,\ \theta_1+\theta_2+\xi(g_1,g_2))$$

и

$$\omega(g_1,g_2) = exp\{i\xi(g_1,g_2)\}.$$

Принимая для операторов $\mathcal{U}(g,\theta)$ представления группы $\tilde{\mathcal{G}}$ формулу

$$\mathcal{U}(g,\theta) = exp\{i\theta\}\mathcal{U}(g),$$

видим, что всякое представление группы $\mathcal{G}$ с точностью до множителя, однозначно определяет стандартное предотавление группы $\tilde{\mathcal{G}}$.

В случае группы Галилея группа $\tilde{\mathcal{G}}$ (называемая расширенной группой Галилея) является одиннадцати-параметрической группой с другой структурой, нежели группа Галилея. Ее единственной максимальной абелевой инвариантной подгруппой является подгруппа $\mathcal{S}\times\mathcal{T}\times\Theta$. Фактор-группа $\tilde{\mathcal{G}}/(\mathcal{S}\times\mathcal{T}\times\Theta)$ тоже имеет максимальную инвариантную подгруппу $\mathcal{V}$, и, наконец, фактор-группа $(\tilde{\mathcal{G}}/(\mathcal{S}\times\mathcal{T}\times\Theta))/\mathcal{V}$ есть группа $\mathcal{R}$. Таким образом,

$$\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{R}\wedge[\mathcal{V}\wedge(\mathcal{S}\times\mathcal{T}\times\Theta)].$$

Отметим, что в случае $m=0$ группа $\tilde{\mathcal{G}}$ становится прямым произведением групп $\mathcal{G}$ и Θ.

Построим теперь представления группы $\tilde{\mathcal{G}}$, которые часто называют физическими представлениями группы Галилея. Для этого представим группу $\tilde{\mathcal{G}}$ в виде

$$\tilde{\mathcal{G}} = H\wedge N,$$

где

$$N = \mathcal{S}\times\mathcal{T}\times\Theta, \quad H = \mathcal{R}\wedge\mathcal{V}.$$

Каждый элемент абелевой подгруппы N характеризуется таким образом пятью параметрами $(\vec{a}, b, \theta)$, а каждый элемент подгруппы H – парой $(R,\vec{v})$. Согласно закону композиции для группы $\tilde{\mathcal{G}}$, элементы $(R,\vec{v})$ определяют следующие гомоморфизмы N на N или, как говорят, действуют на $(\vec{a}, b, \theta)$:

$$(R,\vec{v})(\vec{a},b,\theta) = (R\vec{a}+b\vec{v},\ b,\ \theta+\tfrac{m}{\hbar}(\vec{v}\cdot R\vec{a}+\tfrac{1}{2}b\vec{v}^{2})).$$

Элементы дуального пространства N' будем обозначать через $(\vec{p},E,\eta)$ и каждый такой элемент определяет одномерное, унитарное представление группы N в виде

$$\mathcal{U}(\vec{a},b,\theta)\Psi = exp\{-\tfrac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{a}-Eb)+i\eta\theta\}\Psi,$$

где коэффициент $\hbar$ выделен для дальнейшего удобства. Легко вычислить, что элементы $(R,\vec{v})$ следующим образом действуют в дуальном пространстве N':

$$(R,\vec{v})(\vec{p},E,\eta) = (R\vec{p}+\eta m\vec{v},\ E+\vec{v}\cdot R\vec{p}+\tfrac{1}{2}\eta m\vec{v}^{2},\ \eta).$$

Из этой формулы видно, что группа $\mathcal{R}\wedge\mathcal{V}$ вовсе не действует на дуальное пространство Θ', что, конечно, означает, что параметр η путем соответствующего выбора единиц всегда может быть сделан равным I.

Зная действие $(R,\vec{v})$ в N', можем определить форму орбит группы $\tilde{\mathcal{G}}$. Если точка $(\vec{p}_0, E_0, \eta_0)$ принадлежит орбите, то одновременно ей принадлежат точки

Таким образом, получаем явный вид операторов представления расширенной группы Галилея

$$[U(R,\vec{v},\vec{a},b,\theta)\Psi]_\alpha(\vec{p}E\eta)=$$
$$=\exp\{-i\frac{\vec{a}\cdot\vec{p}-bE}{\hbar}+i\eta\theta\}\cdot\sum_{\beta=-s}^{+s}D^s_{\alpha\beta}(R)\Psi_\beta(R^{-1}(\vec{p}-\eta m\vec{v}),E-\vec{v}\cdot\vec{p}+\tfrac{1}{2}\eta m\vec{v}^2,\eta).$$

Каждое такое представление однозначно определяется выбором трех величин: m , Ω и s и в дальнейшем будем каждое такое представление обозначать через $U(m,\Omega,s)$.

Легко можно проверить, что выписанное нами представление унитарно относительно скалярного произведения

$$(\Phi,\Psi)=\int d^3p\int dE\,\delta(\Omega-E+\frac{\vec{p}^2}{2m})\sum_{\alpha=-s}^{+s}\varphi^*_\alpha(\vec{p}E\eta)\psi_\alpha(\vec{p}E\eta).$$

Несколько слов о физической интерпретации найденного представления.

Прежде всего заметим, что предыдущие аргументы, показывающие нелокализуемость состояний нерасширенной группы Галилея, здесь не работают. Они основывались на том факте, что для нерасширенной группы Галилея $\vec{p}^2$ было постоянным на данной орбите. Теперь орбиты определяются уравнением параболоида

$$\Omega=\eta E-\frac{\vec{p}^2}{2m}$$

и, конечно, $\vec{p}^2$ уже не является постоянным на орбите.

Формулы

$$\vec{p}'=R\vec{p}+m\vec{v},$$
$$E'=E+\vec{v}\cdot R\vec{p}+\tfrac{1}{2}m\vec{v}^2,$$

определяющие действие подгруппы $R\wedge V$ на элементы $(\vec{p},E,1)$ дуального пространства N', в точности совпадают с теми формулами, с которыми встречаемся в механике при рассмотрении изменений импульса и энергии материальной точки с массой m при переходе

к другой инерциальной системе отсчета. Отсюда следует, что $\vec{p}$ – это импульс объекта, описываемого волновой функцией $\psi_\alpha(\vec{p},E)$, E – его энергия и m – его масса. Таким образом, нашел свою интерпретацию параметр m , введенный нами раньше из чисто математических соображений.

Посмотрим теперь на параметр Ω . Легко видеть, что это энергия объекта в системе, где он покоится, и поэтому будем называть Ω внутренней энергией. Скалярное произведение в гильбертовом пространстве зависит от внутренней энергии через посредство инвариантной меры на параболоиде и поэтому пространство Гильберта с данным значением Ω обозначим через $\mathcal{H}_\Omega$. Для всякого $\psi\in\mathcal{H}_\Omega$ определим унитарный оператор $\hat{\Omega}$ такой, что

$$(\hat{\Omega}\psi)_\alpha(\vec{p},E)=\psi_\alpha(\vec{p},E-\Omega)=\psi'_\alpha(\vec{p},E),$$

который отображает $\mathcal{H}_\Omega$ на $\mathcal{H}_0$. Действительно,

$$(\psi',\phi')_0=\int d^3p\int dE\,\delta(E-\frac{\vec{p}^2}{2m})\sum_{\alpha=-s}^{+s}\psi'^*_\alpha(\vec{p},E)\varphi'_\alpha(\vec{p},E)=$$
$$=\int d^3p\int dE\,\delta(\Omega-E+\frac{\vec{p}^2}{2m})\sum_{\alpha=-s}^{+s}\psi^*_\alpha(\vec{p},E)\varphi_\alpha(\vec{p},E)=(\psi,\phi)_\Omega,$$

где мы явным образом обозначили зависимость скалярного произведения от Ω . Если задано представление $U_\Omega(R\vec{v}\vec{a}b\theta)$ в пространстве $\mathcal{H}_\Omega$, то

$$\tilde{U}(R\vec{v}\vec{a}b\theta)=\hat{\Omega}\,U_\Omega(R\vec{v}\vec{a}b\theta)\hat{\Omega}^{-1}$$

тоже будет представлением расширенной группы Галилея, но действующим в пространстве $\mathcal{H}_0$. Прямой расчет дает

$$\tilde{U}(R\vec{v}\vec{a}b\theta)=\exp\{-\frac{ib\Omega}{\hbar}\}U_0(R\vec{v}\vec{a}b\theta),$$

где U_0 есть представление группы Галилея в пространстве $\mathcal{H}_0$.

Таким образом, получаем

$$U_\Omega(R\vec{v}\vec{a}b\theta)=\exp\{-\frac{ib\Omega}{\hbar}\}\hat{\Omega}^{-1}U_0(R\vec{v}\vec{a}b\theta)\hat{\Omega}.$$

Это показывает, что представления $U(m\,\Omega\,s)$ и $U(m\,0\,s)$ физически эквивалентны. Для объекта, описываемого неприводимым унитарным представлением расширенной группы Галилея, значение внутренней энергии служит только для определения начала отсчета энергии и, следовательно, не имеет физического значения. Положение, однако, меняется для представлений, не являющихся неприводимыми, но эти вопросы не входят в рамки настоящих лекций.

Смысл параметра s прост. Поскольку из выписанных формул видно, что s определяет поведение системы при пространственных поворотах, то, следовательно, s есть спин системы.

На этом мы заканчиваем обсуждение вопросов, связанных с представлениями группы Галилея, и перейдем к галилеево-инвариантным волновым уравнениям.

Галилеево-инвариантные волновые уравнения

Перейдем к вопросу о существовании галилеево-инвариантных волновых уравнений. Прежде всего обсудим галилееву инвариантность уравнения Шредингера для свободной, бесспиновой частицы с массой m :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{x},t) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - V\right)\psi(\vec{x},t),$$

где V – постоянный потенциал, Δ – оператор Лапласа, и волновая функция $\psi(\vec{x},t)$ удовлетворяет условию

$$\|\psi\|^2 \equiv (\psi,\psi) = \int |\psi(\vec{x},t)|^2 d^3x < \infty,$$

которое позволяет интерпретировать $|\psi(\vec{x},t)|^2$ как вероятность найти частицу в точке $\vec{x}$ в момент времени t .

