ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Ш. Шуян

Стохастичность в динамических системах

ДУБНА

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р17-86-211

Ш.Шуян

СТОХАСТИЧНОСТЬ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Дубна 1986

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящих лекций для молодых ученых - изложение на элементарном уровне стохастических свойств одномерных дискретных систем и объяснение их связи с динамическими системами. Исследования этих систем проводятся в рамках динамической теории и представляют интерес с точки зрения приложений в самых разнообразных областях науки (физике, химии, биологии и т.д.). Лекции содержат важные результаты, полученные за последние десятилетия в этой бурно развивающейся области. Отдельные главы не претендуют на полноту и строгость изложения, а служат целям первого знакомства с предметом. Лекции сопровождаются поясняющими примерами. Иногда в качестве таких примеров предлагаются доказательства теорем, приведенных в тексте.

Список собственных работ Ш.Шуяна относится, главным образом, к общей эргодической теории, точнее, к связям эргодической теории и теории информации. Текст же этих лекций показывает, что он хорошо знал и глубоко понимал многие современные результаты в теории стохастических динамических систем. В лекциях излагаются очень тонкие теоремы существования абсолютно непрерывных инвариантных мер одномерных отображений, своеобразный подход к построению термодинамического формализма в неустойчивых системах.

Предлагаемые лекции вместе со списком литературы дают возможность достаточно быстро с ними ознакомиться и войти в эту интенсивно развивающуюся в настоящее время область.

К глубокому сожалению, автор этих лекций - известный чехословацкий математик Штефан Шуян, работавший в последнее время в ОИЯИ, преждевременно ушел из жизни, не успев полностью подготовить рукопись. Ш.Шуян планировал изложить материал в цикле из 10 лекций.

Ш.Шуян был специалистом в математической статистике, теории вероятностей, эргодической теории, теории информации и кодирования, а также в статистической физике. Его отличала глубина понимания актуальных проблем физики, позволяющая ему успешно применять математические методы к решениям физических задач. Он - автор большого числа научных работ (полный список его трудов, касающихся излагаемого материала, находится в конце этого предисловия). Кроме того, он успел подготовить рукопись монографии о современных проблемах теории информации. Обширные научные интересы и глубина результатов его исследований получили широкое признание.

Все его помнят как человека, готового всегда помочь своим коллегам и друзьям. Многим надолго запомнится его обаятельная улыбка, с которой Штефан обращался к людям.

Штефан Шуян ушел от нас в самом расцвете творческих сил, начав и не завершив многое. Но то, что он успел сделать, сохранит добрую память о нем.

Его друзья и коллеги считают своим долгом завершить его незаконченные научные исследования в ОИЯИ. Из рукописей, оставшихся после его смерти, мы попытались создать эту небольшую книжку, стараясь сохранить замысел Штефана таким, каким он остался в его записях.

Определенные трудности вызвало составление списка литературы, так как он был подготовлен только с указанием фамилий авторов без указания точных данных. Поэтому в некоторых случаях под одним порядковым номером числится несколько работ.

В подготовке рукописи к печати принимали участие сотрудники ЛВТА М.Грегуш, А.Двуреченский и сотрудники ЛТФ В.А.Загребнов, Н.С.Исаева, З.А.Павлюкевич, В.Б.Приезжев.

Редакционный совет.

Список работ Ш. Шуяна, относящихся к материалам лекций

1. Š. Šujan: A generalized coding problem for discrete information sources. Kybernetika 13 (1977), 95 pp.
2. S. Sujan: On a characteristic property of asymptotic rate. Kybernetika 14 (1978), 285-291.
3. S. Sujan: Ergodic theory and information in classical lattice systems. Trans. 8th Prague Conf., vol.B, 251-261, Academia 1978.
4. S. Sujan: The coding theorem for the entropy of interacting point processes. Trans. ISIT, Grignano, IEEE 1979.
5. S. Sujan: ε -quantiles, ε -rates, and group coding theorems for finitely additive information sources. Trans. ISIT, Grignano, IEEE 1979.
6. S. Sujan: Success of statistical-mechanical measurements-play of chance or necessity? EMISCON' 79, Proceedings.
7. S. Sujan: On the integral representation of the entropy rate. Studia Sci. Math. Hung. 12 (1976) (1979), 25-36.
8. S. Sujan: Invariants of an Abelian group of measure-preserving transformations. Mh. Math. 90 (1980), 67-79.
9. S. Sujan: On the existence of asymptotic rate for asymptotically mean stationary sources with countable alphabets. Trans. 3nd CS-SU-H seminar on information theory, 1980.
10. S. Sujan: On the capacity of asymptotically mean stationary channels. Kybernetika 17, 1981, 222-233.
11. S. Sujan: Channels with additive asymptotically mean stationary noise. Kybernetika 17 (1981), 1-15.
12. S. Sujan: Epsilon-rates, epsilon-quantiles, and group coding theorems for finitely additive information sources. Kybernetika 16 (1980), No. 2.
13. S. Sujan: Continuity and quantizations of channels with infinite alphabets. Kybernetika 17 (1981), 465-478.
14. S. Sujan: Block transmissibility and quantization. Prob. & Math. Statist. D. Reidel 1982, 361-371.
15. S. Sujan: A local structure of stationary noiseless codes between stationary non-ergodic sources. I: General considerations. Kybernetika 18(1982), 361-375.

16. S. Sujan: A local structure of stationary noiseless codes between stationary non-ergodic sources. II: Applications. Kybernetika 18 (1982), 465-484.
17. S. Sujan: Generators for amenable group actions. Mh.Math. 95, 1983, 67-79.
18. S. Sujan: Ergodic Theory, Entropy, and Coding Problems of Information Theory. Kybernetika 19 (1983), 68 pp.
19. S. Sujan: Codes in ergodic theory and information. Erg. Theory & Related Top. Akademie V. 1982, 181-184.
20. S. Sujan: Local zero-error tecusmissibility does not imply the global one. Trans. 9th Prague Conf. on Inform. Theory Stat.Dec. Func., Random Processes, June 28 - July 2, Prague 1982, vol.B, p.211-216. Academic, Prague 1982.
21. S. Sujan: Sinai's theorem and entropy compression. Probl.Control and Inform. Theory 12, 1983, 419-428.
22. S. Sujan: ε - Rates and noiseless fixed-rate universal block coding in stationary non-ergodic sources. EIK 19 (1983), 375-385.
23. G.A. Emelyanenko & S. Suajan: A new look upon information processing in exp. physics. General strategy. JINR, E5-83-693.
24. S. Sujan: A new look upon information processing in exp. physics. Lorentz equation and walking on a unit sphere, JINR, E5-83-694.
25. S. Sujan: A new look upon information processing in exp. physics. Geometry of random factors. E5-83-695, JINR.
26. S. Sujan: On stability of stationary codes. 6 ISIT, Tashkent 1984, vol. III, 273-275.
27. S. Sujan: Mappings which preserve the pointvise ergodic theorem. 14th Conf. on Stoch. Processes and their Applications, Gothenborg, June 12-16, 1984, p. 121.
28. Ш. Шуян: Флуктуации в конфигурациях чистых фаз и гетерофазные конфигурации. P17-84-625.
29. S. Sujan: Some stationary source and joint source-channel coding theorems with a fiedlity criterion. E5-84-745.
30. S. Sujan: Joint source and channel block coding for series of discrete stationary channels. E5-84-713.
31. S. Sujan: On entropy for a class of continuous particle systems. E5-84-623.
32. S. Sujan: Existence theorems for classical heterophase systems. JINR Rapid Com. 1, 1984, No.4.
33. S. Sujan: Some functionals on sets of stationary codes. Kybernetika <u>21</u>, 1985, No.1.
34. S. Sujan: A local structure of stationary noiseless codes between stationary non-ergodic sources. III Kybernetika <u>21</u>, 1985, No.2.

35. S. Sujan: Some constructions preserving the pointwise ergodic theorem (submitted).
36. K. Mühle, S. Sujan: On inverse problems of experimental physics: Finite dimensional linear theory (submitted to Inverse Problems). E5-85-50.
37. K. Mühle, S. Sujan: Linear functional relationship: some approximative estimates (submitted to Inverse Problems). E5-85-49.
38. S. Sujan: Heterophase random fields. I. Existence and ergodicity. (submitted to Kybernetika). E5-85-483.
39. S. Sujan: Heterophase random fields. II. Physical background, Markov property and equlibrium description (submitted to Kybernetika). E5-85-648.
40. S. Sujan: Heterophase random fields. III. Field on infinite homogeneous trees (submitted to Kybernetika). E5-85-663.
41. S. Sujan: On families of equilibrium states for hyperbolic systems (submitted to Kybernetika).
42. **S.Sujan: Revisited Entropies. Bratislava-London (in preparation).**

Лекция 1. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ

В настоящем цикле лекций мы будем, в основном, излагать методы, связанные с объяснением и описанием стохастичности для одномерных систем с дискретным временем. Поскольку класс динамических систем, интересных с физической точки зрения, намного шире упомянутого класса (в частности, наиболее важными с физической точки зрения являются гладкие динамические системы на многообразиях), в вводной лекции мы решили привести ряд общих конструкций и рассуждения, которые в какой-то мере оправдают наше ограничение.

А. Дискретные и непрерывные системы

С глобальной точки зрения дифференциальные уравнения можно задавать векторными полями X на многообразиях M. Если U - открытое подмножество M и E - пространство Банаха (которое служит моделью для касательного расслоения к M), то векторное поле X локально задается отображением $X : U \to U \times E$, где

$$X(m) = (m, f(m)); \quad m \in U.$$

Интегральные кривые векторного поля задаются локально решениями дифференциального уравнения

$$\dot{\gamma}(m) = d\gamma/dt\,|_m = f(m).$$

При некоторых естественных предположениях относительно многообразия M и векторного поля X теоремы существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений позволяют нам "склеить" эти локальные решения и получить поток на M, т.е. отображение

$$\varphi : M \times \mathbb{R} \ni (m,t) \longmapsto \varphi(m,t) = \varphi_t(m) \in M,$$

для которого выполнены условия

$$\varphi_0 = id; \quad \varphi_t(\varphi_s(m)) = \varphi_{t+s}(m).$$

Прежде чем перейти к вопросам связи систем с непрерывным и дискретным временем, напомним несколько известных фактов из дифференциальной геометрии (см. например, /1/). Пусть M - риманово многообразие размерности n. Для любой точки $m \in M$ можно определить слой T_mM касательного расслоения TM как множество пар (m, ξ), где ξ - элемент(вектор) $(n-1)$-мерной касательной гиперплоскости к многообразию M в точке m (см. рис.1 для случая $n = 3$). Касательное расслое-

ние TM - это объединение всех T_mM, $m \in M$, снабженное канонической топологией и локальной структурой дифференцирования.

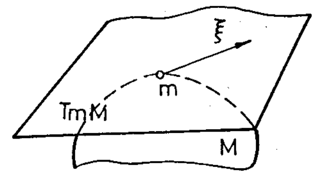


Рис. 1

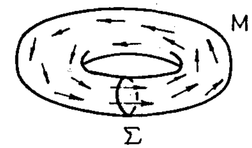


Рис. 2
Секущая Σ

Переход от непрерывного времени к дискретному (т.е. от потока к диффеоморфизмам) осуществляется при помощи понятия секущей для векторного поля X. По определению, секущей называется замкнутое подмногообразие $\Sigma \subset M$ размерности $\dim M - 1$ такое, что:

(1) Σ трансверсально X (т.е. касательное расслоение $T\Sigma$ и векторное поле $X|\Sigma$ порождают расслоение $TM|\Sigma$);

(2) каждая траектория, покидающая Σ, пересекает Σ в прошлом и будущем (т.е. при $x \in \Sigma$ найдутся такие $t_1 > 0$ и $t_2 < 0$, что $\varphi_{t_1}x$, $\varphi_{t_2}x \in \Sigma$), и

(3) каждая траектория пересекает Σ (см. рис. 2).

Таким образом, если Σ - секущая для X, то можно определить отображение последования (иногда его называют отображением Пуанкаре) $f : \Sigma \to \Sigma$, положив

$$f(x) = \varphi_{t_0}(x), \text{ где } t_0 = \min\{t > 0 : \varphi_t(x) \in \Sigma\}.$$

В силу (1) $t_0 = t_0(x) > 0$ для всех $x \in \Sigma$, и, пользуясь гладкой зависимостью решений в задаче Коши, можно доказать, что f является диффеоморфизмом. Траектории поля X оказываются в одно-однозначном соответствии с траекториями $\{f^k(x);\ k \in \mathbb{Z}\}$, и это соответствие сохраняет объекты типа неподвижных и периодических точек. Итак, глобальные свойства исходного потока φ в какой-то мере можно исследовать путем изучения глобальных свойств диффеоморфизма f.

Однако не у каждого потока существует секущая (например, в силу (1) у поля X должны отсутствовать особые точки). Более того, особый интерес для нас будут представлять системы, для которых отображение последования будет разрывным и необратимым (грубо говоря, такая ситуация обнаруживается, если у динамической системы возникают "странные аттракторы", поскольку последние не являются многообразиями.

Любопытно, что конструкция отображения последования допускает обращение. А именно, любой диффеоморфизм можно понимать как отображение последования для некоторого потока, конструкцию которого сейчас опишем (более подробно см. в /2/). Рассмотрим для диффеоморфизма f : $M \to M$ отображение

$$\alpha : \mathbb{R}\times M \ni (s,m) \longmapsto \alpha\,(s,m) = (s+1,\, f(m)) \in \mathbb{R}\times M .$$

Группа $\mathbb{Z}$ действует свободно на $\mathbb{R}\times M$, согласно определению

$$(k,(t,m)) \longmapsto \alpha^{k}(t,m) = (t+k,\, f^{k}(m)) .$$

Поэтому пространство траекторий M_0 (т.е. факторпространство $(\mathbb{R}\times M)/\mathbb{Z}$) - многообразие размерности $1+\dim M$. Определим поток $\Phi = \{\Phi_t\}$, Φ_t : $\mathbb{R}\times M \to \mathbb{R}\times M$ формулой $\Phi_t(s,m) = (s+t,m)$. Отсюда прямо вытекает эквивалентность потока Φ, т.е. выполнение условия

$$\Phi_t \circ \alpha^{k} = \alpha^{k} \circ \Phi_t \;;\quad k\in\mathbb{Z},\ t\in\mathbb{R} .$$

Следовательно, поток Φ порождает поток φ, φ_t : $M_0 \to M_0$, по формуле

$$\varphi_t\,(\mathbb{Z}(s,m)) = \mathbb{Z}(\Phi_t\,(s,m)) = \mathbb{Z}(s+t,m),$$

где $\mathbb{Z}(s,m)$ - $\mathbb{Z}$ - орбита, проходящая через точку $(s,m)\in\mathbb{R}\times M$. Исходя из того, что f - диффеоморфизм, можно показать, что φ : $\mathbb{R}\times M_0 \to M_0$ - гладкий поток. Поток φ называем <u>надстройкой</u> над f. Если обозначить через π : $\mathbb{R}\times M$ каноническую проекцию на M_0, то $\Sigma = \pi(\{0\}\times M)$ - секущая для потока φ, которая является (при помощи π) диффеоморфной многообразию M. Надстройка является специальным случаем общей конструкции специального потока под функцией ψ, а именно, она отвечает $\psi \equiv 1$ (см. рис. 3). На самом деле, для любой точки $\mathbb{Z}(0,m)\in\pi(\{0\}\times M)$, $\varphi_1(\mathbb{Z}(0,m)) = \mathbb{Z}(0,f^{-1}(m))\in\Sigma$ и $t=1$ - наименьшее $t>0$, для которого $\varphi_t(\mathbb{Z}(0,m))\in\Sigma$. Поскольку диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M \ni m & \xmapsto{\;\;f\;\;} & f(m)\in M \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \Sigma \ni \mathbb{Z}(0,m) & \xmapsto{\;\varphi_1\;} & \mathbb{Z}(1,m)\in\Sigma \end{array}$$

коммутативна, то исходный диффеоморфизм f сопряжен с отображением последования, построенным по потоку φ и секущей Σ.

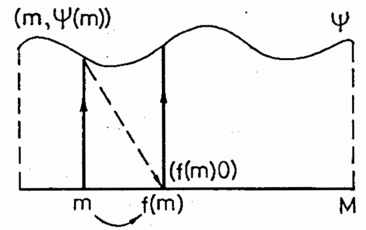


Рис. 3. Специальный поток под Ψ (точки $(m,\Psi(m))$ и $(f(m),0)$ отождествляются.

Конструкцию надстройки или специального потока можно применить и в более общих ситуациях, например, для случаев, когда f - гомеоморфизм или f - обратимое измеримое преобразование. При этом получается соответственно непрерывный или измеримый поток.

Если f - необратимое отображение (эндоморфизм), то применением только что описанной конструкции получаем полупоток $\varphi = \{\varphi_t, t\in\mathbb{R}_+\}$, и для построения потока необходимо применить другую каноническую конструкцию - взятие обратного предела (который, по-существу, является непрерывным аналогом конструкции естественного расширения эндоморфизма /3/). К подробному описанию этой конструкции мы вернемся при исследовании аттрактора Лоренца.

<u>Б. Неустойчивость, геодезические потоки и системы Гамильтона</u>

Рассмотрим в плоскости (x, y) фазовый портрет следующей системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -x,\ \dot{y} = y$$

(см. рис.3). У системы существует единственная неподвижная точка (0,0), и фазовые траектории в окрестности этой точки представляют собой гиперболы. Оказывается, что такого рода неустойчивость фазовых траекторий (иногда ее называют гиперболической) - фактически настолько сильна, насколько это возможно. Поэтому исследование стохастичности

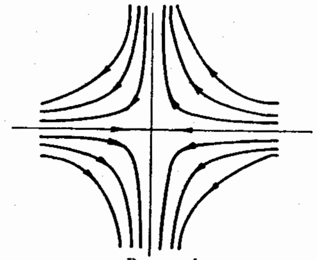


Рис. 4

началось с систем с таким поведением, теперь они называются системами Аносова (/4,5/ ; большое количество примеров из классической механики, которые приводят к системам Аносова, можно найти в /6/). Грубо говоря, диффеоморфизм f (или поток φ) многообразия M называют диффеоморфизмом (потоком) Аносова, если около любой фиксированной траектории $f^k m_0$ (соотв. $\varphi_t\, m_0$) поведение соседних траекторий по отношению к ней напоминает поведение траекторий возле седловой точки (0,0) на рис.3, причем такая "экспоненциальная неустойчивость" является равномерной по m_0 " (к системам такого рода мы вернемся позже и там приведем более точные определения).

Наиболее известный представитель потоков Аносова - это геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны. Они являются частными случаями более общих касательных потоков, которые, в свою очередь, допускают описание при помощи уравнения второго порядка на многообразии. Этим и объясняется тесная связь геодезических потоков с системами Гамильтона. Следуя /4/, остановимся на этой связи более подробно.

Пусть M - риманово многообразие размерности n (точки которого будем обозначать q). Пусть $W-(2n-1)$ - мерное пространство единичных касательных векторов к M , т.е.

$$W=\{w=(q,\xi):\ q\in M,\ \xi\in T_qM,\ |\xi|=1\},$$

т.е. мы понимаем $w=(q,\xi)$ как единичный вектор в направлении вектора ξ , который "укреплен" в точке q . Для произвольного потока $F=\{F_t\}$ на W мы можем для любой траектории $t\mapsto w(t)=(q(t),\xi(t))$ взять ее проекцию $t\mapsto q(t)$ на M . Поток F назовем касательным, если касательная к траектории $t\mapsto q(t)$ (это траектория некоторого потока на M) в каждой точке имеет направление вектора $\xi(t)$.

Пусть TM - касательное расслоение многообразия M . Уравнением второго порядка $\ddot q=f(q,\dot q)$ на M называется гладкий поток $G=\{G_t\}$ на TM , локально имеющий вид

$$\dot q=\xi,\quad \dot\xi=f(q,\xi).$$

Пусть $\pi\ :\ TM\ni(q,\xi)\mapsto q\in M$ - каноническая проекция. Тогда можно определить ее дифференциал как отображение $\tilde\pi_{(q,\xi)}$: $T_{(q,\xi)}M\longrightarrow T_qM$. При этом отображении вектор фазовой скорости потока G переходит в ξ . Если на M задана риманова метрика и, если для любой траектории $t\mapsto(q(t),\xi(t))$ потока G имеем $|\xi(t)|=const$ (т.е. в конфигурационном пространстве скорость по-

стоянна по величине вдоль каждой траектории); то $F=G/W$ - касательный поток.

Если действие потока $F_t\,w$ на элемент $w\in W$ состоит в параллельном переносе w вдоль определяемой им направленной геодезической на расстояние t (см. /7/), то группу $F=\{F_t\}$ называем геодезическим потоком.

