ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

С.А.Аникин, О.И.Завьялов, М.К.Поливанов

Перенормированные составные поля в квантовой теории поля

ДУБНА

ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Выпуск 10

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

P2 - 10528

С.А.Аникин [1], О.И.Завьялов [2], М.К.Поливанов [2]

ПЕРЕНОРМИРОВАННЫЕ СОСТАВНЫЕ ПОЛЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Лекции, прочитанные на семинаре для молодых ученых ЛТФ ОИЯИ в январе-феврале 1976 г.

[1] Физический институт им. П.Н.Лебедева АН СССР.
[2] Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР.

Дубна 1977

§1. Введение

Локальные гейзенберговы операторы, которым в асимптотическом представлении отвечают нелинейные по элементарному in-полю величины, играют важную роль во всех динамических схемах квантовой теории поля. Токи в лагранжевом подходе или в теории токов, поля частиц в составных моделях (скажем, кварковых) дают примеры таких операторов. Формализм нормальных произведений, развитый Циммерманом, Ловенштейном и другими, оказывается эффективным инструментом в многочисленных областях применения таких составных полей.

В основании этого подхода лежат стандартные представления лагранжевой теории возмущений. Однако основные объекты этого формализма имеют вид полных гейзенберговых операторов или их вакуумных средних, то есть формально просуммированных рядов теории возмущений.

Ниже мы даем вывод результатов формализма нормальных произведений с общей точки зрения. Предлагаемый вариант этого формализма (в основу которого положены работы /8, 10, 11/), необходимого для перенормировки, опирается на прямое вычисление контрчленов, гейзенберговых операторов или их вакуумных средних. Таким образом, хотя возможность разложения на диаграммы Фейнмана есть исходная презумпция всего метода – иначе бы мы не умели применить R –операции,– но фактически нам нигде не приходится обращаться к диаграммам и все, даже промежуточные, шаги делаются для гейзенберговых операторов в целом . При этом удается обойти некоторые комбинаторные трудности, что существенно упрощает техническую сторону работы с перенормированными гейзенберговыми операторами и позволяет получить дополнительные новые результаты.

Ниже, когда нам нужно обратиться к конкретной модели динамики, мы всегда выбираем скалярную $(\varphi^4)_4$ – модель, однако все методы и результаты легко переносятся на общий случай.

§ 2. Гейзенберговы операторы

I. Исходным оператором для нас будет свободное асимптотическое in-поле $\varphi(x)$, действующее в фоковском гильбертовом пространстве. Оно удовлетворяет свободному уравнению движения

$$(\Box+m^2)\varphi(x)=0, \qquad (2.1)$$

а его хронологическое спаривание есть свободная двухточечная функция Грина

$$\overline{\varphi(x)\varphi}(y) = \langle T\varphi(x)\varphi(y)\rangle \equiv G_2^{(0)}(x,y) =$$

$$= iD^c(x-y) = \frac{1}{i(2\pi)^4}\int dk\, \frac{e^{-ik(x-y)}}{m^2-k^2-i0},$$

удовлетворяющая тому же уравнению с δ-функцией в правой части

$$i(\Box_x+m^2)\,G_2^{(0)}(x,y) = \delta(x-y). \qquad (2.2)$$

Наряду с полем $\varphi(x)$ мы будем рассматривать также виковские мономы асимптотического поля и его производных, для которых примем обозначения Циммермана /2/

$$b_{\{\lambda\}}(x) = :\varphi_{(\lambda_1)}(x)\dots\varphi_{(\lambda_\ell)}(x):, \qquad (2.3)$$

где

$$\varphi_{(\lambda_j)}(x) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{(\lambda_j)}\varphi(x) \equiv \partial_0^{\lambda_{j0}}\partial_1^{\lambda_{j1}}\partial_2^{\lambda_{j2}}\partial_3^{\lambda_{j3}}\varphi(x).$$

Таким образом, $\{\lambda\}$ есть мультииндекс

$$\{\lambda\} = \{(\lambda_1),\dots,(\lambda_\ell)\}; \qquad (\lambda_j) = (\lambda_{j0},\lambda_{j1},\lambda_{j2},\lambda_{j3}).$$

Будем писать

$$|\lambda_j| = \lambda_{j0}+\lambda_{j1}+\lambda_{j2}+\lambda_{j3}, \qquad (\lambda_j)! = \lambda_{j0}!\,\lambda_{j1}!\,\lambda_{j2}!\,\lambda_{j3}!$$

Для произвольного 4-вектора $x=(x_0,x_1,x_2,x_3)$ мы полагаем также

$$x^{(\lambda_j)} = x_0^{\lambda_{j0}}\,x_1^{\lambda_{j1}}\,x_2^{\lambda_{j2}}\,x_3^{\lambda_{j3}}.$$

Размерность монома $b_{\{\lambda\}}(x)$ в единицах массы есть

$$\dim b_{\{\lambda\}}(x) = \ell + \sum_{j=1}^{\ell}|\lambda_j|. \qquad (2.4)$$

Широкий класс операторов (в частности, все ограниченные) в фоковском пространстве допускает разложение по нормальным произведениям полей $\varphi(x)$.Так, для S-матрицы, которая дальше играет центральную роль, имеем

$$S=\sum_{\ell}\frac{1}{\ell!}\int dy_1\dots dy_\ell\, S_\ell(y_1,\dots,y_\ell):\varphi(y_1)\dots\varphi(y_\ell):. \qquad (2.5)$$

Оператор S и другие величины такого рода будут интересовать нас вне массовой поверхности. Соответственно разложение (2.5) и другие подобные разложения мы будем рассматривать как классические функционалы, зависящие от φ, то есть как виковские символы соответствующих операторов. В общем случае для произвольного явно зависящего от координат оператора $F(x_1,\dots,x_n)$ вне массовой поверхности имеем

$$F(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\ell}\frac{1}{\ell!}\int dy_1\dots dy_\ell\, F_\ell(\underline{x}|y_1,\dots,y_\ell):\varphi(y_1)\dots\varphi(y_\ell):. \qquad (2.6)$$

Коэффициентные функции $F_\ell(\underline{x}|\underline{y})$ этого разложения суть трансляционно-инвариантные обобщенные функции, так что

$$F_\ell(x_1+a,\dots,x_n+a|y_1+a,\dots,y_\ell+a)=F_\ell(x_1,\dots,x_n|y_1,\dots,y_\ell). \qquad (2.7)$$

Важной величиной типа (2.6) является гейзенбергово поле $\check{\Phi}(x)$, связанное с асимптотическим полем $\varphi(x)$ известной формулой

$$\check{\Phi}(x)=S^+T(\varphi(x)S), \qquad (2.8)$$

которая эквивалентна соотношению Янга-Фельдмана

$$\check{\Phi}(x)=\varphi(x)+\int dy\, D^{ret}(x-y)\, iS^+\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)}. \qquad (2.9)$$

По аналогии с (2.8) мы будем считать, что общий гейзенбергов оператор $\check{F}(x_1,\dots,x_n)$ тоже представим в виде

$$\check{F}(\underline{x})=S^+T\{f(\underline{x})S\}, \qquad (2.10)$$

где оператор $f(\underline{x})$ является in-образом величины $\check{F}(\underline{x})$.

Однако сразу подчеркнем, что в большинстве случаев это, пока формальное, утверждение требует уточнения. Такое уточнение будет дано ниже.

2. Все сказанное относится, по существу, к общему S-матричному формализму. Для описания конкретной динамики мы обратимся к понятию лагранжиана взаимодействия $\mathcal{L}(x)$, полагая

$$S=R\,T\exp i\int\mathcal{L}(x)dx. \qquad (2.11)$$

Символ R перед T- экспонентой означает применение R-операции Боголюбова-Парасюка /1/. Поскольку последняя формулируется на языке диаграмм Фейнмана, связью (2.11) мы будем пользоваться только в смысле теории возмущений. Вообще последующие общие соотношения между операторами или функциями Грина следует понимать как равенства между формальными степенными рядами по константе связи. Мы налагаем на гейзенберговы операторы $F(\underline{x})$ в формуле (2.6) следующее ограничение: их коэффициентные функции должны допускать разложение по диаграммам Фейнмана.

Чтобы не усложнять выкладки анализом вакуумных диаграмм, которые в конечном счете выпадают из теории вследствие либо принятых определений, либо перенормировочной процедуры, включим в правила Фейнмана, используемые при расчете (2.11), следующее дополнительное соглашение: диаграммы, отвечающие переходу "вакуум-вакуум", автоматически полагаются равными нулю.

Введем T- произведения гейзенберговых полей $\check{\Phi}(x)$ формулой Гелл-Манна-Лоу :

$$T\check{\Phi}(x_1)\dots\check{\Phi}(x_n)=S^+T(\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)S). \qquad (2.12)$$

Удобнее, однако, пользоваться величинами

$$\left(\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\right)_+ = T(\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)S). \qquad (2.13)$$

Фактически последней формулой мы ввели некоторую новую операцию умножения $(\ldots)_+$ для операторов

$$\Phi(x) = T(\varphi(x)S), \qquad (2.14)$$

связанных с полем $\check{\Phi}(x)$ соотношением

$$\check{\Phi}(x) = S^+\Phi(x). \qquad (2.15)$$

Взятые сами по себе, операторы $\Phi(x)$ в некоторых отношениях неудовлетворительны: например, они не коммутируют в пространственно-подобных точках. Тем не менее вакуумные средние величин $(\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n))_+$ совпадают с функциями Грина "истинных" локальных полей $\check{\Phi}(x)$. Действительно, в силу стабильности вакуума множитель S^+, отличающий (2.13) от (2.14), выпадает из соответствующих матричных элементов.

В качестве гейзенберговых операторов естественно рассмотреть также объекты вида (2.10), где $f(x)$ есть некоторая комбинация мономов $b_{\{\lambda\}}(x)$, например, $\check{\Phi}^n(x) = S^+T(:\varphi^n(x):S)$ и $\Phi^n(x) = T(:\varphi^n(x):S)$. Однако известно, что в теории возмущений такие величины содержат ультрафиолетовые расходимости, даже если проведена перенормировка S-матрицы. Поэтому, следуя Циммерману[2], мы вместо них введем так называемые составные поля:

$$\check{B}_{\{\lambda\}}(x) = S^+RT\{b_{\{\lambda\}}(x)S\} \qquad (2.16)$$

и

$$B_{\{\lambda\}}(x) = RT\{b_{\{\lambda\}}(x)S\}. \qquad (2.17)$$

Для упрощения выкладок можно считать, что в (2.17), как и ранее в (2.11), вакуумные диаграммы автоматически удалены из соответствующего разложения.

Хронологические произведения составных полей $\check{B}_{\{\lambda\}}(x)$ определяются формулой типа (2.12):

$$T\check{B}_{\{\lambda\}_1}(x_1)\ldots\check{B}_{\{\lambda\}_n}(x_n) = S^+RT(b_{\{\lambda\}_1}(x_1)\ldots b_{\{\lambda\}_n}(x_n)S), \qquad (2.18)$$

и $(\ldots)_+$-произведения полей $B_{\{\lambda\}}(x)$ – формулой типа (2.13):

$$\left(B_{\{\lambda\}_1}(x_1)\ldots B_{\{\lambda\}_n}(x_n)\right)_+ = RT(b_{\{\lambda\}_1}(x_1)\ldots b_{\{\lambda\}_n}(x_n)S). \qquad (2.19)$$

Подчеркнем, что домножение на S^+, осуществляющее переход от (2.19) к (2.18), не приводит к дополнительным расходимостям.

Поля $\check{\Phi}(x)$, $\check{B}(x)$, которые только и содержат обычные произведения операторов, в дальнейшем рассматриваться не будут. Мы будем оперировать лишь с полями $\Phi(x)$ и $B(x)$, так что все основные формулы, с которыми нам придется иметь дело, будут, подобно (2.17) и (2.19), содержать T-произведения. Поэтому для упрощения записи мы будем систематически опускать символ T. Таким образом, ниже все произведения полевых величин следует понимать как хронологически упорядоченные. Для других же операций умножения мы будем использовать особые символы.

3. Все введенные операторы порождают функционалы типа (2.6). Поскольку в теории возмущений их коэффициентные функции $F_\ell(\underline{x}\,|\,\underline{y})$

представимы в виде некоторых сумм диаграмм Фейнмана, $F_\ell(\underline{x}|\underline{y})$ допускают разбиение

$$F_\ell(\underline{x}|\underline{y}) = F_\ell^{prop}(\underline{x}|\underline{y}) + F_\ell^{imp}(\underline{x}|\underline{y}) + F_\ell^{disc}(\underline{x}|\underline{y}), \tag{2.20}$$

где $F_\ell^{prop}(\underline{x}|\underline{y})$ сопоставляется совокупности сильносвязных (или одночастично неприводимых) диаграмм, $F_\ell^{imp}(\underline{x}|\underline{y})$ отвечает слабосвязным, а $F_\ell^{disc}(\underline{x}|\underline{y})$ – несвязным диаграммам.

Для фурье-преобразований $\tilde{F}_\ell^{\#}(\underline{p}|\underline{\kappa})$ функций $F_\ell^{\#}(\underline{x}|\underline{y})$, где значок $\#$ заменяет любой из символов "prop", "imp" или "disc" (или отсутствие такого символа), примем обозначение

$$\int dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_\ell\, e^{i\sum p_j x_j + i\sum \kappa_j y_j}\, F_\ell^{\#}(x_1,\dots,x_n|y_1,\dots,y_\ell) =$$

$$=(2\pi)^4\,\delta\left(\sum p + \sum \kappa\right)\tilde{F}_\ell^{\#}(p_1,\dots,p_n|\kappa_1,\dots,\kappa_\ell). \tag{2.21}$$

Аналогичные обозначения будут использоваться для фурье-преобразования всех других трансляционно-инвариантных функций.

Коэффициентные функции $F_\ell(\underline{x}|\underline{y})$ выражаются через вакуумные средние вариационных производных $F(\underline{x})$:

$$F_\ell(\underline{x}|y_1,\dots,y_\ell) = \left\langle \frac{\delta^\ell F(\underline{x})}{\delta\varphi(y_1)\dots\delta\varphi(y_\ell)} \right\rangle; \tag{2.22}$$

с другой стороны, для них легко получить представление через "ампутированные" вакуумные средние хронологических произведений

$$F_\ell(\underline{x}|y_1,\dots,y_\ell) = \langle F(\underline{x}) : \varphi(y_1)\dots\varphi(y_\ell) : \rangle^{y-A} \equiv$$

$$\equiv \prod_{j=1}^{\ell}\left[i(\Box_{y_j}+m^2)\right]\langle F(\underline{x}) : \varphi(y_1)\dots\varphi(y_\ell) : \rangle. \tag{2.23}$$

y_j -ампутация, осуществляемая оператором $i(\Box_{y_j}+m^2)$, сводится к замене функции $G_2^{(0)}(y_j,x_k)$, возникающей в разложении вакуумного среднего, на $\delta(y_j-x_k)$ (см. (2.2)). На языке диаграмм Фейнмана это соответствует стягиванию в точку линии, соединяющей вершины y_j и x_k.

Вклад сильносвязных диаграмм в $\langle F(\underline{x}) : \varphi(y_1)\dots\varphi(y_\ell) : \rangle^{y-A}$ обозначим $\langle F(\underline{x})\varphi(y_1)\dots\varphi(y_\ell)\rangle^{prop}$. Здесь мы отказались от нормального упорядочения, поскольку это изменение сказывается только на несвязных диаграммах. Итак,

$$F_\ell^{prop}(\underline{x}|y_1,\dots,y_\ell) = \langle F(\underline{x})\varphi(y_1)\dots\varphi(y_\ell)\rangle^{prop}. \tag{2.24}$$

Введем следующее обозначение, которое в дальнейшем мы будем часто использовать :

$$\langle F(\underline{x})\,\tilde{\varphi}^{(\lambda_1)}(\kappa_1)\dots\tilde{\varphi}^{(\lambda_\ell)}(\kappa_\ell)\rangle^{prop} \equiv$$

$$\equiv\left(\frac{\partial}{\partial\kappa_1}\right)^{(\lambda_1)}\dots\left(\frac{\partial}{\partial\kappa_\ell}\right)^{(\lambda_\ell)}\int d\underline{y}\; e^{i\sum\kappa_j y_j}\langle F(\underline{x})\varphi(y_1)\dots\varphi(y_\ell)\rangle^{prop}. \tag{2.25}$$

имеет место

Лемма 2.I. Пусть $F(x)$ зависит только от одной координаты. Тогда

$$\tilde{F}_\ell^{prop}(p|\kappa_1,\dots,\kappa_\ell)=\langle F(0)\,\tilde{\varphi}(\kappa_1)\dots\tilde{\varphi}(\kappa_\ell)\rangle^{prop}. \qquad (2.26)$$

Доказательство.
Согласно (2.2I) и (2.24)

$$(2\pi)^4\,\delta(p+\sum_{j=1}^{\ell}\kappa_j)\,\tilde{F}_\ell^{prop}(p|\kappa_1,\dots,\kappa_\ell)=$$

$$=\int dx\,dy_1\dots dy_\ell\; e^{ipx+i\sum\kappa_j y_j}\,\langle F(x)\,\varphi(y_1)\dots\varphi(y_\ell)\rangle^{prop}.$$

Воспользуемся трансляционной инвариантностью фигурирующего здесь матричного элемента, записав его как $\langle F(0)\varphi(y_1-x)\dots\varphi(y_\ell-x)\rangle^{prop}$, и сделаем в интеграле замену $y_j'=y_j-x$. Мы придем к равенству

$$(2\pi)^4\delta(p+\sum\kappa_j)\,\tilde{F}_\ell^{prop}(p|\underline{\kappa})=(2\pi)^4\delta(p+\sum\kappa_j)\langle F(0)\tilde{\varphi}(\kappa_1)\dots\tilde{\varphi}(\kappa_\ell)\rangle^{prop},$$

откуда и следует утверждение леммы.

В заключение этого параграфа заметим, что вне поверхности энергии $\sum p+\sum\kappa=0$ функция $F_\ell(\underline{p},\underline{\kappa})$ определена, разумеется, неоднозначно. В (2.26) выбрано такое продолжение за поверхность энергии, при котором $\tilde{F}_\ell^{prop}(p|\kappa_1,\dots,\kappa_\ell)$ от p не зависит.

§ 3. R-операция

Во всех последующих рассуждениях, апеллирующих к разложениям гейзенберговых операторов в ряд по диаграммам Фейнмана, мы будем предполагать, что в теорию введена релятивистски-инвариантная промежуточная регуляризация. Это позволит нам на стадии вспомогательных расчетов рассматривать по отдельности различные части коэффициентных функций, которые, вообще говоря, расходятся в нерегуляризованной теории. С другой стороны, общие соотношения между перенормированными величинами, которые мы установим на стадии промежуточной регуляризации, разумеется, сохранятся и в пределе снятой регуляризации. На такой точке зрения мы будем стоять уже в этом параграфе, посвященном определению R-операции.

Пусть задана некоторая диаграмма $\langle V,L\rangle$, где V — множество ее вершин, а L — множество ее линий. Подмножества V и L будем обозначать V_j и L_j соответственно. $|V_j|$ и $|L_j|$ -число элементов в V_j и L_j. L^{V_j} -совокупность всех линий, начало и конец которых лежат в V_j.

Для поддиаграммы вида $\langle V_j, L^{V_j}\rangle$ будем писать кратко $\langle V_j\rangle$.

Перенормировка диаграммы $\langle V,L\rangle$ производится посредством двух наборов операций, сопоставляемых всевозможным подмножествам $V_j\subset V$ - вычитаний, осуществляемых операторами $M(V_j)$, и конечной перенормировки, осуществляемой операторами $\Pi(V_j)$. Они определены на множестве $\mathcal{G}$ функций вида

$$g(x_1,\dots,x_{|V|}\,|\,V)\equiv g(\underline{x}\,|\,V)=\prod_{\ell\in L}\Delta_\ell(x_{\ell_f}-x_{\ell_i}), \qquad (3.1)$$

где $\Delta_\ell(x_{\ell_f}-x_{\ell_i})$ -либо (регуляризованная) D^c_ℓ- функция, либо некоторая производная δ- функции.

При этом предполагается, что из сомножителей правой части (3.1) нельзя выбрать последовательность $\Delta_1(x_1-x_2)\,\Delta_2(x_2-x_3)\dots$

$\dots\Delta_k(x_k-x_1)$, такую, что все члены этой последовательности являются δ-функциями или их производными. Коэффициентные функции неперенормированных фейнмановских диаграмм образуют подмножество $\mathcal{G}^c\subset\mathcal{G}$ функций вида (3.1), таких, что все $\Delta_\ell=D^c_\ell$.

Пусть $V_j\subset V$. Тогда из $g(x_1,\dots,x_{|V|}\,|\,V)$ можно выделить коэффициентную функцию подграфа $\langle V_j\rangle$

$$g(\underline{x}\,|\,V_j)=\prod_{\ell\in L^{V_j}}\Delta_\ell(x_{\ell_f}-x_{\ell_i}), \qquad (3.2)$$

так что

$$g(\underline{x}\,|\,V)=g(\underline{x}\,|\,V_j)\prod_{\ell\in L^{V_j}}\Delta_\ell(x_{\ell_f}-x_{\ell_i}). \qquad (3.3)$$

Если подграф $\langle V_j\rangle$ является связным, то в фурье-преобразовании

$$\int d\underline{x}\; e^{i\sum k_jx_j}\, g(\underline{x}\,|\,V_j)=(2\pi)^4\,\delta(\textstyle\sum k_j)\,\tilde g(\underline{k}\,|\,V_j)$$

функция $\tilde g(\underline{k}\,|\,V_j)$ аналитична в окрестности нуля.

Определять операторы $M(V_j)$ и $\Pi(V_j)$, действующие на функции из $\mathcal{G}$, можно с некоторым произволом (см. § 4).

Здесь мы опишем лишь один из вариантов определения $M(V_j)$.

Сопоставим каждому подграфу $\langle V_j, L_j\rangle$ целое число $\omega(\langle V_j,L_j\rangle)$, называемое его индексом расходимости. $M(V_j)$ и $\Pi(V_j)$ определим следующим образом:

а) Если $\langle V_j\rangle$ не является сильносвязным или $\omega(\langle V_j,L_j\rangle)<0$, то $M(V_j)=0$, $\Pi(V_j)=0$.