Для того чтобы при переходе к новой системе отсчета (где координаты $\vec{x}'$ и t' связаны с координатами $\vec{x}$ и t преобразованием Галилея) не менялось физическое содержание уравнения Шредингера, нужно, чтобы существовал закон преобразования волновой функции ψ , такой, что новая волновая функция $\psi'(\vec{x}',t')$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta'\psi'(\vec{x}',t') = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - V'\right)\psi'(\vec{x}',t')$$

с некоторым возможно иным значением постоянного потенциала V' и чтобы имело место равенство

$$|\psi'(\vec{x}',t')|^2 = |\psi(\vec{x},t)|^2,$$

обеспечивающее инвариантность вероятностной интерпретации. Но последнее условие означает, что функции ψ' и ψ связаны соотношением:

$$\psi'(\vec{x}',t') = \exp\left\{i\,\frac{\lambda(\vec{x},t)}{\hbar}\right\}\psi(\vec{x},t),$$

где фазовый множитель $\lambda(\vec{x},t)$ зависит, вообще говоря, от параметров преобразования Галилея, переводящего точку $(\vec{x},t)$ в точку $(\vec{x}',t')$, а константа $\hbar$ введена для удобства.

Требование эквивалентности уравнений Шредингера для волновых функций ψ и ψ' приводит к следующим условиям:

$$V' = V$$

$$\vec{\nabla}\lambda(\vec{x},t) = mR^{-1}\vec{v}$$

$$\frac{\partial\lambda(\vec{x},t)}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\Delta\lambda(\vec{x},t) + \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}.$$

Последние два условия дают

$$\lambda(\vec{x},t) = m\vec{v}\cdot R\vec{x} + \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}t + C(R\,\vec{v}\,\vec{a}\,b),$$

где функция C – произвольная функция своих аргументов, удовлетворяющая единственному условию

$$C(1\,\vec{0}\,\vec{0}\,0) = 0$$

Однако для того, чтобы найденный закон преобразования волновой функции обладал групповым свойством, нужно потребовать, чтобы

$$C(R\vec{v}\vec{a}b)\equiv 0.$$

Представим $\psi(\vec{x},t)$ интегралом Фурье вида

$$\psi(\vec{x},t)=\int d^3p\,dE\,\delta\left(V-E+\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)\right\}\widetilde{\psi}(\vec{p},E)$$

и аналогично выразим $\psi'(\vec{x}',t')$ через $\widetilde{\psi}'(\vec{p}',E')$. Тогда легко можно убедиться в том, что

$$\widetilde{\psi}'(\vec{p},E)=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{a}-Eb)\right\}\widetilde{\psi}\left(R^{-1}(\vec{p}-m\vec{v}),E-\vec{v}\cdot\vec{p}+\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}\right),$$

что точно совпадает с тем правилом преобразования, которое получается с помощью представления расширенной группы Галилея, соответствующего частице с нулевым спином. Таким образом, в случае бесспиновых свободных частиц теория представлений группы Галилея эквивалентна теории галилеево-инвариантных волновых уравнений. Однако методы теории групп теряют свою силу в случае взаимодействия частицы с некоторым внешним полем. В этом случае, как известно, неоценимую услугу дают нам волновые уравнения.

Долгое время считалось, что единственное существующее волновое уравнение в нерелятивистском случае - это уравнение Шредингера. Что касается частиц с высшими спинами, то считалось, что для них сначала надо строить релятивистские волновые уравнения и только потом переходить в этих уравнениях к нерелятивистскому пределу. Материал предыдущего параграфа, однако, показывает, что понятие спина в равной степени естественным образом возникает и в нерелятивистском групповом подходе. Поэтому и в нерелятивистском случае должны существовать волновые уравнения для спиновых частиц и они должны получаться без помощи релятивистских уравнений.

Причина неудачи первых попыток построения волновых уравнений для высших спинов заключается в том, что если взять волновые функции $\psi_\alpha(\vec{x},t)$ как фурье-преобразования волновых функций $\psi_\alpha(\vec{p},E)$, образующих базис данного неприводимого унитарного представления группы Галилея, то единственными волновыми уравнениями оказываются уравнения Шредингера для каждой компоненты ψ_α в отдельности. Чтобы выйти из этого затруднения, напомним, что и в релятивистском случае в волновых уравнениях для высших спинов кроме компонент волновой функции, вытекающих из теории групп, всегда присутствуют и другие, "лишние" компоненты, которые удаляются с помощью добавочных условий. При поиске нетривиальных волновых уравнений для высших спинов можно действовать точно так же, как поступал Дирак при выводе своего уравнения, т.е. не фиксировать число компонент волновой функции $\psi_\alpha(\vec{x},t)$, $\alpha=1,2,\ldots N$. Напишем общий вид линейного уравнения

$$i\hbar\sum_{\beta=1}^{N}A_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi_\beta(\vec{x},t)}{\partial t}+i\hbar\sum_{j=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{N}B_{j,\alpha\beta}\frac{\partial\psi_\beta(\vec{x},t)}{\partial x_j}+m\sum_{\beta=1}^{N}C_{\alpha\beta}\psi_\beta(\vec{x},t)=0$$

или в матричном виде

$$i\hbar A\frac{\partial\psi}{\partial t}+i\hbar\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\psi+mC\psi=0.$$

Потребуем теперь, чтобы каждая компонента волновой функции была решением уравнения Шредингера. Это означает, что существует оператор

$$i\hbar A'\frac{\partial}{\partial t}+i\hbar\vec{B}'\cdot\vec{\nabla}+mC'$$

такой, что

$$\left(i\hbar A'\frac{\partial}{\partial t}+i\hbar\vec{B}'\cdot\vec{\nabla}+mC'\right)\left(i\hbar A\frac{\partial}{\partial t}+i\hbar\vec{B}\cdot\vec{\nabla}+mC\right)\equiv$$
$$\equiv 2m\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right).$$

где для более удобной нормировки мы выделили фактор $2m$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциальных операторах, получаем следующую систему матричных уравнений:

$$A'A=0 \quad , \quad A'B_j+B'_jA=0 \quad , \quad j=1,2,3,$$
$$A'C+C'A=2, \quad B'_jB_k+B'_kB_j=-2\delta_{jk}, \quad j,k=1,2,3,$$
$$C'C=0 \quad , \quad B'_jC+C'B_j=0 \quad , \quad j=1,2,3.$$

Введем новые матрицы:

$$B_4=i\left(A+\tfrac{1}{2}C\right) \quad , \quad B'_4=i\left(A'+\tfrac{1}{2}C'\right)$$
$$B_5=A-\tfrac{1}{2}C \quad , \quad B'_5=A'-\tfrac{1}{2}C'.$$

В новых обозначениях полученная система уравнений приобретает вид

$$B'_\mu B_\nu+B'_\nu B_\mu=-2\,\delta_{\mu\nu},$$

где

$$\mu,\nu=1,2,\ldots 5,$$

что напоминает антикоммутационные соотношения для матриц Дирака. Связь с последними получим, если заметим, что система соотношений для матриц B_μ и B'_μ имеет следующее решение

$$B_\alpha=\beta\gamma_\alpha \quad , \quad B'_\alpha=-\gamma_\alpha\beta^{-1}, \quad \alpha=1,2,3,4,$$
$$B_5=-i\beta \quad , \quad B'_5=-i\beta^{-1} \; ,$$

где β - произвольная неособенная матрица, и матрицы γ_α удовлетворяют соотношениям антикоммутации

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta+\gamma_\beta\gamma_\alpha=2\,\delta_{\alpha\beta},$$

позволяющими идентифицировать матрицы γ_α с обычными матрицами Дирака. Таким образом, точно так, как и в релятивистской физике, волновая функция $\psi_\alpha(\vec{x}t)$ имеет четыре компоненты.

Возьмем теперь такую конкретную реализацию γ -матриц:

$$\gamma_j=i\begin{pmatrix}0 & -\sigma_j\\ \sigma_j & 0\end{pmatrix},\; j=1,2,3,\; \gamma_4=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}, \quad \beta=i\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},$$

где σ_j – обычные двумерные матрицы Паули. В этом случае получаем

$$A=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \; , \; B_j=\begin{pmatrix}0 & \sigma_j\\ \sigma_j & 0\end{pmatrix} \; , \quad C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2I\end{pmatrix}.$$

Записывая ψ в виде

$$\psi(\vec{x},t)=\begin{pmatrix}\varphi(\vec{x},t)\\ \chi(\vec{x},t)\end{pmatrix},$$

где φ и χ – двухкомпонентные объекты, перепишем уравнение

$$i\hbar A\frac{\partial\psi}{\partial t}+i\hbar\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\psi+mC\psi=0$$

в виде системы двух уравнений

$$i\hbar\frac{\partial\varphi(\vec{x},t)}{\partial t}+i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\chi(\vec{x},t)=0$$
$$i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi(\vec{x},t)+2m\chi(\vec{x},t)=0.$$

Отсюда видно, что

$$\chi(\vec{x},t)=-\frac{i\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi(\vec{x},t)$$

и в итоге волновая функция имеет только две независимые компоненты $\varphi_\alpha(\vec{x},t)$, $\alpha=1,2$. Подставляя χ в первое уравнение, видим, что обе компоненты $\varphi_\alpha(\vec{x},t)$ независимо удовлетворяют уравнению Шредингера.

Нетрудно убедиться, что полученное уравнение допускает корректную вероятностную интерпретацию с плотностью вероятности

$$\rho(\vec{x},t)=\sum_{\alpha=1}^{2}\varphi^*_\alpha(\vec{x},t)\varphi_\alpha(\vec{x},t)\equiv\varphi^\dagger(\vec{x},t)\varphi(\vec{x},t),$$

в которой присутствуют только независимые компоненты волновой функции, и что эта плотность удовлетворяет уравнению непрерывности со следующим током:

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \vec{j}_1(\vec{x},t) + \vec{j}_2(\vec{x},t),$$

где

$$\vec{j}_1(\vec{x},t) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\varphi^+(\vec{x},t)\vec{\nabla}\varphi(\vec{x},t) - (\vec{\nabla}\varphi^+(\vec{x},t))\varphi(\vec{x},t)\right],$$

$$\vec{j}_2(\vec{x},t) = \frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}\times\left[\varphi^+(\vec{x},t)\vec{\sigma}\varphi(\vec{x},t)\right].$$

Часть $\vec{j}_1(\vec{x},t)$ этого тока совпадет с обычным выражением для тока в рамках теории Шредингера, в то время как $\vec{j}_2(\vec{x},t)$ – совершенно новое выражение, которое нельзя получить с помощью уравнения Шредингера. В дальнейшем будет ясно, что именно эта часть тока ответственна за предсказание правильного значения магнитного момента частицы.