Пусть теперь $M-n$ - мерное гладкое многообразие. Рассмотрим систему второго порядка на M , которая в локальных координатах $q^1,\dots,q^n$ задается функцией Лагранжа

$$L(q,\dot q)=\frac12\sum a_{ij}(q)\dot q^i\dot q^j-V(q^1,\dots,q^n),$$

где V - потенциальная энергия, $T=\frac12\sum a_{ij}\,\dot q^i\dot q^j$ - кинетическая энергия. Уравнения движения локально имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0.$$

Перейдем от функции Лагранжа L к функции Гамильтона

$$H(q,p)=\frac12\sum a^{ij}(p)p_ip_j)+V(q),$$

где $p_i=\sum a_{ij}\dot q^j$ и $a^{ij}(q)-(i,j)$ -ый элемент матрицы, обратной к $a_{ij}(q)$. Уравнения движения приобретают вид

$$\frac{dq^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Фазовым пространством теперь будет касательное расслоение T^*M (т.е. пространство дифференциальных 1-форм на TM), и $H(q,p)=const$ является первым интегралом системы. Поэтому уравнение $H(q,p)=h$ определяет некоторое инвариантное многообразие (многообразие постоянной энергии) в фазовом пространстве.

Применим к системе Гамильтона вариационный принцип Мопертьюи-Лагранжа-Якоби. Согласно ему, истинными траекториями гамильтоновой системы на многообразии $H(q,p)=h$ являются экстремали функционала $\int_A^B\sum p_i\,dq^i\ (A,B\in T^*M)$. Если этот функционал записать в форме

$$\int_A^B 2T\,dt=\int_A^B(h-V)^{1/2}\left(\sum a_{ij}\,dq^i dq^j\right)^{1/2},$$

и, если на M определить естественную риманову метрику

$$ds^2=(h-V(q))\sum a_{ij}\,dq^idq^j,$$

то в предположении $h-V(q)>0$ (отсутствие равновесия) мы видим, что траекториями системы служат геодезические линии в M, соответствующие введенной римановой метрике. Скорость движения вдоль геодезических равна $h - V(q)$. Спроектируем канонически поток Гамильтона $F = \{F_t\}$ на пространство W единичных касательных векторов при помощи проекции σ. Тогда получим поток $F_t' w = \sigma F_t \sigma^{-1} w$, $w \in W$, и траектории потока F' проектируются на M в виде геодезических линий, скорость движения по которым равна $h - V(q)$. Искомый геодезический поток получим гладкой заменой времени при помощи функции $q \longmapsto (h - V(q))^{-1}$, вследствие чего скорость движения становится единичной.

В. Стохастичность и эргодическая теория

На плоскости (x , y) большинство решений системы, изображенной на рис. 4, уходит со временем на сколь угодно большое расстояние от начала координат. Однако на компактном многообразии траекториям "некуда деваться", вследствие чего мы ожидаем, что "типичные" траектории будут вести себя весьма нерегулярным образом, и в поведении такой системы будут наблюдаться "стохастические свойства".

Однако при попытке найти строгую формулировку того, что надо понимать под "стохастическими свойствами", встречаем целый ряд трудностей. Мы коснемся этих затруднений последовательно в порядке введения возможных кандидатов (начиная с самого слабого понятия) на понятие "стохастические свойства" (в основном, следуя изложению Синая /8/).

(I) На фазовом пространстве существует вероятностная мера P, инвариантная по отношению к динамической системе (т.е. $P = PF_t^{-1}$, если $F = \{F_t\}$ - поток, $P = Pf^{-1}$, если f - преобразование).

Пусть x - элемент фазового пространства. Инвариантность означает, что для любой фазовой функции f среднее $\int f(x_t)\, P(dx)$ не зависит от t. Для гамильтоновых систем на компактных многообразиях существование инвариантной меры P - простое следствие теоремы Лиувилля.

Забегая вперед, приведем примеры, показывающие, что инвариантность меры вряд ли можно считать подтверждением стохастичности. Первый пример - это только что упомянутые гамильтоновы системы. Как хорошо известно, несмотря на наличие инвариантной меры (которая является нормированным объемом, порожденным римановой метрикой), движения системы на многообразии постоянной энергии - условно-периодические. Второй пример связан с аттрактором Лоренца. Хотя для него существует инвариантная мера, доказана дихотомия типа: либо соответствующая динамическая система перемешивающая (см. ниже), либо существует циклическая компонента в ее спектре /9/. Во втором случае можно показать, что у аттрактора Лоренца имеет место свойство типа интегрируемости пары устойчивых и неустойчивых многообразий, что, несомненно, свидетельствует в пользу отрицания стохастических свойств (более подробно см. в /10/).

Пример 1.1. Пусть $X = [0,1]$, $Tx = x/2$. Тогда мера Дирака $\delta_{\{0\}}$ является единственной (и, следовательно, T - эргодической) Т-инвариантной мерой. Следовательно, эргодическая теорема выполняется в единственной точке $x = 0$.

Более того, высказывание эргодической теоремы оказывается "строго асимптотическим" в следующем смысле. Для любой последовательности $\alpha_n \to 0$ можно найти фазовую функцию g, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \sup \alpha_n^{-1} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(x_j) - \langle g \rangle_P \right| = \infty \quad п.в.$$

(II) Существует инвариантная мера $\bar{P}$, которая является эргодической по отношению к динамической системе. Тогда для $\bar{P}$ почти всех траекторий

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x_t)\, dt = \int f\, d\bar{P}$$

или

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) = \int f\, d\bar{P} \qquad \text{в дискретном случае.}$$

Как мы увидим позже, последнее утверждение может оказаться почти бесполезным из-за того, что множество "типичных" траекторий по отношению к $\bar{P}$ может оказаться слишком бедным (Пример 1.1...). Кроме того, условно-периодические движения не противоречат эргодичности. Поэтому не будем останавливаться на понятии эргодичности и перейдем к следующему свойству:

(III) Поведение автокорреляционной функции

$$b_f(t) = \int f(x_t) f(x)\, \bar{P}(dx) - \left(\int f(x)\, \bar{P}(dx)\right)^2.$$

Если у системы существуют периодические или условно-периодические движения, то $b_f(t)$ тоже будет периодической (соответственно, условно-периодической). Гамильтоновы системы - это примеры таких систем.

Если $b_f(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$ для любой функции $f \in L^2(\bar{P})$, то говорят, что в системе существует перемешивание. Перемешивание строго сильнее эргодичности.

(1У) Близость к последовательности независимых и одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.).

Последовательности н.о.р.с.в. целесообразно считать представителями полностью развитой стохастичности. Если $\bar{P}$ - эргодическая мера, то

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x_t)\,dt - \int f\,d\bar{P} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$$

Центральная предельная теорема утверждает, что с.в.

$$T^{1/2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x_t)\,dt - \int f\,d\bar{P}\right)$$

имеет гауссовское предельное распределение при $T \to \infty$. Таким образом, если центральная предельная теорема имеет место для заданной динамической системы, то можно судить о ее "близости" к последовательности н.о.р.с.в. На самом деле, следуя общеизвестной интерпретации условий центральной предельной теоремы, для достаточно больших T выражение $T^{-1}\int_0^T f(x_t)\,dt$ можно понимать как сумму слабо зависимых (в смысле теории вероятностей) с.в. Формально выполнение условий центральной предельной теоремы требует достаточно быстрого убывания $b_f(t) \to 0$. Итак, близость к последовательности н.о.р.с.в., понимаемая в этом смысле, сильнее перемешивания.

С математической точки зрения естественно дополнить приведенную иерархию понятий следующим:

(У) Мера $\bar{P}$ - бернуллиевская (т.е. допускает модель в виде последовательности н.о.р.с.в.).

Оказывается, что это понятие сильнее перемешивания в любой степени, и во многих случаях можно для бернуллиевских систем доказать не только центральную предельную теорему, но и ее функциональные варианты. Однако с физической точки зрения это понятие до сих пор не нашло столь наглядной физической интерпретации как перемешивание, т.е. убывание корреляций[x)].

x) Оказывается, что иерархия важности понятий и результаты с математической и физической точек зрения несколько различаются. Поэтому мы включили в основной текст лекций те рассуждения, которые нам казались интересными с физической точки зрения. Большинство технических доказательств приведено в дополнениях к отдельным лекциям.

Итак, в центре нашего внимания будут стохастические свойства, которые сильнее эргодичности. Для сохранения последовательности изложения мы все-таки начнем с исследования соотношений между свойствами неустойчивости и существования инвариантных мер. Более того, как было отмечено в разделе А, мы ограничимся, в основном, исследованием одномерной дискретной по времени динамики. Это ограничение позволит нам обойтись без сложного аппарата дифференциальной динамики и одновременно сохранить суть основных идей.

Пусть $T: X \to X$ - измеримое ($T^{-1} B \subset B$) преобразование измеримого пространства (X, B). Если μ - вероятностная мера на (X, B), то $L^1(X,\mu)$ (иногда $L^1(X)$ или $L^1(\mu)$)) обозначает пространство всех μ -интегрируемых функций на X . В эргодической теории исследуются "временные" средние функций $f \in L^1(\mu)$, т.е. существование пределов

$$g_f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x). \qquad (\text{П}.1)$$

Если μ - инвариантная мера $(\mu = \mu T^{-1}$, т.е. $\mu(E) = \mu(T^{-1}E), E \in B)$, то пределы g_f существуют для μ - почти всех $x \in X$, вследствие эргодической теоремы (см. Дополнение). Значит, задачу о существовании пределов (П.1) можно свести к задаче о существовании T -инвариантной вероятностной меры на (X, B).

Теорема П.1. (Крылов-Боголюбов /11/). Пусть X -компактное хаусдорфово пространство и B - это σ - алгебра борелевских подмножеств X . Если $T: X \to X$ - непрерывное, то на (X, B) существует T - инвариантная вероятностная мера μ .

Теорема 1 оказывается частным случаем более общего утверждения, которое мы приведем ниже.

Пример П.1. Пусть $X = [0,1]$, $Tx = x/2$. Для всех $x \in X$ имеем $T^n x \to 0$, т.е. $x_0 = 0$ - неподвижная точка T . Мера Дирака δ_{x_0} является T -инвариантной.

Упражнение П.1. Покажите единственность меры δ_{x_0} . (Указание: для всех $k \in N = \{1, 2, \dots\}$, $T^{-k}[0, 2^{-k}] = [0,1]$).

Пример 1 показывает, что высказывание эргодической теоремы может быть довольно слабым. Ведь в этом примере "для μ - почти всех $x \in X$ " означает то же, что "в единственной точке x_0 ". Поэтому естественно уделить внимание существованию менее тривиальных мер.

Определение П.1. Под мерой будем всюду в дальнейшем подразумевать вероятностную меру. Меру μ на борелевской σ - алгебре в хаусдорфовом топологическом пространстве X будем называть непрерывной, если $\mu\{x\} = 0$ для всех $x \in X$. Если X - борелевское подмножество $\mathbb{R}^n$, то непрерывной будем называть такую меру на X , которая абсолютно непрерывна по отношению к n - мерной Лебега на $\mathbb{R}^n$.

Применительно к гладким динамическим системам существование непрерывной меры исключает устойчивые положения равновесия или предельные циклы. Итак, для того, чтобы вообще непрерывная инвариантная мера могла существовать, естественно исключить свойство сжимаемости T , которое привело в Примере 1 к появлению неподвижной точки:

Определение П.2. Гомеоморфизм T компактного метрического пространства X с метрикой d назовем растягивающим, если

$$\exists\{\varepsilon > 0\}\ \forall\{x, y \in X, x \neq y\}\ \exists\{n \in \mathbb{Z} = \{\dots,-1,0,1,\dots\}\}: \qquad (\text{П}.2)$$
$$d(T^n x, T^n y) \geq \varepsilon.$$

Пример П.2. Пусть S -конечное множество $card(S) \geq 2$. Рассмотрим пространство $S^{\mathbb{Z}}$ всех последовательностей $x = (x_i\ i \in \mathbb{Z}), x_i \in S$. Если в S введена дискретная топология, то $S^{\mathbb{Z}}$ - компактное метрическое пространство по отношению к топологии прямого произведения. В качестве метрики можно взять, например,

$$d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{-|i|} |x_i - y_i|,$$

где $|x_i - y_i| = 1$, если $x_i \neq y_i$ и $|x_i - y_i| = 0$, если $x_i = y_i$. Преобразование сдвига T в пространстве $S^{\mathbb{Z}}$ определяется формулой

$$(Tx)_i = x_{i+1}; \quad x \in S^{\mathbb{Z}}, i \in \mathbb{Z} \qquad (\text{П}.3)$$

и, как нетрудно проверить, T - гомеоморфизм. Более общим образом, если Λ - замкнутое инвариантное ($T\Lambda = \Lambda$) подмножество $S^{\mathbb{Z}}$, то подсдвиг T/Λ снова является гомеоморфизмом компактного метрического пространства Λ .

Упражнение П.2. Подсдвиг T/Λ (в частности, сдвиг T , если взять $\Lambda = S^{\mathbb{Z}}$) - растягивающий гомеоморфизм. Докажите. (Указание: используйте введенную выше метрику и проверьте условие (П.2) для $\varepsilon = 1/2$).

Наименьшее среди чисел ε , удовлетворяющих (П.2), назовем константой растяжения. Эта константа заведомо зависит от выбора метрики d . Но поскольку X -компактное пространство, то любые две эквивалентные метрики автоматически оказываются равномерно эквивалентными. Следовательно, само свойство растягиваемости от выбора метрики не зависит.

Однако определение 2 является довольно ограничительным, поскольку имеет место следующее утверждение.

Теорема П.2. Не существует ни одного растягивающего гомеоморфизма отрезка $[0,1]$.

Этот результат мы приводим без доказательства (на самом деле весьма элементарного), а в качестве иллюстрации рассмотрим "гладкий" случай (см. рис.5).

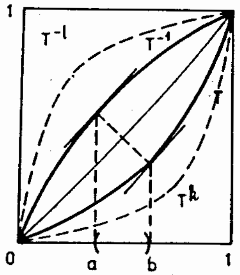


Рис. 5

Если у T график, как на рис. 4, то существует отрезок

$(a,b)\subset[0,1]$, что $|T'x|<1, |(T^{-1})'x|<1$ для $x\in(a,b)$.

Следующий пример показывает, что существуют такие преобразования $T:[0,1]\to[0,1]$, которые не являются ни гомеоморфизмами, ни растягивающими, а все-таки для них существует непрерывная инвариантная мера.

Пример П.3. Пусть $X=[0,1]$ и

$$Tx = \begin{cases}2x, & 0\le x\le 1/2;\\ 2-2x, & 1/2\le x\le 1\end{cases}$$

(см. рис. 6). T не является растягивающим, а мера Лебега m - T-инвариантная. Более того, m является единственной непрерывной инвариантной мерой.

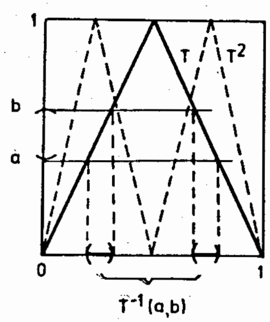


Рис. 6

Упражнение П.3. Докажите эти утверждения. (Указание: $T^{-1}(a,b)=(a/2,b/2)\cup(1-b/2,1-a/2)$. Используйте это для определения σ-алгебры $\mathcal{Y}_T=\{E\in B[0,1]: T^{-1}E=E\}$ всех инвариантных множеств и покажите, что $m(E)\in\{0,1\}$ для всех $E\in\mathcal{J}_T$, т.е. m - эргодическая мера (см. Приложение). Но две эргодические меры либо взаимно ортогональны, либо совпадают. Из этого вытекает единственность меры m).

Несмотря на очень простое определение, у отображения T существует много интересных свойств. Некоторые из них можно описать при помощи символической динамики (подробное изложение методов символической динамики можно найти в лекциях Алексеева /12/, а ее применение к исследованию гладких динамических систем в /13/).

Запишем точку $x\in[0,1]$ в двоичной системе: $x=a_1a_2\ldots$ Тогда $2^k(-1)^{a_k}$ - наклон в T^kx (например, $(T^2)'(1/8)=4(-1)^0=4$, поскольку $1/8=0{,}001$). $T^kx>(<)\,1/2$ в зависимости от того, $a_k+a_{k+1}=1$ или $(=0)$ $(\mathrm{mod}\,2)$. Итак, если для всех $k=0,1,2,\ldots$ мы сможем сказать, будет ли T^kx больше или меньше 1/2, то из этого можно восстановить точку x единственным образом. Пусть $b_k=0$, если $T^kx<1/2$ и $b_k=1$, если $T^kx>1/2$; $k=0,1,2\ldots$ Положим $a_0=b_1$, $a_{k+1}=a_k+b_k\,(\mathrm{mod}\,2)$. Тогда $a_1a_2\ldots$ - исходная двоичная запись числа x (для почти всех x; исключение составляют элементы x счетного множества точек, которые отображаются на 1/2 при некотором $k\ge 0$). Нетрудно показать, что, если точка x соответствует последовательности $\{b_k\}$, то точка Tx соответствует $\{b_{k+1}\}$, т.е. T действует как преобразование сдвига в пространстве двоичных последовательностей. Если отрезки $[0,1/2]$ и $[1/2,1]$ понимать как состояния цепи Маркова, то получается модель схемы Бернулли $B(1/2,1/2)$.

Следовательно, и весьма простые динамические системы могут вести себя таким образом, который мы обычно связываем с интуитивным пониманием стохастичности или случайности. Отображение T весьма поучительно в том, что подсказывает путь обобщения понятия растяжимости гомеоморфизма. На самом деле оно является локальным гомеоморфизмом (т.е. отрезок $[0,1]$ можно покрыть отрезками (в нашем примере - это отрезки $[0,1/2]$ и $[1/2,1]$), гомеоморфными всему $[0,1]$ и локально растягивающими расстояния (см. рис. 7).

Прежде чем заняться отображениями такого типа, мы сформулируем общую теорему существования непрерывных инвариантных мер.

Теорема П.3. /14/ Пусть T - непрерывное отображение хаусдорфова топологического пространства X в себя. Допустим, что существует такая система $A_0,\ldots,A_{N-1}$ $(N>1)$ непустых компактных подмножеств X, что $\bigcap\limits_{k=0}^{N-1} TA_k \supset \bigcup\limits_{k=0}^{N-1} A_k \; ; \; \bigcap\limits_{k=0}^{N-1} A_k = \Phi$, (П.4)

(см. рис.8). Тогда на σ - алгебре $B(X)$ борелевских подмножеств X существует непрерывная инвариантная мера.

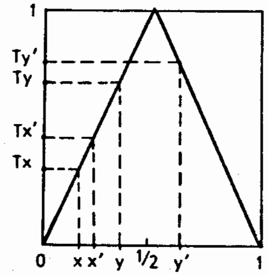


Рис.7. Если $[0, 1/2]$ или $[1/2, 1]$ содержит точки x, x' , то $|Tx - Tx'| > |x - x'|$. Если $y \in [0, 1/2]$, $y' \in [1/2, 1]$, $y \neq y'$ или обратно, то может быть $|Ty - Ty'| < |y - y'|$.

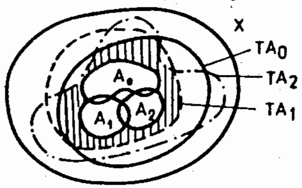


Рис.8. Условие (П.4) ($N = 3$).

Сформулируем в виде леммы один полезный результат.

Лемма П.1. Пусть X и T, как в Теореме 3. Допустим, что μ - T^p - инвариантная мера на $B(X)$ $(p \in N = \{1, 2\})$.
Пусть

$$\bar{\mu}(E) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \mu(T^{-k}E), E \in B(X). \qquad (\text{П}.5)$$

Тогда $\bar{\mu}$ является T -инвариантной. Если $\bar{\mu}$ - T^p - эргодическая (т.е. $\mu(E) \in \{0, 1\}$ для таких $E \in B(X)$, что $T^{-p}E = E$) , то $\bar{\mu}$ - T - эргодическая. Если μ - непрерывная, то $\bar{\mu}$ также является непрерывной.

Упражнение П.4. Докажите. (Указание: инвариантность и эргодичность тривиальны. Для всех $x \in X$ и всех $0 \leq k \leq p-1$, $T^{-k}x \subset T^{-p}(T^{p-k}x)$, и $T^{p-k}x$ является одноточечным множеством, поскольку $p - k \geq 0$. Используйте этот факт для доказательства непрерывности (т.е. $\bar{\mu}\{x\} = 0$ для всех $x \in X$)).

Полное доказательство Теоремы 3 будет получено в дополнении к настоящей лекции. Мы дадим набросок конструкции меры μ , в которой явно используется идея локального гомеоморфизма. Пусть $a = \{a_n\} \in \ell^\infty$, т.е. a - ограниченная последовательность. Пределом Банаха называем функционал $Lim\{a_n\}$ на ℓ^∞ , являющийся расширением линейного функционала

$$L(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

с пространства сходящихся последовательностей на все ℓ^∞. Напомним, что Lim - инвариантный (т.е. $Lim\{a_n\} = Lim\{a_{n+1}\}$ и положительный (если $a_n \geq 0$ для всех $n \in N$, то $Lim\{a_n\} \geq 0$) функционал.