б) Если $\langle V_j\rangle$ является сильносвязным и $\omega(\langle V_j,L_j\rangle)\geq 0$, то

$$M(V_j)\,g(\underline{x}\,|\,V)=g_\omega(\underline{x}\,|\,V_j)\prod_{\ell\in L^{V_j}}\Delta_\ell(x_{\ell_f}-x_{\ell_i}), \qquad (3.4)$$

$$\Pi(V_j)\,g(\underline{x}\,|\,V)=\pi_\omega(\underline{x}\,|\,V_j)\prod_{\ell\in L^{V_j}}\Delta_\ell(x_{\ell_f}-x_{\ell_i}). \qquad (3.5)$$

Здесь

$$g_\omega(\underline{x}\,|\,V_j)=\frac{1}{(2\pi)^{4(|V_j|-1)}}\int e^{-i\sum k_jx_j}\,\delta(\textstyle\sum k_j)\,\tilde g_\omega(\underline{k}\,|\,V_j)\,d\underline{k}, \qquad (3.6)$$

$$\pi_\omega(\underline{x}\,|\,V_j)=\frac{1}{(2\pi)^{4(|V_j|-1)}}\int e^{-i\sum k_jx_j}\,\delta(\textstyle\sum k_j)\,\tilde\pi_\omega(\underline{k}\,|\,V_j)\,d\underline{k}, \qquad (3.7)$$

а

$$\tilde g_\omega(k,V_j)=\sum_{\sum|\nu_j|\leq\omega(\langle V_j,L_j\rangle)}\frac{(k_1)^{(\nu_1)}\dots(k_{|V_j|})^{(\nu_{|V_j|})}}{(\nu_1)!\dots(\nu_{|V_j|})!}\left(\frac{\partial}{\partial k_1}\right)^{(\nu_1)}\dots \qquad (3.8)$$

$$\dots\left(\frac{\partial}{\partial k_{|V_j|}}\right)^{(\nu_{|V_j|})}\tilde g(\underline{k}\,|\,V_j)\Big|_{\underline{k}=0}.$$

Что касается до $\tilde{\pi}_\omega(\underline{k}|V_j)$, то они являются произвольными релятивистски-инвариантными полиномами по импульсам k_j степени $\omega(\langle V_j, L_j\rangle)$, которые задаются заранее и выбираются из физических соображений. Таким образом, $M(V_j)$ заменяет коэффициентную функцию $\tilde{g}(\underline{k}|V_j)$ подграфа $\langle V_j\rangle$ в импульсном представлении на начальный отрезок ее разложения Маклорена (степени $\omega(\langle V_j, L_j\rangle)$) по импульсам $\underline{k}$. Подчеркнем, что произвол в продолжении функций $\tilde{g}(\underline{k}|V_j)$ за пределы поверхности $\sum k_j = 0$ не сказывается на функциях $g_\omega(\underline{x}|V_j)$. Очевидно,

$$M(V_j)\mathcal{Y}^\circ \subset \mathcal{Y}, \qquad \Pi(V_j)\mathcal{Y}^\circ \subset \mathcal{Y}.$$

Пусть $Q(V_j)$ — любой из операторов $M(V_j)$, $\Pi(V_j)$. Если $\langle V_i\rangle$ и $\langle V_j\rangle$ частично перекрываются (то есть $V_i \cap V_j \neq \phi$, но не выполнено ни одно из включений $V_i \subset V_j$ или $V_j \subset V_i$), то оператор $Q(V_i)$ выводит $g(\underline{x}|V) \in \mathcal{Y}$ из области определения $Q(V_j)$ и произведение $Q(V_j)\,Q(V_i)$ однозначного смысла не имеет. Однако если $V_i \subset V_j$ или $V_i \cap V_j = \phi$, то на $\mathcal{Y}^\circ$ имеет смысл любое произведение $Q(V_j)\,Q(V_i)$. Аналогично, хорошо определенными на $\mathcal{Y}^\circ$ оказываются величины вида $\vdots Q(V_1)\ldots Q(V_k)\vdots$, где $\vdots\ldots\vdots$ - произведение вводится соотношениями:

а) $\vdots Q(V_1)\ldots Q(V_k)\vdots = 0$, если среди V_q найдется такая пара V_i, V_j, что $\langle V_i\rangle$ и $\langle V_j\rangle$ частично перекрываются, или если $V_i \supset V_j$, но $Q(V_i) = \Pi(V_i)$.

б) Во всех других случаях:

$$\vdots Q(V_1)\ldots Q(V_k)\vdots = Q(V_{j_1})\ldots Q(V_{j_k}),$$

где сомножители в правой части упорядочены так, что из $V_s \supset V_q$ следует, что $Q(V_s)$ стоит левее $Q(V_q)$.

Перейдем собственно к R-операции $R(V)$: Она задана следующими рекуррентными соотношениями /I,5/:

$$R(V) = \sum_{V_1+\ldots+V_k=V} \Lambda(V_1)\ldots\Lambda(V_k), \tag{3.9}$$

где суммирование ведется по всем разбиениям множества V на непустые непересекающие подмножества $V_1,\ldots,V_k$, а

$$\Lambda(V_j) = 1 \quad \text{, если } |V_j| = 1, \tag{3.10}$$

$$\Lambda(V_j) = -M(V_j)'R(V_j) + \Pi(V_j) \quad \text{, если } |V_j| > 1, \tag{3.11}$$

причем

$$'R(V_j) = \sum_{\substack{V_j = V_{j_1}+\ldots+V_{j_k} \\ V_{j_s} \neq V_j}} \Lambda(V_{j_1})\ldots\Lambda(V_{j_k}). \tag{3.12}$$

Суммирование в (3.12) идет по всем разбиениям V_j на непустые непересекающиеся группы $V_{j_1},\ldots,V_{j_k}$, не совпадающие с V_j. Рекуррентные соотношения (3.9)-(3.12) можно разрешить, выразив тем самым $R(V)$ непосредственно через $M(V_j)$ и $\Pi(V_j)$. Именно, имеет место

Лемма 3.I. Пусть $\langle V_1\rangle, \ldots, \langle V_k\rangle$ – все сильносвязные подграфы $\langle V, L\rangle$, такие, что $\omega(\langle V_j, L^{V_j}\rangle) \geqslant 0 \quad (j=1,\ldots,k)$.
Тогда

$$R(V) = :\prod_{j=1}^{k}\left[1 - M(V_j) + \Pi(V_j)\right]: . \tag{3.13}$$

Если операторы конечной перенормировки $\Pi(V_j)$ равны нулю, то (3.I3) сводится к циммермановской "сумме по лесам" [2]. Доказательство леммы 3.I можно найти в [7].

§ 4. Основные величины теории. Вычитающий оператор M

I. В предыдущем параграфе мы уже упоминали, что определение вычитающего оператора $M(V)$ допускает некоторый произвол. Этот произвол связан прежде всего с неоднозначностью в выборе индексов расходимости $\omega(\langle V, L\rangle)$.

Ультрафиолетовые бесконечности будут устранены из теории [1,3,4,], если индексы $\omega(\langle V, L\rangle)$ сильносвязных графов выбрать минимальным образом [5]:

$$\omega^{min}(\langle V, L\rangle) = 4C - 2|L| + \sum_{\ell\in L} r_\ell = 2|L| - 4|V| + 4 + \sum_{\ell\in L} r_\ell . \tag{4.1}$$

Здесь C – число независимых циклов графа $\langle V, L\rangle$, r_ℓ – степень полинома в числителе причинной функции D^c_ℓ, отвечающей линии $\ell\in L$.

Часто удобнее, однако, выбирать $\omega(\langle V, L\rangle)$ неминимальным. Для отсутствия в фейнмановском интеграле ультрафиолетовых расходимостей достаточно [6], чтобы $\omega(\langle V, L\rangle)$ был произвольным целым числом, таким, что для всех $\langle V, L\rangle$

$$\omega(\langle V, L\rangle) \geqslant \omega^{min}(\langle V, L\rangle) \tag{4.2}$$

и для каждого подграфа $\langle V', L'\rangle \subset \langle V, L\rangle$

$$\omega(\langle V, L\rangle) \geqslant \omega^{min}(\langle V, L\rangle / \langle V', L'\rangle) + \omega(\langle V', L'\rangle). \tag{4.3}$$

В последнем соотношении $\langle V, L\rangle/\langle V', L'\rangle$ означает редуцированный по $\langle V', L'\rangle$ исходный граф (то есть граф, в котором стянут в точку его подграф $\langle V', L'\rangle$). Касательно сходимости фейнмановских интегралов см. также [19,21].

Приведем пример неминимальных вычитаний. Для каждой сильносвязной диаграммы $\langle V, L\rangle$ положим

$$\omega(\langle V, L\rangle) = a(\langle V, L\rangle) - \ell, \tag{4.4}$$

где ℓ – число внешних линий диаграммы, а $a(\langle V, L\rangle)$ — любые целые числа, удовлетворяющие следующим условиям. Пусть b_j — виковский моном, изображением которого служит вершина $j\in V$ в диаграмме $\langle V, L\rangle$. Тогда

$$a(\langle V, L\rangle) \geqslant \sum_{j\in V} \dim b_j - 4|V| + 4. \tag{4.5}$$

Потребуем, кроме того, чтобы для каждого $\langle V', L' \rangle \subset \langle V, L \rangle$ выполнялось неравенство

$$a(\langle V,L\rangle)-\sum_{j\in V}\dim b_j+4|V| \geqslant a(\langle V',L'\rangle)-\sum_{j\in V'}\dim b_j+4|V'|. \quad (4.6)$$

Нетрудно проверить, что при таком выборе соотношения (4.2) и (4.3) выполнены.

До сих пор мы рассматривали операцию M только на индивидуальных диаграммах. Определим ее теперь на произвольных функционалах F вида (2.6), предполагая, что их коэффициентные функции F_ℓ разлагаются по диаграммам Фейнмана и что на каждую так возникшую диаграмму $\langle V\rangle$ оператор M действует, как $M(V)$, в согласии с некоторым правилом вычисления индекса расходимости. В частности, если для всех диаграмм в разложении F положено $\omega(\langle V,L\rangle) = a - \ell$, где a — некоторое единое для всех диаграмм число, то соответствующий оператор мы обозначим через $M^{(a)}$. В дальнейшем мы будем рассматривать величины типа

$$M^{(a)}\left[\exp i\int \mathcal{L}(x)dx - 1 - i\int \mathcal{L}(x)dx\right],$$

$$M^{(a)}\, b_{\{\lambda\}_j}(x)\left[\exp i\int \mathcal{L}(x')dx' - 1\right]$$

и т.д. (напомним, что все произведения локальных величин мы условились понимать как хронологически упорядоченные).

Ниже для иллюстраций мы будем использовать в основном перенормируемую скалярную теорию, лагранжиан которой содержит лишь вершины вида $:\varphi^4(x):$, $:\varphi^2(x):$ и $:\partial^\nu\varphi(x)\partial_\nu\varphi(x):$. Для любой диаграммы, составленной только из таких вершин, справедливо соотношение

$$\sum_{j\in V}\dim b_j - 4|V| \leqslant 0,$$

так что для всех этих диаграмм можно положить $a(\langle V,L\rangle) = 4$ и соответственно

$$\omega(\langle V,L\rangle) = 4 - \ell. \quad (4.7)$$

Таким образом, перенормированную S-матрицу в скалярной теории можно получить с помощью R-операции, построенной на основе вычитающего оператора $M^{(4)}$.

Операции R, $'R$, Λ, Π мы также зададим на произвольных хронологически упорядоченных функционалах F локальных величин, определяя их действие поддиаграммно.

Уточним теперь наши основные объекты. Пусть $M = M^{(4)}$, то есть все индексы расходимости в теории заданы равенством (4.7). Тогда матрица рассеяния есть

$$S = R^{(4)}\exp i\int dx\left[\frac{g+\Delta g}{4!}:\varphi^4(x): + \right. \quad (4.8)$$

$$\left. + \frac{\Delta m^2}{2}:\varphi^2(x): + \frac{\Delta z}{2}:\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x):\right],$$

где $R^{(4)}$-операция строится из $M^{(4)}$ с нулевой конечной перенормировкой Π, а постоянные Δm^2, Δg и Δz подбираются из нормировочных условий:

$$\tilde{S}_2^{prop}(p,-p)\Big|_{p^2=m^2} = \tilde{S}^{prop}(p,-p)\Big|_{p^2=\mu^2} = 0, \quad (4.9)$$

$$\tilde{S}_4^{\,prop}(p_1,p_2,p_3,p_4)\Big|_{symm\,\mu^2} = ig. \qquad (4.10)$$

Здесь точка $\{p_1,p_2,p_3,p_4\} = symm\ \mu^2$ определена соотношениями

$$\sum_{j=1}^{4} p_j = 0, \quad p_j^2 = \mu^2, \quad (p_1+p_2)^2 = (p_1+p_3)^2 = (p_1+p_4)^2 = \frac{4}{3}\mu^2, \qquad (4.11)$$

причем m – физическая масса, а μ^2 – вспомогательный параметр. Таким образом, "эффективный" лагранжиан взаимодействия, использованный в (4.8), равен

$$\mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}_\Delta(x) = \frac{g+\Delta g}{4!} :\varphi^4(x): + \frac{\Delta m^2}{2} :\varphi^2(x): + \frac{\Delta z}{2} :\partial\varphi(x)\partial\varphi(x): \qquad (4.12)$$

Рассмотрим далее некоторый виковский моном $b_{\{\lambda\}}(x)$. Пусть $a \geqslant \dim b_{\{\lambda\}}(x)$. Образуем формально T-произведение $b_{\{\lambda\}}(x) \exp i \int \mathcal{L}_\Delta(x')\,dx'$ и возникающим при его разложении диаграммам припишем индексы

$$\omega(\langle V, L\rangle) = a - \ell, \qquad (4.13)$$

если вершина x содержится в V, и

$$\omega(\langle V, L\rangle) = 4 - \ell \qquad (4.14)$$

в противном случае. Очевидно, такой выбор удовлетворяет условиям (4.5) и (4.6). Соответствующую R-операцию (снова с нулевой

конечной перенормировкой Π) обозначим через $R^{(a)}$. Составное поле $B^{(a)}_{\{\lambda\}}(x)$ определено соотношением

$$B^{(a)}_{\{\lambda\}}(x) = R^{(a)}\, b_{\{\lambda\}}(x) \exp i \int \mathcal{L}_\Delta(x')\,dx'. \qquad (4.15)$$

Аналогично определяются многоточечные составные поля $(B_1(x_1)\dots B_n(x_n))_+$ (см. (2.19)). Так, в случае $n=2$ рассмотрим T-произведение $b_{\{\lambda\}_1}(x_1)\, b_{\{\lambda\}_2}(x_2) \exp i \int \mathcal{L}_\Delta(x')\,dx'$ и возникающим диаграммам припишем индексы

$\omega(\langle V, L\rangle) = 4 - \ell,$

если x_1 и x_2 не содержатся в V, (4.16)

$\omega(\langle V, L\rangle) = a_{1(2)} - \ell,$

если $x_{1(2)} \in V$, а $x_{2(1)} \overline{\in} V$, и

$\omega(\langle V, L\rangle) = a - \ell,$

если $x_1 \in V$, $x_2 \in V$.

Здесь числа a_1, a_2 и a удовлетворяют условиям

$$a_1 \geqslant \dim b_{\{\lambda\}_1}; \quad a_2 \geqslant \dim b_{\{\lambda\}_2}; \quad a \geqslant a_1 + a_2 - 4, \qquad (4.17)$$

влекущим за собой соотношения (4.5) и (4.6).

R - операцию, построенную с такими $M(V)$ (и $\Pi(V) \equiv 0$) обозначим через $R^{(a,a_1,a_2)}$. Тогда

$$\left(B^{(a_1)}_{\{\lambda\}_1}(x_1)\, B^{(a_2)}_{\{\lambda\}_2}(x_2)\right)^{(a)}_+ = \qquad (4.18)$$

$$= R^{(a,a_1,a_2)}\, b_{\{\lambda\}_1}(x_1)\, b_{\{\lambda\}_2}(x_2) \exp i \int \mathcal{L}_\Delta(x')\,dx'.$$

2. Зададим теперь вычитающий оператор $M^{(a)}$ непосредственно в координатном представлении. Рассмотрим некоторый n-точечный функционал вида (2.6). Имеет место следующее равенство.

Лемма 4.1.

$$M^{(a)}F(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\ell+\Sigma|\lambda_j|\le a}\frac{(-i)^{\Sigma|\lambda_j|}}{\ell!(\lambda_1)!\dots(\lambda_\ell)!}\int dx\, b_{\{\lambda\}}(x)\cdot \qquad (4.19)$$

$$\cdot\left\{\sum_{\substack{\Sigma|\nu_j|\le \\ \le a-\ell-\Sigma|\lambda_j|}}\frac{(-i)^{\Sigma|\nu_j|}}{(\nu_1)!\dots(\nu_n)!}\delta^{(\nu_1)}(x-x_1)\dots\delta^{(\nu_n)}(x-x_n)C^{\{\lambda\}}_{\{\nu\}}\right\}.$$

Внешнее суммирование идет здесь по всем мультииндексам $\{\lambda\}=\{(\lambda_1),\dots,(\lambda_\ell)\}$, таким, что $\dim b_{\{\lambda\}}\le a$, внутренняя сумма распространяется на мультииндексы $\{\nu\}=\{(\nu_1),\dots,(\nu_n)\}$, обладающие "длиной" n. Константы $C^{\{\lambda\}}_{\{\nu\}}$ определены равенством

$$C^{\{\lambda\}}_{\{\nu\}}=\left(\frac{\partial}{\partial p_1}\right)^{(\nu_1)}\dots\left(\frac{\partial}{\partial p_n}\right)^{(\nu_n)}\left(\frac{\partial}{\partial k_1}\right)^{(\lambda_1)}\dots\left(\frac{\partial}{\partial k_\ell}\right)^{(\lambda_\ell)}\tilde F^{prop}_\ell(p_1,\dots,p_n|k_1,\dots,k_\ell)\Big|_{\underline{p}=\underline{k}=0}. \qquad (4.20)$$

Доказательство.

Вспомним, что $M^{(a)}$ обращает в нуль все диаграммы, которые не являются сильносвязными, а также все диаграммы с числом внешних линий $\ell>a$. Поэтому

$$M^{(a)}F(x_1,\dots,x_n)= \qquad (4.21)$$

$$=M^{(a)}\sum_{\ell=1}^{a}\frac{1}{\ell!}\int dy_1\dots dy_\ell:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_\ell): F^{prop}_\ell(\underline{x}|y_1,\dots,y_\ell).$$

Но

$$\tilde F^{prop}_\ell(\underline{x}|y_1,\dots,y_\ell)=\frac{1}{(2\pi)^{4(\ell+n-1)}}\int dp_1\dots dp_n\,dk_1\dots dk_\ell\cdot \qquad (4.22)$$

$$\cdot\delta(\Sigma p+\Sigma k)e^{-i\Sigma p_jx_j-i\Sigma k_jy_j}\tilde F^{prop}_\ell(p_1,\dots,p_n|k_1,\dots,k_\ell),$$

причем

$$M^{(a)}\tilde F^{prop}_\ell=\sum_{\substack{\{\lambda\}\\ \ell+\Sigma|\lambda_j|\le a}}\frac{k_1^{(\lambda_1)}\dots k_\ell^{(\lambda_\ell)}}{(\lambda_1)!\dots(\lambda_\ell)!}\sum_{\substack{\{\nu\}\\ \Sigma|\nu_j|\le a-\ell-\Sigma|\lambda_j|}}\frac{p_1^{(\nu_1)}\dots p_n^{(\nu_n)}}{(\nu_1)!\dots(\nu_n)!}C^{\{\lambda\}}_{\{\nu\}}. \qquad (4.23)$$

Вычисляя интеграл (4.22), в котором $\tilde F^{prop}_\ell$ заменена на $M^{(a)}\tilde F^{prop}_\ell$, и подставляя ответ в (4.21), приходим к (4.19).

Отметим частные случаи соотношения (4.19). Пусть "четный" функционал F не зависит от координат, то есть $n=0$:

$$F=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r)!}\int dy_1\dots dy_{2r}:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_{2r}): F_{2r}(y_1,\dots,y_{2r}). \qquad (4.24)$$

Тогда внутренняя сумма в (4.19) сводится к одному слагаемому $C^{\{\lambda\}}$, и мы имеем

$$M^{(4)}F=\frac{1}{2}\tilde F^{prop}_2(0,0)\int:\varphi^2(x):dx+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial k^2}\tilde F^{prop}_2(k,-k)\Big|_{k=0}\cdot \qquad (4.25)$$

$$\cdot\int:\partial\varphi(x)\partial\varphi(x):dx+\frac{1}{4!}\tilde F^{prop}_4(0,0,0,0)\int:\varphi^4(x):dx.$$

В (4.25) учтено, что в силу релятивистской инвариантности $\tilde{F}_2^{prop}(\kappa,-\kappa)$ зависит лишь от κ^2.

При $n=1$ рассмотрим "нечетный" функционал $F(x)$:

$$F(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r-1)!}\int dy_1\ldots dy_{2r-1}:\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_{2r-1}):F_{2r-1}(\underline{x}|y_1,\ldots,y_{2r-1}).\quad(4.26)$$

Имеем

$$M^{(3)}F(x)=\tilde{F}_1^{prop}(0|0)\varphi(x)-\frac{\partial}{\partial\kappa^2}\tilde{F}_1^{prop}(\kappa|-\kappa)\Big|_{\kappa=0}\Box\varphi(x)+\quad(4.27)$$

$$+\frac{1}{6}\tilde{F}_3^{prop}(0|0,0,0):\varphi^3(x):$$

Как видно, для любого функционала F вида (4.24) справедливо равенство

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}M^{(4)}F=M^{(3)}\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}F.\quad(4.28)$$

В случае произвольного a для вычисления $M^{(a)}F(x)$ воспользуемся формулой (2.26). Имеем

$$M^{(a)}F(x)=\sum_{\substack{\{\lambda\}\\ \ell+\Sigma|\lambda_j|\le a}}b_{\{\lambda\}}(x)\cdot\quad(4.29)$$

$$\cdot\frac{(-i)^{\Sigma|\lambda_j|}}{\ell!\,(\lambda_1)!\ldots(\lambda_\ell)!}\langle F(0)\tilde{\varphi}^{(\lambda_1)}(0)\ldots\tilde{\varphi}^{(\lambda_\ell)}(0)\rangle^{prop}.$$

Отсюда, в частности, видно, что

$$M^{(a)}b_{\{\lambda\}}(x)=b_{\{\lambda\}}(x),\quad(4.29')$$

если $\dim b_{\{\lambda\}}\le a$, и

$$M^{(a)}b_{\{\lambda\}}(x)=0,\quad(4.29'')$$

если $\dim b_{\{\lambda\}}(x)>a$.

3. Обсудим возможный произвол другого рода в определении вычитающего оператора M. Он связан с неоднозначностью в выборе точки вычитания (то есть центра разложения коэффициентных функций).

Пока теория рассматривается вне массовой поверхности, точка вычитания может быть любой. Однако чтобы соответствующие функционалы действительно являлись виковскими символами некоторых операторов в фоковском пространстве, необходимо, чтобы они были правильно нормированы на массовой поверхности соотношениями типа (4.9). Этого можно достичь, например, как это мы делали раньше,- введя в лагранжиан конечные контрчлены с коэффициентами Δz, Δm^2, Δg. Другой способ состоит в том, чтобы определенным образом распорядиться конечной перенормировкой Π, фигурирующей в определении R- операции. Наконец, можно считать, что конечные контрчлены отсутствуют и операторы конечной перенормировки Π равны нулю, но M имеет иной смысл, а именно, центр соответствующего разложения коэффициентной функции по инвариантным комбинациям $p_i p_j$ внешних импульсов сдвигается из нуля на массовую поверхность.