Нетрудно также убедиться в том, что полученное волновое уравнение является нерелятивистским пределом для релятивистского уравнения Дирака. Отсюда сразу можно заключить, что это волновое уравнение описывает частицы со спином $1/2$. Однако наша цель заключается в получении всех результатов без помощи соответствующих релятивистских теорий. Поэтому исследуем закон преобразования волновой функции $\psi(\vec{x},t)$ относительно галилеевых преобразований.

Общий вид линейного закона преобразования таков:

$$\psi'(\vec{x},t) = \begin{pmatrix}\varphi'(\vec{x},t)\\ \chi'(\vec{x},t)\end{pmatrix} = exp\left\{\frac{i}{\hbar}\lambda(\vec{x},t)\right\}\begin{pmatrix}A(R\vec{v}\vec{a}b), & B(R\vec{v}\vec{a}b)\\ C(R\vec{v}\vec{a}b), & D(R\vec{v}\vec{a}b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi(\vec{x},t)\\ \chi(\vec{x},t)\end{pmatrix},$$

где все матрицы A, B, C и D – двумерные. Потребуем, чтобы в каждой системе отсчета только компоненты φ волновой функции были независимые. Это даст

$$B(R\vec{v}\vec{a}b) = 0.$$

Так как каждая компонента φ_α независимо удовлетворяет уравнению Шредингера, то фазовый множитель $\lambda(\vec{x},t)$ будет здесь точно таким же, как и в бесспиновом случае. Наконец, требуя, чтобы $\psi'(\vec{x}',t')$ удовлетворяло волновому уравнению

$$i\hbar A\frac{\partial\psi'}{\partial t'} + i\hbar\vec{B}\cdot\vec{\nabla}'\psi' + mC\psi' = 0,$$

получаем

$$C(R\vec{v}\vec{a}b) = -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{v}}{2}A(R\vec{v}\vec{a}b),$$

$$D(R\vec{v}\vec{a}b) = A(R\vec{v}\vec{a}b)$$

и

$$A(R\vec{v}\vec{a}b)\vec{\sigma}A^{-1}(R\vec{v}\vec{a}b) = R^{-1}\vec{\sigma}.$$

Последнее условие сразу позволяет заключить, что матрица A, определяющая закон преобразования для φ, с точностью до множителя совпадает с матрицей $D^{1/2}(R)$, реализующей двумерное неприводимое представление трехмерной группы вращений, соответствующее значению спина $s = \frac{1}{2}$. Отсюда, независимо от всяких релятивистских аналогий, следует, что полученное волновое уравнение описывает частицу со спином $1/2$.

Таким образом, волновая функция ψ преобразуется по закону

$$\psi'(\vec{x}',t') = exp\left\{\frac{i}{\hbar}\lambda(\vec{x},t)\right\}\Delta^{1/2}(R,\vec{v})\psi(\vec{x},t),$$

где четырехмерная матрица $\Delta^{1/2}$ имеет вид

$$\Delta^{1/2}(R,\vec{v}) = \begin{pmatrix} D^{1/2}(R), & 0\\ -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{v}}{2}D^{1/2}(R), & D^{1/2}(R)\end{pmatrix}$$

и удовлетворяет следующему закону композиции

$$\Delta^{1/2}(R_1,\vec{v}_1)\Delta^{1/2}(R_2,\vec{v}_2)=\Delta^{1/2}(R_1R_2,\vec{v}_1+R_1\vec{v}_2),$$

что соответствует закону композиции для однородной группы Галилея $\mathcal{R}\wedge\mathcal{V}$. Таким образом, волновая функция ψ образует базис конечномерного представления однородной группы Галилея. Напомним здесь, что точно такое же положение имеем и в релятивистской физике, где волновые функции реализуют конечномерные представления однородной группы Лоренца. Но в нерелятивистском случае положение сложнее, так как однородная группа Галилея не является простой группой и до сих пор нет полной классификации ее конечномерных представлений. Уже на примере представления видно, что хотя оно приводимо, но тем не менее неразложимо на неприводимые.

Используем теперь приобретенный опыт с волновым уравнением для спина $1/2$, при построении таких же уравнений для произвольного спина. Прежде всего потребуем, чтобы волновые функции преобразовались по следующему закону:

$$\psi_\alpha'(\vec{x}',t')=exp\{\tfrac{i}{\hbar}\lambda(\vec{x},t)\}\sum_{\beta=1}^{N}\Delta_{\alpha\beta}(R,\vec{v})\psi_\beta(\vec{x},t),$$

где $\lambda(\vec{x},t)$ является стандартным фазовым множителем, а $\Delta(R,\vec{v})$ – N -мерным представлением однородной группы Галилея. Чтобы избавиться от трудностей, связанных с классификацией представлений $\Delta(R,\vec{v})$, будем следовать способу, который применяется в методе Баргманна-Вигнера в релятивистском случае.

Рассмотрим волновые функции $\Psi_{\lambda_1,\dots\lambda_N}(\vec{x},t)$, где каждое λ_i принимает четыре значения от I до 4. Потребуем, чтобы волновые функции симметричным образом зависели от набора индексов λ. В результате волновая функция имеет $(N+3)!/3!N!$ независимых компонент. Определим оператор

$$\Theta=\begin{pmatrix} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, & i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} \\ i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}, & 2m\end{pmatrix}$$

и потребуем, чтобы волновая функция Ψ удовлетворяла системе уравнений

$$\sum_{\beta=1}^{4}\Theta_{\alpha\beta}\Psi_{\lambda_1\dots\lambda_{j-1},\beta,\lambda_{j+1},\dots N}(\vec{x},t)=0,\quad j=1,2,\dots N.$$

Из этих уравнений следует, что независимыми компонентами волновой функции будут только те, для которых $\lambda_j=1,2$. Эти компоненты определяют норму волновой функции

$$\|\psi\|^2=\sum_{\lambda_1=1}^{2}\dots\sum_{\lambda_N=1}^{2}\int|\Psi_{\lambda_1\dots\lambda_N}(\vec{x},t)|^2d^3x,$$

которая невырождена и не зависит от времени. С помощью этой нормы пространство волновых функций приобретает структуру гильбертова пространства, в котором действует следующее унитарное представление группы Галилея

$$\Psi'(\vec{x}',t')=exp\{\tfrac{i}{\hbar}\lambda(\vec{x},t)\}\,\delta^{[N]}(R,\vec{v})\Psi(\vec{x},t),$$

где λ является обычным фазовым множителем, а $\delta^{[N]}$ – симметризованным N -кратным тензорным произведением представлений $\Delta^{1/2}$. Для того чтобы увидеть, какие физические объекты описывает волновое уравнение, надо разложить $\delta^{[N]}$ на неприводимые представления. Но это сделать трудно и вовсе не нужно. Дело в том, что нас интересуют только независимые компоненты волновой функции, которых у нее только $N+1$, и столбец $\varphi(\vec{x},t)$, составленный только из этих независимых компонент, преобразуется по закону

$$\varphi'(\vec{x},t)=exp\{\tfrac{i}{\hbar}\lambda(\vec{x},t)\}\,d^{[N]}(R,\vec{v})\varphi(\vec{x},t),$$

где $d^{[N]}$ есть $(N+1)$-мерное представление однородной группы Галилея, полученное сужением представления $\delta^{[N]}$ на инвариантное подпространство гильбертова пространства, натянутое на независимые компоненты волновых функций. Из структуры представления $\Delta^{1/2}$ видно, что таким образом получаем симметризованное N-кратное тензорное произведение неприводимых представлений $D^{1/2}$ группы вращений. Поскольку такое произведение неприводимо, имеем

$$d^{[N]}(R,\vec{v}) = D^{N/2}(R),$$

где $D^{N/2}(R)$ - неприводимое $(N+1)$-мерное представление группы поворотов. Окончательно заключаем, что набор независимых компонент волновой функции преобразуется по закону

$$\varphi'(\vec{x}',t') = exp\left\{\frac{i}{\hbar}\lambda(\vec{x},t)\right\} D^{N/2}(R)\,\varphi(\vec{x},t).$$

Взяв Фурье-образ этого закона преобразования, убеждаемся, что $\tilde{\varphi}(\vec{p},E)$ преобразуется по неприводимому представлению группы Галилея, соответствующему массе m и спину $N/2$.

Таким образом оказывается, что теория представлений группы Галилея эквивалентна теории галилеево-инвариантных волновых уравнений. Теория волновых уравнений имеет, однако, то преимущество над теоретико-групповыми методами, что волновые уравнения позволяют включить взаимодействие с внешними полями, в то время как неизвестно, как это можно сделать в теории представлений группы Галилея. Однако, оказывается, что включение взаимодействия в уравнение не является простым делом для высших значений спина, когда имеется много лишних компонент волновой функции.

Для простоты обсудим этот вопрос в случае векторных частиц, что соответствует значению $N=2$ в методе Баргманна-Вигнера.

Волновая функция $\psi_{\alpha\beta}(\vec{x},t)$, $\alpha,\beta=1,\dots 4$ есть симметричный спинор второго ранга. Примем здесь следующую запись этого спинора

$$\psi(\vec{x},t) = \sum_{j=1}^{3}\left\{X_j(\vec{x},t)\begin{pmatrix}\sigma_j\sigma_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + Y_j(\vec{x},t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma_j\sigma_2\end{pmatrix} + Z_j(\vec{x},t)\begin{pmatrix}0 & \sigma_j\sigma_2\\ \sigma_j\sigma_2 & 0\end{pmatrix}\right\} + W(\vec{x},t)\begin{pmatrix}0 & \sigma_2\\ -\sigma_2 & 0\end{pmatrix},$$

что есть не что иное как некоторая запись произвольной симметричной 4x4 матрицы. Волновые уравнения имеют здесь вид

$$\Theta\psi = 0 \quad \text{и} \quad \psi\theta = 0,$$

что дает для коэффициентных функций $\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}$ и W следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\vec{Z} = 0\\
&i\frac{\partial\vec{X}}{\partial t} - \operatorname{rot}\vec{Z} - i\vec{\nabla}W = 0\\
&\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{Y} = 0\\
&i\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} - \operatorname{rot}\vec{Y} = 0\\
&-2mW + i\hbar\operatorname{div}\vec{X} = 0\\
&2m\vec{Z} - \hbar\operatorname{rot}\vec{X} = 0\\
&2m\vec{Y} - \hbar\operatorname{rot}\vec{Z} + i\hbar\vec{\nabla}W = 0.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что эта система содержит лишние уравнения и разными способами можно эти лишние уравнения исключить, так, чтобы оставить только уравнения на $N+1=3$ независимые компоненты волновой функции. Оказывается, однако, что при одном способе после включения внешнего поля получается непротиворечивая система уравнений, а при другом система может оказаться противоречивой. Чтобы избежать последней возможности, лучше всего использовать лагранжеву переформулировку метода Баргманна-Вигнера. Проиллюстрируем это на рассматриваемом примере векторных частиц. Функция Лагранжа, инвариантная относительно преобразований Галилея, имеет для этого случая вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\psi^*_{\alpha\beta}\Theta_{\alpha\alpha'}A_{\beta\beta'}\psi_{\alpha'\beta'} + c.c. + \frac{\lambda}{4}\psi^*_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\alpha'}\omega_{\beta\beta'}\psi_{\alpha'\beta'},$$