Пусть $Y \subset X$. Отображение $S: Y \to X$ будем называть правым обратным к T , если $SY \subset Y$ и $(T \circ S)(y) = y$ для всех $y \in Y$. Таких обратных S на одном множестве может существовать несколько. Пусть $S_0, \ldots, S_{N-1}$ - правые обратные к T , определенные на том же компактном множестве $Y \subset X$. Пусть $S(k_1, \ldots, k_n) = S_{k_1} \circ \ldots \circ S_{k_n}$ $(k_i \in \{0, \ldots, N-1\};\ 1 \leq i \leq n)$. Фиксируем точку $y_0 \in Y$ и функцию $f \in C(Y)$ и определим функционал A формулой

$$Af = Lim\{N^{-n} \sum f(S(k_1, \ldots, k_n)y_0)\} , \qquad (\text{П}.6)$$

где суммирование проводится по всем возможным наборам $k_i \in \{0, \ldots, N-1\}, 1 \leq i \leq n$. Нетрудно проверить, что A - положительный, линейный и непрерывный функционал на $C(Y)$. Согласно теореме Рисса-Маркова, существует единственная регулярная мера μ' на Y такая, что

$$Af = \int_Y f d\mu' ; \quad f \in C(Y). \qquad (\text{П}.7)$$

Положим

$$\mu(E) = \mu'(E \cap Y), \ E \in B(X). \qquad (\text{П}.8)$$

Лемма П.2. Мера μ является T - инвариантной.

Упражнение П.5. Докажите Теорему 1 как следствие Леммы 2. (Указание: В качестве Y возьмите $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}X$. Тогда $TY = Y$, так что можно определить правое обратное $S \kappa T$).

В заключение лекции отметим следующее. Доказательство теоремы сводится в основном к поиску неподвижной точки отображения $T^*\mu = \mu T^{-1}$ в пространстве мер. Если T не является обратимым, то цели поиска непрерывной инвариантной меры лучше способствует поиск меры на множестве предельных точек последовательности $x,\ T^{-1}x,\ T^{-2}x, \dots$, которое "богаче" множества предельных точек последовательности $x,\ Tx,\ T^2x, \dots$ Это обстоятельство и навеяло приведенную выше конструкцию меры μ.

ДОПОЛНЕНИЕ к Лекции П.

Сначала докажем Лемму 2. Пусть $f \in C(Y)$. Если $x \in Y \cap T^{-1}Y$, то соотношение $x \mapsto f(Tx)$ определяет непрерывную функцию. Обозначим через $f_0 T$ ее (пока произвольное) непрерывное расширение на Y. Следуя определению правого обратного,

$$(f_0 T)(S(k_1,\dots,k_n)y_0) = f(S(k_1,\dots,k_n)y_0).$$

Согласно (П.6),

$$A(f_0 T) = Af;\quad f \in C(Y). \tag{П.9}$$

Если $F \subset X$ - произвольное замкнутое множество, то $F \cap Y$ компактно. Из регулярности меры μ' вытекает

$$\mu(F \cap Y) = \inf\{Af : f \geqslant 0,\ f | F \cap Y = 1\}. \tag{П.10}$$

Теперь выберем подходящим способом одно из непрерывных расширений функции $f_0 T$. Пусть $f \in C(Y),\ f \geqslant 0,\quad f | F \cap Y = 1$. Определим

$$(f_0 T)(x) = \begin{cases} f(Tx), & \text{если } x \in Y \cap T^{-1}Y; \\ 1, & \text{если } x \in Y \cap T^{-1}F. \end{cases}$$

$f_0 T$ является непрерывной и определенной на множестве $Y \cap T^{-1}(F \cap Y)$. Поскольку $f_0 T \geqslant 0$, то, следуя теореме Титца, мы расширим ее на все Y, и это расширение снова обозначим через $f_0 T$. По определению, $f_0 T | Y \cap T^{-1}F = 1$. Используя этот факт вместе с (П.9) и (П.10), получаем

$$\mu'(F \cap Y) = \inf\{A(f_0 T) : f | F \cap Y = 1,\ f \geqslant 0\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf\{Ag : g | T^{-1}F \cap Y = 1,\ g \geqslant 0\} = \mu'(T^{-1}F \cap Y).$$

Итак, $\mu(F) \leqslant \mu(T^{-1}F)$ для всех замкнутых множеств $F \subset X$ (см.(П.8)). Поскольку мера μ является конечной и регулярной, то окончательно получаем $\mu(F) = \mu(T^{-1}F)$. $\square$

Доказательство Теоремы 3. Пусть $Y = \bigcap_{k=0}^{N-1} TA_k$. Для любой точки $y \in Y$ и для любого $0 \leqslant k \leqslant N-1$ существует такая точка $S_k y \in A_k$, что $y = T(S_k y)$. Из Леммы 2 вытекает, что функционал

$$Af = \lim\{N^{-n} \sum f(S(k_1,\dots,k_n)y_0)\},\ f \in C(Y)$$

определяет такую меру μ', что порожденная ею мера μ (см.(П.8)) является T - инвариантной. Покажем непрерывность меры μ. Положим

$$\Delta(k_1,\dots k_n) = (S(k_1,\dots,k_n)Y)^- \tag{П.11}$$

(A^- = замыкание множества A). Поскольку $SY \subset Y$ для любого правого обратного S, то $\Delta(k_1,\dots,k_{n+1}) \subset \Delta(k_1,\dots,k_n) \cap T^{-1}\Delta(k_2,\dots k_{n+1})$. Так как $\Delta_k \subset A_k$ и $\cap A_k = \phi$, то при помощи простого рассуждения по индукции проверяется, что для любого набора $(k_1,\dots k_n)$ имеет место

$$\bigcap_{k=0}^{N-1} \Delta(k_1,\dots,k_n,k) = \phi. \tag{П.12}$$

Итак, для любой точки $x \in X$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ условие $x \in \Delta(k_1,\dots,k_n)$ выполняется для, по крайней мере, $(N-1)^n$ разных векторов $(k_1,\dots,k_n)$. Выберем любое $x_0 \in X$ и $\varepsilon_0 > 0$. Пусть p - настолько большое, что $[(N-1)/N]^n < \varepsilon_0$. Пусть

$$\Delta = \cup\{\Delta(k_1,\dots,k_p) : x_0 \notin \Delta(k_1,\dots,k_p)\}.$$

Если $f \geqslant 1_\Delta$, то для всех $n \geqslant p$ выполнено неравенство

$$N^{-n} \sum f(S(k_1,\dots,k_n)y_0) \geqslant \frac{N^p - (N-1)^p}{N^p} \geqslant 1 - \varepsilon_0.$$

Из свойств предела Банаха вытекает, что $Af \geqslant 1 - \varepsilon_0$ для всех таких f. Следовательно, $\mu(\Delta) \geqslant 1 - \varepsilon_0$. Поскольку $x_0 \notin \Delta$, то $\mu\{x_0\} < \varepsilon_0$. Из-за произвольности x_0 и ε_0 мы окончательно заключаем, что $\mu\{x_0\} = 0$ для любой точки $x_0 \in X$. $\square$

Лекция III. КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Ласота и Йорк /15/ исследовали условия возникновения хаотического поведения траекторий преобразований $T : [0,1] \to [0,1]$. На первый взгляд можно было бы полагать, что условия такого поведения (растягивание расстояний, которое можно выразить через свойство $|T'x| > 1$ производной), могли бы быть достаточными и для существования непрерывной инвариантной меры. Однако эти условия могут оказаться довольно "локальными" в том смысле, что производная $T'x$ будет существовать только для "малого" числа точек. Поэтому приходится наложить на T некоторое условие гладкости. Предложенное Ласотой и Йорком условие таково:

(1) существует $\lambda > 1$, так что для всех $x \in [0,1]$, для которых существует производная $T'x$, выполняется неравенство

$$|T'x| \geqslant \lambda ; \qquad \text{(III.1)}$$

(2) существует такое конечное множество $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$, что отображения $T_i = T|(a_{i-1}, a_i)$ - класса C^2 (т.е. непрерывно дифференцируемы до порядка 2 включительно).

Отображение T из примера II.3 удовлетворяет этому определению. С другой стороны, условие (2) является в какой-то мере парадоксальным. На самом деле, естественно ожидать, что неустойчивость тем больше, чем больше T'. Но условие (2) требует ограниченности производной. Ниже мы приведем примеры, для которых условие (2) нарушается, а все-таки для них будет существовать непрерывная инвариантная мера. Они мотивируют следующее ослабление условия гладкости.

<u>Определение III.1.</u> Отображение $T : [0,1] \to [0,1]$ назовем <u>кусочно класса C^1</u>, если (1) существует такое конечное множество $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$, что $T_i = T|(a_{i-1}, a_i)$ - отображения класса C^1 и (2) функция $1/T_i'(x)$ является абсолютно непрерывной на интервале (Ta_{i-1}, Ta_i); $1 \le i \le n$.

<u>Замечание III.1.</u> Напомним определение и основные свойства абсолютно непрерывных функций. Функцию f на $\mathbb{R}^1$ назовем абсолютно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого семейства попарно непересекающихся отрезков $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ справедливо утверждение

$$[\Sigma_{i=1}^{N} (y_i - x_i) < \delta] \Rightarrow [\Sigma_{i=1}^{N} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon]. \qquad \text{(III.2)}$$

Любая абсолютно непрерывная функция является равномерно непрерывной.

Если $(a,b) \subset \mathbb{R}^1$ - ограниченный отрезок и f - абсолютно непрерывная функция, то полная вариация $\bigvee_a^b f(x)$ от функции f в (a,b) является конечной.

На протяжении всей лекции символом m будем обозначать меру Лебега на $\mathbb{R}^1$ и $L_1[0,1] = L^1([0,1], m)$. В рамках классического подхода Крылова-Боголюбова (см. Теоремы II.1 и II.3) инвариантные меры строятся как неподвижные точки отображения $T^* : \mu \mapsto \mu T^{-1}$ в пространстве мер, сопряженного T. Для поиска непрерывной инвариантной меры более естественным кажется искать ее плотность (по отношению к m) в виде неподвижной точки для некоторого оператора в $L^1[0,1]$. Причем мы ожидаем, что этот оператор будет описывать динамику плотностей.

<u>Определение III.2.</u> <u>Оператором Перрона-Фробениуса</u> отображения $T : [0,1] \to [0,1]$ назовем оператор P_T, определенный соотношениями

$$P_T(f(x)) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{T^{-1}(0,x)} f(s)\, m(ds); \quad f \in L^1[0,1]. \qquad \text{(III.3)}$$

<u>Упражнение III.1.</u> Докажите следующие свойства оператора P_T:

(1) $P_T f \in L^1[0,1]$ для всех $f \in L^1[0,1]$; P_T - непрерывный линейный оператор;

(2) $(f \geqslant 0) \Rightarrow [\forall \{x \in [0,1]\}\ P_T(f(x)) \geqslant 0]$;

(3) $\int_0^1 P_T(f(x))\, m(dx) = \int_0^1 f(x)\, m(dx)$; и

(4) $[P_T f = f] \Leftrightarrow$ мера $d\mu = f dm$ является T - инвариантной.

Мы включаем в основной текст лекций довольно подробное доказательство Теоремы III (см. ниже), поскольку оно объясняет суть метода оператора Перрона-Фробениуса, который будет неоднократно применяться в следующих лекциях.

<u>Теорема III.1</u> /16/. Пусть $T : [0,1] \to [0,1]$ - кусочно класса C^1, и пусть

$$\inf |T'x| \geqslant \lambda > 1, \qquad \text{(III.4)}$$

где инфимум берется по всем таким точкам $x \in [0,1]$, для которых определена производная. Тогда существует непрерывная T-инвариантная мера на $[0,1]$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ - разбиение, которое соответствует T по определению 1. Пусть $\Phi_i = (T_i)^{-1}$ и

$I_i = T(a_{i-1}, a_i)$. Используя (Ш.3) и теорему о замене переменных под знаком интеграла, можно оператор P_T выразить в виде

$$P_T(f(x)) = \sum_{i=1}^n |\Phi_i'(x)| f(\Phi_i(x)) 1_{I_i}(x), \quad (Ш.5)$$

где $|\Phi_i'(x)|$ - определитель якобиана преобразования T_i (эта интерпретация сохраняется и становится более привычной для преобразований $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$). Выберем такое $q \in \mathbb{N}$, что $\rho = \lambda^{-q} < 1/3$, и положим

$$P_T^n(f(x)) = P_T[P_T^{n-1}(f(x))].$$

Обозначим $\gamma = T^q$, $\psi_i = \gamma_i^{-1}$, где γ_i^{-1} - обратные к γ на отрезках (b_{i-1}, b_i), и разбиение $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_N = 1$ соответствует γ. Тогда

$$P_\gamma(f(x)) = P_T^q(f(x)) = \sum_{i=1}^N |\psi_i'(x)| f(\psi_i(x)) 1_{\mathcal{I}_i}(x), \quad (Ш.6)$$

где $\mathcal{I}_i = \gamma(b_{i-1}, b_i)$ и $0 \leq |\psi_i'(x)| \leq \lambda^{-q} = \rho$. Мы утверждаем, что для любой функции f ограниченной вариации верно

$$\limsup_{k\to\infty} \bigvee_0^1 P_T^k(f(x)) < \infty. \quad (Ш.7)$$

Если предположить, что $f \geq 0$, то

$$V_0^1 P_\gamma(f(x)) \leq \sum_{i=1}^N V_{\mathcal{I}_i} |\psi_i'(x)| f(\psi_i(x)) + \rho \sum_{i=1}^N [f(b_{i-1}) - f(b_i)]. \quad (Ш.8)$$

Теперь используем общеизвестные свойства функций ограниченной вариации. Функция ограниченной вариации является такой же на любом ограниченном отрезке (a, b), и

$$V_a^b f(x) = \int_a^b |f'(x)| m(dx).$$

Более того, любая функция ограниченной вариации является непрерывной за исключением, может быть, счетного множества точек. Комбинируя эти утверждения, мы получим

$$\bigvee_{\mathcal{I}_i} |\psi_i'(x)| f(\psi_i(x)) =$$
$$= \int_{\mathcal{I}_i} |\psi_i'(x)| f(\psi_i(x)) m(dx) + \rho \sum |f(x+) - f(x-)|, \quad (Ш.9)$$

где последняя сумма берется по всем точкам разрыва функции f в отрезке $[b_{i-1}, b_i]$. Более того,

$$\int_{\mathcal{I}_i} |[\psi_i'(x) f(\psi_i'(x))]'| m(dx) \leq$$

$$\leq \int_{\mathcal{I}_i} |\psi_i''(x)| f(\psi_i(x)) dm + \int_{\mathcal{I}_i} |\psi_i'(x)| [f(\psi_i(x))]' dm \leq$$
$$\leq \rho \int_{\mathcal{I}_i} |f[\psi_i(x)]'| dm + \int_{\mathcal{I}_i} |\psi_i''(x)| f(\psi_i(x)) dm \leq \quad (Ш.10)$$
$$\leq \rho \int_{b_{i-1}}^{b_i} |f'(x)| dm + \int_{\mathcal{I}_i} |\psi_i''(x)| f(\psi_i(x)) dm.$$

Сочетая (Ш.9) и (Ш.10), получим

$$\bigvee_{\mathcal{I}_i} |\psi_i'(x)| f(\psi_i(x)) \leq \rho \bigvee_{b_{i-1}}^{b_i} f(x) + \int_{\mathcal{I}_i} |\psi_i''(x)| f(\psi_i(x)) dm. \quad (Ш.11)$$

Теперь воспользуемся тем, что, согласно нашему предположению, функция $1/T'$ является абсолютно непрерывной, и оценим интеграл в (Ш.11). Прежде всего, ϕ_i' и ψ_i' являются абсолютно непрерывными, и поэтому можно найти точки t_j^i так, что

$$\gamma(b_{i-1}) \leq t_0^i < t_1^i < \ldots < t_{n_i}^i = \gamma(b_i);$$
$$\int_{t_{k-1}^i}^{t_k^i} |\psi_i''(x)| m(dx) < \rho.$$

Обозначим $I_k^i = [\psi_i(t_{k-1}^i), \psi_i(t_k^i)]$. Тогда

$$\int_{\mathcal{I}_i} |\psi_i''(x)| f(\psi_i(x)) dm \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n_i} \sup_{[t_{k-1}^i, t_k^i]} f(\psi_i(x)) \int_{t_{k-1}^i}^{t_k^i} |\psi_i''(x)| dm \leq \rho \sum_{k=1}^{n_i} \sup_{I_k^i} f(x). \quad (Ш.12)$$

Пусть $\delta_i = \min_k m(I_k^i)$; $\delta_i > 0$ из-за строгой монотонности функций ψ_i. Более того, числа δ_i не зависят от f, а только от T^q. Далее,

$$\sup_{I_k^i} f(x) \leq \bigvee_{I_k^i} f(x) + \inf_{I_k^i} f(x);$$
$$\inf_{I_k^i} f(x) \leq \frac{1}{\delta_i} \int_{I_k^i} f\, dm.$$

Поэтому из (Ш.12) получаем оценку

$$\int_{\mathcal{I}_i} |\psi_i''(x)| f(\psi_i(x)) dm \leq \rho \sum_{k=1}^{n_i} \left(\bigvee_{I_k^i} f(x) + \delta_i^{-1} \int_{I_k^i} f\, dm\right) \leq \quad (Ш.13)$$
$$\leq \rho \int_{b_{i-1}}^{b_i} f\, dm + \rho \delta_i^{-1} \int_{b_{i-1}}^{b_i} f\, dm.$$

Пользуясь (Ш.11) и (Ш.12),

$$\bigvee_{I_i} |\psi_i'(x)|\, f(\psi_i(x)) \le$$

$$\le 2\rho \bigvee_{b_{i-1}}^{b_i} f(x) + \rho\,\delta^{-1}\int_{b_{i-1}}^{b_i} f\,dm; \quad \delta = \min_i \delta_i > 0. \qquad (Ш.14)$$

Подставляя полученные оценки в (Ш.8), получим

$$\bigvee_0^1 P_\gamma(f(x)) \le 2\rho \bigvee_0^1 f(x) + \rho\,\delta^{-1}\|f\|_1 + \rho\sum_{i=1}^{N}[f(b_{i-1}) - f(b_i)], \qquad (Ш.15)$$

где $\|.\|_1$ - обычная норма в $L^1([0,1],m)$. Но одновременно

$$\sum_{i=1}^{N}[f(b_{i-1}) - f(b_i)] \le \sum_{i=1}^{N}\Big(\bigvee_{b_{i-1}}^{b_i} f(x) + 2\inf_{[b_{i-1},b_i]} f(x)\Big) \le$$

$$\le V_0^1 f(x) + \sum_{i=1}^{N} 2|b_i - b_{i-1}|^{-1}\int_{b_{i-1}}^{b_i} f\,dm \le$$

$$\le V_0^1 f(x) + 2\delta^{-1}\|f\|_1 .$$

Если в (Ш.15) положить $H = 3\rho\delta^{-1}$ (H не зависит от f), то независимо от вариации f получаем требуемую оценку

$$\limsup_{n\to\infty} \bigvee_0^1 P_\gamma^n(f(x)) \le H\|f\|_1/(1-3\rho) = K\|f\|_1. \qquad (Ш.16)$$

Стало быть, последовательность $\{P_\gamma^n f\}_{n=1}^{\infty}$ является равномерно ограниченной по норме некоторой константой R для любой функции ограниченной вариации. Пусть $P_T(R) = P_T(f(x))$ для $f(x) \equiv R$. Тогда можно найти такое $\hat{R}_1$, что

$$P_T^n(f(x)) \le \max\{P_T^i(R) : 1 \le i \le q\} \le \hat{R}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

вследствие чего

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_T^i(f(x)) \le \hat{R}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Другими словами, последовательность средних по Чезаро является относительно компактной в $L^1[0,1]$, и поэтому сильно (т.е. в норме $\|.\|_1$) сходится к функции, которая, в свою очередь, и есть неподвижная точка оператора P_T. Одновременно для любой функции $f \in L^1[0,1]$ последовательность

$$\Big\{n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} P_T^i(f(x))\Big\}_{n=1}^{\infty}.$$

сходится к функции $\hat{f}$, для которой

$$\bigvee_0^1 \hat{f}(x) \le const\ \|f\|_1 .$$

Пример Ш.1. (Улам фон-Нейман /17/). Пусть $X = [0,1]$ и $\tilde{T}x = 4x(1-x)$. Пусть T - отображение из примера П.3. Тогда $T = h_\circ \tilde{T}_\circ h^{-1}$, где $h(x) = \frac{2}{\pi}\sin^{-1}(\sqrt{x})$ - гомеоморфизм отрезка $[0,1]$. Итак, динамические системы $([0,1])$ и $([0,1],\tilde{T})$ топологически сопряжены. Следовательно, если существует непрерывная T - инвариантная мера (а это m), то существует и непрерывная $\tilde{T}$ - инвариантная мера, а именно, мера с плотностью

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{2}{\pi}\sin^{-1}(\sqrt{x})\Big) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

С другой стороны, условие (Ш.1) не выполнено для $\tilde{T}$, поскольку точка $x = 1/2$ - критическая для $\tilde{T}$ (т.е. $\tilde{T}'(1/2) = 0$). Следовательно, Теорему 1 нельзя применить для прямого доказательства существования непрерывной $\tilde{T}$ -инвариантной меры. Но нетрудно проверить, что $\tilde{T}$ удовлетворяет более слабым условиям, как это следует из следующей теоремы.