Определим на функционалах вида (4.24) и (4.27) вычитающий оператор $\mathcal{M}$, обладающий такими свойствами. Положим

$$\mathcal{M}^{(4)}F = \int :\varphi^2(x): dx \, \frac{(\mu^2-m^2)^{-1}}{2}\left[\mu^2 \tilde{F}_2^{prop}(\kappa,-\kappa)\Big|_{\kappa^2=m^2} - m^2 \tilde{F}_2^{prop}(\kappa,-\kappa)\Big|_{\kappa^2=\mu^2}\right] +$$
$$+\int :\partial\varphi(x)\partial\varphi(x): dx \, \frac{(\mu^2-m^2)^{-1}}{2}\left[\tilde{F}_2^{prop}(\kappa,-\kappa)\Big|_{\kappa^2=\mu^2} - \tilde{F}_2^{prop}(\kappa,-\kappa)\Big|_{\kappa^2=m^2}\right] + \tag{4.30}$$
$$+\frac{1}{4!}\int :\varphi^4(x): dx \, \tilde{F}_4^{prop}(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4)\Big|_{\text{сумм } \mu^2}.$$

Для нечетных функционалов $F(x)$ имеем

$$\mathcal{M}^{(3)}F(x) = \varphi(x)(\mu^2-m^2)^{-1}\left[\mu^2 \tilde{F}_1^{prop}(p|-p)\Big|_{p^2=m^2} - m^2 \tilde{F}_1^{prop}(p|-p)\Big|_{p^2=\mu^2}\right] -$$
$$-\Box\varphi(x)(\mu^2-m^2)^{-1}\left[\tilde{F}_1^{prop}(p|-p)\Big|_{p^2=\mu^2} - \tilde{F}_1^{prop}(p|-p)\Big|_{p^2=m^2}\right] + \tag{4.31}$$
$$+\frac{1}{6}:\varphi^3(x): \tilde{F}_3^{prop}(p|\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)\Big|_{\text{сумм } \mu^2}.$$

В пределе $\mu^2=0$, $m^2=0$ величины $\mathcal{M}^{(4)}F$ и $\mathcal{M}^{(3)}F(x)$ переходят соответственно в $M^{(4)}F$ и $M^{(3)}F(x)$. Справедливо равенство

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\mathcal{M}^{(4)}F = \mathcal{M}^{(3)}\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}F. \tag{4.32}$$

R- операцию, построенную на основе такого $\mathcal{M}^{(4)}$ (с $\Pi \equiv 0$), обозначим через $\mathcal{R}^{(4)}$. Очевидно, коэффициентные функции матрицы рассеяния будут теперь автоматически удовлетворять нормировочным условиям (4.9), (4.10), и нужды во введении конечных контрчленов нет. Имеем

$$\mathcal{R}^{(4)} \exp \frac{ig}{4!}\int :\varphi^4(x): dx = R^{(4)} \exp i\int \mathcal{L}_\Delta(x)\,dx. \tag{4.33}$$

Строго говоря, операция $\mathcal{R}^{(4)}$ не соответствует какой-либо фиксированной точке вычитания. Она переходит в R-операцию с точкой вычитания на массовой поверхности лишь в пределе $\mu^2 \to m^2$, отличаясь от нее тем, что в (4.30) производная $\frac{\partial}{\partial\kappa^2}\tilde{F}_2^{prop}(\kappa,-\kappa)\Big|_{\kappa^2=m^2}$ заменена отношением конечных разностей. Введение дополнительного параметра μ^2 позволяет варьировать константу перенормировки волновой функции, что понадобится нам позднее.

Пользуясь оператором $\mathcal{M}$, можно ввести и аналоги составных полей (4.15). Так, для четных по φ мономов $b_{\{\lambda\}}(x)$ с $\dim b_{\{\lambda\}}(x) \le 4$ положим

$$\mathcal{B}^{(4)}_{\{\lambda\}}(x) = \mathcal{R}^{(4)} b_{\{\lambda\}}(x) \exp \frac{ig}{4!}\int :\varphi^4(x'): dx'. \tag{4.34}$$

Строго говоря, мы не определяли выше действие оператора $\mathcal{M}^{(4)}$ на функционалах, явно зависящих от x. Такое определение незатруднительно, но нам оно фактически не понадобится. Реально мы будем иметь дело с интегралами от составных полей $\mathcal{B}^{(4)}_{\{\lambda\}}(x)$:

$$\int dx\, \mathcal{B}^{(4)}_{\{\lambda\}}(x) = \mathcal{R}^{(4)}\int dx\, b_{\{\lambda\}}(x) \exp \frac{ig}{4!}\int dx' :\varphi^4(x'):, \tag{4.34'}$$

то есть функционалами типа (4.24), на которых $\mathcal{M}^{(4)}$ четко задан соотношением (4.30).

Для нечетных по φ мономов $b_{\{\lambda\}}(x)$ с $\dim b_{\{\lambda\}} \le 3$ положим

$$\mathcal{B}^{(3)}_{\{\lambda\}}(x) = \mathcal{R}^{(3)} b_{\{\lambda\}}(x) \exp \frac{ig}{4!}\int dx' :\varphi^4(x'):. \tag{4.34''}$$

Здесь $\mathcal{R}^{(3)}$ строится из вычитающих операторов $\mathcal{M}^{(a)}$, где $a=3$ для подграфов, содержащих вершину x, и $a=4$ для всех других диаграмм. Выбирая иные точки вычитания и компенсируя возникающие изменения конечной перенормировкой Π, можно вводить и другие, промежуточные между $M^{(a)}$ и $\mathcal{M}^{(a)}$, вычитающие операторы $M^{(?)}$. Все они обладают тем свойством, что в импульсном представлении коэффициентные функции $\tilde{F}_e(p_1,\dots,p_n|x_1,\dots,x_e)$ превращаются под их воздействием в полином степени $a^? - \ell$ по $\underline{p}$ и $\underline{k}$. Соответственно в координатном представлении $M^{(?)}$ будет превращать функционал $F(x_1,\dots,x_n)$ в линейную комбинацию мономов $b_{\{\lambda\}}$:

$$M^{(?)}F(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\ell+\Sigma|\lambda_j|\le a^?}\int dx\, b_{\{\lambda\}}(x)K^{\{\lambda\}}(x-x_1,\dots,x-x_n), \quad (4.35)$$

где в соответствии с (4.19) обобщенные функции $K^{\{\lambda\}}(x-x_1,\dots,x-x_n)$ суть линейные комбинации производных ядра $\delta(x-x_1)\dots\delta(x-x_n)$, то есть отличны от нуля только при $x=x_1=\dots=x_n$. В частности, для одноточечного функционала $F(x)$ будем всегда иметь

$$M^{(?)}F(x)=\sum_{\ell+\Sigma|\lambda_j|\le a^?} K^{\{\lambda\}}b_{\{\lambda\}}(x), \quad (4.36)$$

где $K^{\{\lambda\}}$ - постоянные коэффициенты.

4. В заключение этого параграфа введем еще вспомогательный оператор $\mathfrak{M}_x^{(a)}$, определенный непосредственно на нормальных произведениях $:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e):$ и, по линейности, на произвольных виковских полиномах:

$$\mathfrak{M}_x^{(a)}:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e):=\sum_{\ell+\Sigma|\lambda_j|\le a}\frac{(y_1-x)^{(\lambda_1)}\dots(y_e-x)^{(\lambda_e)}}{(\lambda_1)!\dots(\lambda_e)!}b_{\{\lambda\}}(x). \quad (4.37)$$

Таким образом, под воздействием $\mathfrak{M}_x^{(a)}$ нормальное произведение $:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e):$ превращается в полином по y (степени $a-\ell$), равный начальному отрезку разложения $:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e):$ по степеням y_j-x в окрестности точки x. В частности, $\mathfrak{M}_x^{(a)}:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e):=0$, если $\dim:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e):>a$. Поскольку любой гейзенбергов оператор $F(x_1,\dots,x_n)$ также есть некоторая сумма нормальных произведений $:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e):$, оператор $\mathfrak{M}_x^{(a)}$ можно, вообще говоря, применять и непосредственно к функционалам $F(x_1,\dots,x_n)$, точнее, к их x-правильным частям $F^{x\text{-}prop}(x_1,\dots,x_n)$. Под x- правильной частью $F^{x\text{-}prop}(x_1,\dots,x_n)$ функционала $F(x_1,\dots,x_n)$ мы понимаем совокупность таких диаграмм в разложении $F(\underline{x})$, которые становятся сильно-связными при совмещении вершин $x_1,\dots,x_n$. Имеет место следующая

<u>Лемма 4.2.</u>

$$\mathfrak{M}_x^{(a)}F^{x\text{-}prop}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\ell+\Sigma|\lambda_j|\le a}\frac{(-i)^{\Sigma|\lambda_j|}}{\ell!(\lambda_1)!\dots(\lambda_e)!}b_{\{\lambda\}}(x)\cdot \quad (4.38)$$

$$\cdot\langle F(x_1-x,\dots,x_n-x)\tilde{\varphi}^{(\lambda_1)}(0)\dots\tilde{\varphi}^{(\lambda_e)}(0)\rangle^{x\text{-}prop}.$$

Доказательство.

$$\mathfrak{M}_x^{(a)}F^{x\text{-}prop}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\ell=0}^{a}\sum_{(\lambda_1)\dots(\lambda_e)}^{\Sigma|\lambda_j|\le a-\ell}\frac{1}{\ell!}\int dy_1\dots dy_e\cdot$$

$$\cdot F_e^{x\text{-}prop}(x_1,\dots,x_n|y_1,\dots,y_e)\frac{(y_1-x)^{(\lambda_1)}\dots(y_e-x)^{(\lambda_e)}}{(\lambda_1)!\dots(\lambda_e)!}b_{\{\lambda\}}(x).$$

Сделав замену переменных $\xi_j = y_j - x$, воспользовавшись трансляционной инвариантностью коэффициентной функции $F_\ell^{x\text{-}prop}(\underline{x}|\underline{y})$ и вспомнив для нее представление (2.24), мы приходим к выражению

$$\sum_{\ell+\Sigma|\lambda_j|\le a} \frac{(-i)^{\Sigma|\lambda_j|}}{\ell!\,(\lambda_1)!\dots(\lambda_\ell)!}\, b_{\{\lambda\}}(x)\int d\xi_1\dots d\xi_\ell\,\cdot$$

$$\cdot(i\xi_1)^{(\lambda_1)}\dots(i\xi_\ell)^{(\lambda_\ell)}\langle F(x_1-x,\dots,x_n-x)\,\varphi(\xi_1)\dots\varphi(\xi_\ell)\rangle^{x\text{-}prop}.$$

Но последний интеграл есть не что иное, как $\langle F(x_1-x,\dots,x_n-x)\cdot$ $\cdot\,\tilde\varphi^{(\lambda_1)}(0)\dots\tilde\varphi^{(\lambda_\ell)}(0)\rangle^{x\text{-}prop}$, что и доказывает лемму.

Сравнивая (4.38) и (4.29), мы видим, что при "слипании" вершин $x_1,\dots,x_n$ функционала $F(x_1,\dots,x_n)$ в точке x действие оператора $\mathfrak{M}_x^{(a)}$ совпадает с действием $M^{(a)}$. Точнее говоря,

$$\lim_{x_j\to x}\mathfrak{M}_x^{(a)}F^{x\text{-}prop}(x_1,\dots,x_n) = M^{(a)}F(x,\dots,x). \tag{4.39}$$

В частности, на сильносвязной части одноточечного функционала оба оператора совпадают:

$$\mathfrak{M}_x^{(a)}F^{prop}(x) = M^{(a)}F(x). \tag{4.40}$$

Итак, оператор $\mathfrak{M}_x^{(a)}$ оказывается весьма родственным оператору $M^{(a)}$, несмотря на их, так сказать, "дуальность": если $M^{(a)}$ превращает коэффициентные функции в полином по внешним импульсам, то $\mathfrak{M}_x^{(a)}$ переводит полевую "начинку" соответствующих функционалов в полином по координатным переменным. Связь между $\mathfrak{M}_x^{(a)}$ и $M^{(a)}$

обнаруживает также и следующее утверждение. Введем оператор $\mathfrak{M}_{c.m.}^{(a)}$, который разлагает виковские произведения $:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_\ell):$ вокруг их "центра тяжести" $x = \frac{1}{\ell}(y_1+\dots+y_\ell)$:

$$\mathfrak{M}_{c.m.}^{(a)}:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_\ell): = \mathfrak{M}_{\frac{1}{\ell}\Sigma y_i}^{(a)}:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_\ell):\,. \tag{4.41}$$

Рассмотрим функционал F, не зависящий от координат. Тогда справедлива

Лемма 4.3.

$$\mathfrak{M}_{c.m.}^{(a)}F^{prop} = M^{(a)}F. \tag{4.42}$$

Доказательство этой леммы также достигается прямым вычислением, которое мы здесь опустим.

§ 5. Структура контрчленов [8]

I. В рамках того или иного порядка теории возмущений введенные нами основные величины – матрица рассеяния (4.8), (4.33), составные поля (4.15), (4.34) и тому подобные функционалы $F(x_1,\dots,x_n)$ – определены как результат применения R– операции к некоторой совокупности неперенормированных диаграмм.

На каждой индивидуальной диаграмме $\langle V,L\rangle$ соотношение (3.13) выражает R– операцию $R(V)$ непосредственно через M и Π. В этом параграфе мы выразим R через M и Π не на отдельных диаграммах, а на агрегатах типа T– экспоненты "в целом" – сразу на всей совокупности диаграмм, возникающих при разложении функционалов $F(\underline{x})$. При этом мы получим в каком-то смысле явные формулы для

S - матрицы, составного поля и т.д.,то есть эти величины будут выражены только через (неперенормированные) хронологические произведения асимптотических полей и операторы M и Π. Разумеется, эти формулы являются явными лишь постольку, поскольку в них разрешена комбинаторика перенормировок. Речь идет, таким образом, только о компактной записи перенормировочной процедуры. Конкретный выбор вычитающего оператора в первых двух пунктах этого параграфа несущественен, и вместо символов $M^{(a)}$ или $\mathcal{M}^{(a)}$ и т.д. мы будем пользоваться единым обозначением M. Соответственно составные поля $B^{(a)}_{\{\lambda\}}(x)$ и $\mathcal{B}^{(a)}_{\{\lambda\}}(x)$ будут выступать здесь на равных основаниях и обозначаться просто $B_{\{\lambda\}}(x)$.

Введем сокращенные обозначения также для следующих часто повторяющихся комбинаций:

$$
\begin{aligned}
&i\int \mathcal{L}(x)\,dx \equiv s, \\
&\exp\left[i\int \mathcal{L}(x)\,dx\right] \equiv E_0(s), \\
&\exp\left[i\int \mathcal{L}(x)\,dx\right] - 1 \equiv E_1(s), \\
&\exp\left[i\int \mathcal{L}(x)\,dx\right] - 1 - i\int \mathcal{L}(x)\,dx \equiv E_2(s) = E_1(s) - s.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Например, перенормированная S-матрица запишется теперь как $S = RE_0(s)$, составное поле - как $B_{\{\lambda\}}(x) = Rb_{\{\lambda\}}(x)E_0(s)$ и т.д. Величину $s = i\int\mathcal{L}(x)dx$ мы будем называть далее действием.

Рассмотрим матрицу рассеяния $RE_0(s)$. Имеем

$$RE_0(s) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} R s^N.$$

Выразим Rs^N через Λ. Согласно рекуррентным соотношениям, определяющим R-операцию, Rs^N есть некоторая сумма по различным разбиениям множества N объектов s на всевозможные непустые непересекающиеся подмножества. Пусть данное разбиение содержит N_1 одноэлементных подмножеств, N_2-подмножеств с двумя элементами,..., N_k - подмножеств с k элементами ($N_1 + 2N_2 + \ldots + kN_k = N$). Тогда, в согласии с (3.9), ему отвечает следующий член в сумме: $(\Lambda s)^{N_1} \cdot (\Lambda s^2)^{N_2} \cdot \ldots \cdot (\Lambda s^k)^{N_k}$. С другой стороны, данному набору неотрицательных целых чисел $N_1, N_2, \ldots, N_k$ ($N_1 + 2N_2 + \ldots + kN_k = N$) соответствует $N!/N_1! \ldots N_k!(1!)^{N_1} \ldots (k!)^{N_k}$ различных разбиений. Поэтому

$$RE_0(s) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{N_1+2N_2+\ldots+kN_k=N} \frac{1}{N_1!}\left(\frac{\Lambda s}{1!}\right)^{N_1} \ldots \frac{1}{N_k!}\left(\frac{\Lambda s^k}{k!}\right)^{N_k}.$$

Двойную сумму можно заменить независимым суммированием по N_1, $N_2, \ldots, N_k$. Таким образом, мы приходим к утверждению:

$$RE_0(s) = e^{\Lambda(e^s - 1)} \equiv E_0(\Lambda E_1(s)). \tag{5.2}$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующей формуле для составного поля:

$$B_{\{\lambda\}}(x) \equiv RE_0(s) b_{\{\lambda\}}(x) = E_0(\Lambda E_1(s))[\Lambda E_0(s) b_{\{\lambda\}}(x)]. \tag{5.3}$$

Нетрудно также получить формулы для $(\ldots)_+$ - произведений двух и более составных полей, например:

$$(B_{\{\mu\}}(x)\,B_{\{\nu\}}(y))_+ \equiv RE_0(s)\,b_{\{\mu\}}(x)\,b_{\{\nu\}}(y) =$$

$$= E_0(\Lambda E_1(s))\,\{\Lambda E_0(s)\,b_{\{\mu\}}(x)\,b_{\{\nu\}}(y) + \qquad (5.4)$$

$$+ [\Lambda E_0(s)\,b_{\{\mu\}}(x)]\,[\Lambda E_0(s)\,b_{\{\nu\}}(y)]\}$$

и так далее.

Прежде чем заняться дальнейшими преобразованиями равенств (5.2),(5.3), запишем их в более привычных обозначениях параграфа 2:

$$RTe^{i\int\mathcal{L}(x)dx} = T\exp\{\Lambda T[e^{i\int\mathcal{L}(x)dx}-1]\} = Te^{i\int\mathcal{L}_r(x)dx}, \qquad (5.2')$$

$$RT\,b_{\{\lambda\}}(x)\,e^{i\int\mathcal{L}(x')dx'} = Te^{i\int\mathcal{L}_r(x')dx'}\,\Lambda T\,b_{\{\lambda\}}(x)\,e^{i\int\mathcal{L}(x')dx'}. \qquad (5.3')$$

Здесь положено

$$\mathcal{L}_r(x) = \Lambda T\left\{\mathcal{L}(x)\,\frac{e^{i\int\mathcal{L}(x')dx'}-1}{i\int\mathcal{L}(x')dx'}\right\}. \qquad (5.5)$$

Смысл этих результатов очевиден. Соотношения (5.2) и (5.2') выражают тот известный факт, что при наличии промежуточной регуляризации R- операция может быть заменена введением в исходный лагранжиан дополнительных "контрчленных" вершин. При этом $\mathcal{L}_r(x)$ из (5.5) играет роль перенормированного лагранжиана. Его первый порядок совпадает с затравочным лагранжианом, а старшие порядки задают контрчлены. Дальнейшие наши выкладки имеют целью выявить структуру этих контрчленов.

По смыслу операции Λ перенормированный лагранжиан локален, что гарантирует причинность перенормированной S-матрицы. Нетрудно усмотреть и эрмитовость контрчленов (ниже мы вернемся к

этому вопросу), так что унитарность матрицы рассеяния также следует из представления (5.2).

2. Выразим теперь перенормированную S-матрицу непосредственно в терминах M, ограничившись для краткости случаем нулевой конечной перенормировки $\Pi=0$ (обобщение на случай $\Pi\neq 0$ незатруднительно, см., например, формулу (5.12)). Введем перенормированное действие s_r :

$$s_r = i\int\mathcal{L}_r(x)dx = \Lambda E_1(s). \qquad (5.6)$$

Лемма 5.I.

Если $\Pi=0$, то

$$E_0(s_r) \equiv RE_0(s) = E_0(s - ME_2(s - ME_2(s - \ldots))). \qquad (5.7)$$

Доказательство.

В силу исходных определений (3.10) - (3.12) справедливы равенства

$$\Lambda s = s, \qquad R1 = 1. \qquad (5.8)$$

На диаграммах, содержащих не менее двух вершин, выполняются также соотношения

$$R = {}'R + \Lambda, \qquad \Lambda = -M'R. \qquad (5.9)$$

Согласно (5.2) имеем

$$E_0(s_r) \equiv RE_2(s) + s + 1 = E_0(\Lambda E_1(s)),$$

поэтому

$$RE_2(s) = E_0(\Lambda E_1(s)) - 1 - s = E_2(\Lambda E_1(s)) + \Lambda E_1(s) - s =$$

$$= E_2(s + \Lambda E_2(s)) + \Lambda E_2(s).$$

С другой стороны, по свойству (5.9)

$$'RE_2(s) = RE_2(s) - \Lambda E_2(s).$$

Таким образом,

$$'RE_2(s) = E_2(s + \Lambda E_2(s)).$$

Действуя на обе части этого равенства оператором $-M$ и снова учитывая (5.9), получаем

$$\Lambda E_2(s) = -ME_2(s + \Lambda E_2(s)),$$

откуда находим

$$\Lambda E_2(s) = -ME_2(s - ME_2(s - \ldots)). \qquad (5.10)$$

Подставив $\Lambda E_2(s)$ из (5.10) в соотношение

$$E_0(s_r) = E_0(s + \Lambda E_2(s)),$$

мы придем к искомой формуле (5.7).

Замечание I. Хотя (5.7) определяет $E_0(s_r)$ с помощью некоторого бесконечного процесса, в реальных вычислениях этот процесс всегда можно оборвать на конечном этапе. Так, формула (5.7), оборванная на N-м члене, точно воспроизводит все перенормированные диаграммы до порядка $N+1$ включительно.

Замечание 2. Формула (5.7), оборванная на N-м члене, точно воспроизводит также все диаграммы (произвольного порядка), в которых последовательности вложенных друг в друга расходящихся подграфов содержат не более N членов. Так, для вычисления всех однопетлевых диаграмм достаточно пользоваться выражением

$$E_0(s_r) = E_0(s - ME_2(s)),$$

для двухпетлевых – выражением

$$E_0(s_r) = E_0(s - ME_2(s - ME_2(s)))$$

и так далее.