где матрицы Θ, A и ω имеют вид

$$\Theta = \begin{pmatrix} i\hbar\frac{\partial}{\partial t} & i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} \\ i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} & 2m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

и параметр λ - произвольный. С помощью принятого представления для спинора ψ функцию Лагранжа приводим к виду

$$\mathcal{L} = i\hbar\vec{X}^*\cdot\frac{\partial\vec{X}}{\partial t} - \hbar\vec{X}^*\cdot \mathrm{rot}\,\vec{Z} - i\hbar\vec{X}^*\cdot\vec{\nabla}W - \hbar\vec{Z}^*\cdot\mathrm{rot}\,\vec{X} - i\hbar W^*\mathrm{div}\,\vec{X} +$$
$$+ c.c. + 2m(\vec{Z}^*\cdot\vec{Z} + W^*W) + \lambda\left[\vec{Z}^*\cdot\vec{Z} - W^*W + \frac{1}{2}(\vec{X}^*\cdot\vec{Y} + \vec{Y}^*\cdot\vec{X})\right].$$

Сформулируем принцип наименьшего действия так, чтобы он относился к этой форме функции Лагранжа, считая функции $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ и W независимыми объектами варьирования. Варьируя по $\vec{Y}^*$, получаем, что

$$\lambda\vec{X} = 0,$$

откуда следует, что в нетривиальной теории $\lambda = 0$. Варьируя теперь по остальным функциям, получаем

$$i\hbar\frac{\partial\vec{X}}{\partial t} - \hbar\,\mathrm{rot}\,\vec{Z} - i\hbar\vec{\nabla}W = 0$$
$$-\hbar\,\mathrm{rot}\,\vec{X} + 2m\vec{Z} = 0$$
$$-i\hbar\,\mathrm{div}\vec{X} + 2mW = 0.$$

Последние два уравнения сразу позволяют выразить функции $\vec{Z}$ и W через функцию $\vec{X}$ и, подставляя полученные так выражения в первое уравнение, убеждаемся, что функция $\vec{X}(\vec{x},t)$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\frac{\partial\vec{X}}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\vec{X} = 0,$$

что и есть уравнение Шредингера для частицы с массой m, описываемой волновой функцией $\vec{X}(\vec{x},t)$, которая при преобразованиях Галилея ведет себя как вектор

$$\vec{X}'(\vec{x}'t') = \exp\{\tfrac{i}{\hbar}\lambda(\vec{x},t)\} R\vec{X}(\vec{x},t).$$

Метод Лагранжа в случае спинов, больших I, оказывается громоздким, так как в этих случаях сначала надо вводить добавочные функции, а потом их исключать. До сих пор не существует удовлетворительного решения этого вопроса, и поэтому мы заканчиваем обсуждение общих вопросов теории галилеево-инвариантных волновых уравнений.

Галилеево-инвариантная электродинамика

Обсудим вопрос о том, являются ли в каком-либо смысле галилеево-инвариантными уравнения Максвелла, которые запишем в виде

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

с помощью двух традиционных пар электромагнитных векторов $(\vec{E},\vec{B})$ и $(\vec{D},\vec{H})$. К уравнениям Максвелла добавляется выражение для силы Лоренца

$$\vec{F} = \int d^3x\left[\rho(\vec{x},t)\vec{E}(\vec{x},t) + \vec{j}(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t)\right]$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0.$$

Высказывается иногда мнение, что система уравнений Максвелла не является инвариантной относительно преобразований Галилея и что этот факт привел к возникновению теории относительности. Такое утверждение, однако, не совсем точно.

Чтобы это показать, рассмотрим сначала уравнение непрерывности. Нетрудно видеть, что требование галилеевой инвариантности этого уравнения однозначно определяет закон преобразования плотностей заряда и тока в следующем виде:

$$\rho'(\vec{x}',t') = \rho(\vec{x},t)$$

$$\vec{j}'(\vec{x}',t') = R\vec{j}(\vec{x},t) + \vec{v}\,\rho(\vec{x},t),$$

где штрихованные координаты связаны с нештрихованными преобразованием Галилея и R, и $\vec{v}$ являются параметрами этого преобразования.

Зная закон преобразования для ρ и $\vec{j}$, можно найти закон преобразования для электромагнитных векторов, при котором уравнения Максвелла инвариантны. Прямой проверкой можно убедиться, что электромагнитные векторы преобразуются тогда по закону:

$$\vec{E}'(\vec{x}',t') = R\vec{E}(\vec{x},t) - \vec{v}\times R\vec{B}(\vec{x},t), \quad \vec{D}'(\vec{x}',t') = R\vec{D}(\vec{x},t)$$

$$\vec{B}'(\vec{x}',t') = R\vec{B}(\vec{x},t), \quad \vec{H}'(\vec{x}',t') = R\vec{H}(\vec{x},t) + \vec{v}\times R\vec{D}(\vec{x},t),$$

и, подставляя найденные законы преобразования в выражение для силы Лоренца, убеждаемся, что она преобразуется по правильному закону

$$\vec{F}'(t') = R\vec{F}(t).$$

Точно так же, определив плотность энергии в виде

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\left[\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right](\vec{x},t)$$

и плотность импульса в виде

$$\vec{p}(\vec{x},t) = \vec{D}(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t),$$

убеждаемся, что эти величины преобразуются по закону

$$u'(\vec{x}',t') = u(\vec{x},t) + \vec{v}\cdot R\vec{p}(\vec{x},t)$$

$$\vec{p}'(\vec{x}',t') = R\vec{p}(\vec{x},t),$$

что соответствует закону преобразования для энергии и импульса безмассовой нерелятивистской частицы.

Чтобы правильно ответить на вопрос: в чем состоит галилеева неинвариантность электродинамики Максвелла, заметим, что уравнения Максвелла - это всего лишь 8 уравнений для 12 неизвестных полей и для замкнутости этой системы уравнений необходимы добавочные соотношения между электромагнитными векторами. Эти соотношения, называемые материальными уравнениями, однозначно определяют среду, которую рассматриваем. Уже в простейшем случае, в котором эти уравнения имеют вид

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{B} = \mu\vec{H},$$

из их сопоставления с законами преобразования для электромагнитных векторов видно, что материальные уравнения <u>не могут</u> быть инвариантными относительно преобразований Галилея. Таким образом, они могут быть удовлетворены только в одной системе отсчета и такая система автоматически становится выделенной среди всех других инерциальных систем. Как известно, все попытки экспериментально доказать существование выделенной системы отсчета (неподвижный эфир и т.п.) были безуспешными. Это и привело к возникновению теории относительности.

Однако только что отмеченные факты не означают, что невозможно придумать другую, не максвеллову теорию электромагнетизма, которая будет удовлетворять принципу галилеевой инвариантности. Чтобы показать, что можно построить галилеево инвариантную теорию электромагнетизма, исследуем два нерелятивистских предела уравнений Максвелла, причем будем работать только с одной парой электромагнитных векторов $(\vec{E},\vec{B})$.

В релятивистской электродинамике величины $c\varrho$ и $\vec{j}$ образуют четырехвектор и поэтому имеем для них следующий закон преобразования:

$$c\varrho'(\vec{x}',t')=\gamma\left\{c\varrho(\vec{x},t)+\frac{\vec{v}}{c}\cdot R\vec{j}(\vec{x},t)\right\}$$

$$\vec{j}'(\vec{x}',t')=R\vec{j}(\vec{x},t)+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\frac{\vec{v}}{c}\cdot R\vec{j}(\vec{x},t)\right)\frac{\vec{v}}{c}+\gamma\vec{v}\varrho(\vec{x},t),$$

где

$$\gamma=\left[1-\left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

В нерелятивистском пределе, когда

$$\left|\frac{\vec{v}}{c}\right|<<1,$$

такой закон преобразования порождает два нерелятивистских закона преобразования. В первом случае, когда

$$c\varrho>>|\vec{j}|,$$

получаем

$$\varrho'(\vec{x}',t')=\varrho(\vec{x},t)$$

$$\vec{j}'(\vec{x}',t')=R\vec{j}(\vec{x},t)+\vec{v}\varrho(\vec{x},t).$$

Так как в этом случае плотность заряда значительно больше плотности тока, мы будем называть этот случай электрическим.

Во втором случае, называемом магнитным, когда

$$c\varrho<<|\vec{j}|,$$

имеем

$$\varrho'(\vec{x}',t')=\varrho(\vec{x},t)+\frac{\vec{v}}{c^2}\cdot R\vec{j}(\vec{x},t)$$

$$\vec{j}'(\vec{x}',t')=R\vec{j}(\vec{x},t),$$

где, несмотря на нерелятивистский характер этого закона преобразования, явным образом фигурирует скорость света. (Замечая, что $c^2\varepsilon_0\mu_0=1$, где ε_0 и μ_0 - обычные электромагнитные постоянные, можем c^{-2} заменить на $\varepsilon_0\mu_0$). Ясно, что при таком законе преобразования для ϱ и $\vec{j}$ эти величины не удовлетворяют уравнению непрерывности.