Теорема Ш.2. /16/ Пусть $T : [0,1] \to [0,1]$ кусочно класса C^1 - Допустим, что существует такая функция h, что:

(1) $h(x) > 0\ [m], \int h\,dm = 1$;

(2) $\inf[|T'(x)|\,h(Tx)/h(x)] > 1$; и

(3) $h(x)/h(Tx)\,T'(x)$ - кусочно абсолютно непрерывная.

Тогда существует непрерывная T -инвариантная мера.

Замечание Ш.2. Условия Теоремы 2 являются "почти необходимыми", вследствие чего их невозможно существенно ослабить. На самом деле, допустим, что T является кусочно класса C^1 и существует T - инвариантная мера μ с плотностью f, $f > 0\ [m]$. Тогда $P_T f = f$, т.е.

$$\sum_i |\Phi_i'(x)|\, f(\Phi_i(x)) = f(x).$$

Итак, $|\Phi_i'(x)|\, f(\Phi_i(x)) \le f(x)$, и после простой подстановки

$$|T'(x)|\, f(Tx)/f(x) \geqslant 1 .$$

Доказательство Теоремы 2. Следуя подходу, появившемуся в примере 1, мы используем почти всюду дифференцируемый гомеоморфизм для сведения настоящей ситуации к ситуации, исследованной в Теореме 1. Пусть $g(x) = \int_0^x h\,dm$ и $\tilde{T} = g_\circ T_\circ g^{-1}$. Тогда

$$\tilde{T}'(g(x)) = g'(Tx)\,T'(x)/g'(x) = T'(x)\,h(Tx)/h(x)\ \ [m].$$

Согласно Теореме 1, найдем непрерывную $\tilde{T}$ -инвариантную меру $\tilde{\mu}$. Тогда $\mu = \tilde{\mu}_{\circ} g$ и является искомой мерой.

Пример III.2. (Бунимович /18/). Пусть $X = [0,1]$ и пусть $T_n : X \to X$ определяется соотношениями

$$T_n(x) = n \sin(\pi x) \pmod 1. \qquad \text{(III.17)}$$

Покажем, что для всех $n \geqslant 1$ существует непрерывная T_n -инвариантная мера. Оператор Перрона-Фробениуса явно задается формулой

$$P_{T_n}(f(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} |\phi_i'(x)| \, [f(\phi_i(x)) - f(1-\phi_i(x))],$$

где

$$\phi_i(x) = \pi^{-1} \arcsin[(x+i)/n], \quad 0 \le i \le n-1.$$

Пусть $h(x) = [x(1-x)]^{-1/2}$. Такой выбор можно обосновать особенностями $P_{T_n}^{k}(1)(k \geqslant 2)$ в точках 0 и 1. Эти особенности вследствие предельного перехода переносятся и в плотность искомой инвариантной меры. Если ϕ_i - обратные к T_n, то

$$\alpha_i(x) = |\phi_i'(x)| \, h(\phi_i(x))/h(x) \le \beta < 1.$$

Этого, следуя Теореме 2, будет достаточно для существования непрервной T_n -инвариантной меры. Подставляя выражения для ϕ_i и h в последнюю формулу, получим

$$\alpha_i(x) = \sqrt{x(1-x)} \, [(n^2-(x+i)^2]^{1/2} \times$$

$$\times [\arcsin\left(\tfrac{x+i}{n}\right)(\pi - \arcsin\left(\tfrac{x+i}{n}\right))]^{-1/2}, \qquad 0 \le i \le n-1.$$

Оценим α_0, α_{n-1} и $\alpha_i \, (1 \le i \le n-2)$ по отдельности. Для $i=0$ имеем

$$\alpha_0(x) = [x(1-x)]^{1/2}(n^2-x^2)^{1/2} [\arcsin(\tfrac{x}{n})(\pi - \arcsin(\tfrac{x}{n}))]^{-1/2}$$

$$= \frac{(x/n)^{1/2}}{(\arcsin(x/n))^{1/2}} \cdot \frac{(1-x)^{1/2}}{(n^2-x^2)^{1/2}} \cdot \frac{n^{1/2}}{(\pi - \arcsin(x/n))^{1/2}} \le$$

$$\le (2/\pi)^{1/2} < 1.$$

Для $i = n-1$ мы имеем

$$\alpha_{n-1}(x) = [x(1-x)]^{1/2} [(1-x)(2n-1+x)]^{1/2} \times$$

$$\times [\arcsin((x+n-1)/n)(\pi - \arcsin((x+n-1)/n))]^{-1/2} \le$$

$$\le (2n-1)^{-1/2} < 1.$$

Для $1 \le i \le n-2$ имеем

$$\alpha_i(x) = [x(1-x)]^{1/2} [(n^2-(x+i)^2]^{1/2} \times$$

$$\times [\arcsin((x+i)/n)(\pi - \arcsin((x+i)/n))]^{-1/2} \le$$

$$\le [n^2-(n-1)^2]^{-1/2} [\arcsin(\tfrac{i}{n})(\pi - \arcsin(\tfrac{1+i}{n}))]^{-1/2} \le$$

$$\le [(2n-1)\tfrac{i}{n}\,\tfrac{\pi}{2}]^{-1/2} < 1.$$

Замечание III.3. Существование непрерывных инвариантных мер для классов $T_n x = 4nx(1-x) \pmod 1 (n \in N)$ и $T_\alpha x = (4x(1-x))^{1/\alpha} \; (1 \le \alpha \le 5)$ можно доказать таким же способом при помощи подходящего выбора функции h и с использованием Теоремы 2.

Замечание III.4. Результаты, родственные Теореме 1, получил с использованием, по-существу, сходного метода также Вонг /19/. В этой работе оправдано мнение о том, что ослабление первоначального определения Ласоты и Йорка (см. опр. 1) представляет не только теоретический интерес. А именно, определение 1 допускает существование у T особенностей типа "острого пика" (т.е. $|T'| \to \infty$). Особенности такого типа появляются в отображениях отрезка, связанных с аттрактором Лоренца.

Отображения $T_A x = Ax(1-x)$ $(0 \le A \le 4)$ единичного отрезка привлекают в последнее время особое внимание благодаря возможности моделирования с их помощью простых систем популяционной динамики /20-22/. В классическом случае A = 4, см. пример Ш.1. Оказалось, что вообще проблема существования непрерывных инвариантных мер оказывается довольно сложной.

Для A ≈ 3,678 (значение A выбирается из условия попадания третьей итерации критической точки, $T_A^3(1/2)$, в неустойчивую неподвижную точку $x = 1 - 1/A$) Рюэль доказал существование непрерывной T_A - инвариантной меры. Боуэн /13/ исследовал достаточные условия для существования такой меры, когда критическая точка является прообразом неустойчивой периодической точки. Этот подход допускает следующее обобщение:

Существует счетное множество $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,4]$, такое, что критическая точка (x = 1/2 для всех A) является прообразом отталкивающей периодической точки k -ой степени $T_{A_k}^{k}$, $k \in N$. Из этого можно вывести, что существует непрерывная инвариантная мера на некотором отрезке $[a,b] \subset [0,1]$ (в настоящем случае это можно доказать несложным сведением к Теореме Ш.2). Наконец, для получения меры на $[0,1]$ следует использовать общую конструкцию, изложенную в Лекции П. Полное доказательство приведено в дополнении.

Теорема 1У.1. Допустим, что для $A \in [0,4]$ справедливы гипотезы:

(1) существует такое $n \in N$, что $T_A^n(1/2) = 1 - T_A^{2n}(1/2)$ и $T_A^n(1/2) < 1/2$, и

(2) если $I = (T_A^n(1/2), T_A^{2n}(1/2))$, то $T_A^n I = I$ и для всех $1 \le i \le n-1$, $T_A^i I \cap (1/A, 1 - 1/A) = \varnothing$.

Тогда существует непрерывная T_A -инвариантная мера. Более того, множество значений $A \in [0,4]$, удовлетворяющих условиям (1) и (2), является бесконечным.

Рюэль высказал гипотезу, согласно которой множество тех значений A, для которых существует непрерывная инвариантная мера, имеет мощность континуума и даже положительную меру Лебега. Но идея, приводящая к формулировке Теоремы 1, не позволяет выйти за рамки счетного множества параметров A. Значительный прогресс в направлении этой гипотезы был достигнут Якобсоном /24/. Результаты Якобсона касаются общих однопараметрических классов преобразований отрезка, а именно:

(1) кусочно-гладкие классы $x \mapsto \lambda . T(x) \pmod 1$, где λ - большой параметр и T - такое отображение $[0,1] \to [0,1]$, что

$T(0) = T(1) = 0$, T класса C^3, и у T существует единственная невырожденная критическая точка;

(2) гладкие классы $x \mapsto \lambda x(1-x)$, $0 \le \lambda \le 4$, и $x \mapsto \lambda T(x)$, где T является достаточно близким (в классе C^3-функций) к $x \mapsto x(1-x)$.

Теорема 1У.2. Пусть $T_\lambda : x \mapsto \lambda . T(x) \pmod 1$ - кусочно-гладкий класс. Тогда можно найти $T_0 > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ такое $L(\varepsilon)$, что для $L \ge L(\varepsilon)$ отрезок $[L, L+T_0]$ содержит множество $\mathcal{M}$ со свойствами:

(1) $m(\mathcal{M}) > T_0 - \varepsilon$ и

(2) если $\lambda \in \mathcal{M}$, то T_λ допускает непрерывную инвариантную меру μ_λ.

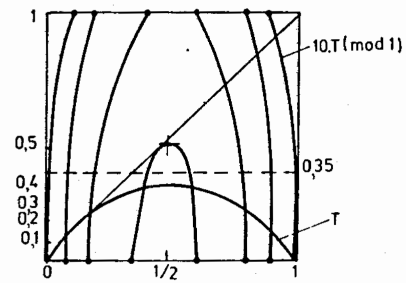


Рис.9. График (симметричен относительно критической точки $X = 1/2$) T и соответствующего преобразования λT, $\lambda = 10$.

Обсудим смысл λ. Если на рис. 9 взять вместо T отображение $T_A = Ax(1-x)$ при A, достаточно малом для того, чтобы $T_A'(0) < 1$, то 0 является устойчивой (и единственной) неподвижной точкой.

При большом λ мы получим много ветвей с большим модулем производной, следовательно, с большой неустойчивостью. При этом λ должно быть достаточно большим, чтобы на новом графике не сохранилась "карикатура" исходного отображения T (см. среднюю ветвь на рис. 9). Ниже мы приведем более точные формулировки.

Теорема 1У.3. Пусть λ - один из перечисленных выше гладких классов. Тогда существует такое множество $\mathcal{M}$ положительной меры Лебега, что для любого $\lambda \in \mathcal{M}$, T_λ допускает непрерывную инвариантную меру.

Смысл числа T_0 в Теореме 2 следующий. Рассмотрим класс $T_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x) \pmod 1$. Число T_0 выбирается таким образом, чтобы при изменении λ в пределах отрезка $[L, L+T_0]$ образ критической точки (в нашем случае $T_\lambda(1/2) = \lambda/4 \pmod 1$) пробегал весь отрезок $[0, 1]$. Следовательно, $T_0 = 4$.

Итак, мы должны для любого $\varepsilon > 0$ найти такое $L(\varepsilon)$, что при $L \geqslant L(\varepsilon)$ отрезок $[L, L+4]$ содержит такое подмножество $\mathcal{M}$, что выполняются заключения Теоремы 2.

Для гладкого отображения $g(\lambda, x)$ обозначим $Dg = \partial g(\lambda,x)/\partial x$ и $\partial^2 g(\lambda/x)/\partial x^2 = D^2 g$. В основе доказательства Теоремы 2 лежит конструкция некоторого разбиения ξ_λ отрезка $[0,1]$ для $\lambda \in \mathcal{M}$. Элементами разбиения ξ_λ служат такие отрезки $\Delta_i(\lambda)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, что:

(1) $\Delta_i(\lambda)^0 \cap \Delta_j(\lambda)^0 = \phi$, если $i \neq j$ ($E^0 =$ внутренней части E);

(2) $\forall\{i \geqslant 0\}\exists\{n_i \in N\}$ $T_\lambda^{n_i}$ является диффеоморфизмом отрезка $\Delta_i(\lambda)$ на $[0,1]$;

(3) $\exists\{C_0 > 0\}$ $\inf\ \min |DT_\lambda^{n_i}(x)| > \lambda^{C_0}$ (мы считаем $\lambda\,\Delta_i \in \xi_\lambda x \in \Delta_i$ большим параметром, так что это условие характеризует неустойчивость траекторий); и

(4) $\exists\{t_1 > 0\}\sup\ \max\ m(\Delta_i)\left|D^2 T_\lambda^{n_i}(x)/DT_\lambda^{n_i}(x)\right| < 1 + \lambda^{-t_1}\Delta_i \in \xi_\lambda x \in \Delta_i$.

Из этих свойств вытекает, что

$$\mathcal{X}(\lambda) = \cup\{\Delta_i(\lambda) : \Delta_i(\lambda) \in \xi_\lambda\} = [0,1] (\mathrm{mod}\, m)$$

(т.е. равенство справедливо за исключением, быть может, множества нулевой меры Лебега).

Множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{X}(\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{M}$ строятся по индукции. Множество $\mathcal{M}$ получаем как пересечения $\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_1 \cap \ldots$, где $\mathcal{M}_0 = [N_0, N_0+4]$ и $\mathcal{M}_{n+1} \subset \mathcal{M}_n$ (N_0 - достаточно большое), причем найдутся $t_2 > 0$ и последовательность ε_n, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n = O(\lambda^{-t_2}),\ m(\mathcal{M}_{n+1}) > (1 - \varepsilon_{n+1})\, m(\mathcal{M}_n).$$

На каждом шаге n, для любого $\lambda \in \mathcal{M}_{n-1}$ определяется множество $\mathcal{X}_n(\lambda) \subset [0,1]$, которое, в свою очередь, опять является счетным объединением отрезков $\Delta_i^{(k)}(\lambda), i \geqslant 0, 1 \leq k \leq n$. Эти отрезки строятся согласованным способом, т.е. они уже не меняются при переходе к следующим шагам. Более того, можно провести конструкцию таким образом, чтобы $\mathcal{X}_n(\lambda) \subset \mathcal{X}_{n+1}(\lambda)$ и $m(\mathcal{X}_n(\lambda)) > 1 - \lambda^{-nt_3}$ $(t_3 > 0)$. В качестве $\mathcal{X}(\lambda)$ возьмем объединение $\mathcal{X}_1(\lambda) \cup \mathcal{X}_2(\lambda) \cup \ldots$ Следовательно, любой элемент $\Delta_i(\lambda)$ разбиения ξ_λ был построен на каком-нибудь шаге, т.е. $\Delta_i(\lambda) = \Delta_i^{(n)}(\lambda)$ для некоторого n.

Поэтому можно определить вспомогательное отображение $\widetilde{T}_\lambda : \mathcal{X}(\lambda) \to [0,1]$, взяв $\widetilde{T}_\lambda | \Delta_i(\lambda) = T_\lambda^{n_i}$, где n_i - номер шага, на котором было построено множество $\Delta_i(\lambda)$. Из-за (1)-(4) работает критерий Адлера (/25/, см. также /26/ и Замечание 1У.0), согласно которому существует непрерывная $\widetilde{T}_\lambda$-инвариантная мера ν_λ на $[0,1]$. Более того, можно найти такое $c > 0$, что $\rho_\lambda(x) = (d\nu_\lambda/dm)(x) > c$ и ρ_λ - непрерывная функция. Мы сейчас покажем, каким способом получить искомую меру μ_λ из ν_λ. Снова в качестве иллюстрации рассмотрим класс $T_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x)(\mathrm{mod}\, 1)$. Можно показать, что $\sum_{\Delta_i \in \xi_\lambda} n_i \nu_\lambda(\Delta_i) < \infty$. Для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset [0,1]$ определим

$$\mu_\lambda(A) = \sum_{\Delta_i \in \xi_\lambda} \sum_{0 \leq j < n_i} \nu_\lambda(T_\lambda^{-j} A \cap \Delta_i) \tag{1У.1}$$

(напомним, что n_i - это то n, для которого $\Delta_i = \Delta_i^{(n)}(\lambda)$). Известный результат об интегрируемости рядов положительных функций влечет за собой абсолютную непрерывность μ_λ по отношению к m. Согласно (1У.1),

$$\mu_\lambda(T_\lambda^{-1} A) = \sum_{\Delta_i \in \xi_\lambda} \sum_{0 \leq j < n_i} \nu_\lambda(T_\lambda^{-j}(T_\lambda^{-1} A) \cap \Delta_i). \tag{1У.2}$$

Ясно, что слагаемые в правых сторонах (1У.1) и (1У.2) совпадают, за исключением слагаемых в (1У.1) для $j = 0$ и слагаемых в (1У.2) для $j = n_i - 1$. Но первые из них дадут в совокупности

$$\sum_{\Delta_i \in \xi_\lambda} \nu_\lambda(A \cap \Delta_i) = \nu_\lambda(A),$$

а другие в совокупности дадут

$$\sum_{\Delta_i \in \xi_\lambda} \nu_\lambda(T_\lambda^{-n_i} A \cap \Delta_i) = \sum_{\Delta_i \in \xi_\lambda} \nu_\lambda(\widetilde{T}_\lambda^{-1} A \cap \Delta_i) = \nu_\lambda(\widetilde{T}_\lambda^{-1} A).$$

Но $\nu_\lambda = \nu_\lambda \widetilde{T}_\lambda^{-1}$. Следовательно, $\mu_\lambda = \mu_\lambda T_\lambda^{-1}$, что и требовалось доказать.

Доказательство Теоремы 3 можно свести к доказательству Теоремы 2. В частности, можно показать, что инвариантная мера сосредоточена на отрезке $[T_\lambda^2(1/2), T_\lambda(1/2)]$ (см. замечание перед формулировкой Теоремы 1). Для подробного доказательства читатель должен познакомиться с /24/.

Замечание 1У.0. (Критерий Адлера). Как видно из только что описанного доказательства (см. также рис. 9), задача сводится к поиску непрерывной инвариантной меры кусочно-монотонного преобразования отрезка.

Теорема 1У.4. Пусть $T : [0,1] \to [0,1]$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) T - кусочно-монотонное (допускается наличие счетного числа отрезков строгой монотонности);

(2) при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ интервал $[0,1]$ можно разбить на конечное или счетное число интервалов $\Delta^{(n)}_{i_1\ldots i_n}$ $(1 \le i_1, \ldots, i_n < \infty)$ так, что:

$$(2i)\qquad \bigcup_{i_n} \Delta^{(n)}_{i_1\ldots i_n} = \Delta^{(n-1)}_{i_1\ldots i_{n-1}} \quad (n \geqslant 1),$$

$$(2ii)\qquad T(\Delta^{(n)}_{i_1\ldots i_n}) \subset \Delta^{(n-1)}_{i_2\ldots i_n} \quad (n \geqslant 1),$$

$$(2iii)\qquad \Delta^{(0)}_1 = [0,1],\ \Delta^{(1)}_i = \Delta_i;$$

(3) существует такое s, что

$$\inf_{\Delta_i}\ \inf_{x\in\Delta_i} \left|\frac{dT^s}{dx}\right| = \lambda > 1,$$

$$(4)\qquad \sup_{\Delta_i}\ \sup_{x_1,x_2\in\Delta_i} \left|\frac{d^2T}{dx^2}(x_1)\Big/\left(\frac{dT}{dx}(x_2)\right)^2\right| = C < \infty.$$

Тогда для T существует непрерывная инвариантная мера.

Условие (2) легко проверить в нашем случае, так как $T(\Delta_i) = [0,1]$, $i = 1, 2, \ldots$ В одной из последующих лекций мы будем иметь дело с обобщением критерия Адлера.

Замечание 1У.1. Забегая вперед, можно показать, что динамические (метрические) системы $(\tilde{T}_\lambda, \nu_\lambda)$ и (T_λ, μ_λ) являются точными (в частности, у них существует перемешивание, т.е. убыванием корреляций; см. Лекцию 1), и их естественные расширения - это автоморфизмы Бернулли.