Замечание 3. Как видно из (5.7), контрчленная часть действия есть

$$i\int[\mathcal{L}_r(x) - \mathcal{L}(x)]dx = s_r - s = -ME_2(s - ME_2(s - \ldots)). \qquad (5.11)$$

Чтобы убедиться в унитарности перенормированной S-матрицы, нужно установить антиэрмитовость $s_r - s$. В согласии с (5.11) для этого достаточно доказать, что антиэрмитовость s обеспечивает антиэрмитовость $ME_2(s)$. Но M проектирует коэффициентные функции функционала $E_2(s)$ на полиномы по внешним импульсам, причем коэффициенты в этих полиномах суть некоторые производные (в вещественной точке, достаточно близкой к нулю) сильносвязных диаграмм, входящих в $ME_2(s)$. Каждая такая диаграмма в вещественной окрестности нуля является чисто мнимой. (В самом деле, пусть диаграмма порядка N содержит $|L|$ внутренних линий и C независимых циклов. Переходя к евклидовой области интегрирования по C внутренним импульсам диаграммы, мы получим для нее вещественное выражение, умноженное на фактор $i^N i^{|L|} i^C$. Но $C = |L| - N + 1$, так что этот фактор равен i.) Таким образом, коэффициенты в определяющих $ME_2(s)$ полиномах также оказываются чисто мнимыми, и антиэрмитовость $ME_2(s)$ установлена.

Замечание 4. Приведем обобщение соотношения (5.7) на случай ненулевой конечной перенормировки $\Pi \neq 0$:

$$E_0(s_r) = E_0(s + \Pi E_2(s) - ME_2(s + \Pi E_2(s) - \ldots)). \qquad (5.12)$$

Обратимся теперь к аналогичным преобразованиям формулы (5.3), определяющей составное поле $B_{\{\lambda\}}(x)$. Имеем

$$B_{\{\lambda\}}(x) = E_0(s_\sim)\, {}'B_{\{\lambda\}}(x), \tag{5.13}$$

где

$${}'B_{\{\lambda\}}(x) = \Lambda E_0(s)\, b_{\{\lambda\}}(x). \tag{5.14}$$

Поскольку для множителя $E_0(s_\sim)$ у нас есть явное выражение (5.7), рассмотрим только множитель ${}'B_{\{\lambda\}}(x)$.

<u>Лемма 5.2.</u>

$${}'B_{\{\lambda\}}(x) = \frac{1}{1+ME_1(s_\sim)}\, b_{\{\lambda\}}(x). \tag{5.15}$$

Доказательство.

$${}'B = \Lambda E_0(s) b = b + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\Lambda b s^N}{N!}. \tag{5.16}$$

Согласно определению Λ величина $\Lambda b s^N$ есть сумма по всем разбиениям множества $\{b, \underbrace{s, \ldots, s}_{N}\}$ на непустые непересекающиеся подмножества, строго содержащиеся в исходном. Пусть данное разбиение характеризуется числами $N_0, N_1, \ldots, N_k$, где N_0 – число элементов s, входящих в одно подмножество с b, N_q – число подмножеств, состоящих из q элементов s $(q>0)$. Этому разбиению соответствует следующий член в сумме:

$$-M(\Lambda b s^{N_0})(\Lambda s)^{N_1} \ldots (\Lambda s^k)^{N_k}.$$

Каждому набору неотрицательных чисел $N_0, N_1, \ldots, N_k$, таких, что $N_0+N_1+2N_2+\ldots+kN_k = N$ $(N_0<N)$, соответствует $N!/N_0!N_1!\ldots N_k! \cdot 1/(1!)^{N_1}\ldots(k!)^{N_k}$ различных разбиений.

Таким образом,

$$\frac{\Lambda b s^N}{N!} = -M \sum_{\substack{N_0+N_1+\ldots+kN_k=N \\ N_0\neq N}} \frac{\Lambda b s^{N_0}}{N_0!} \frac{1}{N_1!}\left(\frac{\Lambda s}{1!}\right)^{N_1} \cdots \frac{1}{N_k!}\left(\frac{\Lambda s^k}{k!}\right)^{N_k}.$$

Подставляя это выражение в (5.16) и проводя суммирование по N_q, получим

$${}'B = b - ME_0(\Lambda E_1(s))\Lambda E_0(s) b + M\Lambda b + M\Lambda E_1(s) b =$$

$$= b - ME_1(s_\sim)\,{}'B + M\Lambda E_1(s) b + M\Lambda b - M\Lambda E_0(s) b.$$

Но сумма последних трех слагаемых равна нулю, так что

$${}'B = b - ME_1(s_\sim)\,{}'B. \tag{5.17}$$

Иначе говоря,

$${}'B = b - ME_1(s_\sim) b + ME_1(s_\sim) ME_1(s_\sim) b - \ldots, \tag{5.18}$$

что фактически и утверждалось в формуле (5.15) леммы. Подобным же образом доказывается следующий результат:

<u>Лемма 5.3.</u>

$$\left(B_{\{\mu\}}(x) B_{\{\lambda\}}(y)\right)_+ = E_0(s_\sim) \frac{1}{1+ME_1(s_\sim)}(1-M) \cdot \left[\frac{1}{1+ME_1(s_\sim)} b_{\{\mu\}}(x)\right]\left[\frac{1}{1+ME_1(s_\sim)} b_{\{\lambda\}}(y)\right] = \tag{5.19}$$

$$= E_0(s_\sim) \frac{1}{1+ME_1(s_\sim)} (1-M)\, {}'B_{\{\mu\}}(x)\, {}'B_{\{\lambda\}}(y).$$

3. Согласно лемме 5.I ренормированное действие s_r есть

$$s_r = s - ME_2(s - ME_2(s - \ldots)). \tag{5.20}$$

Как видно, оно удовлетворяет уравнению

$$s_r = s - ME_2(s_r). \tag{5.21}$$

<u>Лемма 5.4.</u> Пусть в результате бесконечно малого изменения фиксирующих теорию параметров затравочное действие s и вычитающий оператор M испытывают приращения

$$s \longrightarrow s + \delta s, \qquad M \longrightarrow M + \delta M.$$

Тогда приращение перенормированной S-матрицы равно

$$\delta E_0(s_r) = E_0(s_r)\frac{1}{1+ME_1(s_r)}\left[\delta s - (\delta M)E_2(s)\right]. \tag{5.22}$$

Доказательство.

Очевидно, $\delta E_0(s_r) = E_0(s_r)\,\delta s_r$. Но в соответствии с (5.21) вариация ренормированного действия с точностью до бесконечно малых второго порядка удовлетворяет уравнению

$$\delta s_r = \delta s - (\delta M)E_2(s_r) - ME_1(s_r)\,\delta s_r,$$

откуда находим

$$\delta s_r = \frac{1}{1+ME_1(s_r)}\left[\delta s - (\delta M)E_2(s)\right],$$

что и доказывает лемму.

По смыслу оператора M и затравочного действия s величины $(\delta M)E_2(s)$ и δs суть интегралы от некоторых комбинаций мономов свободного поля $b_{\{\lambda\}}$, так что правая часть (5.22) в силу (5.13) и леммы 5.2 оказывается линейной комбинацией интегралов от составных полей $B_{\{\lambda\}}$. Таким образом, лемма 5.4 показывает, что составные поля возникают в теории естественным образом: они появляются при любом дифференцировании перенормированной матрицы рассеяния по фигурирующим в теории константам, определяя, по терминологии Ловенштейна /20/, обобщенные операторы дифференцирования.

Аналогичная ситуация возникает при вариационном дифференцировании S-матрицы. Вычислим производную

$$\frac{\delta E_0(s_r)}{\delta\varphi(x)} = \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} R^{(4)} \exp\frac{i}{4!}\int :\varphi^4(x):\, dx. \tag{5.23}$$

Имеем

$$\frac{\delta E_0(s_r)}{\delta\varphi(x)} = E_0(s_r)\frac{\delta s_r}{\delta\varphi(x)}. \tag{5.24}$$

Для расчета $\frac{\delta \mathfrak{z}_r}{\delta \varphi}$ снова воспользуемся соотношением (5.21), положив в нем

$$\mathfrak{z} = \frac{ig}{4!}\int :\varphi^4(x): dx, \qquad M = \mathcal{M}^{(4)}.$$

Находим

$$\frac{\delta \mathfrak{z}_r}{\delta\varphi(x)} = \frac{ig}{6}:\varphi^3(x): - \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\mathcal{M}^{(4)} E_2(\mathfrak{z}_r).$$

Вспомним теперь соотношение (4.28), согласно которому $\frac{\delta}{\delta\varphi}\mathcal{M}^{(4)} = \mathcal{M}^{(3)}\frac{\delta}{\delta\varphi}$.

Имеем

$$\frac{\delta \mathfrak{z}_r}{\delta\varphi(x)} = \frac{ig}{6}:\varphi^3(x): - \mathcal{M}^{(3)} E_1(\mathfrak{z}_r)\frac{\delta \mathfrak{z}_r}{\delta\varphi(x)}.$$

Находя отсюда $\frac{\delta \mathfrak{z}_r}{\delta\varphi(x)}$ и подставляя ее в (5.24), приходим к равенству

$$\frac{\delta E_0(\mathfrak{z}_r)}{\delta\varphi(x)} = \frac{ig}{6} E_0(\mathfrak{z}_r)\frac{1}{1+\mathcal{M}^{(3)}E_1(\mathfrak{z}_r)}:\varphi^3(x): . \qquad (5.25)$$

Правая часть этого равенства по (5.13) и лемме 5.2 есть не что иное, как составное поле $\mathcal{B}^{(3)}_{\{(0),(0),(0)\}}(x)$, отвечающее in-образу $\frac{ig}{6}:\varphi^3(x):$.

Итак,

$$\frac{\delta E_0(\mathfrak{z}_r)}{\delta\varphi(x)} = \frac{ig}{6}\mathcal{B}^{(3)}_{\{(0),(0),(0)\}}(x). \qquad (5.26)$$

Повторяя ту же процедуру для матрицы рассеяния, представленной в форме (4.8)

$$E_0(\mathfrak{z}_r) = R^{(4)}\exp i\int \mathcal{L}_\Delta(x)dx,$$

то есть полагая в (5.21)

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_\Delta = i\int \mathcal{L}_\Delta(x)dx, \qquad M = M^{(4)},$$

мы можем выразить $\frac{\delta E_0(\mathfrak{z}_r)}{\delta\varphi(x)}$ через составные поля $B^{(3)}_{\{\lambda\}}(x)$ (см. формулу (4.15)). Имеем

$$\frac{\delta E_0(\mathfrak{z}_r)}{\delta\varphi(x)} = \frac{i}{6}(g+\Delta g)B^{(3)}_{\{(0),(0),(0)\}}(x) + i m^2\Phi(x) - i\Delta z\,\Box\Phi(x), \qquad (5.27)$$

где $\Phi(x)$ – обычное гейзенбергово поле. Таким образом, справедливо равенство

$$\mathcal{B}^{(3)}_{\{(0),(0),(0)\}}(x) = \left(1+\frac{\Delta g}{g}\right)B^{(3)}_{\{(0),(0),(0)\}}(x) + \frac{6\Delta m^2}{g}\Phi(x) - \frac{6\Delta z}{g}\Box\Phi(x). \quad (5.28)$$

Заметим, что обычные производные высшего порядка, а также старшие вариационные производные от $E_0(\mathfrak{z}_r)$ приводят к некоторым $(\ldots)_+$ – произведениям составных полей. Поэтому явные формулы типа (5.19) для $(\ldots)_+$ – произведений двух и более составных полей удобно получать вариационным дифференцированием основного соотношения (5.7) при надлежащем выборе $\mathfrak{z}$.

4. Воспользуемся уравнением (5.21), чтобы выразить коэффициенты $\Delta g, \Delta m^2, \Delta z$ при конечных контрчленах в лагранжиане $\mathcal{L}_\Delta(x)$ через коэффициентные функции S- матрицы. В силу равенства (4.33) имеем

$$\mathfrak{z}_r = \mathfrak{z}_\Delta - M^{(4)} E_2(\mathfrak{z}_r) = \frac{ig}{4!}\int dx :\varphi^4(x): - \mathcal{M}^{(4)} E_2(\mathfrak{z}_r),$$

то есть

$$\mathfrak{z}_\Delta - \frac{ig}{4!}\int dx :\varphi^4(x): = \left[M^{(4)} - \mathcal{M}^{(4)}\right] E_2(\mathfrak{z}_r). \qquad (5.29)$$

Но $M^{(4)}\mathfrak{z}_r = \mathcal{M}^{(4)}\mathfrak{z}_r$, так что $E_2(\mathfrak{z}_r)$ в правой части (5.29) можно заменить на $E_1(\mathfrak{z}_r)$. С другой стороны, $E_1(\mathfrak{z}_r)$ отличается от S- матрицы лишь единицей, поэтому $E_1(\mathfrak{z}_r)$ имеет те же коэффициентные функции $S_2(y_1, y_2)$ и $S_4(y_1, y_2, y_3, y_4)$. Вспомним определения (4.25) и (4.30) операторов $M^{(4)}$ и $\mathcal{M}^{(4)}$, а также нормировочные условия (4.9), (4.10) и конкретную форму (4.12) лагранжиана $\mathcal{L}_\Delta$, определяющего $\mathfrak{z}_\Delta$. Равенство (5.29) можно теперь переписать следующим образом:

$$\frac{i\Delta g}{4!}\int dx :\varphi^4(x): + \frac{i\Delta m^2}{2}\int dx :\varphi^2(x): + \frac{i\Delta z}{2}\int :\partial\varphi(x)\partial\varphi(x): dx =$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{S}_2^{prop}(0,0)\int dx :\varphi^2(x): + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial k^2}\tilde{S}_2^{prop}(k,-k)\Big|_{k=0}\int dx :\partial\varphi(x)\partial\varphi(x): +$$

$$+ \frac{1}{4!}\left[\tilde{S}_4^{prop}(0,0,0,0) - ig\right]\int dx :\varphi^4(x): .$$

Итак,

$$\Delta g = -i\,\tilde{S}_4^{prop}(0,0,0,0) - g,$$

$$\Delta m^2 = -i\,\tilde{S}_2^{prop}(0,0), \qquad (5.30)$$

$$\Delta z = -i\frac{\partial}{\partial k^2}\tilde{S}_2^{prop}(k,-k)\Big|_{k=0}.$$

§ 6. Тождества Циммермана

I. На частном примере (5.28) мы уже видели, что составные поля, полученные с помощью различных R-операций, связаны друг с другом простыми соотношениями. Равенства, подобные (5.28), можно получить и в довольно общей ситуации. В теории с нулевыми точками вычитания такие равенства были впервые найдены в работе /2/ (см. также /17, 22-24/).

Они называются тождествами Циммермана.

Пусть $B^{I}_{\{\nu\}}(x)$ и $B^{II}_{\{\mu\}}(x)$, $'B^{I}_{\{\nu\}}(x)$ и $B^{II}_{\{\mu\}}(x)$ – составные поля B и $'B$, полученные согласно (5.13) и (5.15) из мономов $b_{\{\nu\}}(x)$ и $b_{\{\mu\}}(x)$ с помощью R-операций R^{I} и R^{II} соответственно. Пусть вычитающие операторы M^{I} и M^{II}, порождающие R^{I} и R^{II}, отличаются друг от друга только на подграфах, содержащих вершину x, так что перенормированные лагранжианы $\mathcal{L}^{I}(x)$ и $\mathcal{L}^{II}(x)$ совпадают: $\mathfrak{z}^{I}_r = \mathfrak{z}^{II}_r = \mathfrak{z}$; в импульсном представлении операторы M^{I} и M^{II} превращают коэффициентные функции диаграмм, содержащих вершину x, в полиномы степени $a^{I} - \ell$ и $a^{II} - \ell$, где ℓ -число внешних линий диаграммы. Пусть также выполняется соотношение

$$M^{I} M^{II} = M^{II}. \qquad (6.1)$$

Все эти условия удовлетворяются, например, если $M^{I}=M^{(a^{I})}$, $M^{II}=M^{(a^{II})}$,

где $a^{I}\geqslant a^{II}$, так что $B^{I}_{\{\nu\}}=B^{(a^{I})}_{\{\nu\}}$, $B^{II}_{\{\nu\}}=B^{(a^{II})}_{\{\nu\}}$.
Другой пример задается выбором $M^{I}=M^{(a)}$, $M^{II}=\mathcal{M}^{(a)}$, так что $B^{I}_{\{\nu\}}=B^{(a)}_{\{\nu\}}$, $B^{II}_{\{\nu\}}=\mathcal{B}^{(a)}_{\{\nu\}}$. Вообще подобная ситуация возникает всякий раз, когда $a^{I}\geqslant a^{II}$.

Ниже нам встретятся величины $M^{(?)}B^{II}_{\{\nu\}}(x)$, где символ (?) заменяет либо значок I, либо значок II. Согласно (4.36) в самом общем случае эти величины представляют собой некоторую линейную комбинацию мономов свободного поля

$$M^{(?)}B^{II}_{\{\nu\}}(x)=\sum_{\{\lambda\}}K^{(?)\{\lambda\}}_{\{\nu\}}\,b_{\{\lambda\}}(x), \qquad (6.2)$$

где $K^{(?)\{\lambda\}}_{\{\nu\}}$ – константы, для которых в каждом конкретном случае существуют явные формулы типа (4.29), (4.25), (4.30) и т.д. Заметим, что $K^{(?)\{\lambda\}}_{\{\nu\}}=0$, если $\ell+\sum|\lambda_j|>a^{(?)}$.

Связь между полями B^{I} и B^{II} устанавливает следующая

Лемма 6.I.

$$B^{II}_{\{\nu\}}(x)=B^{I}_{\{\nu\}}(x)+\sum_{\{\lambda\}}\left(K^{I\{\lambda\}}_{\{\nu\}}-K^{II\{\lambda\}}_{\{\nu\}}\right)B^{I}_{\{\lambda\}}(x). \qquad (6.3)$$

Доказательство.
Согласно (5.13) и (5.15) имеем

$$B^{(?)}_{\{\nu\}}(x)=E_0(s_\sim)'B^{(?)}_{\{\nu\}}(x)=E_0(s_\sim)\frac{1}{1+M^{(?)}E_1(s_\sim)}b_{\{\nu\}}(x). \quad (6.4)$$

Рассмотрим разность

$${}'B^{II}_{\{\nu\}}-{}'B^{I}_{\{\nu\}}=\frac{1}{1+M^{I}E_1(s_\sim)}\left(M^{I}-M^{II}\right)E_1(s_\sim)\frac{1}{1+M^{II}E_1(s_\sim)}b_{\{\nu\}}. \quad (6.5)$$

Из (6.I) и равенства $M^{I}b_{\{\nu\}}=M^{II}b_{\{\nu\}}=b_{\{\nu\}}$ следует, что

$$\left(M^{I}-M^{II}\right)\frac{1}{1+M^{II}E_1(s_\sim)}b_{\{\nu\}}=0,$$

так что $E_1(s_\sim)$, стоящую в числителе правой части (6.5), можно заменить на $E_0(s_\sim)$. Пользуясь (6.4), запишем поэтому (6.5) в следующем виде:

$${}'B^{II}_{\{\nu\}}-{}'B^{I}_{\{\nu\}}=\frac{1}{1+M^{I}E_1(s_\sim)}\left(M^{I}-M^{II}\right)B^{II}_{\{\nu\}}. \qquad (6.6)$$

Наконец, примем во внимание (6.2). Получим

$${}'B^{II}_{\{\nu\}}-{}'B^{I}_{\{\nu\}}=\sum_{\{\lambda\}}\left(K^{I\{\lambda\}}_{\{\nu\}}-K^{II\{\lambda\}}_{\{\nu\}}\right)\frac{1}{1+M^{I}E_1(s_\sim)}b_{\{\lambda\}}.$$

Домножив (в смысле T- произведения) это равенство на $E_0(s_\sim)$ и снова приняв во внимание (6.4), придем к утверждению леммы.

Чтобы придать тождеству (6.3) несколько иную форму, заметим, что справедливо следующее нормировочное условие:

$$M^{(?)}B^{(?)}_{\{\nu\}}(x)=b_{\{\nu\}}(x). \qquad (6.7)$$

Действительно, из (5.15) получаем

$$b=\left[1+M^{(?)}E_1(s_\sim)\right]{}'B^{(?)}=M^{(?)}E_0(s_\sim){}'B^{(?)}+{}'B^{(?)}-M^{(?)}{}'B^{(?)}.$$

но $M^{(?)}\,'B^{(?)} = {}'B^{(?)}$, поскольку $M^{(?)}\Lambda^{(?)} = \Lambda^{(?)}$, а $'B^{(?)} = \Lambda^{(?)}E_0(\mathfrak{z})b$,

так что $b = M^{(?)}E_0(\mathfrak{z}_2)\,'B^{(?)} = M^{(?)}\,B^{(?)}$.

Условие (6.7) позволяет переписать равенство (6.6) в виде

$$'B^{\mathrm{II}}_{\{\nu\}} = \frac{1}{1+M^{\mathrm{I}}E_1(\mathfrak{z}_2)} M^{\mathrm{I}} B^{\mathrm{II}}_{\{\nu\}}. \qquad (6.8)$$

Снова воспользуемся соотношением (6.2) и умножим (6.8) слева на $E_0(\mathfrak{z}_2)$. Мы придем при этом к следующей модификации соотношения (6.3) :

$$B^{\mathrm{II}}_{\{\nu\}}(x) = \sum_{\{\lambda\}} K^{\mathrm{I}\,\{\lambda\}}_{\ \ \{\nu\}}\, B^{\mathrm{I}}_{\{\lambda\}}(x). \qquad (6.9)$$

Проинтегрировав соотношение (6.9) по x, мы получаем тождества Циммермана для интегралов от составных полей:

$$\int dx\, B^{\mathrm{II}}_{\{\nu\}}(x) = \sum_{\{\lambda\}} K^{\mathrm{I}\,\{\lambda\}}_{\ \ \{\nu\}} \int dx\, B^{\mathrm{I}}_{\{\lambda\}}(x). \qquad (6.10)$$

Подчеркнем, что коэффициенты $K^{\mathrm{I}\,\{\lambda\}}_{\ \ \{\nu\}}$ можно определять здесь не только из (6.2), а и непосредственно из разложения

$$M^{\mathrm{I}} \int B^{\mathrm{II}}_{\{\nu\}}(x)\,dx = \sum_{\{\lambda\}} K^{\mathrm{I}\,\{\lambda\}}_{\ \ \{\nu\}} \int b_{\{\lambda\}}(x)\,dx. \qquad (6.11)$$

Действительно, нетрудно усмотреть, что операция M^{I} и интегрирование по x перестановочны.