Выпишем теперь закон преобразования для электромагнитных векторов:

$$\vec{E}'(\vec{x}',t')=\gamma\left\{R\vec{E}(\vec{x},t)-\frac{\gamma}{\gamma+1}\left[\frac{\vec{v}}{c}\cdot R\vec{E}(\vec{x},t)\right]\frac{\vec{v}}{c}-\vec{v}\times R\vec{B}(\vec{x},t)\right\}$$

$$\vec{B}'(\vec{x}',t')=\gamma\left\{R\vec{B}(\vec{x},t)-\frac{\gamma}{\gamma+1}\left[\frac{\vec{v}}{c}\cdot R\vec{B}(\vec{x},t)\right]\frac{\vec{v}}{c}+\frac{\vec{v}}{c^2}\times R\vec{E}(\vec{x},t)\right\}.$$

В электрическом случае естественно считать, что

$$|\vec{E}|>>c|\vec{B}|,$$

так как ϱ является источником $\vec{E}$, а $\vec{j}$ - источником $\vec{B}$. В нерелятивистском пределе получаем тогда следующий закон преобразования для электромагнитных векторов:

$$\vec{E}'(\vec{x}',t')=R\vec{E}(\vec{x},t)$$

$$\vec{B}'(\vec{x}',t')=R\vec{B}(\vec{x},t)+\varepsilon_0\mu_0\vec{v}\times R\vec{E}(\vec{x},t),$$

где мы опять использовали соотношение $c^2\varepsilon_0\mu_0=1$. Из этого закона преобразования видно, что движущееся магнитное поле не индуцирует электрическое поле, но электрическое поле влияет на магнитное. Поэтому можно ожидать, что в соответствующих уравнениях поля не будет члена $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Действительно, требование галилеевой инвариантности приводит здесь к следующей системе полевых уравнений:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0 \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{j}.$$

При рассматриваемом законе преобразования для полей, член $\vec{j}\times\vec{B}$ в силе Лоренца не преобразуется правильным образом и поэтому сила, действующая на заряды и токи, имеет вид

$$\vec{F}(t) = \int d^3x\ \varrho(\vec{x},t)\vec{E}(\vec{x},t),$$

что отражает тот факт, что в электрическом нерелятивистском случае магнитное поле не вызывает никаких физических эффектов.

В магнитном случае

$$|\vec{E}| << c|\vec{B}|$$

и из релятивистского закона преобразования получаем теперь следующий нерелятивистский закон:

$$\vec{E}'(\vec{x}',t') = R\vec{E}(\vec{x},t) - \vec{v}\times R\vec{B}(\vec{x},t)$$

$$\vec{B}'(\vec{x}',t') = R\vec{B}(\vec{x},t).$$

Видно, что теперь магнитное поле влияет на электрическое, но не наоборот. Соответственно имеем здесь следующую систему галилеево-инвариантных уравнений:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}.$$

Мы уже видели, что в магнитном случае нет уравнения непрерывности для заряда и тока. Из уравнений поля убеждаемся, что имеем здесь

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0.$$

Это означает, что в магнитном случае токи всегда стационарны и что они не могут рассматриваться как следствие движения зарядов. Таким образом, изменение заряда в данном объеме не связано с потоком тока через его поверхность.

В магнитном случае нет силы, действующей на заряды, и остается только сила, действующая на токи согласно выражению:

$$\vec{F}(t) = \int d^3x\ \vec{j}(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t),$$

что отражает тот факт, что хотя в магнитном случае имеется электрическое поле, оно не приводит к каким-либо физическим явлениям.

Таким образом, видим, что оба нерелятивистских предела максвелловой электродинамики страдают очень серьезными недостатками. Тот факт, что в одном случае магнитное поле, а в другом - электрическое не вызывают физических эффектов, противоречит таким распространенным явлениям, как взаимодействие токов и движущихся зарядов, не говоря уж об электромагнитной индукции.

Прежде чем перейти к более интересной нерелятивистской электродинамике, заметим, что иногда в учебниках приводятся следующие законы преобразования электромагнитных векторов, справедливые в случае небольших скоростей

$$\vec{E}'(\vec{x}',t') = R\vec{E}(\vec{x},t) + \vec{v}\times R\vec{B}(\vec{x},t)$$

$$\vec{B}'(\vec{x}',t') = R\vec{B}(\vec{x},t) + \varepsilon_0\mu_0\vec{v}\times R\vec{E}(\vec{x},t),$$

которые не совпадают ни с одним из выведенных нами выше законов преобразования. Однако легко можно видеть, что только что написанные законы преобразования не обладают групповой структурой. В частности, такой закон преобразования противоречит закону сложения скоростей в нерелятивистской физике и поэтому его физический смысл неясен.

Чтобы избавиться от дефектов только что рассмотренных версий нерелятивистской электродинамики, заметим, что эти дефекты возникают от того, что некоторые члены в уравнениях Максвелла и в силе Лоренца надо выбросить из-за их нековариантности при преобразованиях Галилея. Положение, однако, существенно меняется, если мы будем обе нерелятивистские системы уравнений рассматривать вместе. Для этого вместо одной пары электромагнитных векторов $(\vec{E},\vec{B})$ вводятся две: $(\vec{E}_e,\vec{B}_e)$, удовлетворяющая уравнениям и преобразующаяся по правилам электрического нерелятивистского предела, и $(\vec{E}_m,\vec{B}_m)$, удовлетворяющая уравнениям и преобразующаяся по правилам магнитного нерелятивистского предела. Одновременно вводятся две пары источников: источники электрического типа $(\varrho_e,\vec{j}_e)$ такие, что $|c\varrho_e|\gg|\vec{j}_e|$, и источники магнитного типа $(\varrho_m,\vec{j}_m)$, где $|c\varrho_m|\ll|\vec{j}_m|$. Физический смысл этих величин проявляется благодаря их роли в выражении для силы Лоренца. Одновременное рассмотрение величин электрического и магнитного типов позволяет написать новое ковариантное выражение для этой силы:

$$\vec{F}(t)=\int d^3x\left\{\varrho_e\vec{E}_e+\vec{j}_m\times\vec{B}_m+\varrho_e\vec{E}_m+\vec{j}_e\times\vec{B}_m+\varrho_m\vec{E}_e+\vec{j}_m\times\vec{B}_e\right\}(\vec{x},t).$$

Здесь первые два члена независимо ковариантны. Третий и четвертый члены отдельно не дают ковариантного вклада, но сумма этих членов ковариантна. Несколько труднее убедиться в том, что сумма двух последних членов ковариантна и поэтому мы приводим здесь необходимые выкладки

$$\vec{F}'(t')-\vec{F}(t)=\varepsilon_0\mu_0\int d^3x\left[(\vec{v}\cdot R\vec{j}_m)R\vec{E}_e+R\vec{j}_m\times(\vec{v}\times R\vec{E}_e)\right]=$$

$$=\varepsilon_0\mu_0\vec{v}\int d^3x\,\vec{j}_m\cdot\vec{E}_e=-\varepsilon_0\mu_0\vec{v}\int d^3x\,\mathrm{div}(\vec{j}_m\varphi_e)=0,$$

где φ_e является скалярным потенциалом, таким, что

$$\vec{E}_e=-\vec{\nabla}\varphi_e$$

и мы использовали соотношение

$$\mathrm{div}\,\vec{j}_m=0.$$

Равенство нулю интеграла обусловлено исчезанием полей в бесконечности.

Таким образом, мы получили галилеево-инвариантную схему для электромагнитных явлений. Для согласия с экспериментом нам надо предположить, что токи, текущие в проводниках, относятся к типу $\vec{j}_m$, так как иначе не будет взаимодействия типа ток-ток. То же самое касается и токов намагничивания; они тоже должны быть типа $\vec{j}_m$. Только изолированные заряды описываются ϱ_e и ток $\vec{j}_e$ вызван движением этих изолированных зарядов. При этих предположениях предложенная схема нерелятивистской электродинамики правильно описывает следующие явления:

I) Силы, действующие между изолированными зарядами (закон Кулона);

2) Силы, действующие между токами и магнитами;

3) Существование индуцированных токов. В частности, присутствие переменного поля $\vec{B}_m$ вызывает существование индуцированного поля $\vec{E}_m$, и для того чтобы получить индуцированный ток, нам надо принять материальное уравнение, типа закона Ома:

$$\vec{j}_m=\sigma(\vec{E}_e+\vec{E}_m).$$

Заметим здесь, что этим мы не нарушаем галилееву инвариантность теории, поскольку закон Ома справедлив только в системе покоящегося проводника.

4) Поскольку $\vec{B}_e$ действует на $\vec{j}_m$, движущиеся заряды действуют на токи и магниты, что объясняет эксперимент Роуленда.

5) Существование взаимодействия магнитных моментов с магнитными полями.

6) Теория допускает нетривиальные свободные поля, типа

$$\vec{E}_e = 0 \quad , \quad \vec{E}_m = \vec{E}_m^{\circ} \exp\{i\omega t\}$$
$$\vec{B}_e = \vec{B}_e^{\circ} \exp\{i\omega t\} \quad , \quad \vec{B}_m = 0,$$

которые могут интерпретироваться как волны, движущиеся с бесконечной скоростью. Этот факт прекрасно согласуется с тем, что в галилеево-инвариантной теории не может быть конечной скорости, ограничивающей скорость передачи сигналов.

Несмотря на эти достоинства, нерелятивистская электродинамика все же не согласуется с экспериментом. Прежде всего следует здесь упомянуть невозможность работы конденсаторов, так как все токи в проводниках типа $\vec{j}_m$ и все они стационарны. Поскольку мы не имеем здесь уравнения непрерывности, не существует и связи между током в проводниках и скоростью накопления заряда на обкладках конденсатора. Таким образом, мы вынуждены сделать неожиданный вывод: поведение конденсаторов является релятивистским эффектом!

Убедившись, что существует логически непротиворечивая классическая, нерелятивистская теория электромагнетизма, можем перейти к исследованию электромагнитных свойств элементарных частиц, описываемых галилеево-инвариантными волновыми уравнениями, в которых внешнее электромагнитное поле вводится с помощью замены

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - qV(\vec{x},t)$$
$$i\hbar \vec{\nabla} \longrightarrow i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A}(\vec{x},t),$$

где V и $\vec{A}$ – это скалярный и векторный потенциалы.
Из законов преобразования дифференциальных операторов можно видеть, что допускаются только такие потенциалы, которые при преобразованиях Галилея преобразуются по закону

$$V'(\vec{x}',t') = V(\vec{x},t) + \vec{v}\cdot R\vec{A}(\vec{x},t)$$
$$\vec{A}'(\vec{x}',t') = R\vec{A}(\vec{x},t).$$

Определяя электромагнитные векторы согласно формулам

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \; ,$$

видим, что получаемые электромагнитные векторы преобразуются по правилам, характерным для магнитного типа нерелятивистской электродинамики. Таким образом, элементарные частицы взаимодействуют только с магнитным типом электромагнитного поля. Этим и отличается нерелятивистская теория от релятивистской.