Замечание 1У.2. Пусть T - непрерывное преобразование метрического пространства X, и пусть μ - вероятностная мера на $\mathcal{B}(X)$. Обозначим через d метрику в X. Будем говорить, что у T чувствительная зависимость от начальных данных, если

$$\exists\{Y\in\mathcal{B}(X)\}\exists\{\varepsilon>0\}[\mu(Y)>0]\&[\forall\{x\in Y\}\exists\{U\ni x\}$$
$$\exists\{y\in U\}\exists\{n\geqslant 0\}\, d(T^n x, T^n y)>\varepsilon]$$

(см. /27/). Для $X = [0,1]$, T_λ, μ_λ $(\lambda\in\mathcal{M})$ из Теорем 2 и 3 это условие выполнено. Однако неизвестно, достаточно ли лишь только этого условия для существования непрерывной инвариантной меры.

Дополнение к Лекции 1У

Докажем Теорему 1. Для доказательства первого утверждения проверим условия Теоремы Ш.2: Пусть

$$h(x) = k\{[|(T_A^n(1/2)-x)(T_A^{2n}(1/2)-x)|]^{1/2}\}^{-1},$$

где k - нормирующая константа. Мы утверждаем, что

$$R(x) = |(T_A^n)'(x)|\, h(T_A^n x)/h(x) \geqslant \sqrt{8/A} \geqslant \sqrt{2}. \qquad (1У.3)$$

Используя определение h, запишем $R(x)$ в виде

$$R(x) = A^n|(1-2x)\ldots(1-2T_A^{n-1}x)| \times$$
$$\times[|(T_A^n(1/2)-x)(T_A^{2n}(1/2)-x)|]^{1/2} \times$$
$$\times[|(T_A^n(1/2)-T_A^n x)(T_A^{2n}(1/2)-T_A^n x)|]^{-1/2}. \qquad (1У.4)$$

Для $n > 1$ мы имеем

$$|T_A^n x - T_A^n y| = A^n|(x-y)(x+y-1)(T_A x + T_A y - 1)\ldots(T_A^{n-1}x + T_A^{n-1}y - 1)|.$$

Согласно предположению,

$$|T_A^n(1/2) + x - 1| = |T_A^{2n}(1/2) - x|,$$

так что из (1У.4) мы получаем

$$R(x) = 2\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{4|T_A^i x - 1/2|^2}{|(T_A^i(1/2)-1/2)+(T_A^i x-1/2)|.|(T_A^{n+i}(1/2)-1/2)(T_A^i x-1/2)|}\right\}^{1/2}. \qquad (1У.5)$$

Из условий (1) и (2) вытекает, что $T_A^i I \cap T_A^{i+1} I = \phi$. На самом деле, из непустоты последнего пересечения вытекает, что $T_A^{n-1} I \cap T_A^n I \neq \phi$. Но это противоречит условиям $T_A^n I \subset [1/A, 1-1/A]$, $T_A^{n-1} I \cap (1/A, 1-1/A) = \phi$. Поэтому для любых $x, y\in I$ и i верно неравенство

$$|T_A^i x - 1/2| \geqslant |T_A^{i+1} y - 1/2|.$$

Используем это для оценки снизу выражения в (1У.5):

$$R(x) \geqslant 2\left\{\frac{4|T_A^{n-1}x - 1/2|^2}{|(T_A(1/2)-1/2)+(T_A x-1/2)|.|(T_A^{n+1}(1/2)-1/2)(T_A x-1/2)|}\right\}^{1/2}. \qquad (1У.6)$$

Поскольку $|T_A^{n-1}x - 1/2| \geqslant |1/A - 1/2|$ и $|T_A x - 1/2| \leqslant |A/4 - 1/2|$, то из (1У.6) следует $R(x) \geqslant \sqrt{8/A}$. Согласно Теореме Ш.2, существует непрерывная T_A^n -инвариантная мера μ'. Из Леммы II.1 вытекает, что мера

$$\mu = n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} \mu' T_A^{-i}$$

является непрерывной и T_A - инвариантной.

Теперь покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ можно найти $A \in [0,4]$, удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть $g_n(A) = T_A^n(1/2)$ и $A_n = \sup\{A \le 4 : g_n(A) = 1/2\}$. Мы утверждаем, что

$$g_n'(A) \le -1/4 \quad \text{для} \quad A \in [A_n, 4]. \qquad (1У.7)$$

Докажем это индукцией по n. Для $n = 2$, $g_2(A) = (1 - A/4) \times (A^2/4)$ и $g_2'(A) = A/2 - 3A^2/16$, т.е. $g_2'(A) \le -1/4$ для $A \in [A_2, 4]$. Пусть (1У.7) верно для всех $i \le n-1$. Используем рекуррентное соотношение

$$g_n(A) = A^{-1} g_n(A) + A g_{n-1}'(A)(1 - 2g_{n-1}(A)).$$

Поскольку $g_n(A) \le 1/2$ для $A \in [A_n, 4]$, то $g_{n-1}(A) \le 1/2 - 1/2[(A-2)/A]^{1/2}$ для $A \in [A_n, 4]$. Следуя предположению индукции, $g_n'(A) \le 1/2 A - (A/4)[(A-2)/A]^{1/2} \le -1/4$, и тем самым (1У.7) доказано. Из определения A_n следует, что для $A \in [A_n, 4]$,

$$T_A^2(1/2) \le T_A^3(1/2) \le \dots \le T_A^n(1/2) \le T_A(1/2).$$

Значит, в подходящей окрестности точки A_n верно неравенство $g_{2n}(A) \ge g_n(A)$. Более того,

$$|g_{2n}(A) - g_n(A)| = A^n |(g_n(A) - 1/2)^2 (g_{n+1}(A) + g_1(A) - 1) \times \dots$$
$$\dots \times (g_{2n-1}(A) + g_{n-1}(A) - 1)|.$$

Поэтому для $A = A_n$, $(g_{2n}(A) - g_n(A))' = 0$. Но одновременно $g_n'(A) < -1/4$, и поэтому $g_{2n}(A) + g_n(A) < 1$ в подходящей окрестности справа от точки A_n. С другой стороны, $g_{n+2}(A_n) = g_2(A_n) < 1/2$ и $g_{n+2}(\bar{A}) = 1 - (1/\bar{A}) > 1/2$, если $\bar{A} \in [A_n, 4]$ удовлетворяет равенству $g_n(\bar{A}) = 1/\bar{A}$. Но тогда с необходимостью существует такое $A \in [A_n, \bar{A}]$, что $g_{n+2}(A) = 1/2$. Следовательно, должно существовать $A^* \in [A_n, \bar{A}]$ со свойством $g_{2n-1}(A^*) = 1/2$. Итак, $g_{2n}(A^*) = A^*/4$ и $g_{2n}(A^*) + g_n(A^*) > 1$. Теперь уже нетрудно видеть существование $A \in [A_n, A^*]$, для которого выполняется $g_{2n}(A) = 1 - g_n(A)$. Оставшаяся часть доказательств тривиальна.

□

Лекция У. УСЛОВНО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ

В настоящей лекции мы будем заниматься отображениями $T: A \to \mathbb{R}^n$, где A - открытое подмножество $\mathbb{R}^n (n \ge 1)$. Нашей целью является обобщение метода оператора Перрона-Фробениуса (а именно, идеи доказательства Теоремы Ш.1) на этот случай. Однако переход к многомерной динамике не является самой главной задачей, которую мы ставим перед собой.

На отображения T мы наложим определенные свойства растягиваемости, в частности, будет иметь место включение $A \subset TA$. Но если $TA \setminus A \ne \phi$, то для почти каждой точки $x \in A$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $T^n x \notin A$. Допустим, что в начальный момент времени точка $x \in A$ выбирается в соответствии с заданной мерой μ_0. Тогда $Prob[Tx \in A] = \mu_0(T^{-1}A)$. Пусть

$$\mu_1(E) = \mu_0(T^{-1}E)/\mu_0(T^{-1}A), E \in \mathcal{B}(A). \qquad (У.1)$$

<u>Определение У.1.</u> Меру μ_0 назовем <u>условно-инвариантной</u>, если $\mu_1(E) = \mu_0(E)$ для всех $E \in \mathcal{B}(A)$.

Объясним смысл этого определения (см. рис.10). Пусть

$$p_n = Prob[x \in A, \dots, T^n x \in A]$$

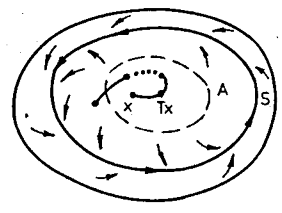


Рис. 10

Поскольку для любой точки $x \in A$ найдется $n \in \mathbb{N}$, $T^n x \notin A$, то мы ожидаем, что $p_n \to 0$. Как быстро убывает p_n? Если μ - условно-инвариантная мера и если $k = \mu(T^{-1}A)$, то

$$\lim_{n \to \infty} k^{-n} p_n = const,$$

т.е. убывание происходит с экспоненциальной скоростью. На рис.10 изображена одна такая ситуация. Множество A - это множество "хаотических осцилляций" траекторий, а S - притягивающий предельный цикл. Если нет устойчивости хаотического поведения (т.е. $TA \supset A$ - траектории раньше или позже выходят за рамки хаотического движения), то для почти всех точек $x \in A$ траектория $x, Tx, T^2x, \dots$ притягивается к S, хотя на каком-то участке времени она может вести себя весьма хаотическим образом (более подробно мы рассмотрим эту ситуацию в следующей лекции).

Теперь обратимся к точным определениям. Мы предполагаем, что $A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$, где A_i - попарно непересекающиеся открытые и связанные подмножества $\mathbb{R}^n$. Для любого $1 \le i \le p$ требуем существования такого числа $\delta_i > 0$, что любые две точки в A_i можно соединить кусочно-линейной дугой длины, не превосходящей δ_i. Наименьшее такое число δ_i назовем дуговым диаметром A_i.

Пусть $B = A \cap T^{-1}A$. Мы требуем, чтобы первые и вторые производные существовали в каждой точке B и являлись равномерно ограниченными в совокупности. Если через $|y|$ обозначить евклидову норму вектора $y \in \mathbb{R}^n$, то матрицу M (порядка $n \times n$) назовем λ-растягивающей), если $\inf\{|M.\vartheta| : |\vartheta| = 1\} \ge \lambda$.

Определение У.2. Отображение $T: A \to \mathbb{R}^n$ назовем растягивающим, если:

(1) $A \subset TA$;

(2) $A \cap T(\partial A) = \phi$, где ∂A - граница множества A; и

(3) существует такое $\lambda > 1$, что матрица Якоби $DT(x)$ отображения T в точке x является λ-растягивающей для всех $x \in B = A \cap T^{-1}A$.

Поскольку все множества $A_1, \dots, A_p$ являются "дугово-связанными", то $m(A) < \infty$ (где m - это n-мерная мера Лебега). Мы будем считать, что $m(A) = 1$. Следующее понятие - обобщение понятия топологической транзитивности, которое, в свою очередь, оказывается топологической аналогией понятия эргодичности.

Определение У.3. Отображение T назовем покомпонентно-транзитивным, если для любой пары (i,j), $1 \le i$, $j \le p$ найдется такое $n = n(i,j) \in \mathbb{N}$, что $A_i \cap T^n A_j \ne \phi$.

Как мы уже отмечали в Лекции Ш, оператор Перрона-Фробениуса описывает динамику плотностей. Следующее определение делает это утверждение более наглядным.

Определение У.4. Для $f \in C(A)$ обозначим через μ_f меру с плотностью f, т.е. $d\mu_f = f dm$. Пусть $\|\cdot\|_1$ - обычная L^1 - норма в пространстве $L^1(A) = L^1(A, m)$. Положим

$$P_1(f(x)) = [d(\mu_f T^{-1})/dm](x).$$

Если $\|P_1(f)\|_1 > 0$, то оператор Перрона-Фробениуса P (в пространстве $L^1(A)$) определяется соотношением

$$P(f) = P_1(f)/\|P_1(f)\|. \qquad (У.2)$$

Упражнение У.1. Докажите:

(1) $[f \ge 0$ всюду на $A] \Rightarrow [P(f) \ge 0$ всюду на $A]$;

(2) $\int_A P(f)\,dm = 1$;

(3) $[P(f) = f] \Leftrightarrow$ /мера μ_f - условно-инвариантная/.

Замечание У.1. Связь с определением Ш.2, на первый взгляд, не кажется ясной. Однако для $x \in A$ множество $T^{-1}x$ является конечным и, если $y \in T^{-1}x$, то матрица $DT(y)$ - невырожденная. Следовательно, существует такая окрестность U точки x, что в U можно определить локальные обратные к T, т.е. отображения $\phi_i: U \to A$, для которых $T_0 \phi_i = id_U$ и $[(Ty \in U) \Rightarrow (\exists\{\phi_i\}: (\phi_i \circ T)(y) = y)]$. Поэтому можно P локально в окрестности U выразить в виде

$$P(f(x)) = \sum_i |\det D\phi_i(x)|\, f \circ \phi_i(x) \Big\{\int_{T^{-1}A} f\,dm\Big\}^{-1}, \qquad (У.3)$$

и это выражение - многомерная версия (Ш.5).

Упражнение У.2. Если f - непрерывная функция, то Pf - тоже непрерывная функция. Докажите. (Указание: воспользуйтесь свойством (2) из определения 2).

Теперь сформулируем основной результат (см. /28/).

Теорема У.1. Пусть $T: A \to \mathbb{R}^n$ - растягивающее отображение. Тогда существует такая мера μ, что:

(1) μ - условно-инвариантна по отношению к T;

(2) μ - абсолютно непрерывна по отношению к m; и

(3) $\mu(A) = 1$.

Доказательство Теоремы 1(которое будет приведено в дополнении) очень напоминает доказательство Теоремы Ш.1. Поэтому будет полезно остановиться на некоторых существенных различиях. Прежде всего, функции ограниченной вариации были плотными в $L^1[0,1]$ (из-за компактности $[0,1]$). Сейчас мы работаем с некомпактным множеством, вследствие чего мы должны ввести вместо вариации другой критерий регулярности функций. Следовательно, нам приходится построить другое пространство, в котором необходимо искать неподвижные точки оператора Перрона-Фробениуса. Более того, в настоящей ситуации этот оператор оказывается нелинейным. Поэтому мы будем иметь дело с более общей теоремой Шаудера-Тихонова о неподвижной точке. Для этого нам придется уделить больше внимания исследованию соответствующих свойств искомого пространства.

Итак, вместо вариации мы определим другой функционал $Reg(f)$, а неподвижные точки оператора P ищем в пространстве H_ρ всех неотрицательных функций из $C(A)$, для которых $Reg(f) \leq \rho$, $\int_A f dm = 1$ и f удовлетворяет условию Липшица. Однако все эти свойства не исключают тривиальности неподвижной точки в том смысле, что $\{f>0\} \subsetneqq A$ (и, на самом деле, $\{f>0\}$ может оказаться слишком "малым" подмножеством A). Любопытно, что единственность неподвижной точки удается доказать в пространстве, которое исключает такого рода тривиальность. А именно, пусть

$$K = \{ f \in C(A) : \inf_A f > 0, \sup_A f < \infty, \int_A f dm = 1 \}. \quad (\text{У}.4)$$

Тогда имеет место следующая теорема:

<u>Теорема У.2.</u> Пусть T удовлетворяет условиям Теоремы 1 и является покомпонентно транзитивным (см. опр.3). Тогда существует единственный элемент $f \in K$, который является неподвижной точкой оператора P.

Доказательство приведено в дополнении. Теперь объясним некоторые из сформулированных понятий и условий на примерах.

<u>Пример У.1.</u> Условие (3) в определении 2 нельзя существенно ослабить. Для доказательства рассмотрим отображение $T:(0,1) \ni x \mapsto x/(1-x) \in \mathbb{R}^1$. Ясно, что $\inf |T'(x)| = 1$. Мы покажем, что не существует условно-инвариантной меры, для которой были бы справедливы заключения Теорем 1 и 2. На самом деле, допустим, что μ - непрерывная мера и

$$\mu(T^{-1}E) = \alpha\mu(E); \quad \alpha = \mu(T^{-1}(0,1)).$$

Пусть $\mathcal{J}_n = (n^{-1}, (n+1)^{-1})$. Поскольку $T^{-1}(1/n) = 1/(n+1)$, то $T^{-1}\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_{n+1}$. Итак, $\mathcal{J}_{n+1} = T^{-n}\mathcal{J}_1$. Следовательно, $\mu(\mathcal{J}_{n+1}) = \mu(T^{-n}\mathcal{J}_1) = \alpha^n\mu(\mathcal{J}_1)$. С другой стороны, $m(\mathcal{J}_n) = n^{-1}(n+1)^{-1}$. Поэтому

$$(m(\mathcal{J}_{n+1}))^{-1}\mu(\mathcal{J}_{n+1}) = \alpha^n\mu(\mathcal{J}_1)(n+1)(n+2) \to 0.$$

Возникает естественный вопрос: для всех ли $f \in K$ итерации $P^n(f)$ сходятся к единственной неподвижной точке оператора P. Следующий пример показывает, что без дополнительных условий вообще нарушается даже сходимость итераций.

<u>Пример У.2.</u> Пусть $A_1 = (-1,0)$, $A_2 = (0,1)$ и $Tx = -2x$. Для $0 < q < 1$ определим $f_q(x) = q$ для $x \in A_1$ и $f_q(x) = 1-q$ для $x \in A_2$. Тогда $f_q \in C(A_1 \cup A_2)$. Если $x \in A_1 \cup A_2$, то $P(f_q(x)) = f_q(-x/2) = f_q(-x)$. Поэтому $P^{2n}(f_q(x)) = f_q(x)$ и $P^{2n+1}(f_q(x)) = f_q(-x)$. Если $q \neq 1/2$, то $\{P^n(f_q)\}_{n=1}^\infty$ - периодическая последовательность.

В абстрактной эргодической теории такие вопросы о сходимости хорошо исследованы и известно, что для сходимости надо потребовать вполне эргодичности. В настоящей ситуации это означает требование покомпонентной транзитивности для всех степеней T^n:

<u>Теорема У.3.</u> Пусть T удовлетворяет условиям Теоремы 2 и для всех $n \in \mathbb{N}$, T^n - покомпонентно-транзитивное отображение. Тогда для любой функции $f \in K$ последовательность $P^n(f)$ равномерно сходится к единственной неподвижной точке f^* оператора P.

Доказательство этой теоремы тоже приведено в дополнении. В заключение лекции заметим, что несложным видоизменением примера 2 можно показать необходимость непрерывности f в Теореме 2.

<u>Пример У.3.</u> Пусть $A = (-1,1)$ и $Tx = 2x$. Пусть $f_q(x) = q$, если $x \in (-1,0)$ и $f_q(x) = 1-q$, если $x \in [0,1]$, где $q \in (0,1)$, $q \neq 1/2$. Любая из функций f_q является неподвижной точкой оператора P, т.е. в пространстве разрывных функций множество неподвижных точек может иметь мощность континуума, хотя в множестве K (см. (У.4)) лежит ровно одна неподвижная точка.