2. Приведем частные примеры соотношений (6.3) и (6.10). Пусть $M^{\mathrm{I}} = M^{(a^{\mathrm{I}})}$, $M^{\mathrm{II}} = M^{(a^{\mathrm{II}})}$ и $a^{\mathrm{I}} \geqslant a^{\mathrm{II}}$. Тогда коэффициенты $K^{(?)\{\lambda\}}_{\ \ \{\nu\}}$ извлекаются из формулы (4.29), и (6.3) принимает вид обычного тождества Циммермана :

$$B^{(a^{\mathrm{II}})}_{\{\nu\}}(x) = B^{(a^{\mathrm{I}})}_{\{\nu\}}(x) + \qquad (6.12)$$

$$+ \sum_{a^{\mathrm{II}} < \ell + \Sigma|\lambda_j| \leqslant a^{\mathrm{I}}} \frac{(-i)^{\Sigma|\lambda_j|}}{\ell!(\lambda_1)!\ldots(\lambda_\ell)!} \left\langle B^{(a^{\mathrm{II}})}_{\{\nu\}}(0)\tilde{\varphi}^{(\lambda_1)}(0)\ldots\tilde{\varphi}^{(\lambda_\ell)}(0)\right\rangle^{\text{prop}} B^{(a^{\mathrm{I}})}_{\{\lambda\}}(x).$$

Воспользуемся теперь равенством (6.9), чтобы связать интеграл $\int dx\, B^{(2)}_{\{(0),(0)\}}(x)$ от составного поля $B^{(2)}_{\{(0),(0)\}}(x)$, имеющего в качестве асимптотического образа моном $:\varphi^2(x):$, с интегралами от составных полей $\mathcal{B}^{(4)}_{\{\lambda\}}(x)$. В этом случае $M^{\mathrm{I}} = \mathcal{M}^{(4)}$ и $M^{\mathrm{II}} = M^{(2)}$. В разложении величины $\int dx\, B^{\mathrm{II}}_{\{\nu\}}(x) = \int dx\, B^{(2)}_{\{(0),(0)\}}(x)$ по нормальным произведениям полей

$$\int dx\, B^{\mathrm{II}}_{\{\nu\}}(x) = \sum_{\ell} \frac{1}{\ell!} \int dy_1\ldots dy_\ell :\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_\ell): F_\ell(y_1,\ldots,y_\ell)$$

фурье-преобразования $\tilde{F}^{\text{prop}}_\ell(\underline{k})$ коэффициентных функций $F^{\text{prop}}_\ell(\underline{y})$ имеют вид

$$\tilde{F}^{\text{prop}}_\ell(\underline{k}) = \left\langle B^{(2)}_{\{(0),(0)\}}(0)\,\tilde{\varphi}(k_1)\ldots\tilde{\varphi}(k_\ell)\right\rangle^{\text{prop}}.$$

Вспоминая определение $\mathcal{M}^{(4)}$ и (6.11), получаем следующее тождество Циммермана:

$$\int B^{(2)}_{\{(0),(0)\}}(x)\,dx = E_0(g_2)\,\frac{1}{1+\mathcal{M}^{(4)}E_1(g_2)}\cdot \tag{6.13}$$

$$\cdot\int dx\,\{U:\varphi^2(x):+V:\partial\varphi(x)\,\partial\varphi(x):+W:\varphi^4(x):\}.$$

Здесь, чтобы не писать громоздких конкретных мультииндексов, различающих поля $\mathcal{B}^{(4)}_{\{\lambda\}}$, мы представили эти поля в явной форме (5.13), (5.15). Коэффициенты U, V, W равны (см. (4.30)):

$$U=\frac{1}{2(\mu^2-m^2)}\Big\{\mu^2\langle B^{(2)}_{\{(0),(0)\}}(0)\,\tilde\varphi(k)\,\tilde\varphi(-k)\rangle^{prop}\Big|_{k^2=m^2}-$$

$$-m^2\langle B^{(2)}_{\{(0),(0)\}}(0)\,\tilde\varphi(k)\,\tilde\varphi(-k)\rangle^{prop}\Big|_{k^2=\mu^2}\Big\},$$

$$V=\frac{1}{2(\mu^2-m^2)}\Big\{\langle B^{(2)}_{\{(0),(0)\}}(0)\,\tilde\varphi(k)\,\tilde\varphi(-k)\rangle^{prop}\Big|_{k^2=\mu^2}- \tag{6.14}$$

$$-\langle B^{(2)}_{\{(0),(0)\}}(0)\,\tilde\varphi(k)\,\tilde\varphi(-k)\rangle^{prop}\Big|_{k^2=m^2}\Big\},$$

$$W=\frac{1}{24}\,\langle B^{(2)}_{\{(0),(0)\}}(0)\,\tilde\varphi(k_1)\,\tilde\varphi(k_2)\,\tilde\varphi(k_3)\,\tilde\varphi(k_4)\rangle^{prop}\Big|_{symm\ \mu^2}.$$

3. Пользуясь той же техникой, можно построить аналоги тождеств Циммермана и для более сложных объектов, в частности для величин $\left(B^{(a_1)}_{\{\lambda\}_1}(x_1)\,B^{(a_2)}_{\{\lambda\}_2}(x_2)\right)^{(a)}_+$, заданных формулой (4.18), а в явной форме – соотношением (5.19). Для краткости будем вместо $B^{(a_1)}_{\{\lambda\}_1}(x_1)$ писать просто $B_1(x_1)$, а вместо $B^{(a_2)}_{\{\lambda\}_2}(x_2)$ – просто $B_2(x_2)$.

Рассмотрим разность $\left(B_1(x_1)B_2(x_2)\right)^{(a)}_+-\left(B_1(x_1)B_2(x_2)\right)^{(\bar a)}_+$, где $\bar a\geqslant a$.

Покажем, что эта разность отлична от нуля только при совпадающих аргументах x и представляет собой сумму составных полей $B^{(\bar a)}_{\{\lambda\}}(x)$. Точнее говоря, справедлива следующая

<u>Лемма 6.2.</u>

$$\left(B_1(x_1)B_2(x_2)\right)^{(a)}_+-\left(B_1(x_1)B_2(x_2)\right)^{(\bar a)}_+= \tag{6.15}$$

$$=\sum_{e+\sum|\lambda_i|\le\bar a}\int K^{\{\lambda\}}(x-x_1,x-x_2)\,B^{(\bar a)}_{\{\lambda\}}(x)\,dx,$$

причем коэффициенты $K^{\{\lambda\}}(x-x_1,x-x_2)$ являются линейными комбинациями производных функции $\delta(x-x_1)\,\delta(x-x_2)$.

Доказательство проводится по следующей схеме. Согласно (5.19) имеем

$$\left(B_1(x_1)B_2(x_2)\right)^{(a)}_+-\left(B_1(x_1)B_2(x_2)\right)^{(\bar a)}_+=$$

$$=E_0(g_2)\Big\{\frac{1}{1+M^{(a)}E_1(g_2)}\left(1-M^{(a)}\right)-\frac{1}{1+M^{(\bar a)}E_1(g_2)}\left(1-M^{(\bar a)}\right)\Big\}\,{}'B_1(x_1)\,{}'B_2(x_2).$$

Снова, пользуясь тем, что $M^{(\bar a)}M^{(a)}=M^{(a)}$, приведем это выражение к виду

$$E_0(\mathfrak{z}_2)\frac{1}{1+M^{(\bar a)}E_1(\mathfrak{z}_2)}\left(M^{(\bar a)}-M^{(a)}\right)E_0(\mathfrak{z}_2)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{1+M^{(\bar a)}E_1(\mathfrak{z}_2)}\left(1-M^{(a)}\right){}'B_1(x_1){}'B_2(x_2)=$$

$$=E_0(\mathfrak{z}_2)\frac{1}{1+M^{(\bar a)}E_1(\mathfrak{z}_2)}\left(M^{(\bar a)}-M^{(a)}\right)\left(B_1(x_1)\,B_2(x_2)\right)_+^{(a)}.$$

можно установить, что

$$M^{(a)}\left(B_1(x_1)\,B_2(x_2)\right)_+^{(a)}=0. \qquad (6.16)$$

По существу это аналог нормировочного условия (6.7), которое мы получили ранее для составного поля $B^{(a)}(x)$. Для вычисления действия оператора $M^{(a)}$ на $\left(B_1(x_1)B_2(x_2)\right)_+^{(\bar a)}$ воспользуемся общей формулой (4.35), положив в ней $n=2$.

Получаем:

$$\left(B_1(x_1)\,B_2(x_2)\right)_+^{(a)}-\left(B_1(x_1)\,B_2(x_2)\right)_+^{(\bar a)}=$$

$$=E_0(\mathfrak{z}_2)\frac{1}{1+M^{(\bar a)}E_1(\mathfrak{z}_2)}\sum_{\ell+\Sigma|\lambda_j|\le\bar a}\int dx\,K^{\{\lambda\}}(x-x_1,x-x_2)\,b_{\{\lambda\}}(x).$$

Мы снова видим, что $E_0(\mathfrak{z}_2)[1+M^{(\bar a)}E_1(\mathfrak{z}_2)]^{-1}$ превращает $b_{\{\lambda\}}(x)$ в составное поле $B^{(\bar a)}_{\{\lambda\}}(x)$. Это и завершает доказательство.

Конкретный вид коэффициентных функций $K^{\{\lambda\}}(x-x_1,\,x-x_2)$ извлекается из общих формул (4.19), (4.20).

§ 7. Разложения Вильсона

I. Согласно Вильсону /12/ сингулярности (при $x_1\to x,\dots,x_n\to x$) хронологического произведения локальных гейзенберговых полей $\check\varphi_1(x_1)\dots\check\varphi_n(x_n)$ определяются разложением

$$\check\varphi_1(x_1)\dots\check\varphi_n(x_n)=\sum_\ell Q_\ell(x_1,\dots,x_n)\check B_\ell(x)+\check B(x_1,\dots,x_n). \qquad (7.1)$$

Здесь $\check B(x_1,\dots,x_n)$ – регулярная (операторно-значная) функция, обращающаяся в нуль при $x_1=x_2=\dots=x_n=x$; $\check B_\ell(x)$ – локальные операторы, а $Q_\ell(x_1,\dots,x_n)$ – c-числовые обобщенные функции, зависящие только от относительных координат x_i-x_j и сингулярные в нуле. Общие доводы в пользу справедливости соотношения (7.1) даны Вильсоном и Циммерманом /13/, а также Шлидером /14/. В теории возмущений разложения Вильсона проверялись Брандтом /15, 18/, Циммерманом /16/ и Кларком /17/. В настоящем параграфе мы дадим вывод /11/ разложения (7.1), основываясь на структурных формулах § 5 и § 4.

Прежде всего перейдем, как обычно, к $(\dots)_+$ – произведению полей, точнее говоря, к величине

$$\Phi_{\{\nu\}}(x_1,\dots,x_n)\equiv E_0(\mathfrak{z}_n):\varphi_{(\nu_1)}(x_1)\dots\varphi_{(\nu_n)}(x_n):\ . \qquad (7.2)$$

Поскольку при несовпадающих координатах $x_1,\dots,x_n$ произведение $\check{\Phi}_1(x_1)\dots\check{\Phi}_n(x_n)$ может быть представлено (с точностью до постоянного операторного множителя S^+, исчезающего в вакуумных средних) как некоторая комбинация объектов типа (7.2), разложение Вильсона достаточно построить лишь для $\Phi_{\{\nu\}}(x_1,\dots,x_n)$.

Пусть заданы некоторые числа $\sigma_1,\dots,\sigma_n$, такие, что $\sum_{j=1}^{n}\sigma_j=1$. Положим

$$x=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j x_j, \qquad \xi_j=x_j-x.$$

Относительные координаты ξ_j удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\xi_j=0$. Будем считать также, что $\xi_j^2\neq 0$ и $(\xi_i-\xi_j)^2\neq 0$, если $i\neq j$. Таким образом, координата x выступает здесь как "центр тяжести" вершин $x_1,\dots,x_n$, которым соответственно приписаны "массы" $\sigma_1,\dots,\sigma_n$. Устремим $x_1,\dots,x_n$ к этому "центру тяжести", то есть будем считать, что ξ_j одновременно приближаются к нулю, оставаясь в гиперплоскости $\sum\sigma_j\xi_j=0$. Фигурирующее в (7.2) нормальное произведение $:\varphi_{(\nu_1)}(x+\xi_1)\varphi_{(\nu_2)}(x+\xi_2)\dots\varphi_{(\nu_n)}(x+\xi_n):$ при этом, очевидно, стремится к моному $b_{\{\nu\}}(x)$. Однако вся комбинация $\Phi_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\dots,x+\xi_n)$, вообще говоря, сингулярна при $\xi=0$ и потому отнюдь не стремится к соответствующему составному полю $B_{\{\nu\}}(x)$. Природа этой сингулярности ясна: когда вершины $x_1,\dots,x_n$ "слипаются" в точке x, в разложении $\Phi_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\dots,x+\xi_n)$ появляются новые расходящиеся диаграммы сверх тех, которые перенормированы исходной R-операцией, обеспечивающей конечность $E_0(\mathcal{J}_\alpha)$.

Тем не менее из $\Phi_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\dots,x+\xi_n)$ нетрудно выделить регулярную часть $\Phi'_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\dots,x+\xi_n)$. Именно, положим по аналогии с (5.13) и (5.15):

$$\Phi'_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\dots,x+\xi_n)=E_0(\mathcal{J}_\alpha)\frac{1}{1+\mathfrak{M}^{(a)}E_1(\mathcal{J}_\alpha)}:\varphi_{(\nu_1)}(x+\xi_1)\dots\varphi_{(\nu_n)}(x+\xi_n):. \qquad (7.3)$$

Полилокальный оператор $\Phi'_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\dots,x+\xi_n)$ окажется регулярным при $\xi_1=\dots=\xi_n=0$, если $\mathfrak{M}^{(a)}$ "заранее" произведет необходимые вычитания в диаграммах правой части (7.3), которые становятся сильносвязными при совмещении вершин $x+\xi_1,\dots,x+\xi_n$ в точке x. Если к тому же в этом пределе величины типа $\mathfrak{M}^{(a)}E_1(\mathcal{J}_\alpha):\varphi_{(\nu_1)}(x+\xi_1)\dots\varphi_{(\nu_n)}(x+\xi_n):$ будут стремиться к величинам типа $M^{(a)}E_1(\mathcal{J}_\alpha)b_{\{\nu\}}(x)$, где $a\geqslant\dim b_{\{\nu\}}$, то можно утверждать, что

$$\lim_{\xi\to 0}\Phi'_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\dots,x+\xi_n)=B^{(a)}_{\{\nu\}}(x). \qquad (7.4)$$

Оператор $\mathfrak{M}^{(a)}$, обладающий такими свойствами, нами уже фактически построен в § 4. Это оператор $\mathfrak{M}^{(a)}_x$, определенный формулой (4.37) на нормальных произведениях полей и формулой (4.38) на x-правильных частях функционалов $F(x_1,\dots,x_n)$. Точнее, будем считать, что $\mathfrak{M}^{(a)}$ обращает в нуль все диаграммы, не становящиеся сильносвязными при совмещении вершин $x_1,\dots,x_n$, а на x-правильных диаграммах он совпадает с $\mathfrak{M}^{(a)}_x$.
Тогда равенство (4.39) примет форму

$$\lim_{x_j\to x}\mathfrak{M}^{(a)}F(x_1,\dots,x_n)=M^{(a)}F(x,\dots,x),$$

что, собственно, и требуется от $\mathfrak{M}^{(a)}$.

Представим теперь $\Phi'_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\ldots,x+\xi_n)$ в виде

$$\Phi'_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\ldots,x+\xi_n)=E_0(\mathfrak{z}_n):\varphi_{(\nu_1)}(x+\xi_1)\ldots\varphi_{(\nu_n)}(x+\xi_n):-$$
$$-E_0(\mathfrak{z}_n)\frac{1}{1+\mathfrak{M}^{(a)}E_1(\mathfrak{z}_n)}\mathfrak{M}^{(a)}E_1(\mathfrak{z}_n):\varphi_{(\nu_1)}(x+\xi_1)\ldots\varphi_{(\nu_n)}(x+\xi_n):\ . \tag{7.5}$$

Но $E_0(\mathfrak{z}_n):\varphi_{(\nu_1)}(x+\xi_1)\ldots\varphi_{(\nu_n)}(x+\xi_n):=\Phi_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\ldots,x+\xi_n)$,а

$\mathfrak{M}^{(a)}E_1(\mathfrak{z}_n):\varphi\ldots\varphi:$ можно, пользуясь (4.38), разложить в сумму мономов свободного поля:

$$\mathfrak{M}^{(a)}E_1(\mathfrak{z}_n):\varphi_{(\nu_1)}(x+\xi_1)\ldots\varphi_{(\nu_n)}(x+\xi_n):=$$
$$=\sum_{\ell+\Sigma|\lambda_j|\le a} b_{\{\lambda\}}(x)\,\frac{(-i)^{\Sigma|\lambda_j|}}{\ell!(\lambda_1)!\ldots(\lambda_\ell)!}\left\langle E_1(\mathfrak{z}_n):\varphi_{(\nu_1)}(\xi_1)\ldots\varphi_{(\nu_n)}(\xi_n):\tilde{\varphi}^{(\lambda_1)}(0)\ldots\tilde{\varphi}^{(\lambda_\ell)}(0)\right\rangle^{\xi\text{-prop}}. \tag{7.6}$$

Под воздействием операции $E_0(\mathfrak{z}_n)[1+\mathfrak{M}^{(a)}E_1(\mathfrak{z}_n)]^{-1}$ стоящие здесь мономы $b_{\{\lambda\}}(x)$ превратятся в составные поля $B^{(a)}_{\{\lambda\}}(x)$ (напомним, что в соответствии с (4.40) действие $\mathfrak{M}^{(a)}$ на "одноточечных" функционалах совпадает с действием $M^{(a)}$). Окончательно равенство (7.5) преобразуется к виду

$$\Phi_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\ldots,x+\xi_n)=$$
$$=\sum_{\ell+\Sigma|\lambda_j|\le a} Q^{\{\lambda\}}_{\{\nu\}}(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,B^{(a)}_{\{\lambda\}}(x)+B(x+\xi_1,\ldots,x+\xi_n), \tag{7.7}$$

где

$$B(x+\xi_1,\ldots,x+\xi_n)=\Phi'_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\ldots,x+\xi_n)-B^{(a)}_{\{\nu\}}(x), \tag{7.8}$$

$$Q^{\{\lambda\}}_{\{\nu\}}(\underline{\xi})=\frac{(-i)^{\Sigma|\lambda_j|}}{\ell!(\lambda_1)!\ldots(\lambda_\ell)!}\left\langle E_0(\mathfrak{z}_n):\varphi_{(\nu_1)}(\xi_1)\ldots\varphi_{(\nu_n)}(\xi_n):\tilde{\varphi}^{(\lambda_1)}(0)\ldots\tilde{\varphi}^{(\lambda_\ell)}(0)\right\rangle^{\xi\text{-prop}}. \tag{7.9}$$

Определяя $B(x+\xi_1,\ldots,x+\xi_n)$,мы вычли из регулярной функции $\Phi'_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\ldots,x+\xi_n)$ ее предельное значение $B^{(a)}_{\{\nu\}}(x)$.
В сумму же из (7.7) добавлено компенсирующее слагаемое $B^{(a)}_{\{\nu\}}(x)$, что и приводит к замене $E_1(\mathfrak{z}_n)$ в матричном элементе (7.6) на $E_0(\mathfrak{z}_n)$ в (7.9). Очевидно,при $\underline{\xi}\to 0$ $B(x+\xi_1,\ldots,x+\xi_n)$ исчезает. Равенство (7.7) и есть искомое разложение Вильсона. О разложениях Вильсона см. также в /25-27/.

2. В предыдущем пункте наличие или отсутствие в теории промежуточной регуляризации было совершенно несущественным: все фигурирующие в (7.7) величины, по построению, свободны от ультрафиолетовых расходимостей. Полезно, однако, иметь аналоги разложения (7.7), которые, возможно, справедливы лишь в регуляризованной теории, но зато применимы к более сложным образованиям,чем $\Phi_{\{\nu\}}(x+\xi_1,\ldots,x+\xi_n)$.

Предположим,что регуляризация такова, что свободные пропагаторы $G^{(c)}_2(x)$ являются бесконечно дифференцируемыми быстро убывающими функциями. Тогда любая диаграмма будет достаточно гладкой функцией координат своих внешних вершин. Рассмотрим в этих условиях $(\dots)_+$ - произведение $\left(B^{(a_1)}_{\{\mu\}}(x)\, B^{(a_2)}_{\{\nu\}}(x+\xi)\right)^{(a)}_+$ двух составных полей $B^{(a_1)}_{\{\mu\}}(x)$ и $B^{(a_2)}_{\{\nu\}}(x+\xi)$. Пусть $\xi\neq 0$, $\xi^2\neq 0$. Поскольку оператор $M^{(a)}$, действуя на "двухточечные" функционалы $F(x,x+\xi)$, превращает их в нечто, содержащее фактор $\delta^{(a)}(\xi)$, при $\xi\neq 0$ формула (5.I9) эквивалентна следующему простому соотношению:

$$\left(B^{(a_1)}_{\{\mu\}}(x)\, B^{(a_2)}_{\{\nu\}}(x+\xi)\right)^{(a)}_+ = E_0(g_2)\, {}'B^{(a_1)}_{\{\mu\}}(x)\, {}'B^{(a_2)}_{\{\nu\}}(x+\xi). \qquad (7.I0)$$

С другой стороны, элементарное преобразование приводит к равенству

$$E_0(g_2)\, {}'B^{(a_1)}_{\{\mu\}}(x)\, {}'B^{(a_2)}_{\{\nu\}}(x+\xi) =$$

$$= E_0(g_2)\frac{1}{1+\mathcal{M}^{(a)}E_1(g_2)}\,\mathcal{M}^{(a)}E_0(g_2)\, {}'B^{(a_1)}_{\{\mu\}}(x)\, {}'B^{(a_2)}_{\{\nu\}}(x+\xi) + \qquad (7.II)$$

$$+ E_0(g_2)\frac{1}{1+\mathcal{M}^{(a)}E_1(g_2)}\left(1-\mathcal{M}^{(a)}\right) {}'B^{(a_1)}_{\{\mu\}}(x)\, {}'B^{(a_2)}_{\{\nu\}}(x+\xi).$$

Если $a \geqslant a_1+a_2$, то при $\xi\to 0$ второе слагаемое в правой части этого равенства стремится к нулю. Действительно, оператор $\mathcal{M}^{(a)}$ превращает любое нормальное произведение асимптотических полей, по которым разлагается ${}'B^{(a_1)}_{\{\mu\}}(x)\, {}'B^{(a_2)}_{\{\nu\}}(x+\xi)$, в начальный отрезок его тейлоровского ряда по степеням ξ (см. общую формулу (4.37)). Таким образом, величина $\left(1-\mathcal{M}^{(a)}\right) {}'B^{(a_1)}_{\{\mu\}}(x)\, {}'B^{(a_2)}_{\{\nu\}}(x+\xi)$ при $\xi\to 0$ име-

ет нуль, по крайней мере, первого порядка. Этот нуль не может скомпенсироваться какой-либо особенностью возникающих затем диаграмм, так как, по предположению, в теорию введена достаточно эффективная регуляризация. Итак, с точностью до величин, исчезающих при $\xi=0$, имеем

$$\left(B^{(a_1)}_{\{\mu\}}(x)\, B^{(a_2)}_{\{\nu\}}(x+\xi)\right)^{(a)}_+ = \qquad (7.I2)$$

$$= E_0(g_2)\frac{1}{1+\mathcal{M}^{(a)}E_1(g_2)}\,\mathcal{M}^{(a)}E_0(g_2)\, {}'B^{(a_1)}_{\{\mu\}}(x)\, {}'B^{(a_2)}_{\{\nu\}}(x+\xi) + O(\xi).$$

Как и ранее, правую часть легко свести к сумме составных полей $B^{(a)}_{\{\lambda\}}(x)$, так что (7.I2) является аналогом разложения Вильсона. Кажется правдоподобным, что это разложение останется справедливым и в пределе снятой регуляризации. Нам оно понадобится, однако, лишь в регуляризованной форме.