Возьмем для определенности частицу со спином $1/2$. Ее волновое уравнение имеет вид

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - qV\right)\varphi + \left(i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\chi = 0$$
$$\left(i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\varphi + 2m\chi = 0.$$

Исключая отсюда зависимую компоненту χ, получаем уравнение

$$\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - qV - \frac{1}{2m}\left(i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 - \frac{q\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right\}\varphi = 0,$$

полностью совпадающее с известным уравнением Паули для частицы со спином $1/2$ в электромагнитном поле. Единственное, но существенное отличие состоит в том, что в уравнении Паули коэффициент у члена $\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ произвольный, а здесь он получился определенным, соответствующим наличию магнитного момента

$$\vec{\mu} = \frac{q\hbar}{2m}\vec{\sigma} = \frac{q\hbar}{m}\vec{s},$$

где $\vec{s}$ означает вектор спина частицы. Но отсюда вытекает, что g -фактор частицы со спином $1/2$ равен

$$g = \frac{q\hbar}{m}$$

и он вдвое больше, чем соответствующий g -фактор для орбитального момента. Таким образом видно, что и нерелятивистская теория дает правильное значение магнитного момента частицы, что в течение многих лет считалось монополией только релятивистских теорий.

С другой стороны, в полученном уравнении нет члена, пропорционального электрическому вектору, что вполне согласуется с тем положением, которое имеется в магнитном случае нерелятивистской электродинамики. Пользуясь общими принципами теории размерности, можно показать, что у нерелятивистских объектов не может быть электромагнитных характеристик, отличных от заряда и магнитного момента. Для доказательства напомним, что у частицы есть электрический или магнитный момент порядка ℓ только тогда, когда в выражении для энергии этой частицы во внешнем поле присутствуют производные скалярного или векторного потенциала порядка ℓ. В гамильтониане должны быть, следовательно, члены вида

$$\varepsilon^{(\ell)} D^{\ell} V \qquad \text{и} \qquad \vec{\mu}^{(\ell)} \cdot D^{(\ell)} \vec{A},$$

где $\varepsilon^{(\ell)}$ и $\vec{\mu}^{(\ell)}$ – как раз значения искомых электромагнитных моментов, D^{ℓ} обозначает дифференциальный оператор ℓ -того порядка. Электромагнитные моменты должны при этом иметь следующие размерности:

$$[\varepsilon^{(\ell)}] = Q L^{\ell}$$

$$[\mu^{(\ell)}] = Q L^{\ell+1} T^{-1},$$

где Q, L и T – единицы заряда, длины и времени, соответственно. В релятивистской физике имеются постоянная Планка $\hbar$ и скорость света c, масса частицы m и ее заряд q и поэтому

$$\varepsilon^{(\ell)} = \alpha_{\ell}\, q \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^{\ell},$$

$$\vec{\mu}^{(\ell)} = \vec{\beta}_{\ell}\, q \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^{\ell} c,$$

где величины α_{ℓ} и $\vec{\beta}_{\ell}$ безразмерны. В нерелятивистской физике нет параметра c, и поэтому могут быть отличными от нуля только те $\varepsilon^{(\ell)}$ и $\vec{\mu}^{(\ell)}$, которые не зависят от скорости света; значит, только α_0 и $\vec{\beta}_1$ могут быть отличны от нуля, что и требовалось доказать. Полученный результат указывает на существенное отличие между релятивистским и нерелятивистским описанием электромагнитных свойств элементарных частиц.

Галилеево-инвариантная квантовая теория поля

Одним из наиболее надежных способов построения квантовой теории поля является аксиоматический подход, в котором принимается небольшое число основных постулатов и все утверждения выводятся из них строгим математическим способом. Основная цель такого подхода - заранее построить общие рамки для теоретических рассуждений и рассматривать только те физические модели, в которых заведомо соблюдаются основные принципы теории. На этом пути получен ряд мощных и общих теорем релятивистской физики.

Аксиоматический подход предоставляет нам уверенную информацию о структуре квантовой теории поля. В связи с этим мы будем придерживаться аксиоматического подхода и при построении галилеево-инвариантной квантовой теории поля.

Первый постулат является общим для всех квантовых теорий и поэтому будем его называть квантовым. Его содержание следующее:

Постулат I (квантовый):

Состояния рассматриваемых физических систем описываются лучами некоторого сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$, а динамические переменные - самосопряженными операторами, действующими в этом пространстве.

Здесь мы не будем обсуждать значения этого постулата, так как соответствующую дискуссию можно найти во многих других местах. Напомним, только, что в случае правил сверхотбора, а такие всегда в нерелятивистской теории имеются, рассматриваемое гильбертово пространство $\mathcal{H}$ является прямой суммой ортогональных когерентных подпространств и закон суперпозиции состояний несправедлив для состояний из разных когерентных подпространств.

Постулатом, четко отличающим нерелятивистские теории от релятивистских, является следующий:

Постулат 2 (галилеева инвариантность):

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ существует унитарное представление расширенной группы Галилея.

Для формулировки следующего постулата определим оператор внутренней энергии W формулой

$$2MW = 2MH - \vec{P}^2,$$

где H и $\vec{P}$ являются генераторами инфинитезимальных временных и пространственных сдвигов, соответственно, а M - генератор фазовых преобразований. Конечно, операторы $H, \vec{P}$ и M являются операторами энергии, импульса и массы, соответственно. Тогда имеем:

Постулат 3 (спектральный):

Спектр внутренней энергии W ограничен снизу и существует только одно галилеево-инвариантное состояние с нулевым значением массы.

Дальше вводится:

Постулат 4 (полевой):

Фундаментальными динамическими переменными теории являются локальные поля $\Phi_\alpha(\vec{x},t), \alpha=1,\dots N$, соответствующие данному значению массы m. Поля $\Phi_\alpha(\vec{x},t)$ являются обобщенными операторнозначными функциями с обычными для теории поля предположениями об области определения полевых операторов. В смысле обобщенных функций, на области определения полевые операторы удовлетворяют следующему закону преобразования при преобразованиях Галилея:

$$U(R\vec{v}\vec{a}b)\Phi_\alpha(\vec{x},t)U^{-1}(R\vec{v}\vec{a}b) = \\ = \exp\{\tfrac{i}{\hbar}\lambda(\vec{x},t)\}\sum_{\beta=1}^{N}\Delta_{\alpha\beta}(R,\vec{v})\Phi_\beta(R^{-1}(\vec{x}-\vec{v}t-\vec{a}),t-b),$$

где $U(R\vec{v}\vec{a}b)$ является унитарным представлением расширенной группы Галилея, $\Delta(R,\vec{v})$ реализует конечномерное представление однородной группы Галилея и $\lambda(\vec{x},t)$ - стандартный фазовый множитель, пропорциональный массе m.

Обратим сразу здесь внимание на то обстоятельство, что закон преобразования для полей галилеевой теории исключает существование эрмитовых полей, соответствующих ненулевым значениям массы. Поэтому нельзя объединять в одно поле операторы рождения и уничтожения одной и той же частицы.

Среди всех теорий поля выбираем только те, которые удовлетворяют следующему постулату:

Постулат 5 (локальной коммутативности):

Для равных времен и неравных пространственных точек полевые операторы коммутируют или антикоммутируют. (Заметим, что это на самом деле означает, что полевые операторы - обобщенные функции только пространственных переменных, а относительно временной переменной они - обычные функции).

Кроме перечисленных постулатов, обычно принимаются и другие, технического характера. В них нет необходимости с физической точки зрения, но они нужны для получения аналитического аппарата теории и, конечно, влияют на получаемые результаты.

Обсудим теперь главные различия между релятивистскими и нерелятивистскими теориями поля, которые можно усмотреть на основе одних только принятых постулатов.

Отличия между релятивистскими и нерелятивистскими теориями обусловлены постулатом галилеевой инвариантности. Существование унитарного представления расширенной группы Галилея означает, что

в рассматриваемом гильбертовом пространстве состояний имеется представление эрмитовых операторов J_j, K_j, P_j, H, M, являющихся генераторами соответствующих инфинитезимальных поворотов вокруг j-той оси, чистого преобразования Галилея вдоль j-той оси, сдвига вдоль j-той оси, временного сдвига и преобразования фазы состояния. Стандартными методами теории групп получаем, что эти операторы удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[J_j,J_k]=i\varepsilon_{jkl}J_l\,,\quad [J_j,K_k]=i\varepsilon_{jkl}K_l\,,\quad [J_j,P_k]=i\varepsilon_{jkl}P_l\,,$$

$$[K_j,H]=iP_j\,,\quad [K_j,P_l]=i\delta_{jl}M$$

и остальные коммутаторы равны нулю. В частности, оператор массы M коммутирует со всеми другими операторами, в том числе и с гамильтонианом. Таким образом, масса всегда является сохраняющейся величиной в галилеево-инвариантных теориях поля. Однако характер этого закона сохранения иной, чем у обычных законов сохранения. Дело в том, что масса всегда появляется в фазовом множителе в законах преобразования векторов состояния и поэтому нельзя принимать принцип суперпозиции для состояний с различными значениями массы. В противном случае, в другой галилеевой системе отсчета были бы другие соотношения между фазами состояний, составляющими данную суперпозицию. Следовательно, относительная фаза состояний проявлялась бы физическим способом по-разному в разных системах отсчета, но этого не может быть. Поэтому, во всех галилеево-инвариантных квантовых теориях имеем дело с правилом сверхотбора относительно массы, называемым правилом сверхотбора Баргманна. Это правило утверждает, что во всех галилеево-инвариантных теориях гильбертово пространство состояний является прямой суммой (или прямым интегралом) когерентных подпространств, которые образованы состояниями с данным значением массы, и принцип суперпозиции удовлетворяется только внутри каждой когерентной компоненты. Как следствие, для всех наблюдаемых теорий все матричные элементы для состояний с различными когерентными компонентами исчезают.

Этот принцип сверхотбора имеет немедленные важные следствия. В самом деле, если рассматривать теории только с одним типом частиц, то сохранение массы эквивалентно сохранению числа частиц. Следовательно, в галилеево-инвариантных квантовых теориях поля с одним лишь типом частиц отсутствуют процессы рождения. Такая особенность резко отличает эти теории от соответствующих релятивистских локальных теорий.

Второе существенное отличие релятивистских и нерелятивистских теорий связано с оператором Гамильтона. Характерной чертой алгебры Ли расширенной группы Галилея является то, что гамильтониан нигде не появляется с правой стороны перестановочных соотношений. Это означает, что к данному гамильтониану H_0, удовлетворяющему всем требованиям, всегда можно добавить новую часть H_I, от которой требуется только, чтобы она была галилеево-инвариантна. При этом оказывается, что строить такие галилеево-инвариантные величины нетрудно и поэтому значительно проще получать модели галилеево-инвариантной теории, чем релятивистской теории. Например, если к данному гамильтониану добавим С-числовое выражение, то в галилеево-инвариантной теории получаем другую, эквивалентную исходной, теорию, в отличие от релятивистского случая, где подобный шаг приводит к другому представлению динамических переменных.