<u>Дополнение к Лекции У.</u>

Сначала докажем Теорему 1. Пусть $f \in C(A)$ - неотрицательная функция, удовлетворяющая условию Липшица. Пусть $f' = \operatorname{grad} f$. Определим

$$Reg(f) = \sup\{ |f'(x)|/f(x) : x \in A, \exists f'(x), f(x) > 0 \}. \quad (\text{У}.5)$$

Пусть далее

$$H = \{ f \in C(A) : f \geq 0,\ f - \text{Лип.},\ Reg(f) < \infty, \int_A f dm = 1 \}.$$

Мы утверждаем, что независимо от f существует такая константа ρ, что

$$\limsup_{n\to\infty} Reg(|P^n(f)|) \le \rho, \quad f\in H. \tag{У.6}$$

Пусть $\mathcal{J}_i(x) = |\det D\Phi_i(x)|$ и $\|D\Phi_i(x)\| = \sup\{|D\Phi_i(x)\cdot v| : |v| = 1\}$.
Теперь воспользуемся следующим элементарным свойством. Пусть $a_1,\dots,a_q$ - любой набор векторов из $\mathbb{R}^n$ и $b_1,\dots,b_q$ - любой набор положительных чисел. Тогда

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{q} a_i\right)/\left(\sum_{i=1}^{q} b_i\right)\right| \le \max_{1\le i\le q} |a_i/b_i|.$$

Опуская x в последующих соотношениях, мы получим:

$$\begin{aligned}\frac{|(Pf)'|}{Pf} &= \frac{|\sum_i(\mathcal{J}_i f\circ\Phi_i)'|}{\sum_i \mathcal{J}_i f\circ\Phi_i} \le \\ &\le \frac{|\sum_i \mathcal{J}_i' f\circ\Phi_i|}{\sum_i \mathcal{J}_i f\circ\Phi_i} + \frac{|\sum_i \mathcal{J}_i (D\Phi_i)(f'\circ\Phi_i)|}{\sum_i \mathcal{J}_i f\circ\Phi_i} \le \\ &\le \max_i \frac{|\mathcal{J}_i'|}{\mathcal{J}_i} + \max_i \|D\Phi_i\| \frac{|f_o'\Phi_i|}{f\circ\Phi_i}.\end{aligned} \tag{У.7}$$

Из условия (3) определения 2 вытекает, что $\|D\Phi_i(x)\| < 1/\lambda < 1$. Поскольку частные производные от T равномерно ограничены на $B = A\cap T^{-1}A$, $\det D\Phi_i(x)$ тоже таков. Итак, $\det D\Phi_i(x) = (\det DT(x))^{-1}$ равномерно отделен от 0. Поэтому можно найти такое $M<\infty$, что

$$\sup_{i,x} |\mathcal{J}_i'(x)|/\mathcal{J}_i(x) \le M.$$

Из (У.7) вытекает

$$Reg(Pf) \le M + \lambda^{-1} Reg(f) \tag{У.8}$$

и, интегрируя (У.8), мы получим неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} Reg(P^n(f)) \le (\lambda-1)^{-1} M\lambda. \tag{У.9}$$

Поскольку $\rho = (\lambda-1)^{-1}M\lambda$ не зависит от f, то (У.6) полностью доказано. Неподвижные точки оператора P естественно искать только в P-инвариантных множествах, т.е. в множествах F с $PF\subset F$. Обозначим

$$H_\rho = \{f\in H : Reg(f) \le \rho\}. \tag{У.10}$$

Если $f\in H_\rho$, то $Reg(Pf) \le M + \lambda/\rho = \rho$, следовательно, $PH_\rho \subset H_\rho$. Мы утверждаем, что H_ρ является компактным и выпуклым подмножеством $C(A)$. Пусть $f\in H_\rho$. Если $x, y\in A_i$, то согласно предположению мы можем соединить их кусочно-линейной дугой длины не больше некоторого числа β. Для каждой линейной части дуги применим оценку $|f'|/f \le \rho$ и рассмотрим произведение полученных оценок:

$$\forall\{A_i\}\ \forall\{x,y\in A_i\}\ f(y)e^{-\rho\beta} \le f(x) \le f(y)e^{\rho\beta}. \tag{У.11}$$

В частности, либо $f|A_i \equiv 0$, либо $\inf f|A_i > 0$. Более того,

$$\begin{aligned}&\sup_{A_i} f(x) \le e^{\rho\beta}\inf_{A_i} f(x);\\ &\int_A f\,dm = 1;\quad f\in H_\rho.\end{aligned} \tag{У.12}$$

Итак, H_ρ - равномерно ограниченное подмножество $C(A)$. Из неравенства $|f'|/f\le\rho$ и этого факта вытекает существование равномерной константы Липшица для всех $f\in H_\rho$. Очевидно, H_ρ является замкнутым, поскольку все условия, определяющие принадлежность к H_ρ, сохраняются при предельном переходе в $C(A)$. Следовательно, H_ρ - компактное множество.

$Reg(f)$ является выпуклым функционалом (это вытекает из рассуждений, приводящих нас к (У.7)). Согласно (У.10), H_ρ - выпуклое множество.

Используя теорему Шаудера-Тихонова, мы найдем такую функцию $f^*\in H_\rho$, что $Pf^* = f^*$. Мера μ с плотностью f^* и является искомой, в чем нетрудно убедиться.

Доказательство Теоремы 2 опирается на следующие леммы технического характера.

Лемма У.1. Если $f, g\in K$ (см. (У.4)) и $n\in\mathbb{N}$, то $\|P^n(f) - P^n(g)\| \le M\|f-g\|$, где M не зависит от n, а от f и g зависит только через их инфинумы и супремумы.

Доказательство. Пусть $\beta_n(f) = \|P_1^n(f)\|_1$, $\beta_n(g) = \|P_1^n(g)\|_1$ (см. определение 4). Поскольку $f,g\in K$, то $\beta_n(f)>0$ и $\beta_n(g)>0$. Более того,

$$\begin{aligned}\|P^n(f)-P^n(g)\| &= \|P_1^n(f)/\beta_n(f) - P^n(g)/\beta_n(g)\| \le \\ &\le \|(P_1^n(f) - P_1^n(g))/\beta_n(f)\| +\end{aligned}$$

$$+\|P_1^n(g)[\beta_n(f)-\beta_n(g)]/\beta_n(f)\beta_n(g)\| \le$$
$$\le \|f-g\|(\|P_1^n(1)\|/\beta_n(f)+\|P_1^n(g)\beta_n(1)/\beta_n(f)\beta_n(g)\|) \le$$
$$\le \|f-g\|(\|P^n(1)/\beta_n(f)\|+\|P^n(g)\|\beta_n(1)/\beta_n(f)).$$

Но $f, g \in H_p$, следовательно, из (У.11) вытекает, что
$$\sup_n \|P^n(f)\| < \infty, \quad \sup_n \|P^n(g)\| < \infty, \text{ и}$$
$$\beta_n(1) \inf_A f \le \beta_n(f) \le \beta_n(1) \sup_A f. \qquad \square$$

Лемма У.2. Если $f \in K$ и $Pf = f$, то $f \in H_p$.

Доказательство. Пусть $f \in K$. Обозначим $s = \sup_A f$ и $\delta = \inf_A f$. Пусть g удовлетворяет условию Липшица, $\inf_A g \ge \delta$, $\sup_A g \le s$. Согласно Лемме 1, для всех таких g,
$$\|P^{(n)}(f)-P^{(n)}(g)\| \le M\|f-g\|,$$
где $M = M(\delta, s)$. Более того, f является пределом таких функций. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем такую функцию g, что $\|f-g\| \le \varepsilon/M$. Тогда для всех $n \in N$, $\|P^n(f)-P^n(g)\| \le M\|f-g\| \le \varepsilon$. Следовательно, $\|f-P^n(g)\| \le \varepsilon$. Функции $g_n = P^n(g)$ удовлетворяют условию Липшица и $\limsup Reg(g_n) \le p$. Если положить $d(x, Y) = \inf\{\|x-y\| : y \in Y\}$, то $d(g_n, H_p) \to 0$. Итак, $d(f, H_p) \le \varepsilon$. Так как последнее неравенство верно для всех $\varepsilon > 0$ и H_p - замкнутое множество, то окончательно $f \in H_p$.

Если T является покомпонентно-транзитивным, то неподвижные точки оператора P не могут идентично аннулироваться ни на одной компоненте. Более точно, имеет место следующая лемма.

Лемма У.3. Пусть T - покомпонентно-транзитивно. Если $f \in H_p$ и $Pf = f$, то $f \in K$.

Доказательство. Фиксируем $f \in H_p$, $Pf = f$. Если $\inf_{A_i} f = 0$ для некоторого i, то согласно (У.11), $f|A_i = 0$. Пусть S_1 - множество всех тех компонент, где $f > 0$, $S_2 = A \setminus S_1$. Из свойства транзитивности $S_2 \cap TS_1 \ne \Phi$. Допустим, что $x_0 \in S_2 \cap TS_1$. Тогда существует такое j, что $\varphi_j(x_0) \in S_1$, следовательно, $f(\varphi_j(x_0)) > 0$ и также $P(f(x_0)) > 0$. Но $x \in S_2$, так что $f(x_0) = 0$. Это противоречие, совместно с (У.11), показывает, что $\inf_{A_i} f > 0$ для всех $1 \le i \le q$. Итак, $\inf_A f > 0$.

Доказательство Теоремы 2. Допустим, что $f_1, f_2 \in K$ - две неподвижные точки оператора P. Согласно Лемме 2, $f_1, f_2 \in H_p$. Пусть $C = T^{-1}A$ и $\alpha_j = \int_C f_j\,dm$; $j = 1, 2$. Поскольку $\inf_A f > 0$, то $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$.

1. $\alpha_1 = \alpha_2$. Для $s \in \mathbb{R}^1$ определим $f_s(x) = sf_1(x) + (1-s)f_2(x)$. Тогда $\int_A f_s\,dm = 1$, и если $f_s(x) \ge 0$, то $Pf_s = f_s$. Но $f_1(x) < f_2(x)$ для, по крайней мере, одной точки $x \in A$. Тогда для достаточно большого s будет $f_s(x) < 0$. Пусть $\sigma = \sup\{s > 1 : \inf_A f_s \ge 0\}$. Необходимо $\inf_A f_\sigma = 0$. С другой стороны, $f_s = \lim_{\sigma \to s} f_\sigma$, вследствие чего $f_\sigma \in H_p$ (поскольку H_p замкнутое). Согласно Лемме 3, $f_\sigma \in K$, а это противоречит свойству $\inf_A f_\sigma = 0$. Следовательно, $f_1 = f_2$.

П. $\alpha_1 \ne \alpha_2$. Допустим, что $\alpha_1 > \alpha_2$. Так как $Pf_1 = P_1(f_1)/\alpha_1$, то
$$P_1^n(f_1(x)) = \alpha_1^n f_1(x); \quad P_1^n(f_2(x)) = \alpha_2^n f_2(x). \tag{У.13}$$
Но $\inf_A f_2 > 0$. Поэтому можно найти такое β, что $\beta f_2(x) \ge f_1(x)$. Из (У.13) получаем
$$\beta\alpha_2^n f_2(x) = \beta P_1^n(f_2(x)) = P_1^n(\beta f_2(x)) \ge P_1^n(f_1(x)) = \alpha_1^n f_1(x),$$
т.е.
$$f_2(x) \ge \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^n f_1(x)/\beta.$$

Но это невозможно, так как $(\alpha_1/\alpha_2)^n \to \infty$. $\square$

Подготовим путь к доказательству Теоремы 3. Мы обозначим через f^* единственную неподвижную точку оператора P. Пусть $L(f)$ - предельное множество f, т.е. $g \in L(f)$, если существует подпоследовательность последовательности $\{P^n(f)\}_{n=1}^\infty$, сходящаяся к g.

Лемма У.4. Пусть $f \in K$ и $g \in L(f)$. Тогда $g \in H_p$.

Упражнение У.3. Докажите. (Указание: поступайте аналогично доказательству Леммы 2).

Лемма У.5. Пусть $f \in K$ и $g \in L(f)$. Тогда $g \in L(g)$.

Доказательство. Согласно предположению, $P^{n_k}(f) \to g$. Следовательно,
$$\|P^{n_{k+1}}(g)-P^{n_k}(g)-g\| \le P^{n_{k+1}}(f)-g\| +$$
$$+\|P^{n_{k+1}-n_k}(g)-P^{n_{k+1}-n_k}[P^{n_k}(f)]\|.$$

Из Леммы 2 вытекает, что существует M (независимо от n_k) такое, что второе слагаемое можно ограничить сверху выражением $M\|P^{n_k}(f)-g\|$. Следовательно,

$$\|P^{n_{k+1}-n_k}(g)-g\| \le M\|P^{n_k}(f)-g\| + \|P^{n_{k+1}}(f)-g\| \to 0. \qquad \square$$

Лемма У.6. Пусть $f^* \in K$ – единственная неподвижная точка оператора P, и пусть $g \in L(g)$, т.е. $P^{n_k}(g) \to g$. Обозначим $\beta(n_k) = \|P_1^{n_k}(g)\|_1$ и $\alpha = \|P_1(f^*)\|_1$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} [\beta(n_k)/\alpha^{n_k}] = 1.$$

Доказательство. Так как $f^* \in K$ и $g \in K$, то существуют такие γ_1 и γ_2, что

$$\gamma_1 g \le f^* \le \gamma_2 g;\ \gamma_1 g \le 1 \le \gamma_2 g;\quad 0<\gamma_1<\gamma_2.$$

Из линейности оператора P_1 следует, что

$$1/\gamma_2 \le \beta(n)/\alpha^n \le 1/\gamma_1, \qquad n \in N. \tag{У.14}$$

Выберем подпоследовательность $\{m_k\}$, $P^{m_k}(g) \to g$ так, что $\beta(m_k)/\alpha^{m_k}$ сходятся, скажем, к константе C. Тогда

$$\frac{\beta(2m_k)}{\alpha^{2m_k}} = \alpha^{-2m_k}\|P_1^{m_k}(P_1^{m_k}(g))\|_1 =$$

$$= \beta(m_k)\|P_1^{m_k}(P^{m_k}(g))\|_1 \alpha^{-2m_k} =$$

$$= \frac{\beta(m_k)}{\alpha^{m_k}}\left\|\frac{P_1^{m_k}(g)}{\alpha^{m_k}} + \frac{P_1^{m_k}(P^{m_k}(g)-g)}{\alpha^{m_k}}\right\|_1$$

Если $k\to\infty$, то последнее выражение становится сколь угодно малым. На самом деле, $\alpha^{-m_k}\|P_1^{m_k}(P^{m_k}(g))-g\|_1 \le \|P^{m_k}(g)-g\|\alpha^{-m_k}\|P_1^{m_k}(1)\|_1$. На основе (У.14) мы знаем, что последовательность $\{\alpha^{-m_k}\|P_1^{m_k}(1)\|_1\}$ является ограниченной. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\beta(2m_k)}{\alpha^{m_k}} = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{\beta(m_k)}{\alpha^{m_k}}\right]^2.$$

Аналогично,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\beta(nm_k)}{\alpha^{nm_k}} = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{\beta(m_k)}{\alpha^{m_k}}\right]^n, \qquad n \ge 2.$$

Если бы заключение леммы было неверным, то последние соотношения противоречили бы равенствам (У.14).

Доказательство Теоремы 3. Используя предположение о транзитивности, найдем такое $N \in N$, что $T^N A_i \supset A_i$, $1 \le i \le p$. Пусть $f \in H_p$. Обозначим через Ψ_i отображения, обратные к T^N в точке x. Тогда для оператора Перрона-Фробениуса P_{T^N} отображения T^N имеет место разложение

$$P_{T^N}(f(x)) = \sum_i |\det D\Psi_i(x)|\, f_0\, \Psi_i(x).$$

Поскольку $\int_A f\,dm = 1$, то с необходимостью существует такое A_j, что $\sup_{A_j} f \ge 1$. Но $f \in H_p$ и, согласно (У.12), $\inf_{A_j} f \ge e^{-p\beta}$. Для любого $x \in A$ найдем такое i_0, что $\Psi_{i_0}(x) \in A_j$. Тогда

$$P_{T^N}(f(x)) \ge |\det D\Psi_{i_0}(x)|\, f\,\Psi_{i_0}(x)) \ge \exp(-p\beta)\ \times$$

$$\times \min_i|\det D\Psi_i(x)| \ge \exp(-p\beta)/\sup_A|\det DT^N|.$$

Обозначим последнее выражение через d (так что d не зависит от выбора функции $f \in H_p$). Стало быть, для всех $f \in C(A)$

$$\liminf_{n\to\infty}(P^n f)(x) \ge d, \quad x \in A. \tag{У.15}$$

Пусть теперь $f \in K$ и $g \in L(f)$. Мы должны показать, что $g = f^*$. Используя Леммы 5, 6 и соотношение (У.15), найдем последовательность $\{m_k\}$ со свойством

$$\alpha^{-m_k}P_1^{m_k}(g) \to g \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Для $s \in \mathbb{R}^1$ определим $f_s(x) = s f^*(x) + (1-s)g(x)$. Тогда $1 = \int_A f_s\,dm$. Пусть J – самый большой отрезок, включающий $[0,1]$, для которого $(s \in J) \Rightarrow (\inf_A f_s > 0)$. Согласно конструкции, отрезок J должен быть открытым и для $s \in J$,

$$\alpha^{-m_k}P_1^{m_k}(f) = \alpha^{-m_k}[sP_1^{m_k}(f^*) + (1-s)P^{m_k}(g)] \to$$

$$\to sf^* + (1-s)g = f_s.$$

Но $\|f_s\| = 1$. Значит, норма левой стороны сходится к 1, и поэтому $P_1^{m_k}(f_s)/\|P_1^{m_k}(f_s)\|_1 \to 1$. Но это означает, что $f_s \in L(f_s)$. Согласно Лемме 4, для любого $s \in J$, $f_s \in H_p$. Если $s \in \partial J$, то f_s является пределом элементов из H_p. Поскольку H_p – компактное множество, то $f_s \in H_p$, т.е. $s \in J$. Итак, J одновременно является замкнутым множеством, а это возможно только в случае $J = \mathbb{R}^1$. Следовательно, $f_s(x) > 0$ для всех $s \in \mathbb{R}^1$. Из определения f_s вытекает, что последнее свойство выполняется только в случае $g = f^*$.

Лекция У1. МЕТАСТАБИЛЬНЫЙ ХАОС

В настоящей лекции мы продолжим дискуссию, начатую в начале предыдущей лекции. Мы обсудим с точки зрения условно-инвариантных мер численные эксперименты, касающиеся класса $T_A x = Ax(1-x)$ для $0 \le A \le 4$ и системы Лоренца (см. /22,21,29/). Для этих систем при достаточно больших значениях параметров появляется устойчивое хаотическое движение. Для значений параметров, немного меньших того критического значения параметра, при котором возникает устойчивое хаотического значения параметра, при котором возникает устойчивое хаотическое движение, наблюдаются временные хаотические осцилляции, которые раньше или позже начинают затухать, и траектории стремятся к какому-нибудь устойчивому (не хаотическому) движению (см. рис.10).

Пример У1.1. Рассмотрим класс $T_A x = Ax(1-x), x \in [0,1], A \in [0,4]$. Для значений $A < A^* \approx 3.83$ (когда появляется неустойчивая периодическая траектория с периодом 3) наблюдается более-менее стандартная ситуация /22/, а именно, появление последовательности бифуркаций удвоения периода. Для параметров $A \in [0, A^*]$ могут появиться и хаотические траектории, но вероятность того, что они будут осциллировать без затухания в течение всего времени, равна 0. Для $A^* \approx 3{,}83$ существуют устойчивая и неустойчивая периодические траектории периода 3, а именно

$$0{,}1561 \to 0{,}5096 \to 0{,}9579 \to 0{,}1561;$$
$$0{,}1635 \to 0{,}5290 \to 0{,}9552 \to 0{,}1635.$$

Пусть $p = 0{,}1635\ldots$ - неустойчивая периодическая точка периода 3. Пусть $A_1 = (p, 1 - T_{A^*}p)$, $A_2 = (T_{A^*}p, T^2_{A^*}p)$ (см. рис.11). Пусть $A = (A_1 \cup A_2)$. Рассмотрим $Sx = T^6_{A^*}x$. Прямым вычислением проверяется, что на множестве $A \cap S^{-1}A$ справедливо неравенство $\inf |S'(x)| \approx 1{,}036 > 1$.

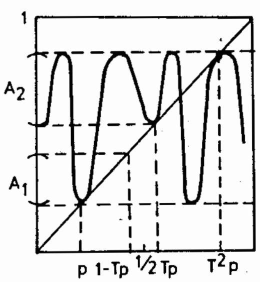


Рис.11 График отображения $T^3 = T^3_{A^*}$, $A^* \approx 3{,}83$

Более того, $SA_1 \subset A_1$, $SA_2 \subset A_2$. Следовательно, S и его степени являются покомпонентно-транзитивными. Итак, для S/A выполнены условия теорем У.1-У.3. Согласно этим теоремам, у S существует единственная условно-инвариантная мера с непрерывной плотностью $f^* = P_S(f^*)$. Из Теоремы У.3 получаем, что $P^n_S(f) \to f^*$ для любой функции $f \in K$, т.е.

$$P^{6n}_{T_{A^*}}(f) \to f^*, \quad n \to \infty \qquad (У1.1)$$

Упражнение У1.1. (а) f^* - единственная неподвижная точка оператора $P_{T_{A^*}}$. (в) Для всех $f \in K$, $P^n_{T_{A^*}}(f) \to f^*$. Докажите. (Указание: если $f \in K$, то $P^i_{T_{A^*}}(f) \in K$ для $0 \le i \le 5$. Учтите (У1.1) для $P^{(i)}_{T_{A^*}}(f)$. Затем исследуйте предел $P^{6n}_{T_{A^*}}(P^i_{T_{A^*}}(f))$ для $n \to \infty$).

Следовательно, на $A = A_1 \cup A_2$ существует условно-инвариантная мера для T_{A^*}. Хорошо известно, что не существует непрерывной T_{A^*} - инвариантной меры. Поскольку $\inf |S'(x)| > 1$, то мы можем считать множество A множеством хаотических движений. Следуя интерпретации условно-инвариантной меры (см. Лекцию У), траектории могут двигаться в пределах множества A (т.е. вести себя хаотически), а вероятность того, что x останется в A в течение n итераций, сходится к 0 с экспоненциальной скоростью (по n).

Пример У1.2. (Система Лоренца). Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} dx/dt &= -\sigma x + \sigma y; \\ dy/dt &= rx - y - xz; \\ dz/dt &= -bz + xy, \end{aligned} \qquad (У1.2)$$

где b - константа, характеризующая размеры системы, σ - число Прандтля, r - число Релея. Система (У1.2) возникает в результате обрезания уравнений галёркинского типа для задачи о тепловой конвекции между двумя плоскостями, находящимися при разных температурах. Интерес к этой системе значительно усилился после попытки Рюэля и Такенса /30/ связать ее с исследованиями о природе турбулентности (впрочем, явное наличие такой связи оказывается сомнительным).