§ 8. Уравнения движения для составных полей

I. Начиная с этого параграфа, мы часто будем иметь дело с фундаментальными величинами, о которых мы уже не раз упоминали, - функциями Грина. Функция Грина $G_l(y_1,\dots,y_l)$ определена соотношением

$$G_l(y_1,\dots,y_l) = \langle E_0(g_2)\varphi(y_1)\dots\varphi(y_l)\rangle. \qquad (8.I)$$

"Нормальная" функция Грина задана формулой

$$G_l(:y_1,\dots,y_l:) = \langle E_0(g_2):\varphi(y_1)\dots\varphi(y_l):\rangle. \qquad (8.2)$$

Ниже центральную роль будут играть составные поля с асимптотическими образами вида $:\varphi^2(x):$, $:\varphi(x)\Box\varphi(x):$, $:\varphi^3(x):$ и $:\varphi^4(x):$.

Опуская громоздкие мультииндексы, примем краткие обозначения:

$$b_1(x)\equiv\,:\varphi^2(x):,\qquad b_2(x)\equiv\,:\varphi(x)\Box\varphi(x):,$$
$$b_3(x)\equiv\,:\varphi^3(x):,\qquad b_4(x)\equiv\,:\varphi^4(x):. \tag{8.3}$$

Фурье – преобразования этих мономов запишем следующим образом :

$$\int e^{ipx}\, b_j(x)\,dx \equiv \tilde{b}_j(p),$$

так что

$$\tilde{b}_j(0) = \int b_j(x)\,dx. \tag{8.4}$$

Составные поля, отвечающие мономам (8.3), будем обозначать соответственно: для $j = 1,2,4$

$$\mathcal{B}_j(x) = \mathcal{R}^{(4)}b_j(x)E_0(s);\qquad B_j(x) = R^{(4)}b_j(x)E_0(s), \tag{8.5}$$

а для $j = 3$

$$\mathcal{B}_3(x) = \mathcal{R}^{(3)}b_3(x)E_0(s);\qquad B_3(x) = R^{(3)}b_3E_0(s). \tag{8.6}$$

Подчеркнем,что (8.5) отличается от (8.6) порядком вычитающего оператора , с помощью которого строится R-операция. По аналогии с (8.4) будем писать:

$$\tilde{\mathcal{B}}_j(0)\equiv\int dx\,\mathcal{B}_j(x),\quad j=1,2,3,4,$$
$$\tilde{B}_j(0)\equiv\int dx\,B_j(x). \tag{8.7}$$

2. Перейдем к выводу уравнений движения для гейзенбергова поля $\Phi(x)=E_0(s_2)\varphi(x)=S\varphi(x)$. По теореме Вика преобразуем его к виду

$$\Phi(x) = :S\varphi(x): + \int G_2^{(0)}(x-y)\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)}\,dy. \tag{8.8}$$

В соответствии с (5.26) вариационная производная перенормированной S-матрицы равна составному полю:

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)} \equiv \frac{\delta E_0(s_2)}{\delta\varphi(y)} = \frac{ig}{6}\mathcal{B}^{(3)}_{\{(0),(0),(0)\}}(y) \equiv \frac{ig}{6}\mathcal{B}_3(y). \tag{8.9}$$

Умножая (8.8) на $\varphi(y_1)\dots\varphi(y_l)$ и образуя вакуумное среднее, получаем

$$\langle\Phi(x)\varphi(y_1)\dots\varphi(y_l)\rangle = \langle:\varphi(x)S:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_l)\rangle + \tag{8.10}$$
$$+\frac{ig}{6}\int dy\, G_2^{(0)}(x-y)\langle\mathcal{B}_3(y)\varphi(y_1)\dots\varphi(y_l)\rangle.$$

В первом слагаемом правой части из-за нормальной упорядоченности $:S\varphi(x):$ поле $\varphi(x)$ с необходимостью спаривается с одним из полей $\varphi(y_j)$, так что это слагаемое имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{l} G_{l-1}(y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_l)\,G_2^{(0)}(x-y_j).$$

Учитывая это обстоятельство и действуя на обе части (8.10) оператором $i[\Box_x+m^2]$ (операция "ампутации"), получаем:

Лемма 8.1.

$$\langle\Omega(x)\varphi(y_1)\dots\varphi(y_l)\rangle = \sum_{j=1}^{l} G_{l-1}(y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_l)\,\delta(x-y_j), \tag{8.11}$$

где

$$\Omega(x) = i(\Box_x + m^2)\varphi(x) - \frac{ig}{6}B_3(x). \qquad (8.12)$$

Согласно (5.28) в терминах полей $B^{(a)}_{\{\lambda\}}(x)$ величина $\Omega(x)$ имеет вид

$$\Omega(x) = i(m^2 - \Delta m^2)\varphi(x) + i(1+\Delta z)\Box\varphi(x) - \frac{i(g+\Delta g)}{6}B_3(x). \qquad (8.13)$$

Равенство (8.11) представляет собою искомое уравнение движения. Аналогичное равенство имеет место, очевидно, и для "нормальных" вакуумных средних

$$\langle \Omega(x) : \varphi(y_1)\ldots\varphi(y_\ell) : \rangle = \sum_{j=1}^{\ell} G_{\ell-1}(: y_1,\ldots,y_{j-1},y_{j+1},\ldots,y_\ell :)\,\delta(x-y_j). \qquad (8.14)$$

На уровне промежуточной регуляризации справедливы те же соотношения, но с другой операцией ампутации. Именно, оператор Клейна-Гордона изменится так, чтобы обращать в точную δ- функцию регуляризованный свободный пропагатор:

$$i(\Box^{reg} + m^2)\,G_2^{(0)reg}(x) = \delta(x).$$

Таким образом, $i(\Box^{reg} + m^2)$ есть ядро квадратичной формы, обратной к регуляризованному свободному лагранжиану.

3. Перейдем к выводу уравнений движения для более сложной комбинации составных полей.

Лемма 8.2.

Пусть

$$\Omega_1(x) = i(m^2 - \Delta m^2)B_1(x) + i(1+\Delta z)B_2(x) - \frac{i(g+\Delta g)}{6}B_4(x). \qquad (8.15)$$

Тогда

$$\langle \Omega_1(x)\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_\ell)\rangle = \sum_{j=1}^{\ell}\delta(x-y_j)\,G_\ell(y_1,\ldots,y_\ell). \qquad (8.16)$$

(Заметим, что Ω_1 отличается от Ω повышением на первые степени поля φ в асимптотических образах; то есть формально получается "умножением" $\Omega(x)$ на поле $\varphi(x)$ в той же точке.)

Доказательство.

Запишем уравнение движения (8.11) в виде

$$\langle \Omega(x)\varphi(x+\xi)\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_\ell)\rangle = \qquad (8.17)$$

$$= \delta(\xi)\,G_\ell(y_1,\ldots,y_\ell) + \sum_{j=1}^{\ell}\delta(x-y_j)\,G_\ell(y_1,\ldots,y_{j-1},x+\xi,y_{j+1},\ldots,y_\ell).$$

Для того, чтобы получить уравнение для Ω_1, мы должны теперь както устремить ξ к нулю. Однако, вообще говоря, такой предельный переход приводит к новым сингулярностям и для его аккуратного рассмотрения надо обратиться к разложению Вильсона для $\Omega(x)\varphi(x+\xi)$.

Во всех промежуточных выкладках мы будем работать с регуляризованными величинами и снимем регуляризацию только в окончательной форме уравнений движения. Это даст возможность воспользоваться разложением Вильсона (7.12) и считать, что второй член в его правой части обращается в нуль при $\xi \to 0$. Мы не будем, однако, оговаривать каждый раз, что $\Box$ есть $\Box^{reg}$.

Согласно (7.12) величина $\Omega(x)\varphi(x+\xi)$ с точностью до членов, исчезающих при $\xi\to 0$, есть

$$\Omega(x)\varphi(x+\xi)=E_0(\mathfrak{z}_\sim)\frac{1}{1+M^{(4)}E_1(\mathfrak{z}_\sim)}\mathfrak{M}^{(4)}\Omega(x)\varphi(x+\xi)+O(\xi). \quad (8.18)$$

Таким образом, нам нужно сосчитать $\mathfrak{M}^{(4)}\Omega(x)\varphi(x+\xi)$. С той же точностью справедливо равенство

$$\mathfrak{M}^{(4)}\Omega(x)\varphi(x+\xi)=\delta(\xi)+i(m^2-\Delta m^2):\varphi^2(x):+ \quad (8.19)$$

$$+i(1+\Delta z):\varphi(x)\Box\varphi(x):-\frac{i(g+\Delta g)}{6}:\varphi^4(x):+O(\xi).$$

Доказательство этого равенства будет дано позднее. Подставляя (8.19) в (8.18), получаем

$$\Omega(x)\varphi(x+\xi)=E_0(\mathfrak{z}_\sim)\delta(\xi)+\Omega_1(x)+O(\xi). \quad (8.20)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\frac{1}{1+M^{(4)}E_1(\mathfrak{z}_\sim)}\delta(\xi)=\delta(\xi),$$

так как $\delta(\xi)$ появилась из пропагатора, отвечающего линии, соединяющей вершины x и $x+\xi$. Поэтому все диаграммы, возникающие в разложении $E_1(\mathfrak{z}_\sim)\delta(\xi)$, несвязны и оператор $M^{(4)}$ обращает их в нуль.

Домножая (8.20) на $\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_e)$ и составляя вакуумное среднее, мы получаем равенство

$$\langle\Omega(x)\varphi(x+\xi)\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_e)\rangle=\delta(\xi)G_e(y_1,\ldots,y_e)+$$

$$+\langle\Omega_1(x)\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_e)\rangle+O(\xi).$$

Сравнивая его с равенством (8.17), приходим к соотношению

$$\delta(\xi)G_e(y_1,\ldots,y_e)+\langle\Omega_1(x)\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_e)\rangle=$$

$$=\delta(\xi)G_e(y_1,\ldots,y_e)+\sum_{j=1}^{e}\delta(x-y_j)G_e(y_1,\ldots,y_{j-1},y_j-\xi,y_{j+1},\ldots,y_e).$$

Приводя подобные члены и переходя к пределу $\xi\to 0$, получаем искомое уравнение (8.16), в котором уже нет никаких препятствий к снятию промежуточной регуляризации.

Нам осталось только доказать равенство (8.19). По смыслу вычитающего оператора $\mathfrak{M}^{(4)}$ он преобразует $\Omega(x)\varphi(x+\xi)$ в сумму мономов свободного поля, размерность которых не превышает четырех:

$$\mathfrak{M}^{(4)}\Omega(x)\varphi(x+\xi)=A_0(\xi)+:\varphi^2(x):A_1(\xi)+$$

$$+:\varphi(x)\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x):A_2^{\mu\nu}(\xi)+:\partial_\mu\varphi(x)\partial_\nu\varphi(x):A_3^{\mu\nu}(\xi)+ \quad (8.21)$$

$$+:\varphi^4(x):A_4(\xi).$$

Согласно определению (4.38), коэффициенты $A_j(\xi)$ представляют собою некоторые суммы по различным эквивалентным мультииндексам. Именно,

$$A_0(\xi)=\langle\Omega(0)\varphi(\xi)\rangle^{\xi\text{-prop}}, \quad (8.22)$$

$$A_1(\xi)=\frac{1}{2}\langle\Omega(0)\varphi(\xi):\tilde\varphi(0)\tilde\varphi(0):\rangle^{\xi\text{-prop}}, \quad (8.23)$$

$$A_2^{\mu\nu}(\xi)=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\frac{\partial}{\partial p_\nu}\langle\Omega(0)\varphi(\xi):\tilde\varphi(p)\tilde\varphi(0):\rangle^{\xi\text{-prop}}\Big|_{p=0}, \quad (8.24)$$

$$A_3^{\mu\nu}(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\frac{\partial}{\partial q_\nu}\langle \Omega(0)\varphi(\xi):\tilde\varphi(p)\tilde\varphi(q):\rangle^{\xi\text{-prop}}\Big|_{p=q=0}, \tag{8.25}$$

$$A_4(\xi) = \frac{1}{24}\langle \Omega(0)\varphi(\xi):\tilde\varphi(0)\tilde\varphi(0)\tilde\varphi(0)\tilde\varphi(0):\rangle^{\xi\text{-prop}}. \tag{8.26}$$

Напомним, что для выделения ξ-правильной части, обозначенной символом $\xi\text{-prop}$, нужно удержать только те диаграммы из разложения функции Грина, которые превращаются в сильносвязные при $\xi\to 0$. Перейдем к вычислению коэффициентов $A_j(\xi)$. Согласно (8.22) и уравнению (8.II)

$$A_0(\xi) = \langle \Omega(0)\varphi(\xi)\rangle^{\xi\text{-prop}} = \delta(\xi). \tag{8.27}$$

Для вычисления $A_1(\xi)$, $A_2^{\mu\nu}(\xi)$ и $A_3^{\mu\nu}(\xi)$ займемся преобразованием ампутированной по внешним линиям, опирающимся на вершины y_1, y_2, функции

$$\langle \Omega(0)\varphi(\xi):\varphi(y_1)\varphi(y_2):\rangle^{y\text{-}A}, \tag{8.28}$$

которая фактически определяет эти коэффициенты. Имеем:

$$\langle \Omega(0)\varphi(\xi):\varphi(y_1)\varphi(y_2):\rangle^{y\text{-}A} =$$

$$= i^2(\Box_{y_1}+m^2)(\Box_{y_2}+m^2)\Big\{\langle \Omega(0):\varphi(\xi)\varphi(y_1)\varphi(y_2):\rangle +$$

$$+\langle \Omega(0)\varphi(y_1)\rangle G_2^{(0)}(\xi,y_2) + \langle \Omega(0)\varphi(y_2)\rangle G_2^{(0)}(\xi,y_1)\Big\}.$$

Пользуясь уравнением (8.I4), получаем

$$\langle \Omega(0)\varphi(\xi):\varphi(y_1)\varphi(y_2):\rangle^{y\text{-}A} =$$

$$= i^2(\Box_{y_1}+m^2)(\Box_{y_2}+m^2)\Big\{\delta(\xi)G_2(:y_1,y_2:) + \tag{8.29}$$

$$+\delta(y_1)G_2(:\xi,y_2:) + \delta(y_2)G_2(:\xi,y_1:) +$$

$$+\delta(y_1)G_2^{(0)}(\xi,y_2) + \delta(y_2)G_2^{(0)}(\xi,y_1)\Big\}.$$

Теперь нужно из левой части равенства (8.29) выделить ξ-правильный вклад. Что касается правой части этого равенства, то ξ-правильным в ней является лишь следующий член:

$$i^2(\Box_{y_1}+m^2)(\Box_{y_2}+m^2)\Big\{\delta(y_1)G_2^{(0)}(\xi,y_2) + \delta(y_2)G_2^{(0)}(\xi,y_1)\Big\}. \tag{8.30}$$

В самом деле, слагаемое $i^2(\Box_{y_1}+m^2)(\Box_{y_2}+m^2)\delta(\xi)G_2(:y_1,y_2:)$ отвечает несвязным диаграммам, а, например, слагаемое $i^2(\Box_{y_1}+m^2)\cdot(\Box_{y_2}+m^2)\delta(y_1)G_2(:\xi,y_2:)$ в пределе $\xi\to 0$ соответствует слабосвязным диаграммам. Весьма важно понимать, однако, что выражение (8.30) не совпадает с ξ-правильным вкладом в левую часть равенства (8.29). Причина этой аномалии видна из анализа уравнений движения для величины $\Omega(0)$, с помощью которых мы пришли к соотношению (8.29). Дело в том, что в $\Omega(0)=i(\Box+m^2)\Phi(0)-\frac{ig}{6}\mathcal{B}_3(0)$ входит слагаемое $i(\Box+m^2)\Phi(0)$, которое содержит оператор Клейна-Гордона, стягивающий линию в точку и тем самым, возможно, изменяющий характер связности соответствующей диаграммы. Это, в частности, относится и к свойству ξ-правильности. По смыслу всех наших построений ξ-правильная часть выражения $i\langle(\Box+m^2)\Phi(0)\varphi(\xi):\varphi(y_1)\varphi(y_2):\rangle \equiv$

$\equiv i\langle E_0(\xi_0):\varphi(y_1)\varphi(y_2):\varphi(\xi)(\Box+m^2)\varphi(0)\rangle$ должна определяться соотношением

$$i\langle(\Box+m^2)\ \Phi(0)\varphi(\xi):\varphi(y_1)\varphi(y_2):\rangle^{\xi\text{-}prop}=$$

$$=i\langle\Box\Phi(0)\varphi(\xi):\varphi(y_1)\varphi(y_2):\rangle^{\xi\text{-}prop}+ \tag{8.31}$$

$$+im^2\langle\Phi(0)\varphi(\xi):\varphi(y_1)\varphi(y_2):\rangle^{\xi\text{-}prop},$$

то есть при определении характера связности диаграмм линия, выходящая из вершины $x=0$,должна рассматриваться на равных правах со всеми другими линиями. Однако структура уравнений движения такова,что за счет упомянутого оператора Клейна-Гордона в них происходит компенсация диаграмм разной степени связности, то есть рассматриваемая линия выступает лишь как заведомо редуцированная в точку.

Иначе говоря, выражение (8.30) содержит не только истинно ξ - правильные диаграммы левой части (8.29), но и, так сказать, ξ - псевдоправильные диаграммы. Под ξ-псевдоправильной диаграммой мы понимаем такую диаграмму,которая становится сильносвязной только в результате совместного применения двух операций: стягивания в точку линии, исходящей из вершины $x=0$, и стремления $\xi\to 0$. нетрудно усмотреть,что вклад ξ-псевдоправильных диаграмм в функцию Грина $\langle\Omega(0)\varphi(\xi):\varphi(y_1)\varphi(y_2):\rangle^{y\text{-}A}$ имеет вид

$$\delta(\xi-y_2)S_2^{prop}(0,y_1)+\delta(\xi-y_1)S_2^{prop}(0,y_2). \tag{8.32}$$

Таким образом, ответ (8.30) необходимо скорректировать на ξ-псевдоправильные диаграммы,то есть вычесть из него выражение (8.32). Имеем

$$\langle\Omega(0)\varphi(\xi):\varphi(y_1)\varphi(y_2):\rangle^{\xi\text{-}prop}=$$

$$=i^2(\Box_{y_1}+m^2)(\Box_{y_2}+m^2)\{\delta(y_1)G_2^{(0)}(\xi,y_2)+ \tag{8.33}$$

$$+\delta(y_2)G_2^{(0)}(\xi,y_1)\}-$$

$$-\delta(\xi-y_2)S_2^{prop}(0,y_1)-\delta(\xi-y_1)S_2^{prop}(0,y_2).$$

Вычислим фурье-образ этого выражения:

$$\langle\Omega(0)\varphi(\xi):\tilde\varphi(p)\tilde\varphi(q):\rangle^{\xi\text{-}prop}=$$

$$=\int e^{ipy_1+iqy_2}\langle\Omega(0)\varphi(\xi):\varphi(y_1)\varphi(y_2):\rangle^{\xi\text{-}prop}dy_1dy_2= \tag{8.34}$$

$$=i(m^2-p^2)e^{iq\xi}+i(m^2-q^2)e^{ip\xi}-$$

$$-e^{iq\xi}\tilde S_2^{prop}(p,-p)-e^{ip\xi}\tilde S_2^{prop}(q,-q).$$

Подставляя (8.34) в формулы (8.24)-(8.26), получаем

$$A_1(\xi)=i(m^2-\Delta m^2), \tag{8.35}$$

$$A_2^{\mu\nu}(\xi)=g^{\mu\nu}(1+\Delta z)+O(\xi), \tag{8.36}$$

$$A_3^{\mu\nu}(\xi)=0. \tag{8.37}$$

(Мы воспользовались выражением (5.30) контрчленов через $\tilde{S}_2^{prop}$.)
Нам осталось вычислить коэффициент $A_4(\xi)$. Он связан со следующим выражением:

$$\langle \Omega(0)\varphi(\xi):\varphi(y_1)\varphi(y_2)\varphi(y_3)\varphi(y_4):\rangle =$$

$$= \langle \Omega(0):\varphi(\xi)\varphi(y_1)\varphi(y_2)\varphi(y_3)\varphi(y_4):\rangle + \tag{8.38}$$

$$+\sum_{j=1}^{4} G_2^{(0)}(\xi, y_j)\langle \Omega(0):\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{4}\varphi(y_i):\rangle.$$

Пользуясь уравнением (8.14), получаем

$$\langle \Omega(0):\varphi(\xi)\varphi(y_1)\varphi(y_2)\varphi(y_3)\varphi(y_4):\rangle =$$

$$= \delta(\xi)G_4(:y_1, y_2, y_3, y_4:) + \delta(y_1)G_4(:\xi, y_2, y_3, y_4:) + \tag{8.39}$$

$$+\delta(y_2)G_4(:y_1,\xi,y_3,y_4:) + \delta(y_3)G_4(:y_1,y_2,\xi,y_4:) +$$

$$+\delta(y_4)G_4(:y_1,y_2,y_3,\xi:)$$

и, например,

$$\langle \Omega(0):\varphi(y_1)\varphi(y_2)\varphi(y_3):\rangle = \tag{8.40}$$

$$= \delta(y_1)G_2(:y_2,y_3:) + \delta(y_2)G_2(:y_1,y_3:) + \delta(y_3)G_2(:y_1,y_2:).$$

Так как ни (8.39), ни (8.40) не являются ξ-правильными, коэффициент $A_4(\xi)$ отличен от нуля только за счет коррекции на ξ-псевдоправильные диаграммы, дающие вклад

$$4G_2^{(0)}(\xi,y_1)\int dz_2 dz_2 dz_3\, G_2^{(0)}(y_2,z_2)\, G_2^{(0)}(y_3,z_3)\, G_2^{(0)}(y_4,z_4)\cdot \tag{8.41}$$

$$\cdot S_4^{prop}(0,z_2,z_3,z_4).$$

Проводя y- ампутацию, находим корректирующее слагаемое:

$$\langle \Omega(0)\varphi(\xi):\varphi(y_1)\varphi(y_2)\varphi(y_3)\varphi(y_4):\rangle^{\xi\text{-prop}} = \tag{8.42}$$

$$= -4\delta(\xi-y_1)\, S_4^{prop}(0,y_2,y_3,y_4).$$

Переходя к преобразованию Фурье и снова пользуясь выражением для конечных контрчленов (5.30), находим

$$A_4(\xi) = -i\,\frac{g+\Delta g}{6}. \tag{8.43}$$

Лемма 8.2 доказана полностью.