Следующее существенное отличие между релятивистскими и нерелятивистскими теориями связано с условием локальной коммутативности.

В релятивистском случае это условие является очень мощным и сильно ограничивает возможный класс теорий. Оказывается, что в нерелятивистском случае это не так, и поэтому нет таких больших препятствий в конструкции моделей. Причина этого факта кроется в том, что в релятивистском случае условие локальной коммутативности есть ограничивающее условие, накладываемое на полевые операторы на многообразиях той же самой размерности, что и пространство-время, а в нерелятивистском случае - это ограничение на многообразие меньшей размерности.

Простые модели галилеево-инвариантных теорий показывают, что в таких теориях нет необходимости симметричного описания частиц и античастиц, нет теоремы о связи спина со статистикой и многих других свойств, присущих релятивистским локальным теориям. Но самое главное - это то, что в нерелятивистском случае отсутствует аналог теоремы Хаага и поэтому нет известных общих запретов в конструктивном подходе к квантовой теории поля.

Все это, конечно, не значит, что галилеево-инвариантные квантовые теории поля неинтересны. Наоборот, они имеют особый методический интерес. Сравнительная легкость построения нетривиальных моделей этой теории позволяет лучше понять различие между теориями с конечным и бесконечным числом степеней свободы, между теориями с процессами рождения и без таких процессов и пролить свет на физический смысл процедуры ренормализации.

Для того чтобы проиллюстрировать свойства галилеево-инвариантных теорий поля, опишем кратко две простые модели такой теории.

Сначала рассмотрим теорию свободных полей, описывающую один тип скалярных частиц. Пространство Гильберта $\mathcal{H}$ составлено из последовательностей квадратично интегрируемых функций $\Psi_n(\vec{p}_1,\ldots\vec{p}_n)$, $n=0,1,\ldots$, симметричных или антисимметричных при перестановке двух импульсов. Скалярное произведение задано формулой:

$$\langle\Psi,\Phi\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\int d^3p_1\ldots d^3p_n\,\Psi_n^*(\vec{p}_1,\ldots\vec{p}_n)\Phi_n(\vec{p}_1,\ldots\vec{p}_n).$$

Представление расширенной группы Галилея задано формулой

$$[U(R\vec{v}\vec{a}b)\Psi]_n(\vec{p}_1,\ldots\vec{p}_n)=$$

$$=\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\sum_{\alpha=1}^{n}[E(\vec{p}_\alpha)b-\vec{p}_\alpha\cdot\vec{a}]+in\theta\Big\}\Psi_n\big(R^{-1}(\vec{p}_1-m\vec{v}),\ldots R^{-1}(\vec{p}_n-m\vec{v})\big),$$

где

$$E(\vec{p})=\Omega+\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$$

и Ω означает здесь внутреннюю энергию рассматриваемых частиц.

Полевые операторы определены следующим образом:

$$[\varphi(\vec{x},t)\Psi]_n(\vec{p}_1,\ldots\vec{p}_n)=\sqrt{n+1}\int d^3p\,\exp\{\tfrac{i}{\hbar}[\vec{p}\cdot\vec{x}-E(\vec{p})t]\}\Psi_{n+1}(\vec{p}_1,\ldots\vec{p}_n,p)$$

$$[\varphi^{+}(\vec{x},t)\Psi]_n(\vec{p}_1,\ldots\vec{p}_n)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{\alpha(n-j)}\exp\{-\tfrac{i}{\hbar}[\vec{p}_j\cdot\vec{x}-E(\vec{p}_j)t]\}\Psi_{n-1}(\vec{p}_1,\hat{\vec{p}}_j,\ldots\vec{p}_n),$$

где шляпка $\wedge$ у вектора означает, что его надо пропустить, $\alpha=0$ – в случае симметричных волновых функций и $\alpha=1$ – в случае антисимметричных волновых функций. Легко проверить, что полевые операторы удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям

$$[\varphi(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},\tau)]=[\varphi^{+}(\vec{x},t),\varphi^{+}(\vec{y},\tau)]=0$$

$$[\varphi(\vec{x},t),\varphi^{+}(\vec{y},t)]=\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

в симметричном случае и

$$\{\varphi(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},\tau)\}=\{\varphi^{+}(\vec{x},t),\varphi^{+}(\vec{y},\tau)\}=0$$

$$\{\varphi(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},t)\}=\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

в антисимметричном случае.

Для того чтобы получить менее тривиальную теорию, нам надо рассматривать системы, где имеется больше чем один тип частиц. Самой простой моделью такой теории является модель Ли. В этой модели имеется три типа частиц: частицы V, N и Θ , причем две первые являются фермионами, а третья – бозоном. Гильбертово пространство состояний является здесь тензорным произведением $\mathcal{H}_V\otimes\mathcal{H}_N\otimes\mathcal{H}_\Theta$ трех пространств, описывающих три частицы, соответственно. Свободные поля даны здесь в виде:

$$V(\vec{x},t)=\varphi_V(\vec{x},t)\otimes I\otimes I$$

$$V^{+}(\vec{x},t)=\varphi_V^{+}(\vec{x},t)\otimes I\otimes I$$

для V частиц,

$$N(\vec{x},t)=I\otimes\varphi_N(\vec{x},t)\otimes I$$

$$N^{+}(\vec{x},t)=I\otimes\varphi_N^{+}(\vec{x},t)\otimes I$$

для N частиц, и

$$\Theta(\vec{x},t)=I\otimes I\otimes\varphi_\Theta(\vec{x},t)$$

$$\Theta^{+}(\vec{x},t)=I\otimes I\otimes\varphi_\Theta^{+}(\vec{x},t)$$

для Θ частиц. Свободный гамильтониан записывается в виде

$$H_0=\int d^3x\left\{V^+(\vec{x},0)\left(\Omega_V-\frac{\hbar^2}{2\mathfrak{M}}\Delta\right)V(\vec{x},0)+\right.$$

$$\left.+N^+(\vec{x},0)\left(\Omega_N-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta\right)N(\vec{x},0)+\Theta^+(\vec{x},0)\left(\Omega_\Theta-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)\Theta(\vec{x},0)\right\},$$

где $\mathfrak{M}, M$ и m обозначают массы V, N и Θ частиц, соответственно, а оператор импульса в виде

$$\vec{P}=\int d^3x\left\{V^+(\vec{x},0)\vec{\nabla}V(\vec{x},0)+N^+(\vec{x},0)\vec{\nabla}N(\vec{x},0)+\Theta^+(\vec{x},0)\vec{\nabla}\Theta(\vec{x},0)\right\}.$$

Нетрудно проверить, что эти величины при преобразованиях Галилея преобразуются по следующему закону:

$$H_0'=U^{-1}H_0U=H_0+\vec{v}\cdot R\vec{P}_0+\frac{1}{2}\left[\mathfrak{M}\mathfrak{N}(V)+M\mathfrak{N}(N)+m\mathfrak{N}(\Theta)\right]\vec{v}^{\,2}$$

$$\vec{P}_0'=U^{-1}\vec{P}_0U=R\vec{P}_0+\left[\mathfrak{M}\mathfrak{N}(V)+M\mathfrak{N}(N)+m\mathfrak{N}(\Theta)\right]\vec{v},$$

где $\mathfrak{N}(V)$, $\mathfrak{N}(N)$ и $\mathfrak{N}(\Theta)$ являются операторами числа частиц для V, N и Θ частиц, соответственно.

Включим теперь взаимодействие путем добавления к H_0 некоторой галилеево-инвариантной добавки H_I. Характерной чертой модели Ли является то, что в ней возможны только два элементарных процесса:

$$V\leftrightarrow N+\Theta.$$

Согласно этому, будем H_I искать в виде

$$H_I=\int d^3x\,d^3y\,d^3z\,F(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\left[V^+(\vec{x},0)N(\vec{y},0)\Theta(\vec{z},0)+\Theta^+(\vec{z},0)N^+(\vec{y},0)V(\vec{x},0)\right].$$

При преобразованиях Галилея поля V, N и Θ получают фазовые множители, пропорциональные $\mathfrak{M}, M$ и m, соответственно. Для того чтобы эти фазовые множители сокращались в H_I, нужно, чтобы

$$\mathfrak{M}=M+m.$$

Выписанное выражение для H_I будет галилеево-инвариантным, если

$$F(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=\rho(|\vec{x}-\vec{y}|)\,\delta\left(\vec{z}-\frac{\mathfrak{M}\vec{x}-M\vec{y}}{m}\right),$$

где ρ – произвольная функция, обеспечивающая существование соответствующих интегралов. Важно здесь то, что галилеева инвариантность, в отличие от лоренц-инвариантности, не требует, чтобы функция ρ была постоянной. Таким образом, получаем следующий вид гамильтониана взаимодействия:

$$H_I=\int d^3x\,d^3y\,\rho(|\vec{x}-\vec{y}|)\left\{V^+(\vec{x},0)N(\vec{y},0)\Theta\left(\vec{x}+\frac{M}{m}(\vec{x}-\vec{y})\right)+h.c.\right\},$$

и это взаимодействие локально только в случае

$$\rho(|\vec{x}-\vec{y}|)=g\,\delta(\vec{x}-\vec{y}).$$

Пользуясь перестановочными соотношениями, можно убедиться, что в модели Ли сохраняются следующие комбинации операторов чисел частиц:

$$\mathfrak{N}_1=\mathfrak{N}(V)+\mathfrak{N}(N)$$

$$\mathfrak{N}_2=\mathfrak{N}(V)+\mathfrak{N}(\Theta)$$

и эти законы сохранения позволяют разбить гильбертово пространство на секторы с определенным значением $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$, что ввиду закона сохранения массы соответствует разбиению по значениям массы.