Лоренц /31/ численно исследовал систему (У1.2) для значений $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 28$. Вначале мы опишем некоторые общие свойства системы. Дивергенция системы является постоянной. На самом деле $\partial\dot{x}/\partial x + \partial\dot{y}/\partial y + \partial\dot{z}/\partial z = -(\sigma + 1 + b) < 0$.

Вследствие этого объем Лебега сжимается с экспоненциальной скоростью вдоль движений системы (У1.2). Любое решение системы ограничено для $t>0$. Действительно, если обозначить $u^2(t)=x^2(t)+y^2(t)+(z(t)-r-\sigma)^2$, то существуют такие константы $C_1, C_2>0$, что $du/dt \le -C_1 u + C_2$. Следовательно, всякая траектория раньше или позже попадает в шар $u \le 2C_1/C_2$ и затем останется в нем.

Начало координат 0 = (0,0,0) является неподвижной точкой для всех значений параметров. Если $r<1$, то 0 - единственная стационарная точка, и притом притягивающая. При $r>1$ она теряет устойчивость и возникают новые неподвижные точки $O_1=(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ и $O_2=(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Для всякого $r>1$ у системы нет никаких других неподвижных точек. При $1<r<r_0$, где $r_0=\sigma(\sigma+b+3)(\sigma-b-1)^{-1}\approx 24{,}74$; 0_1 и 0_2 - притягивающие. При переходе через значение r_0 они теряют устойчивость, и для $r>r_0$ вообще притягивающих неподвижных точек нет. Сюда относится исследованный Лоренцем случай $\sigma=10$, $b=8/3$ и $r=28$. При $r=28$ в работе Лоренца наблюдалось устойчивое хаотическое поведение траекторий (аттрактор Лоренца).

Лоренц предложил неожиданный способ исследования системы. А именно, пусть $(x,y,z)(t)$ - решение системы. Число колебаний можно описать при помощи локальных максимумов любой координаты, скажем z. Пусть $z(t_n)$, $t_n<t_{n+1}$, $n=1,2,\dots$ - последовательные локальные максимумы $z(t)$. Можно показать, что соотношение между $z(t_n)$ и $z(t_{n+1})$ для достаточно больших n очень точно описывается (для фиксированного r) каким-то отображением $T_r:[0,1]\to\mathbb{R}^1$. Все T_r - гладкие за исключением средней точки, где у них появляется особенность типа "острого пика" (см. рис.10). Более того, для

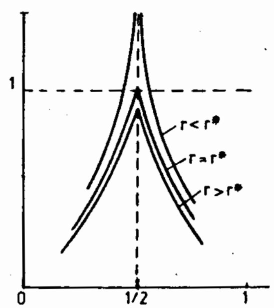


Рис.12 Графики отображений

$r\in[r_1^*, r_2^*]$, где $r_1^*<r^*<r_2^*$ и $r^*\approx 24{,}06$, можно проверить условие растягиваемости $\inf|T_r'(x)|>1$.

Особое значение $r^*\approx 24{,}06$ характерно тем, что для $r<r^*$, $T_r[0,1]\supset[0,1]$ и для $r>r^*$, $T_r[0,1]\subset[0,1]$. Значит, для $r<r^*$ можно применить результаты предыдущей лекции. Если обозначить $A=(0,1)$, то образ точки $x\in A$ попадает вне A, если точка x находится в достаточно малой окрестности точки x_0, в которой испытывает отображение T_r особенность пика. Пусть $\mu_0=m\,U_\delta$. Из-за "остроты пика", $\mu_0(T_r^{-1}A)\approx 1$. Если $r\uparrow r^*$, то $T_r^{-1}A\uparrow A=(0,1)$, так что $\mu_0(T_{r^*}^{-1}A)=1$. Следовательно, длина пребывания траектории точки x в множестве A для $r<r^*$ конечна, но при $r\uparrow r^*$ быстро растет. Эти заключения полностью отвечают численным расчетам, полученным в /29/ (см. также /32/).

Естественно назвать только что описанное поведение динамических систем метастабильным хаосом. Однако не известно, должно ли быть существование метастабильного хаоса общим признаком близости параметра к той критической точке, в которой возникает устойчивое хаотическое движение. Другими словами, пока вполне допустимо возникновение устойчивого хаоса без того, чтобы до этого наблюдалось метастабильное поведение.

Само определение оператора Перрона-Фробениуса (П-Ф) в предыдущих лекциях существенным образом использовало наличие естественной априорной меры - объема в рассматриваемом пространстве. Если перейти к исследованию преобразований более общих метрических пространств, то такой меры нет и, следовательно, оператор П-Ф должен быть соответствующим образом модифицирован. Следующие три лекции воспроизводят программу, разработанную в работах Пэрри /51/, Синая /5/, Боуэна /13/ и Уолтерса /33/ для символических систем - топологических цепей Маркова (ТЦМ).

Пусть А - матрица типа $n \times n$ с $a_{ij} \in \{0,1\}$. Построим пространство последовательностей

$$\Sigma_A = \{x \in \{1,\dots,n\}^{\mathbb{Z}} : a_{x_i x_{i+1}} = 1,\ i \in \mathbb{Z}\}$$

и обозначим $\sigma_A = \sigma | \Sigma_A$, где σ - преобразование сдвига. Пусть задана "достаточно гладкая" функция $\varphi \in C(\Sigma_A)$. Следуя Синаю /5/, можно построить гиббсовское состояние $P_{\varphi,m}$ по отношению к φ и к произвольной априорной мере m. Для σ_A -инвариантных мер можно определить и понятие равновесного состояния μ_φ для функции φ, а именно, μ_φ - единственная σ_A -инвариантная мера на Σ_A, для которой

$$h(\mu_\varphi) + \langle\varphi\rangle_{\mu_\varphi} = \sup\{h(\nu) + \langle\varphi\rangle_\nu\}, \qquad (\text{УП.1})^*$$

где супремум в правой части по всем σ_A -инвариантным мерам (обычно его называют давлением). Возникает естественный вопрос о связи между $P_{\varphi,m}$ и μ_φ. Если А - неприводимая матрица, то, согласно теореме Перрона-Фробениуса, существует единственное максимальное собственное значение λ_A. Построим стохастическую матрицу $p_{ij} = u_j a_{ij}/\lambda_A u_i$ и вероятностный вектор $p_i = u_i \vartheta_i$, где $u = (u_1,\dots,u_n)$ и $\vartheta = (\vartheta_1,\dots,\vartheta_n)$ - соответственно правый и левый собственные векторы для λ_A. Если при помощи p_{ij} и p_i определить вероятностную меру μ_A на Σ_A, то

$$h(\mu_A) = \sup h(\nu) = \log \lambda_A . \qquad (\text{УП.2})^*$$

Итак, можно записать в соответствии с (УП.1)*, что $\mu_A = \mu_0$, где 0 означает функцию $\varphi \equiv 0$. Теперь оказывается верным следующий интересный факт:

$$P_{\varphi,m} = \mu_\varphi, \quad \text{если} \quad m = \mu_0 . \qquad (\text{УП.3})^*$$

Следовательно, хотя априорного "объема" в пространстве Σ_A нет, все-

таки можно построить вполне естественную априорную меру.

В более общих пространствах возникают технические трудности из-за следующих обстоятельств:

- нельзя сформулировать вариационный принцип в форме (УП.1)*;
- нельзя сказать, что такое мера максимальной энтропии (см.(УП.2)*);
- нельзя применить теорему Перрона-Фробениуса, поскольку нет матричного представления динамической системы.

С другой стороны, можно попытаться определить что-то вроде трансфероператора (а это и будет оператор П-Ф), построить для него аналог меры μ_0 и попробовать сформулировать вариационный принцип (УП.1)* более общим образом. Это и есть программа настоящей и следующей лекций.

Сначала, следуя Уолтерсу (33), сформулируем основные предположения в виде определения.

Определение УП.1. В этом определении приводим совокупность понятий, которая, в целом, и определяет локальные растягивающие гомеоморфизмы. Пусть $(\bar{X}, d)$ - компактное метрическое пространство, X - открытое и всюду плотное подмножество $\bar{X}$ и X_0 - открытое и всюду плотное подмножество X. Отображение $T: X_0 \to X$ считаем непрерывным и таким, что для любого $x \in X$, $T^{-1}x$, по крайней мере, счетно бесконечное множество.

(1) Пусть $B_\varepsilon(x)$ - шар радиуса ε с центром в точке x. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $x \in X$ можно множество $T^{-1}(B_{2\varepsilon_0}(x) \cap X)$ однозначным способом записать в виде счетного объединения открытых попарно непересекающихся множеств $A_1(x), A_2(x), \dots$ так, что при любом $i \in \mathbb{N}$

(1.1) $T | A_i(x)$ - гомеоморфизм $A_i(x)$ на $B_{2\varepsilon_0}(x) \cap X$; и

(1.2) $[y, y' \in A_i(x)] \Rightarrow [d(Ty, Ty') \geq d(y, y')]$.

(П) Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $M \in \mathbb{N}$, что для всех $x \in X$ множество $T^{-M}x$ является ε -плотным в X.

Свойство (1.1) означает, что T - локальный гомеоморфизм и свойство (1.2) - что T - локально растягивающее отображение (см. рис.13). Условие (П) - аналогия условия транзитивности (см. рис.14). Подобно предыдущим лекциям, свойство (П) оказывается важным только для получения хороших свойств сходимости оператора Перрона-Фробениуса.

Множество $A_i(x)$ будем называть компонентой множества $T^{-1}(B_{2\varepsilon_0}(x) \cap X)$. Если $d(x, x') < \varepsilon$, то существует естественное биективное соответствие между $T^{-1}x$ и $T^{-1}x'$, при котором точке $y \in T^{-1}x$ соответствует та точка $y' \in T^{-1}x'$, которая принадлежит той же самой компоненте $A_i(x)$, что и y (см. рис.15). Символ y' сохраняем для только что описанной точки (при условии, что $d(x,x')<\varepsilon_0$). Поскольку T локально растягивает расстояния, то T^{-1} является локально сжимающим. Следовательно, $d(y,y')\le d(x,x')<\varepsilon_0$. Итак, наше рассуждение можем повторить для множеств $T^{-1}y$ и $T^{-1}y'$, $T^{-2}y$ и $T^{-2}y$ и т.д. Согласно этому, если $d(x,x')<\varepsilon_0$, то для любого $n\in \mathbb{N}$ существует естественная биекция между $T^{-n}x$ и $T^{-n}x'$. Символ y' будет использован и в этом более общем случае (т.е. $y'\in T^{-n}x'$ соответствует точке $y\in T^{-n}x$, если для любого $j\le n-1$ найдется такое i_j, что $T^j y,\ T^j y'\in A_{i_j}(T^{j+1}y)$).

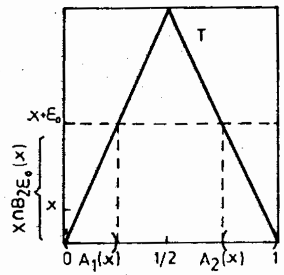


Рис. 13. Отображение из примера П.3: $\bar{X}=[0,1]$, $X=(0,1)$, $X_0=(0,1)-\{1/2\}$. $T|(0,1/2)$ и $T|(1/2,1)$ – растягивающие. Более того, $T|(0,1/2)\cap A_1(x)$ – гомеоморфизм на $B_{2\varepsilon_0}(x)\cap X$.

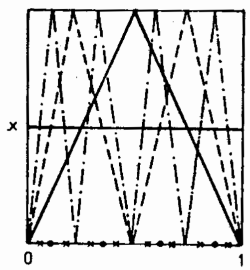


Рис. 14. Транзитивность:

+ = $T^{-1}x$ (2 точки)

• = $T^{-2}x$ (4 точки)

× = $T^{-3}x$ (8 точек)

для T из примера П.3.

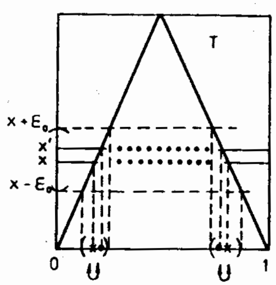


Рис. 15. T из примера П.3. $T^{-1}x\equiv\times$; $T^{-1}x'\equiv\bullet$, U – соответствие

Определение УП.2 (достаточно гладкие функции). Условимся обозначать символом $\mathcal{F}$ класс тех функций $\varphi\in C(X_0)$, для которых

$$(1)\quad \exists\{K\}\ \forall\{x\in X\}\ \Sigma_x^*\exp\varphi(y)\le K;$$

$$(2)\quad [d(x,x')\to 0]\Rightarrow[\Sigma_x^*|\exp(\varphi(y)-\exp\varphi(y')|\to 0],$$

где $\Sigma_x^*=\Sigma_{y\in T^{-1}x}$.

Упражнение УП.1. Если $X_0=X=\bar{X}$ и $card(T^{-1}x)\le k$ для всех $x\in X$, то $\mathcal{F}=C(X)$. Если (2) верно и существует такое x, что $\Sigma_x^*\exp\varphi(y)<\infty$, то $\varphi\in\mathcal{F}$ (т.е. справедливо тоже (1)). Докажите эти утверждения.

Основная цель лекции – сформулировать подходящую теорему о сходимости оператора Перрона-Фробениуса. Оператором Перрона-Фробениуса (для функции φ) будем называть оператор, существование которого утверждает следующая лемма.

Лемма УП.1. Пусть $T: X_0\to X$ как в определении 1, и пусть $\varphi\in\mathcal{F}$. Определим

$$P_\varphi f(x)=\Sigma_x^* f(y)\exp\varphi(y). \tag{УП.1}$$

Тогда P_φ – такое отображение пространства $UC(X)$ всех равномерно непрерывных функций на X в себя, что его можно расширить до положительного, линейного и непрерывного оператора $\bar{P}_\varphi: C(\bar{X})\to C(\bar{X})$.

Для доказательства заметим, что, если $f\in UC(X)$, и если $d(x,x')<\varepsilon_0$, то

$$|P_\varphi f(x)-P_\varphi f(x')|\le\|f\|\ \Sigma_x^*|\exp\varphi(y)-\exp\varphi(y')|+$$

$$+K\sup_{y\in T^{-1}x}|f(y)-f(y')|.$$

Обозначим через $\bar{P}_\varphi^*: C^*(\bar{X})\to C^*(X)$ сопряженный оператор, т.е. если $\mu\in C^*(\bar{X})$, то

$$(\bar{P}_\varphi^*\mu)(f)=\mu(\bar{P}_\varphi f);\quad f\in C(\bar{X}), \tag{УП.2}$$

где $\mu(f)=\int f\,d\mu$. Пусть $M(\bar{X})$ – множество всех борелевских вероятностных мер на $\bar{X}$ ($M(\bar{X})$ снабжаем топологией слабой сходимости, т.е. $\mu_n\Rightarrow\mu$, если $\mu_n(f)\to\mu(f)$ для всех $f\in C(\bar{X})$).

Лемма УП.2. Если T удовлетворяет условию (1) из определения 1 и, если $\varphi\in\mathcal{F}$, то существуют такая константа $\lambda>0$ и мера $\nu\ M(\bar{X})$, что $\bar{P}_\varphi^*\nu=\lambda\nu$.

Упражнение УП.2. Докажите. (Указание: проверьте, что $(\bar{P}_\varphi^* \mu)(1) < \infty$. Покажите, что из $\mu_n \Rightarrow \mu$ вытекают $\bar{P}_\varphi^* \mu_n \Rightarrow \bar{P}_\varphi^* \mu$ и $(\bar{P}_\varphi^* \mu_n)(1) \to (\bar{P}_\varphi^* \mu)(1)$. Следовательно, отображение

$$M(\bar{X}) \ni \mu \mapsto \bar{P}_\varphi^* \mu / (\bar{P}_\varphi^* \mu)(1) \in M(\bar{X})$$

является непрерывным. Используйте теорему Шаудера-Тихонова и возьмите $\lambda = (\bar{P}_\varphi^* \nu)(1)$, где ν - неподвижная точка этого отображения).

Теперь добавим к определению класса $\varphi \in \mathcal{F}$ условие регулярности функций φ, а именно:

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } d(x,x') < \varepsilon_0 \text{, то} \\ \displaystyle C_\varphi(x,x') = \sup_{n\geq 1} \sup_{y\in T^{-n}x} \sum_{i=0}^{n-1} [\varphi(T^i y) - \varphi(T^i y')] \\ \text{существует, ограничено сверху константой } C_\varphi \text{, и} \\ C_\varphi(x,x') \to 0 \text{, если } d(x,x') \to 0 . \end{array}\right\} \quad (\text{УП}.3)$$

Упражнение УП.3. Покажите, что условие (УП.3) равносильно следующей паре утверждений:

$$[d(x,x') < \varepsilon_0] \Rightarrow [\sup_{n\geq 1} \sup_{y\in T^{-n}x} |\Sigma_{i=0}^{n-1} [\varphi(T^i y) - \varphi(T^i y')]| \leq C_\varphi];$$

$$[d(x,x') \to 0] \Rightarrow [\sup_{n\geq 1} \sup_{y\in T^{-n}x} |\Sigma_{i=0}^{n-1} [\varphi(T^i y) - \varphi(T^i y')]| \to 0].$$

(Указание: на основании (УП.3) оцените сверху и снизу сумму в предыдущих формулах).

Упражнение УП.4. Пусть C_i - компонента множества $T^{-n}(X \cap B_{\varepsilon_0}(x))$ (т.е. T^n отображает C_i на $B_0(x) \cap X$ и не сжимает расстояний). Пусть $(S_n \varphi)(y) = \Sigma_{i=0}^{n-1} \varphi(T^i y)$. Докажите, что существует такая константа d_i, что $|(S_n \varphi)(y)| \leq d_i$ для всех $y \in C_i$.

Упражнение УП.5. Условие (2) опр. 2 вытекает из (УП.3) и условия (1) этого определения. (Указание: пусть $x, x' \in X$ такие, что $d(x,x') < \varepsilon_0$. Оцените сумму $\Sigma_x^* |\exp\varphi(y) - \exp\varphi(y')|$ при помощи $C_\varphi(x,x')$ и $C_\varphi(x',x)$).

Упражнение УП.6. Условия (П) опр. 1, (1), (2) опр. 2, и (УП.3) не зависят от выбора метрики d в $\bar{X}$. Покажите это. Как обстоит дело с условием (1) определения 1?

Для получения теорем о сходимости оператора Перрона-Фробениуса нам снова приходится ограничиться специальным классом функций. Пусть

$$G(X_0) = \{g \in C(X_0) : g > 0, \ \forall \{x \in X\} \ \Sigma_x^* g(y) = 1\}. \qquad (\text{УП}.4)$$

Если $\varphi = \log g$, то условие (1) опр. 2 справедливо с $K = 1$, и (УП.3) записывается в форме

$$[d(x,x') \to 0] \Rightarrow [\Sigma_x^* |g(y) - g(y')| \to 0]. \qquad (\text{УП}.5)$$

Итак, если (УП.5) верно, то определены операторы $P_{\log g}$: $UC(X) \to UC(X)$ и $\bar{P}_{\log g}: C(\bar{X}) \to C(\bar{X})$. Условие (УП.3) можно записать в виде

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle [d(x,x') < \varepsilon_0] \Rightarrow [\exists D_g(x,x') \stackrel{\bullet}{=} \sup_{n\geq 1} \sup_{y\in T^{-n}x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g(T^i y)}{g(T^i y')}]; \\ D_g(x,x') \leq D_g, \ [d(x,x') \to 0] \Rightarrow [D_g(x,x') \to 1]. \end{array}\right\} \quad (\text{УП}.6)$$

Теперь сформулируем основные результаты:

Теорема УП.1. Пусть T удовлетворяет определению 1 и пусть $g \in G(X_0)$ удовлетворяет (УП.6). Тогда существует такая мера $\mu \in M(\bar{X})$, что для всех $f \in C(\bar{X})$,

$$\bar{P}_{\log g}^n f \rightrightarrows \mu(f)$$

($\rightrightarrows$ обозначает равномерную сходимость). Мера μ - единственный элемент из $M(\bar{X})$, для которого

$$\bar{P}_{\log g}^* \mu = \mu .$$

Основная идея доказательства (см. дополнение) такова: если $\bar{P} = \bar{P}_{\log g}$ и $f \in C(\bar{X})$, то замыкание в $C(\bar{X})$ множества $\{\bar{P}^n f;\ n \geq 0\}$ компактно. Из этого следует существование подпоследовательности $\{n_i\}$ и функции $f^* \in C(\bar{X})$ со свойством $\bar{P}^{n_i} f \rightrightarrows f^*$. Затем доказывается, что f^* - константа. Следует определить $\mu(f) = f^*$ и воспользоваться теоремой Рисса.