4. В дальнейших приложениях нам потребуется уравнение (8.16) в проинтегрированной по x форме

$$\langle \int dx\, \Omega_1(x)\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_\ell)\rangle \equiv \langle \tilde{\Omega}_1(0)\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_\ell)\rangle = \tag{8.44}$$

$$= \ell G_\ell(y_1,\ldots,y_\ell).$$

Лемма 8.2 выражает $\Omega_1(x)$ через поля $B_j(x)$ и соответственно $\tilde{\Omega}_1(0)$-через $\tilde{B}_j(0)$. Свяжем посредством тождеств Циммермана $\tilde{\Omega}_1(0)$ с полями $\tilde{\mathcal{B}}_j(0)$.

<u>Лемма 8.3.</u>

$$\tilde{\Omega}_1(0) = i\{m^2\tilde{\mathcal{B}}_1(0) + \tilde{\mathcal{B}}_2(0) - \frac{g}{6}\tilde{\mathcal{B}}_4(0)\}. \tag{8.45}$$

Доказательство.
Согласно (6.9)

$$\tilde{\Omega}_1(0) = U_1\tilde{\mathcal{B}}_1(0) + V_1\tilde{\mathcal{B}}_2(0) + W_1\tilde{\mathcal{B}}_4(0), \tag{8.46}$$

где коэффициенты U_1, V_1 и W_1 равны

$$U_1 = \frac{1}{2(\mu^2-m^2)}\Big\{\mu^2\langle\Omega_1(0)\tilde\varphi(k)\tilde\varphi(-k)\rangle^{y-A}_{prop}\Big|_{k^2=m^2} - m^2\langle\Omega_1(0)\tilde\varphi(k)\tilde\varphi(-k)\rangle^{y-A}_{prop}\Big|_{k^2=\mu^2}\Big\}, \tag{8.47}$$

$$V_1 = \frac{1}{2(\mu^2-m^2)}\Big\{\langle\Omega_1(0)\tilde\varphi(k)\tilde\varphi(-k)\rangle^{y-A}_{prop}\Big|_{k^2=m^2} - \langle\Omega_1(0)\tilde\varphi(k)\tilde\varphi(-k)\rangle^{y-A}_{prop}\Big|_{k^2=\mu^2}\Big\},$$

$$W_1 = \frac{1}{24}\langle\Omega_1(0)\tilde\varphi(k_1)\tilde\varphi(k_2)\tilde\varphi(k_3)\tilde\varphi(k_4)\rangle^{y-A}_{prop}\Big|_{symm\ \mu^2}.$$

Коэффициенты U_1 и V_1 связаны с $\langle\Omega_1(0)\varphi(y_1)\varphi(y_2)\rangle^{y-A}_{prop}$.

Пользуясь (8.16) и определением $S_e(\underline{y})$, получаем

$$\langle\tilde\Omega_1(0)\varphi(y_1)\varphi(y_2)\rangle^{y-A} = i^2(\Box_{y_1}+m^2)(\Box_{y_2}+m^2)[\delta(y_1)+\delta(y_2)]\cdot \tag{8.48}$$

$$\cdot\Big\{G_2^{(0)}(y_1,y_2)+\int dx_1 dx_2 G_2^{(0)}(y_1,x_1)G_2^{(0)}(y_2,x_2)S_2(x_1,x_2)\Big\}.$$

Переходя к преобразованию Фурье и подставляя его $prop$- часть в (8.47), получаем с учетом нормировочных условий (4.9) для $\tilde S_2^{prop}(p,-p)$ коэффициенты U_1 и V_1 :

$$U_1 = im^2, \tag{8.49}$$

$$V_1 = i. \tag{8.50}$$

Коэффициент W_1 вычисляется аналогично и равен

$$W_1 = -\frac{ig}{6}. \tag{8.51}$$

§ 9. Уравнения ренормгруппы и уравнения Каллана-Симанзика

I. Теория $(\varphi^4)_4$, которую мы используем здесь для иллюстраций, фиксируется тремя параметрами: g, μ^2 и m^2. Вычислим производные функций Грина по этим параметрам. Для этого мы будем пользоваться леммой 5.4.

Пусть заряд g изменяется на бесконечно малую величину δg : $g \to g+\delta g$. Оператор $\mathcal{M}^{(4)}$ не зависит от заряда, и потому $\delta\mathcal{M}^{(4)}=0$. С другой стороны, вариация δs неперенормированного действия $s = i\int\mathcal{L}(x)dx$ равна

$$\delta s = \frac{i\delta g}{4!}\int b_4(x)dx = \frac{i\delta g}{4!}\tilde b_4(0).$$

Таким образом, в соответствии с леммой 5.4 вариация перенормированной S-матрицы пропорциональна составному полю $\tilde{\mathcal{B}}_4(0)$:

$$\frac{\partial E_0(s_2)}{\partial g} = \frac{i}{4!}\tilde{\mathcal{B}}_4(0), \tag{9.1}$$

так что

$$\frac{\partial G_e(y_1,\dots,y_e)}{\partial g} = \frac{i}{4!}\langle\tilde{\mathcal{B}}_4(0)\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e)\rangle. \tag{9.2}$$

Пусть теперь бесконечно малую вариацию $\delta\mu^2$ испытывает параметр μ^2: $\mu^2\to\mu^2+\delta\mu^2$. Неперенормированное действие при этом не меняется: $\delta s=0$, а вычитающий оператор $\mathcal{M}^{(4)}$ переходит в $\mathcal{M}^{(4)}+\delta\mathcal{M}^{(4)}$, поскольку μ^2 существенно фигурирует в его определении. Найдем $\delta\mathcal{M}^{(4)}E_2(s_2)$. Заметим, во-первых, что

$$\delta\mathcal{M}^{(4)}E_2(s_2) = \delta\mathcal{M}^{(4)}E_1(s_2),$$

так как на линейной комбинации $\mathfrak{z}_2$ мономов свободного поля исходный и измененный вычитающие операторы действуют одинаково. Для вычисления $\delta\mathcal{M}^{(4)}E_1(\mathfrak{z}_2)$ надо вспомнить определение $\mathcal{M}^{(4)}$ (формула (4.30)) и нормировочные условия (4.9) и (4.10) для коэффициентных функций S - матрицы. Находим

$$\frac{\partial E_0(\mathfrak{z}_2)}{\partial\mu^2} = \tilde{\mathcal{B}}_1(0)\frac{m^2}{2(m^2-\mu^2)}\left[\frac{\partial}{\partial k^2}\tilde{S}_2^{prop}(k,-k)\right]_{k^2=\mu^2} - \tag{9.3}$$

$$-\tilde{\mathcal{B}}_2(0)\frac{1}{2(\mu^2-m^2)}\left[\frac{\partial}{\partial k^2}\tilde{S}_2^{prop}(k,-k)\right]_{k^2=\mu^2} + \frac{1}{24}\frac{\partial}{\partial\mu^2}\left[\tilde{S}_4^{prop}(k_1,k_2,k_3,k_4)\right]_{symm\,\mu^2}\cdot\tilde{\mathcal{B}}_4(0),$$

так что

$$\frac{\partial' G_e(y_1,\dots,y_e)}{\partial\mu^2} = \langle\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e)\left\{\frac{\tilde{\mathcal{B}}_4(0)}{4!}\frac{\partial}{\partial\mu^2}\left[\tilde{S}_4^{prop}(k_1,k_2,k_3,k_4)|_{symm\,\mu^2}\right] + \right. \tag{9.4}$$

$$\left. + \frac{1}{2(m^2-\mu^2)}\left[\frac{\partial}{\partial k^2}\tilde{S}_2^{prop}(k,-k)\right]_{k^2=\mu^2}\left[m^2\tilde{\mathcal{B}}_1(0)+\tilde{\mathcal{B}}_2(0)\right]\right\}\rangle.$$

Вычисление $\frac{\partial E_0(\mathfrak{z}_2)}{\partial m^2}$ оказывается несколько более сложным. Дело в том, что масса m^2 входит в функцию Грина G_e двояким образом: от массы зависит, во-первых, вычитающий оператор $\mathcal{M}^{(4)}$, а, во-вторых, - свободные пропагаторы $G_2^{(c)}(x)$, сопоставляемые линиям неперенормированных диаграмм. Разобьем соответственно производную по m^2 на две части:

$$\frac{\partial}{\partial m^2} = \left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)' + \left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)'',$$

где $\left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)'$ дифференцирует лишь вычитающий оператор $\mathcal{M}^{(4)}$, а $\left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)''$ воздействует только на массы, содержащиеся в свободных функциях Грина $G_2^{(c)}(x)$. Величина $\left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)' E_0(\mathfrak{z}_2)$ вычисляется аналогично (9.3). Имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)' E_0(\mathfrak{z}_2) = \frac{1}{2(\mu^2-m^2)}\left[\frac{\partial}{\partial k^2}\tilde{S}_2^{prop}(k,-k)\right]_{k^2=m^2}\left[\mu^2\tilde{\mathcal{B}}_1(0)+\tilde{\mathcal{B}}_2(0)\right]. \tag{9.5}$$

Что же касается $\left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)''$, то можно утверждать, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)'' G_e(y_1,\dots,y_e) = \frac{1}{2i}\langle\tilde{\mathcal{B}}_1(0)\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e)\rangle. \tag{9.6}$$

Действительно, рассмотрим правую часть (9.6). Она равна

$$\langle\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e)\,\mathcal{R}^{(4)}[\tilde{b}_1(0)\,E_0(\mathfrak{z})]\rangle \equiv \tag{9.7}$$

$$\equiv\langle\mathcal{R}^{(4)}[\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e)\,\tilde{b}_1(0)\,E_0(\mathfrak{z})]\rangle.$$

Диаграммы в (9.7) получаются из диаграмм для обычных функций Грина присоединением к ним (посредством всевозможных спариваний) дополнительной вершины $\tilde{b}_1(0)\equiv\int dx:\varphi^2(x):$. Поскольку мы рассматриваем вакуумные средние, оба поля из $\tilde{b}_1(0)$ должны спариться либо с $\varphi(y_j)$, либо с $E_0(\mathfrak{z})$. При этом возможны следующие варианты. Во-первых, оба поля из $\tilde{b}_1(0)$ могут спариться с полями $\varphi(z)$, отвечающими одной вершине z из $E_0(\mathfrak{z})$. В этом случае в диаграмме возникает расходящийся двухвершинный подграф γ, коэффициентная функция которого входит множителем в выражение для неперенормированной диаграммы и имеет вид $F_\gamma = \int dx\, G_2^{(0)}(x,z)\, G_2^{(0)}(x,z)$.

в соответствии с общей формулой (3.13) $\mathcal{R}$- операция, действующая на такую диаграмму в целом, должна содержать фактор $(1-\mathcal{M}_\gamma^{(4)})$, преобразующий F_γ. Но в силу трансляционной инвариантности F_γ оказывается константой и $(1-\mathcal{M}_\gamma^{(4)})$ обращает ее и, следовательно, всю диаграмму в нуль.

Второй вариант состоит в том, что поля из $\int dx{:}\varphi^2(x){:}$ спариваются с полями, отвечающими всевозможным парам вершин (например, с z_1 и z из $E_0(z)$, z и y_j или y_i и y_j). При каждом таком спаривании в диаграмме возникает новая "линия", соединяющая соответствующие вершины, например z_1 и z_2. Этой "линии" отвечает вклад

$$\int dx\, G_2^{(c)}(z_1,x)\, G_2^{(c)}(x,z_2) \equiv 2i\,\frac{\partial}{\partial m^2} G_2^{(c)}(z_1,z_2).$$

Но в разложении функции Грина заведомо присутствуют аналогичные диаграммы, у которых вместо новой "линии" стоит обычная $G_2^{(c)}(z_1,z_2)$. Таким образом, введение новой вершины $\tilde{b}_1(0)$ эквивалентно следующей процедуре: вместо каждой диаграммы из разложения функции Грина необходимо взять сумму диаграмм, в которых все линии поочередно заменены на $2i\frac{\partial}{\partial m^2}G_2^{(c)}(z_1,z_2)$. Это фактически и есть результат применения операции $2i\frac{\partial}{\partial m^2}$ к неперенормированной функции Грина.

Операция $\mathcal{R}^{(4)}$ превращает производную неперенормированной функции Грина в производную перенормированной, а $E_0(z)\tilde{b}_1(0)$ - в составное поле $\tilde{\mathcal{B}}_1(0)$, что и доказывает (9.6).

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial}{\partial m^2} G_e(y_1,\dots,y_e) = \langle \varphi(y_1)\dots\varphi(y_e)\left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)' E_0(z_2)\rangle +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)'' G_e(y_1,\dots,y_e) =$$

$$= \Big\langle \Big\{ \Big[\frac{\mu^2}{2(\mu^2-m^2)} \Big[\frac{\partial}{\partial k^2} \tilde{S}_2^{prop}(k,-k) \Big]_{k^2=m^2} + \frac{1}{2i} \Big] \tilde{\mathcal{B}}_1(0) + \tag{9.8}$$

$$+ \frac{1}{2(\mu^2-m^2)} \Big[\frac{\partial}{\partial k^2} \tilde{S}_2^{prop}(k,-k) \Big]_{k^2=m^2} \tilde{\mathcal{B}}_2(0) \Big\} \varphi(y_1)\dots\varphi(y_e) \Big\rangle.$$

2. Итак, мы видели, что производная функции Грина по любому из параметров g, μ^2, m^2 сводится к функции Грина, содержащей некоторую линейную комбинацию составных полей $\tilde{\mathcal{B}}_1(0)$, $\tilde{\mathcal{B}}_2(0)$ и $\tilde{\mathcal{B}}_4(0)$. При этом из соотношений (9.2), (9.4) и (9.8) следует, что для произвольной линейной комбинации $\tilde{\mathcal{B}}(0) = \beta_1 \tilde{\mathcal{B}}_1(0) + \beta_2 \tilde{\mathcal{B}}_2(0) + \beta_4 \tilde{\mathcal{B}}_4(0)$

найдутся такие константы η_1, η_2 и η_4, что

$$\left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \eta_4 \frac{\partial}{\partial g}\right) G_e(y_1,\dots,y_e) = \tag{9.9}$$

$$= \langle \tilde{\mathcal{B}}(0)\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e)\rangle.$$

Этим обстоятельством можно воспользоваться, чтобы вообще исключить составные поля из равенств типа (9.9). В частности, выберем

$$\eta_1=\eta_1' = 2i(m^2-\mu^2)\left[\frac{\partial \tilde{S}_2^{prop}(\kappa,-\kappa)}{\partial \kappa^2}\bigg|_{\kappa^2=\mu^2}\right]^{-1},$$

$$\eta_2=0, \tag{9.10}$$

$$\eta_4=\eta_4' = -4g-2(m^2-\mu^2)\left[\frac{\partial \tilde{S}_2^{prop}(\kappa,-\kappa)}{\partial \kappa^2}\bigg|_{\kappa^2=\mu^2}\right]^{-1} \frac{\partial \tilde{S}_4^{prop}(\kappa)}{\partial \mu^2}\bigg|_{symm\ \mu^2}.$$

Тогда коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ в комбинации $\tilde{\mathcal{B}}$ будут равны

$$\beta_1 = im^2, \tag{9.11}$$

$$\beta_2 = i,$$

$$\beta_4 = -\frac{ig}{6},$$

так что $\tilde{\mathcal{B}}$ совпадет с $\tilde{\Omega}_1(0)$ из леммы 8.2.
Теперь для правой части равенства (9.9) можно воспользоваться уравнением (8.16), и мы приходим к следующим равенствам :

$$\left(\eta_1'\frac{\partial}{\partial\mu^2}+\eta_4'\frac{\partial}{\partial g}\right)G_\ell(y_1,\ldots,y_\ell) = \ell G(y_1,\ldots,y_\ell). \tag{9.12}$$

Соотношения (9.12) представляют собой известные уравнения ренормализационной группы .

Другая возможность состоит в том, чтобы, сохранив в соотношениях (9.9) вклад составных полей $\tilde{\mathcal{B}}$,сделать его, однако, пренебрежимо малым в асимптотической области импульсных переменных. Именно, положим $\eta_1=\eta_1''$, $\eta_2=\eta_2''$, $\eta_4=\eta_4''$,выбрав η_1'', η_2'' и η_4''

таким образом, чтобы $\tilde{\mathcal{B}} = \beta_1\tilde{\mathcal{B}}_1(0)+\beta_2\tilde{\mathcal{B}}_2(0)+\beta_4\tilde{\mathcal{B}}_4(0)$ превратилось в составное поле $\tilde{\mathcal{B}}^{(2)}_{\{(0),(0)\}}(0)$, то есть, чтобы β_1, β_2 и β_4 совпали с коэффициентами правой части тождества Циммермана (6.13).
Будем иметь тогда

$$\left(\eta_1''\frac{\partial}{\partial\mu^2}+\eta_2''\frac{\partial}{\partial m^2}+\eta_4''\frac{\partial}{\partial g}\right)G_\ell(y_1,\ldots,y_\ell) = \tag{9.13}$$

$$=\left\langle\tilde{\mathcal{B}}^{(2)}_{\{(0),(0)\}}(0)\,\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_\ell)\right\rangle.$$

Это и есть уравнения Каллана-Симанзика /28,29/. Приложения этих уравнений основаны на том замечании,что в области больших импульсов правая часть (9.13) обладает менее энергичной асимптотикой,нежели слагаемые левой части. Поэтому в асимптотической области мы приходим к приближенным уравнениям,в которых фигурируют только "истинные" функции Грина:

$$\left(\eta_1''\frac{\partial}{\partial\mu^2}+\eta_2''\frac{\partial}{\partial m^2}+\eta_4''\frac{\partial}{\partial g}\right)G_\ell(y_1,\ldots,y_\ell)\approx 0. \tag{9.14}$$

Разумеется, не составляет труда выразить коэффициенты η_1'', η_2'', η_4'' через матричные элементы составного поля $\tilde{\mathcal{B}}^{(2)}_{\{(0),(0)\}}(0)$. Однако соответствующие громоздкие формулы мы выписывать здесь не будем. Процедура получения уравнений ренормгруппы и уравнений Каллана-Симанзика,близкая к изложенной в настоящем параграфе, была впервые предложена Ловенштейном /20/.

§ 10. Уравнения для регуляризованных функций Грина

1. Динамические принципы, примененные к затравочному лагранжиану теории, приводят к целому ряду соотношений между неперенормированными амплитудами. Однако ввиду ультрафиолетовых расходимостей эти соотношения имеют четкий смысл, вообще говоря, только на стадии промежуточной регуляризации. Что же касается перенормированных величин, с которыми мы только и хотим иметь дело, то соответствующие равенства между ними содержат константы перенормировки, которые (по крайней мере, в теории возмущений) расходятся в пределе снятой регуляризации.

Чтобы получить содержательные уравнения для перенормированных функций Грина, нужно поэтому составлять определенные комбинации этих равенств, из которых выпадают расходящиеся постоянные. Фактически именно на этом пути и возникли уравнения ренормгруппы и уравнения Каллана-Симанзика, рассмотренные в предыдущем параграфе и являющиеся, так сказать, уравнениями "безусловного типа". Последнее означает, что каждое отдельно взятое выражение, фигурирующее в этих уравнениях, корректно определено в теории возмущений и выдерживает предельный переход к снятой регуляризации.

Другая возможность состоит в том, чтобы выразить константы перенормировки непосредственно через интегралы от перенормированных функций Грина и тем самым исключить их из уравнений как независимые величины.

Этот путь приводит к уравнениям "компромиссного типа", таким как рассмотренный ниже вариант уравнений Фрадкина /30/, уравнения Щербины /31/, Джонсона /32/, Пью /33/, и других. Различные выражения, входящие в "компромиссные" уравнения и взятые сами по себе, хорошо определены в теории возмущений лишь в рамках промежуточной регуляризации и расходятся, вообще говоря, при ее снятии. В уравнениях в целом эти расходимости, разумеется, компенсируются. Тем не менее область применимости уравнений оказывается ограниченной регуляризованными теориями, если не считать, конечно, что бесконечность констант перенормировки объясняется лишь несовершенством итерационной схемы.

Несмотря на сказанное, уравнения "компромиссного типа" вовсе не бесполезны. Во-первых, нельзя целиком пренебречь такой возможностью, что в точной теории константы перенормировки все же конечны. Во-вторых, часть этих констант обычно выпадает из "компромиссных" уравнений. В-третьих, как показано в /30/, перестройка таких уравнений, сводящаяся к переходу к неприводимым диаграммам, позволяет эффективно исключить и все другие расходящиеся величины. Наконец, анализ регуляризованной теории сам по себе является важной задачей. Подчеркнем в связи с этим, что уравнения "компромиссного типа" содержат больше информации, чем упомянутые выше "безусловные" уравнения. Так, итерация "компромиссных" уравнений автоматически воспроизводит перенормированный ряд регуляризованной теории возмущений.

Все полученные ниже уравнения относятся к "компромиссному типу". Они основаны на соотношениях (10.20), (10.29) и (10.33), связывающих константы перенормировки и их производные по параметрам теории с перенормированными функциями Грина. Естественным инструментом отыскания такой связи служат структурные формулы (5.7) и (5.15). По существу идея состоит в том, чтобы производные матрицы рассеяния выразить не через составные поля $\tilde{\mathfrak{B}}(0)$, как это делалось выше, а с гейзенберговыми операторами вида $E_0(s_\lambda)\tilde{b}(0)$, которые тесно связаны со значениями функций Грина при совпадающих аргументах. Это можно было бы сделать с помощью аналога тождеств Циммермана, однако здесь мы предпочтем более наглядный язык констант перенормировки.

2. Нам понадобится несколько развить обозначения для функций Грина. Положим

$$G_{N+K}(:x_1,\dots,x_N::y_1,\dots,y_K:) = \langle E_0(\mathfrak{z}_2):\varphi(x_1)\dots\varphi(x_N)::\varphi(y_1)\dots\varphi(y_K):\rangle, \tag{10.1}$$

$$G_{N+K}(:x_1,\dots,x_N:\langle y_1,\dots,y_K\rangle) = G_{N+K}(:x_1,\dots,x_N::y_1,\dots,y_K:) - G_{N+K}(:x_1,\dots,x_N:)G_K(:y_1,\dots,y_K:). \tag{10.2}$$

Очевидно, каждая из функций (10.1),(10.2) является простой линейной комбинацией обычных функций Грина порядка не выше $N+K$. $G_{N+K}(:x_1,\dots,x_N:\langle y_1,\dots,y_K\rangle)$ представляет собой функцию Грина $G_{N+K}(:x_1,\dots,x_N::y_1,\dots,y_K:)$, из которой удалены все диаграммы, содержащие вершины $x_1,\dots,x_N$ и $y_1,\dots,y_K$ в разных компонентах связности (при нечетных K обе функции совпадают).