Для простоты ограничимся самым простым нетривиальным случаем, в котором из гильбертова пространства состояний выделяем подпространства, являющиеся объединением четырех секторов: вакуумного сектора с $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{N}_2=0$, сектора с одной N -частицей $\mathfrak{N}_1=1$, $\mathfrak{N}_2=0$, сектора с одной θ - частицей с $n_1=0$, $n_2=1$ и сектора с $n_1=n_2=1$, где могут быть состояния одной V - частицы или состояния $N+\theta$ системы. Таким образом, векторы состояний задаются пятью компонентами:

$$\Psi=\{\zeta, \psi(\vec{p}), \phi(\vec{q}), \chi(\vec{k}), \eta(\vec{q},\vec{k})\},$$

где ζ - число, определяющее вероятность того, что состояние Ψ является вакуумом, $\psi(\vec{p})$ - волновая функция V -частицы, $\phi(\vec{q})$ - волновая функция N -частицы, $\chi(\vec{k})$ - волновая функция θ - частицы и $\eta(\vec{q},\vec{k})$ - волновая функция $N+\theta$ системы. Полевые операторы действуют по правилу:

$$V(\vec{x},t)\{\zeta, \psi(\vec{p}), \phi(\vec{q}), \chi(\vec{k}), \eta(\vec{q},\vec{k})\} =$$

$$=\left\{\int d^3p \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[\vec{p}\cdot\vec{x}-E_V(\vec{p})t]\right\}\psi(\vec{p}),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\}$$

$$N(\vec{x},t)\{\zeta, \psi(\vec{p}), \phi(\vec{q}), \chi(\vec{k}), \eta(\vec{q},\vec{k})\} =$$

$$=\left\{\int d^3q \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[\vec{q}\cdot\vec{x}-E_N(\vec{q})t]\right\}\phi(\vec{q}), 0, 0, \int d^3q \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[\vec{q}\cdot\vec{x}-E_N(\vec{q})t]\right\}\eta(\vec{q},\vec{k}), 0\right\}$$

$$\theta(\vec{x},t)\{\zeta, \psi(\vec{p}), \phi(\vec{q}), \chi(\vec{k}), \eta(\vec{q},\vec{k})\} =$$

$$=\left\{\int d^3k \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[\vec{k}\cdot\vec{x}-E_\theta(\vec{k})t]\right\}\chi(\vec{k}), 0, \int d^3k \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[\vec{k}\cdot\vec{x}-E_\theta(\vec{k})t]\right\}\eta(\vec{q},\vec{k}), 0, 0\right\},$$

где $E_V(\vec{p})$, $E_N(\vec{q})$ и $E_\theta(\vec{k})$ даны выражениями

$$E_V(\vec{p})=\Omega_V+\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}, \quad E_N(\vec{q})=\Omega_N+\frac{\vec{q}^{\,2}}{2M}, \quad E_\theta(\vec{k})=\Omega_\theta+\frac{\vec{k}^{\,2}}{2m}.$$

В отличие от операторов уничтожения, полевые операторы рождения V^+, N^+ и θ^+ не определены на всех состояниях. Их можно применять только к следующим состояниям:

$$V^+(\vec{x},t)\{\zeta,0,0,0,0\} = \left\{0, \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}[\vec{p}\cdot\vec{x}-E_V(\vec{p})t]\right\}\zeta, 0, 0, 0\right\},$$

$$N^+(\vec{x},t)\{\zeta,0,0,\chi(\vec{k}),0\} =$$

$$=\left\{0, 0, \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}[\vec{q}\cdot\vec{x}-E_N(\vec{q})t]\right\}\zeta, 0, \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}[\vec{q}\cdot\vec{x}-E_N(\vec{q})t]\right\}\chi(\vec{k})\right\},$$

$$\theta^+(\vec{x},t)\{\zeta,0,\phi(\vec{q}),0,0\} =$$

$$=\left\{0,0,0, \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}[\vec{k}\cdot\vec{x}-E_\theta(\vec{k})t]\right\}\zeta, \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}[\vec{k}\cdot\vec{x}-E_\theta(\vec{k})t]\right\}\phi(\vec{q})\right\}.$$

Соответственно такому действию полевых операторов получаем, что

$$H_0\{\zeta, \psi(\vec{p}), \phi(\vec{q}), \chi(\vec{k}), \eta(\vec{q},\vec{k})\} =$$

$$=\left\{0, E_V(\vec{p})\psi(\vec{p}), E_N(\vec{q})\phi(\vec{q}), E_\theta(\vec{k}), [E_N(\vec{q})+E_\theta(\vec{k})]\eta(\vec{q},\vec{k})\right\}$$

и

$$H_I\{\zeta, \psi(\vec{p}), \phi(\vec{q}), \chi(\vec{k}), \eta(\vec{q},\vec{k})\} =$$

$$=\left\{0, \int d^3q\, d^3k\, \delta(\vec{p}-\vec{q}-\vec{k})\,\tilde{\varrho}^*\!\left(\vec{q}-\frac{M}{m}\vec{k}\right)\eta(\vec{q},\vec{k}), 0, 0, \tilde{\varrho}\!\left(\vec{q}-\frac{M}{m}\vec{k}\right)\psi(\vec{q}+\vec{k})\right\}.$$

Таким образом видим, что состояния

$$\{\zeta,0,0,0,0\}$$

$$\{0,0,\phi(\vec{q}),0,0\}$$

$$\{0,0,0,\chi(\vec{k}),0\}$$

являются собственными состояниями одновременно и свободного гамильтониана H_0 и полного гамильтониана H_0+H_I. Для того чтобы состояние, имеющее ненулевые ψ и η компоненты, было собственным одночастичным состоянием H_0+H_I, нужно, чтобы удовлетворялись уравнения

$$E_V(\vec{p})\psi(\vec{p})+\int d^3q\, d^3k\, \delta(\vec{p}-\vec{q}-\vec{k})\tilde{\rho}^*(\vec{q}-\tfrac{M}{m}\vec{k})\eta(\vec{q},\vec{k})=\mathcal{E}(\vec{p})\psi(\vec{p})$$

$$[E_N(\vec{q})+E_\theta(\vec{k})]\eta(\vec{q},\vec{k})+\tilde{\rho}(\vec{q}-\tfrac{M}{m}\vec{k})\psi(\vec{q}+\vec{k}) = \mathcal{E}(\vec{q}+\vec{k})\eta(\vec{q},\vec{k}),$$

где

$$\mathcal{E}(\vec{p})=\Omega+\frac{\vec{p}^2}{2m}$$

с некоторым вообще отличным от Ω_V значением внутренней энергии Ω. Из второго уравнения с учетом соотношения

$$\frac{(\vec{q}+\vec{k})^2}{2m}-\frac{\vec{q}^2}{2M}-\frac{\vec{k}^2}{2m}=-\frac{m}{2(M+m)M}\left(\vec{q}-\frac{M}{m}\vec{k}\right)^2$$

получаем

$$\eta(\vec{q},\vec{k})=\frac{\tilde{\rho}(\vec{q}-\frac{M}{m}\vec{k})\psi(\vec{q}+\vec{k})}{\Omega-\Omega_N-\Omega_\theta-\frac{m}{2(M+m)M}(\vec{q}-\frac{M}{m}\vec{k})^2}$$

и, подставляя это в первое уравнение, получаем уравнение для Ω :

$$\Omega=\Omega_V-\frac{8\pi Mm}{M+m}\int_0^\infty\frac{u^2|\tilde{\rho}(u)|^2}{a+u^2}du,$$

где

$$a=2M\left(1+\frac{M}{m}\right)^2(\Omega_\theta+\Omega_N-\Omega).$$

Из полученного выражения видно, что внутренняя энергия новой V -частицы не может быть произвольной величиной. Для того чтобы появившийся здесь интеграл сходился, нужно, чтобы $\tilde{\rho}(u)$ была убывающей функцией и чтобы

$$\Omega<\Omega_N+\Omega_\theta.$$

В граничном случае точечного взаимодействия $\tilde{\rho}=\mathrm{const.}$ и этот интеграл расходится. Таким образом, получаем ту же ситуацию, что и в релятивистской квантовой теории с бесконечными перенормировками.

Заключение

В заключение хотим обратить внимание на некоторые литературные источники, знакомство с которыми позволит глубже осмыслить значение галилеевой инвариантности в физике. Цитируемые ниже статьи ни в коем случае не исчерпывают уже довольно обширный список работ, посвященных вопросу галилеево-инвариантных теорий. Большой список работ можно найти в обзорной статье Ж.-М. Леви-Леблонда /I/. Кроме этой работы, нам хочется обратить внимание еще на работу Б.В.Медведева /2/, в которой можно найти много материала, не нашедшего до сих пор отражения в учебниках по механике.

Что касается вопросов, обсуждаемых в предлагаемых лекциях, то для расширения знакомства с теоретико-групповыми методами, рекомендуем книги /3/ и /4/. Представления группы Галилея описаны в работах/5-7/. Галилеево-инвариантные волновые уравнения исследуются в работах/8-9/. Вопрос о существовании галилеево-инвариантной электродинамики был поставлен и решен в работе/10/. Квантовая теория поля, построенная галилеево-инвариантным способом, обсуждается в работах/11-13/.

Для свободного чтения лекций необходим также материал, содержащийся в монографиях/14-15/, посвященных вопросам релятивистски-инвариантных квантовых теорий поля.

В заключение считаем своим приятным долгом поблагодарить М.И.Широкова за критическое чтение рукописи.

Литература

1). J.-M.Levy-Leblond, in "Group Theory and its Applications" vol. 2., Ed.E.M.Loebl, Academic Press, New York and London, (1971), 221-299.

2). Б.В.Медведев, В сборнике "Статистическая физика и квантовая теория поля," Наука, Москва 1973, 442-453.

3). А.А.Кириллов, Элементы теории представлений,"Наука",Москва, 1972.

4). М.Б.Менский. Метод индуцированных представлений,"Наука",Москва, 1976.

5). J.-M.Levy-Leblond, J.Math.Phys., 4 (1963), 776-788.

6). E.Jnonü and E.Wigner, Nuovo Cim., 9 (1952), 705-718.

7). J.Voisin, J.Math.Phys., 6, (1965), 1519-1529.

8). J.-M.Levy-Leblond, Comm.Math.Phys., 6 (1967), 286-311.

9). C.R.Hagen, Comm.Math.Phys., 18 (1970) 97-108.

10). M.Le Bellac and J.-M.Levy-Leblond, Nuovo Cim., 14B (1973), 217-233.

11). J.-M.Levy-Leblond, Comm.Math.Phys., 4, (1967), 157-176.

12). R.Schrader, Comm.Math.Phys., 10 (1968), 155-178.

13). C.R.Hagen, Comm.Math.Phys., 21 (1971), 219-236.

14). Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, Введение в теорию квантованных полей,"Наука", Москва 1976.

15). Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, И.Т.Тодоров, Основы аксиоматического подхода к квантовой теории поля,"Наука",Москва 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 мая 1977 года.