Поэтому при совмещении вершин $y_1,\dots,y_K$ в функции $G_{N+K}(:x_1,\dots,x_N:\langle y_1,\dots,y_K\rangle)$ не оказывается сильносвязных вакуумных диаграмм. Выше мы уже определяли ампутированные вакуумные средние, частным случаем которых являются функции Грина. Ниже нам придется сталкиваться с функциями Грина, ампутированными по некоторой выделенной совокупности переменных. Например,

$$G^{x-A}_{N+K}(:x_1,\dots,x_N:\langle y_1,\dots,y_K\rangle) = \prod_{j=1}^{N}\left[i(\Box^{reg}_{x_j}+m^2)\right]G_{N+K}(:x_1,\dots,x_N:\langle y_1,\dots,y_K\rangle) \tag{10.3}$$

и

$$S_e(y_1,\dots,y_e) = G^{y-A}_e(:y_1,\dots,y_e:). \tag{10.4}$$

Справедливо равенство

$$\left\langle \frac{\delta E_0(\mathfrak{z}_2)}{\delta\varphi(x)}:\varphi(y_1)\dots\varphi(y_e):\right\rangle = G^{x-A}_{e+1}(:x,y_1,\dots,y_e:). \tag{10.5}$$

Нам понадобятся также следующие соотношения:

$$\langle E_0(\mathfrak{z}_2):\varphi(x_1)\dots\varphi(x_N)::\varphi^3(y):\rangle = G_{N+3}(:x_1,\dots,x_N::y,y,y:), \tag{10.6}$$

$$\langle E_0(\mathfrak{z}_2):\varphi(x_1)\dots\varphi(x_N):\tilde{b}_1(0)\rangle = \int G_{N+2}(:x_1,\dots,x_N:\langle y,y\rangle)\,dy, \tag{10.7}$$

$$\langle E_0(\mathfrak{z}_2):\varphi(x_1)\dots\varphi(x_N):\tilde{b}_2(0)\rangle = -\int dy\,\frac{\partial}{\partial y_{1\nu}}\frac{\partial}{\partial y_{2\nu}}G_{N+2}(:x_1,\dots,x_N:\langle y_1,y_2\rangle)\Big|_{y_1=y_2=y}, \tag{10.8}$$

$$\langle E_0(\mathfrak{z}_2):\varphi(x_1)\dots\varphi(x_N):\tilde{b}_4(0)\rangle = \int dy\,G_{N+4}(:x_1,\dots,x_N:\langle y,y,y,y\rangle). \tag{10.9}$$

Наконец, понятие правильной части $G^{prop}_{N+K}(:x_1,\dots,x_N:\langle y_1,\dots,y_K\rangle)$ вводится обычным способом.

Фурье-преобразования функций G^{x-A}_{N+K} и их производных по y при совпадающих значениях y будем обозначать следующим образом:

$$\int e^{i\sum p_j x_j + ipy}\,G^{prop}_{N+K}(:x_1,\dots,x_N:\langle \underbrace{y,\dots,y}_{K}\rangle)\,d\underline{x}\,dy = (2\pi)^4\delta(\textstyle\sum p_j+p)\,\tilde{G}^{prop}_{N+K}(p_1,\dots,p_N,\langle p\rangle), \tag{10.10}$$

$$\int e^{i\sum p_j x_j + ipy}\left[\frac{\partial}{\partial y_{1\nu}}\frac{\partial}{\partial y_{2\nu}}G^{prop}_{N+K}(:x_1,\dots,x_K:\langle y_1,\dots,y_K\rangle)\right]_{y_1=\dots=y_K=y} d\underline{x}\,dy = (2\pi)^4\delta(\textstyle\sum p_j+p)\,\widetilde{\partial_1\partial_2 G^{prop}_{N+K}}(p_1,\dots,p_N,\langle p\rangle). \tag{10.11}$$

3. Мы будем пользоваться затравочным лагранжианом в форме $\mathcal{L}(x) = -\frac{g}{4!}:\varphi^4(x):$, соответственно затравочное действие есть $\mathfrak{z} = -\frac{ig}{4!}\tilde{b}_4(0)$, а матрица рассеяния равна $S = \mathcal{R}^{(4)}e^{\mathfrak{z}}$. За счет контрчленов перенормированный лагранжиан взаимодействия есть

$$\mathcal{L}_2(x) = -i\alpha_1 b_1(x) - i\alpha_2 b_2(x) - i\alpha_4 b_4(x). \tag{10.12}$$

Так что перенормированное действие есть

$$\mathcal{S}_r = i\int \mathcal{L}_r(x)\,dx = \alpha_1 \tilde{b}_1(0) + \alpha_2 \tilde{b}_2(0) + \alpha_4 \tilde{b}_4(0), \qquad (10.13)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ фактически представляют собой константы перенормировки.

Ниже всюду будет предполагаться наличие промежуточной регуляризации.

Чтобы выразить перенормировочные константы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ через перенормированные функции Грина, воспользуемся следующим приемом. Напомним, что имеет место следующее равенство:

$$\mathcal{S}_r = \mathcal{S} - \overset{(4)}{\mathcal{M}} E_2(\mathcal{S}_r). \qquad (10.14)$$

Вычислив вариационную производную по $\varphi(y)$, придем к обычному соотношению:

$$\left[1 + \overset{(3)}{\mathcal{M}} E_1(\mathcal{S}_r)\right] \frac{\delta \mathcal{S}_r}{\delta \varphi(y)} = \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi(y)}, \qquad (10.15)$$

или в соответствии с (10.13)

$$2\alpha_1 \varphi(y) + 2\alpha_2 \Box\varphi(y) + 4\alpha_4 :\varphi^3(y): + \qquad (10.16)$$

$$+ 4\alpha_4 \overset{(3)}{\mathcal{M}} E_1(\mathcal{S}_r) :\varphi^3(y): = -\frac{ig}{6} :\varphi^3(y):.$$

Положим

$$\overset{(3)}{\mathcal{M}} E_1(\mathcal{S}_r) :\varphi^3(y): = Y_1 \varphi(y) + Y_2 \Box\varphi(y) + Y_4 :\varphi^3(y):. \qquad (10.17)$$

Из (10.6) вытекает, что коэффициентные функции $f_n(x_1,\ldots,x_n,y)$ функционала $E_1(\mathcal{S}_r):\varphi^3(x):$ совпадают с $G^{x-A}_{n+3}(x_1,\ldots,x_n,<y,y,y>)$ за исключением функции $f_3(x_1,x_2,x_3,y)$, которая отличается от $G^{x-A}_{3+3}(x_1,x_2,x_3,<y,y,y>)$ на величину $6\delta(x_1-y)\,\delta(x_2-y)\,\delta(x_3-y)$ (поскольку $E_0(\mathcal{S}_r):\varphi^3(y):$ отличается от $E_1(\mathcal{S}_r):\varphi^3(y):$ на $:\varphi^3(y):$). Пользуясь (4.31), находим:

$$Y_1 = \frac{1}{\mu^2 - m^2}\left[\mu^2 \tilde{G}^{prop}_{1+3}(p,<-p>)\Big|_{p^2=m^2} - m^2 \tilde{G}^{prop}_{1+3}(p,<-p>)\Big|_{p^2=\mu^2}\right],$$

$$Y_2 = \frac{1}{\mu^2 - m^2}\left[\tilde{G}^{prop}_{1+3}(p,<-p>)\Big|_{p^2=m^2} - \tilde{G}^{prop}_{1+3}(p,<-p>)\Big|_{p^2=\mu^2}\right], \qquad (10.18)$$

$$Y_4 = \frac{1}{3!} \tilde{G}^{prop}_{3+3}(p_1,p_2,p_3,<p>)\Big|_{\mathrm{symm}\ \mu^2} - 1.$$

Равенство (10.16) можно теперь переписать так:

$$\varphi(y)\left[2\alpha_1 + 4Y_1\alpha_4\right] + \Box\varphi(y)\left[2\alpha_2 + 4Y_2\alpha_4\right] + \qquad (10.19)$$

$$+ :\varphi^3(y): \left[4\alpha_4(Y_4+1) + \frac{ig}{6}\right] = 0.$$

Вне поверхности масс функционалы $L_1(\varphi) = \varphi(y)$, $L_2(\varphi) = \Box\varphi(y)$ и $L_3(\varphi) = :\varphi^3(y):$ линейно независимы. Поэтому должны обращаться в нуль все квадратные скобки в (10.19). Таким образом, искомая связь между константами перенормировки $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ и функциями Грина имеет вид

$$\alpha_1 = \frac{ig}{12}\frac{Y_1}{1+Y_4}, \quad \alpha_2 = \frac{ig}{12}\frac{Y_2}{1+Y_4}, \quad \alpha_4 = -\frac{ig}{24}\frac{1}{1+Y_4}. \qquad (10.20)$$

Переходя к выводу собственно уравнений для функций Грина, запишем

$$\frac{\delta E_0(\mathcal{S}_r)}{\delta \varphi(y)} = E_0(\mathcal{S}_r)\left[2\alpha_1\varphi(y) + 2\alpha_2\Box\varphi(y) + 4\alpha_4 :\varphi^3(y):\right]. \qquad (10.21)$$

Умножим обе части этого равенства на $:\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_N):$, возьмем вакуумное среднее и воспользуемся формулами (10.5), (10.6) и (10.29). Находим

$$(\Box_y + m^2)\, G_{N+1}(:x_1,\ldots,x_N,y:) = \frac{g}{6(1+Y_4)}\Big[Y_1 G_{N+1}(:x_1,\ldots,x_N:y) + \qquad (10.22)$$

$$+ Y_2 \Box_y G_{N+1}(:x_1,\ldots,x_N:y) - G_{N+3}(:x_1,\ldots,x_N::y,y,y:)\Big].$$

Соотношения (10.22) совместно с (10.18) являются уравнениями Фрадкина. Нетрудно привести их и непосредственно к виду, полученному в /30/ или /31/. Нам, однако, кажется, что запись (10.22),(10.18) наиболее экономна.

4. Найдем теперь связь между функциями Грина и производными от констант перенормировки $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ по g. Продифференцируем по g равенство (10.14):

$$\left[1+M^{(4)}E_1(\mathfrak{z}_2)\right]\frac{\partial \mathfrak{z}_2}{\partial g}=\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial g}. \tag{10.23}$$

Положим

$$M^{(4)}E_1(\mathfrak{z}_2)\tilde{b}_j(0)=\sum_{i=1,2,4}(Y_{ij}-\delta_{ij})\tilde{b}_i(0). \tag{10.24}$$

Нетрудно вычислить элементы 3x3 матрицы $\|Y_{ij}\|$. В самом деле, разложение, например, величины $E_1(\mathfrak{z}_2)\tilde{b}_1(0)$ по нормальным произведениям свободных полей имеет вид

$$E_1(\mathfrak{z}_2)\tilde{b}_1(0)=\frac{1}{2}\int dy\,dx_1 dx_2:\varphi(x_1)\varphi(x_2):\cdot$$

$$\cdot\left[G^{x-A}_{2+2}(:x_1,x_2:<y,y>)-2\delta(x_1-y)\delta(x_2-y)\right]+$$

$$+\frac{1}{4!}\int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dy:\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_4):G^{x-A}_{4+2}(:x_1,\ldots,x_4:<y,y>)+\ldots$$

Поэтому в соответствии с (4.30) имеем

$$Y_{11}=\frac{1}{2(\mu^2-m^2)}\left[\mu^2\tilde{G}^{prop}_{2+2}(p,-p,<0>)\Big|_{p^2=m^2}-m^2\tilde{G}^{prop}_{2+2}(p,-p,<0>)\Big|_{p^2=\mu^2}\right], \tag{10.25}$$

$$Y_{21}=\frac{-1}{2(\mu^2-m^2)}\left[\tilde{G}^{prop}_{2+2}(p,-p,<0>)\Big|_{p^2=\mu^2}-\tilde{G}^{prop}_{2+2}(p,-p,<0>)\Big|_{p^2=m^2}\right], \tag{10.26}$$

$$Y_{41}=\frac{1}{4!}\tilde{G}^{prop}_{4+2}(p_1,p_2,p_3,p_4,<0>)\Big|_{\text{symm}\,\mu^2}. \tag{10.27}$$

Аналогично находятся и другие элементы Y_{ij}. Так, Y_{12} и Y_{22} задаются соответственно формулами (10.25),(10.26), где функция $\tilde{G}^{prop}_{2+2}(p,-p,<0>)$ заменена на $-\widetilde{\partial_1\partial_2 G}^{prop}_{2+2}(p,-p,<0>)$.

Те же формулы (10.25) и (10.26), если в них заменить $\tilde{G}^{prop}_{2+2}(p,-p,<0>)$ на $\tilde{G}^{prop}_{2+4}(p,-p,<0>)$, определят Y_{14} и Y_{24}. Наконец, Y_{42} или Y_{44} получатся из соотношения (10.27), если вместо $\tilde{G}^{prop}_{4+2}(p_1,p_2,p_3,p_4,<0>)$ в него подставить соответственно $-\widetilde{\partial_1\partial_2 G}^{prop}_{4+2}(p_1,\ldots,p_4,<0>)$ или $\tilde{G}^{prop}_{4+4}(p_1,\ldots,p_4,<0>)$.

Уравнение (10.23) можно теперь переписать следующим образом:

$$\sum_{i=1,2,4}\tilde{b}_i(0)\left\{\sum_{j=1,2,4}Y_{ij}\frac{\partial \alpha_j}{\partial g}\right\}=-\frac{i}{4!}\tilde{b}_4(0). \tag{10.28}$$

В силу линейной независимости функционалов $\tilde{b}_1(0)$, $\tilde{b}_2(0)$ и $\tilde{b}_4(0)$ коэффициенты при каждом из них в (10.28) обращаются в нуль. Отсюда находим

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial g}=-\frac{i}{4!}(Y^{-1})_{j4}, \tag{10.29}$$

где $\|Y^{-1}_{ij}\|$ -матрица, обратная к $\|Y_{ij}\|$. Тем самым производные $\frac{\partial \alpha_j}{\partial g}$ выражены через перенормированные функции Грина.

Имеем, с другой стороны,

$$\frac{\partial E_0(\mathfrak{z}_2)}{\partial g}=\left[\sum_{j=1,2,4}\frac{\partial \alpha_j}{\partial g}\tilde{b}_j(0)\right]E_0(\mathfrak{z}_2). \tag{10.30}$$

Умножая это равенство на $:\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_N):$ и пользуясь равенствами (I0.6)-(I0.8), получаем

$$\frac{\partial G_N(:x_1,\ldots,x_N:)}{\partial g} = \qquad\qquad (I0.3I)$$

$$= \int dy \left\{ \left(\frac{\partial d_1}{\partial g} - \frac{\partial d_2}{\partial g} \frac{\partial}{\partial y_{1\nu}} \frac{\partial}{\partial y_2^{\nu}} \right) G_{N+2}(:x_1,\ldots,x_N:\langle y_1,y_2\rangle)\Big|_{y_1=y_2=y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial d_4}{\partial g} G_{N+4}(:x_1,\ldots,x_N:\langle y,y,y,y\rangle) \right\}.$$

Соотношения (I0.3I) и (I0.29) можно рассматривать как систему уравнений для G_N.

Обратимся к вычислению производной перенормированного лагранжиана по μ^2. Находим из (I0.I4)

$$\left[1+\overset{(4)}{M}E_1(\mathfrak{z}_r)\right]\frac{\partial \mathfrak{z}_r}{\partial \mu^2} = \xi_1 \tilde{b}_1(0) - \xi_2 \tilde{b}_2(0) + \xi_4 \tilde{b}_4(0). \qquad (I0.32)$$

Напомним, что оператор M сам по себе зависит от μ^2. Правая часть (I0.32) представляет собой как раз $-\frac{\partial M}{\partial \mu^2}E_2(\mathfrak{z}_r) = -\frac{\partial M}{\partial \mu^2}E_1(\mathfrak{z}_r)$. В соответствии с (4.30) имеем

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{\mu^2-m^2} \frac{\partial \tilde{S}_2^{prop}(p,-p)}{\partial p^2}\Big|_{p^2=\mu^2},$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu^2-m^2} \frac{\partial \tilde{S}_2^{prop}(p,-p)}{\partial p^2}\Big|_{p^2=\mu^2},$$

$$\xi_4 = -\frac{1}{4!} \frac{\partial \tilde{S}_4^{prop}(symm\,\mu^2)}{\partial \mu^2}.$$

Далее, как и раньше, воспользуемся представлением (I0.I3) для $\mathfrak{z}_r$, учтем (I0.24) и приравняем нулю коэффициенты при каждом $\tilde{b}_j(0)$ в соотношении (I0.32). Отсюда получим

$$\frac{\partial d_j}{\partial \mu^2} = -\frac{(Y^{-1})_{j4}}{4!} \frac{\partial \tilde{S}_4^{prop}(symm\,\mu^2)}{\partial \mu^2} + \qquad\qquad (I0.33)$$

$$+ \frac{m^2 (Y^{-1})_{j1} + (Y^{-1})_{j2}}{2(\mu^2-m^2)} \frac{\partial \tilde{S}_2^{prop}(p,-p)}{\partial p^2}\Big|_{p^2=\mu^2}.$$

Вычислив вакуумное среднее от $\frac{\partial E_0(\mathfrak{z}_r)}{\partial \mu^2}:\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_N):$ и снова приняв во внимание формулы (I0.7)-(I0.9), мы в полной аналогии с выкладками (I0.30) и (I0.3I) дополним равенства (I0.33) до системы уравнений для перенормированных функций Грина:

$$\frac{\partial G_N(:x_1,\ldots,x_N:)}{\partial \mu^2} = \int dy \left\{ \frac{\partial d_4}{\partial \mu^2} G_{N+4}(:x_1,\ldots,x_N:\langle y,y,y,y\rangle) + \right. \qquad (I0.34)$$

$$\left. + \left(\frac{\partial d_1}{\partial \mu^2} - \frac{\partial d_2}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial y_{1\nu}} \frac{\partial}{\partial y_2^{\nu}} \right) G_{N+2}(:x_1,\ldots,x_N:\langle y_1,y_2\rangle)\Big|_{y_1=y_2=y} \right\}.$$

Действуя примерно тем же способом, нетрудно найти и производную перенормированного лагранжиана по m^2. Мы опустим соответствующий несколько громоздкий расчет и приведем лишь возникающую при этом систему уравнений:

$$\frac{\partial G_N(:x_1,\ldots,x_N:)}{\partial m^2} = \int dy \left\{ \gamma_4 G_{N+4}(:x_1,\ldots,x_N:\langle y,y,y,y\rangle) + \right.$$

$$(I0.35)$$

$$\left. + \left(\gamma_1 - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y_{1\nu}} \frac{\partial}{\partial y_2^{\nu}} \right) G_{N+2}(:x_1,\ldots,x_N:\langle y_1,y_2\rangle)\Big|_{y_1=y_2=y} \right\},$$

$$\gamma_j = -\frac{(Y^{-1})_{j2} + \mu^2 (Y^{-1})_{j1}}{\partial(\mu^2 - m^2)} \frac{\partial \tilde{S}_2^{prop}(p,-p)}{\partial p^2}\Big|_{p^2=m^2} - i(Y^{-1})_{j1}. \quad (10.36)$$

Уравнения (10.35),(10.36) справедливы,если предположить,что промежуточная регуляризация такова, что для затравочной двухточечной функции $G_2^{(0)reg}(x_1,x_2)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial m^2} \tilde{G}_2^{(0)reg}(p,-p) = \frac{1}{i}\left[\tilde{G}_2^{(0)reg}(p,-p)\right]^2.$$

Этим свойством обладает,например, регуляризация, сводящаяся к обрезанию на больших импульсах в евклидовой формулировке теории:

$$G_2^{(0)reg}(p,-p) = \frac{\theta(\Lambda^2 - p^2)}{i(m^2 - p^2)}.$$

Отметим, что $\gamma_j = \frac{\partial d_j}{\partial m^2}$ при $j=2,4$,при $j=1$

$$\frac{\partial d_1}{\partial m^2} = \gamma_1 + i + 12 d_4 \int dx \left[G_2^{(0)reg}(0,x)\right]^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. N.N.Bogolubov, O.S.Parasiuk. Acta Math. 97, 227, 1957.
2. W.Zimmermann.1970 Brandeis Lectures, Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, v.1. p.397, Cambridge, MIT Press,1970;
   Ann. of Phys. 77, 536, 1970.
3. K.Hepp. Comm. Math. Phys. 2, 301, 1966.
4. С.А.Аникин, О.И.Завьялов, М.К.Поливанов. ТМФ 17, 189, 1973;
   С.А.Аникин, М.К.Поливанов. ТМФ 21, 175, 1974.
5. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М., "Наука", 1973 ..
6. С.А.Аникин, В.А.Аркадьев. ТМФ, 24, 193, 1975.
7. О.И.Завьялов, ТМФ, 21, 322, 1974.
8. С.А.Аникин, О.И.Завьялов. ТМФ, 26, 162, 1976.
9. J.H.Lowenstein. 1975 Erice Lectures,in:"Renormalization Theory," eds. G.Velo, A.S.Wightman, Reidel, Dordrecht-Holland,1976.
10. О.И.Завьялов. ТМФ, 28, 38, 1976.
11. С.А.Аникин, О.И.Завьялов. ТМФ, 27, № 3, 1976.
12. K.Wilson.Phys. Rev. 179, 1399, 1969.
13. K.Wilson, W.Zimmermann. Comm. Math. Phys. 24, 87, 1972.
14. S.Schlieder. Lectures Notes in Phys. 39, 85, 1975.
15. R.Brandt. Ann. of Phys. 52, 122, 1969.
16. W.Zimmermann. Ann. of Phys. 77, 570, 1973.
17. T.Clark. Nucl. Phys. B81, 263, 1974.
18. R.Brandt. Fortshr. der Phys. 18, 249, 1970.
19. J.H.Lowenstein. W.Zimmermann. Comm. Math. Phys. 44, 73, 1975.
20. J.H.Lowenstein. Comm. Math. Phys. 24, 1, 1971.
21. J.H.Lowenstein, E.Speer.Comm. Math. Phys. 47, 43, 1976.

22. J.H.Lowenstein, W.Zimmermann. Nucl.Phys. B86, 77, 1975.
23. J.H.Lowenstein. Comm. Math. Phys., 47, 53, 1976.
24. J.H.Lowenstein, T.Clark. New York Univ. Preprint NYV/TR3/76.
25. K.Symanzik. Comm. Math. Phys. 23, 49, 1971.
26. S.Schlieder, E.Seiler, Comm. Math. Phys. 31, 137, 1973.
27. K.G.Wilson. Phys. Rev., D2, 1473, 1970.
28. C.Callan, Jr. Phys. Rev., D2, 1541, 1970.
29. K.Symanzik. Comm. Math. Phys., 18, 227, 1970.
30. Е.С.Фрадкин. Труды ФИАН СССР, 29, 72, I965.
31. В.А.Щербина. ТМФ, I4, 342, I973.
32. W.Jonson. J.Math. Phys., 11, 2161, 1970.
33. R.Pugh. J.Math. Phys., 7, 376, 1966.
34. J.H.Lowenstein, Phys. Rev., D4, 2281, 1971.
35. Y.M.Lam. Phys. Rev. D6, 2154, 1972.
36. M.Gomes, J.H.Lowenstein. Phys. Rev. D7, 550, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 марта I977г.

Содержание