Согласно определению,

$$P_{\log g} f(x) = \Sigma_x^* g(y) f(y), \ x \in X .$$

Очевидно, последнее выражение сохраняет смысл и в том случае, когда функция $f: X_0 \to \mathbb{R}^1$ не является непрерывной. Следовательно, можно получить следующее наглядное описание действия итераций оператора $P = P_{\log g}$:

Следствие УП.1. Пусть T и g - такие же, как в Теореме 1. Пусть μ - мера, полученная в этой теореме. Если B - μ - непрерывное множество (т.е. $\mu(\partial B)=0$), то

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |P^n_{\log g} 1_B(x) - \mu(B)| = 0. \tag{УП.7}$$

Упражнение УП.7. Докажите. (Указание: используя регулярность меры, для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое открытое множество U, что $\bar{B}\subset U$ и $\mu(U\setminus B)=\mu(U\setminus\bar{B})<\varepsilon$ и такое компактное множество $C\subset B^\circ$, что $\mu(B\setminus C)=\mu(B^\circ\setminus C)<\varepsilon$. Этот факт используйте для определения пары функций

$f_+, f_- \in C(\bar{X}),\ 0\le f_+, f_-\le 1, f_-\le 1_B\le f_+, \mu(f_+)-\mu(B)<\varepsilon$, и $\mu(B)-\mu(f_-)<\varepsilon$.

Проверьте возможность применения Теоремы 1, согласно которой найдется такое N, что для $n\geqslant N$ имеет место $\sup_{x\in X}|P^n 1_B(x)-\mu(B)|\le 2\varepsilon$.)

Соотношения между мерами ν и μ, найденными в Лемме 2, соотв. Теореме 1, устанавливаются в следующей теореме. Ее доказательство вытекает из свойств оператора Перрона-Фробениуса (см. дополнение).

Теорема УП.2. Пусть $T: X_0\to X$ удовлетворяет условиям определения 1, и пусть $\varphi\in C(X_0)$ удовлетворяет условию (1) определения 2 и (УП.3). Обозначим $\lambda>0$ и $\nu\in M(\bar{X})$ объекты, полученные в Лемме 2, так что $\bar{P}^*_\varphi \nu=\lambda\nu$. Тогда

(1) $\exists\{h\in C(\bar{X})\}, h>0, \nu(h)=1, \bar{P}_\varphi h=\lambda h$ и

$$\lambda^{-m}\bar{P}^m_\varphi f \rightrightarrows h.\nu(f);\ f\in C(\bar{X});$$

(2) $g=(\exp\varphi).h/\lambda.h_0 T\in G(X_0)$ и удовлетворяет (УП.6),

и мера μ из Теоремы 1 выражается в виде $\mu=h.\nu$ (в частности, μ и ν - эквивалентные меры);

(3) пара (λ,ν) однозначно определяется из условий $\lambda>0$, $\nu\in M(\bar{X})$ и $\bar{P}^*_\varphi \nu=\lambda\nu$;

(4) $[d(x,x')<\varepsilon_0]\Rightarrow[h(x)\le\exp[C_\varphi(x,x')].h(x')]$

Это условие и условия $h>0, \nu(h)=1$ и $\bar{P}_\varphi h=\lambda h$ определяют функцию h однозначно.

Замечание УП.1. Смысл последнего утверждения такой же, как мы объясняли в примере У.3. А именно, одни условия $h>0, \nu(h)=1, \bar{P}_\varphi h=\lambda h$ могут оказаться выполненными для многих функций h. Но среди функций,

достаточно мало осциллирующих, найдется точно одна функция h, удовлетворяющая этим условиям.

До сих пор сформулированные результаты оказываются весьма абстрактными и не наглядными. Поэтому было бы удобно узнать какую-то более наглядную характеристику. Этим вопросом мы будем заниматься в следующей лекции. А сейчас обратим внимание на более фундаментальный вопрос об инвариантности меры μ. В дополнении докажем следующий результат.

Теорема УП.3. Пусть $T: X_0\to X$ и $\varphi\in C(X_0)$ удовлетворяют условиям, перечисленным в Теореме 2. Тогда (1) T сохраняет меру (по отношению к мерам $\mu|X_0$ и $\mu|X$, т.е. если $B\subset X$ - измеримое, то $\mu(T^{-1}B)=\mu(B)$) и (2) $\mu(X_0)=\nu(X_0)=1$.

Следовательно, обе меры являются нетривиальными (для ν это вытекает из условий, что $\langle h\rangle_\nu=1$ и $h>0$ всюду на $\bar{X}$, для μ из эквивалентности этой меры мере ν), причем мера μ является также инвариантной.

Дополнение к Лекции УП.

Для доказательства Теоремы 1 нам понадобится следующая лемма.

Лемма УП.3. Пусть $T: X_0\to X$ удовлетворяет условиям (1) и (П) определения 1. Пусть $\varphi\in C(X)$ удовлетворяет условиям (1) определения 2 и (УП.3). Тогда

$$\forall\{\varepsilon>0\}\ \exists\{N>0\}\ \exists\{a\in\mathbb{R}^1\}\ \forall\{x,w\in X\}.$$

$$\exists\{y\in T^{-N}x\cap B_\varepsilon(w)\}\ \sum_{i=1}^{N-1}\varphi(T^i y)\geqslant a.$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon<\varepsilon_0$ и, используя условие (П), найдем такое N, что множество $T^{-N}x$ - $(\varepsilon/4)$ - плотное в X для всех $x\in X$. Пусть $w_1,\dots,w_r$ выбраны таким образом, что шары $B_{\varepsilon/2}(w_j)$ покрывают $\bar{X}$. Достаточно показать, что для $1\le j\le r$ существует такое $a_j\in\mathbb{R}^1$, что для всех $x\in X$ найдется точка $y\in T^{-N}x\cap B_{\varepsilon/2}(w_j)$ со свойством $S_N\varphi(y)\geqslant a_j$. Тогда достаточно взять в качестве искомого a число $\min a_j$. Выберем $x_1,\dots,x_m$ таким образом, что шары $B_{\varepsilon/4}(x_j)$ показывают $\bar{X}$. Фиксируем j. Поскольку $T^{-N}x_i$ - $(\varepsilon/4)$ - плотное, то существует $y_i\in T^{-N}x_i$, $d(y_i,w_j)<\varepsilon/4$. Пусть $x\in X$. Выберем x_i с $d(x,x_i)<\varepsilon/4$. Пусть $y\in T^{-N}x$ соответствует точке y_i. Тогда $d(y,w_j)\le d(y,y_i)+d(y,w_j)<\varepsilon/2$, т.е. $y\in T^{-N}x\cap B_{\varepsilon/2}(w_j)$. Поэтому

$$S_N\varphi(y) = S_N\varphi(y) - S_N\varphi(y_i) + S_N\varphi(y_i) \geq$$

$$\geq S_N\varphi(y_i) - C_\varphi \geq \min_i [S_N\varphi(y_i) - C_\varphi].$$

Останется взять $a_j = \min [S_N\varphi_i(y_i) - C\varphi]$. □

<u>Доказательство Теоремы 1.</u> Пусть $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{\log g}$ и $f\in C(\bar X)$. Покажем, что $\{\bar{\mathcal{L}}^n f;\ n\geq 0\}$ - равностепенно непрерывное множество. Выберем $x, x'\in X$, $d(x,x') < \varepsilon < \varepsilon_0$. Тогда

$$|\bar{\mathcal{L}}^n f(x) - \bar{\mathcal{L}}^n f(x')| \leq$$

$$\leq \Big| \sum_{y\in T^{-n}x} g(y)\ldots g(T^{n-1}y)[f(y)-f(y')] + \sum_{y\in T^{-n}x} f(y') \times$$

$$\times [g(y)\ldots g(T^{n-1}y) - g(y')\ldots g(T^{n-1}y')] \leq$$

$$\leq \sup\{|f(u)-f(v)| : d(u,v) < \varepsilon\} + \|f\| \times$$

$$\times \sum_{y\in T^{-n}x} g(y')\ldots g(T^{n-1}y') \left| \frac{g(y)\ldots g(T^{n-1}y)}{g(y')\ldots g(T^{n-1}y')} \right| \leq$$

$$\leq \sup\{|f(u)-f(v)| : d(u,v) < \varepsilon\} + \|f\|\, D_g^*(x,x').$$

Поскольку $\|\bar{\mathcal{L}}^n f\| \leq \|f\|$, $f\in C(\bar X)$, то по теореме Арцела-Асколи замыкание в $C(\bar X)$ множества $\{\bar{\mathcal{L}}^n f;\ n\geq 0\}$ - компактное множество. Следовательно, найдутся подпоследовательность n_i и $f^*\in C(\bar X)$, $\bar{\mathcal{L}}^{n_i} f \rightrightarrows f^*$. Покажем, что f^* - константа. Согласно определению, $\min(f) \leq \min(\bar{\mathcal{L}} f) \leq \ldots \leq \min(f^*) \leq \max(f^*) \leq \ldots \max(\bar{\mathcal{L}} f) \leq \max(f)$. Если $k\geq 0$, то $\min(\bar{\mathcal{L}}^k f^*) = \min(f^*)$. Покажем, что $f^* = \min(f^*)$. Для этого достаточно проверить, что для всех точек u, принадлежащих ε-плотному подмножеству X, справедливо утверждение

$$\forall\{\varepsilon > 0\}\ \forall\{\delta > 0\}\ [f^*(u) < \min(f^*) + \delta].$$

Согласно Лемме 3, можно найти такие $N > 0$ и $b > 0$, что для всех $x, w \in X$ существует такое $y\in T^{-N}x \cap B_{\varepsilon/2}(w)$, что $\prod_{i=0}^{N-1} g(T^i y) \geq b$. Мы выбираем $z\in \bar X$ так, чтобы $\bar{\mathcal{L}}^N f(z) = \min(\bar{\mathcal{L}}^N f^*)$. Если $z\in\bar X$, то $f^*(y) = \min(f^*)$ для любой точки $y\in T^{-N}z$, т.е. $f^*(y) = \min(f^*)$ для всех элементов y

ε-плотного множества. Если $z\notin X$, то найдем $x\in X$, достаточно близкое к z, для которого справедливо высказывание

$$[\exists\{y\in T^{-N}x : \textstyle\prod_{i=0}^{N-1} g(T^i y) \geq b\} \Rightarrow [f^*(y) < \min(f^*) + \delta].$$

Допустим, что мы нашли точку y, удовлетворяющую первому свойству, а второму нет, т.е. $f^*(y) \geq \min(f^*) + \delta$. Тогда

$$\bar{\mathcal{L}}^N f^*(x) = \sum_{u\in T^{-N}x} g(u)\ldots g(T^{N-1}u) f^*(u) \geq$$

$$\geq \min(f^*) + \Big(\sum_{i=0}^{N-1} g(T^i y)\Big)\delta \geq \min(f^*) + b\delta.$$

Но этого не может случиться, если x достаточно близко к z. Итак, $\min(f^*) = f^*$. Пусть $\mu(f) = f^*$. Согласно теореме Рисса, $\mu : C(\bar X) \to \mathbb{R}^1$ - элемент $M(\bar X)$. Очевидно, что $\mu = \bar{\mathcal{L}}^*\mu$. Если $m\in M(\bar X)$ и $\bar{\mathcal{L}}^* m = m$, то проинтегрируем отношение $\bar{\mathcal{L}}^n f \rightrightarrows \mu(f)$ по m. Тогда $m(f) = \mu(f)$ для всех $f\in C(\bar X)$, что доказывает единственность μ. □

<u>Доказательство Теоремы 2.</u> Будем писать $\mathcal{L}, C, C(x,x')$ вместо $\mathcal{L}_\varphi, C_\varphi, C_\varphi(x,x')$. Сначала покажем существование функции h. Пусть Λ - множество всех таких функций $f\in C(\bar X)$, что $f\geq 0$, $\nu(f) = 1$ и из условия $x, x'\in X$, $d(x,x') < \varepsilon_0$ вытекает $f(x) \leq \exp[C(x,x')]\, f(x')$. Мы знаем, что $\lambda^{-1}\bar{\mathcal{L}} 1 \geq 0$ и $\nu(\lambda^{-1}\bar{\mathcal{L}} 1) = 1$. Если $x, x'\in X$ и $d(x,x') < \varepsilon_0$, то

$$\bar{\mathcal{L}} 1(x) = \sum{}^* e^{\varphi(y)} \leq \exp\{\sup_{y\in T^{-1}x} [\varphi(y) - \varphi(y')] \sum{}^* e^{\varphi(y')}\} \leq$$

$$\leq e^{C(x,x')}\bar{\mathcal{L}} 1(x).$$

Итак, $\lambda^{-1}\bar{\mathcal{L}} 1\in\Lambda$, следовательно, $\Lambda\neq\Phi$. По определению, Λ - выпуклое и замкнутое множество. Покажем, что Λ - ограниченное и равностепенно непререрывное множество. Пусть $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Выберем N и число a (для ε_1) по Лемме 3. Пусть $x, w\in X$. Найдем такую точку $y_0\in T^{-N}x \cap B_{\varepsilon_1}(w)$, что $S_N\varphi(y_0) \geq a$.
Тогда

$$\bar{\mathcal{L}}^N f(x) = \sum_{y\in T^{-N}x} \exp[S_N\varphi(y)] f(y) \geq \exp[S_N\varphi(y_0)]\, f(y_0) \geq$$

$$\geq e^a f(y_0) \geq e^{a-c} f(w).$$

Поэтому для всех $w, x \in X$ справедливо неравенство $f(w) \le e^{C-a} \bar{\mathcal{L}}^N f(x)$. Поскольку $f \in C(\bar{X})$ и X - всюду плотное множество в $\bar{X}$, последние неравенства останутся справедливыми и для $w, x \in \bar{X}$. Итак, получаем оценку

$$f(w) \le e^{C-a} \nu(\bar{\mathcal{L}}^N f) = e^{C-a} \lambda^N = Q, \ w \in \bar{X},$$

т.е. Λ - равностепенно ограниченное множество. Проверим равностепенную непрерывность Λ. Пусть $f \in \Lambda$ и $d(x,x') < \varepsilon_0$ для $x, x' \in X$. Тогда

$$|f(x) - f(x')| = \max\{f(x) - f(x'), f(x') - f(x)\} \le$$

$$\le \max\{f(x')[e^{C(x,x')} - 1], f(x)[e^{C(x',x)} - 1]\} \le$$

$$\le Q \max\{e^{C(x,x')} - 1, e^{C(x',x)} - 1\}$$

и это выражение оказывается малым, если $d(x,x')$ мало (следуя условию (УП.3)).

Итак, Λ - непустое, выпуклое и компактное подмножество $C(\bar{X})$. Покажем, что $\lambda^{-1} \bar{\mathcal{L}}(\Lambda) \subset \Lambda$. Если $f \in \Lambda$ и $d(x,x') < \varepsilon_0$, то

$$\lambda^{-1} \bar{\mathcal{L}} f(x) = \Sigma^* e^{\varphi(y)} f(y) \le$$

$$\le \lambda^{-1} \Sigma^* e^{\varphi(y')} f(y') [e^{\varphi(y)-\varphi(y')} e^{C(y,y')}] \le$$

$$\le \lambda^{-1} \bar{\mathcal{L}} f(x') \, e^{C(x,x')}$$

Согласно теореме Шаудера-Тихонова о неподвижной точке, найдем функцию $h \in \Lambda$, которая является неподвижной точкой отображения $\lambda^{-1} \bar{\mathcal{L}}$. Но это означает, что $\bar{\mathcal{L}} h = \lambda h$, $\nu(h) = 1$ и для всех $x, x' \in X$, если $d(x,x') < \varepsilon_0$, то $h(x) = \exp[C(x,x')] h(x')$.

Покажем, что $h > 0$. Допустим, что $h(x) = 0$ для некоторого $x \in X$. Из соотношения $\mathcal{L}^n h(x) = \lambda^n h(x) = 0$ следует, что h обращается в 0 на множестве $\bigcup_0^\infty T^{-n} x$, которое в свою очередь является всюду плотным в X по предложению (II). Значит, $h \equiv 0$, что противоречит доказанному выше свойству $\nu(h) = 1$. Стало быть, $h(x) > 0$ для всех $x \in X$. Пусть теперь $w \in \bar{X}$. Шар $B_{\varepsilon_0/2}(w)$ включает последовательность $x_n \in X$, сходящуюся к w, и для любой точки $x' \in B_{\varepsilon_0/2}(w) \cap X$ справедливо $h(x') = \le e^C h(x_n)$.

Поэтому $h(w) \ge e^{-C} h(x') > 0$.

Положим $g = e^{\varphi} h / \lambda \, h_0 T$. Очевидно, $g \in G(X_0)$. Проверим (УП.6). Пусть $x, x' \in X$ и $d(x,x') < \varepsilon_0$. Если $y \in T^{-n} x$, то

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{g(T^i y)}{g(T^i y')} = \exp[S_n \varphi(y) - S_n \varphi(y')] \frac{h(y)}{h(y')} \cdot \frac{h(x)}{h(x')}.$$

Следовательно,

$$\exp[S_n \varphi(y) - S_n \varphi(y') - C(y,y') - C(x,x')] \le \prod_{i=0}^{n-1} \frac{g(T^i y)}{g(T^i y')} \le$$

$$\le \exp[S_n \varphi(y) - S_n \varphi(y') + C(y,y') + C(x,x')].$$

Из этого вытекает, что

$$\exp[-C(x,x') - C(x',x) \le \prod_{i=0}^{n-1} \frac{g(T^i y)}{g(T^i y')} \le \exp[C(x,x') + C(x',x)].$$

Согласно Теореме 1, для всех $f \in C(\bar{X})$, $\bar{\mathcal{L}}^n_{\log g} f \rightrightarrows \mu(f)$, где μ - единственная неподвижная точка отображения $\bar{\mathcal{L}}^*_{\log g}$ в $M(\bar{X})$. Тогда

$$\lambda^{-n} (\bar{\mathcal{L}}^n_\varphi f)(x) = h(x) (\bar{\mathcal{L}}^n_{\log g} f / h)(x),$$

откуда

$$\lambda^{-n} \bar{\mathcal{L}}^n_\varphi f \rightrightarrows h \mu(f/h).$$

Осталось показать $\nu(f) = \mu(f/h)$ и утверждение (3).
Пусть $m \in M(\bar{X})$ определена соотношением $m(f) = \nu(hf)$.
Тогда $m(\bar{\mathcal{L}}_{\log g} f) = \nu(h . \bar{\mathcal{L}}_{\log g} f) = \lambda^{-1} \nu(\bar{\mathcal{L}}_\varphi (fh)) = \nu(fh) = m(f)$.
Следовательно, $\mu = m$. Для доказательства (3) заметим, что согласно (1)

$$\log \lambda = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \log \bar{\mathcal{L}}^n_\varphi 1, \quad \nu(f) = \lim_{n \to \infty} [\bar{\mathcal{L}}^n_\varphi f / \bar{\mathcal{L}}^n_\varphi 1].$$

Из этого непосредственно вытекает утверждение (3). □

<u>Доказательство Теоремы 3.</u> Для доказательства (1) достаточно показать, что если $f \ge 0$, $f \in C(X)$ и $\{f > 0\} \subset X \cap B_{2\varepsilon_0}(x)$ - компактный носитель f, то $\int f_0 T d\mu = \int f d\mu$. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ - компоненты $T^{-1}(X \cap B_{2\varepsilon_0}(x))$ и $T_i = T / A_i$. Тогда носитель у $f_0 T_i$ - компактное подмножество A_i. Расширим $f_0 T_i$ на все X, положив $f_0 T_i \equiv 0$ вне A_i. Тогда $f(Tz) = \Sigma_i f(T_i z)$ и

$$\int f_0 T_i \, d\mu = \int \mathcal{L}_{\log g} (f_0 T_i) d\mu = \int_{X \cap B_{2\varepsilon_0}(x)} g(T_i^{-1} x) f(x) \mu(dx).$$

Суммируя по всем компонентам, мы слева получим $\int t_0 T d\mu$, а справа - $\int f d\mu$.

Следуя части (1), $\mu(X_0)=\mu(X)$. Итак, достаточно показать, что $\mu(\partial X)=0$. Поскольку меры μ и ν являются эквивалентными, $\mu(\partial X)=0$ тогда и только тогда, когда $\nu(\partial X)=0$. Это последнее утверждение и докажем.

Пусть $\varepsilon_1>0$ выбрано таким образом, что $\varepsilon_1<\varepsilon_0$ и X содержит шар радиуса $4\varepsilon_1$. Пусть N настолько большое, что $T^{-N}x$ окажется ε_1 - плотным в X для всех $x\in X$. Обозначим $U_\delta = \{x\in\bar{X}: d(x,\partial X)<\delta\}$. Поскольку ∂X - компактное множество, то найдем конечное открытое покрытие ∂X шарами $V_1,\dots,V_r$ радиуса ε_1. Тогда система $V_i(\delta)=U_\delta\cap V_i$, $1\le i\le r$ является открытым покрытием ∂X. Если $\delta\to 0$, то $\bigcup_{i=1}^{n} V_i(\delta)\downarrow\partial X$. Но $V_i(\delta)\subset V_i$, и поэтому из условия (1) определения 1 вытекает, что $T^{-N}(V_i(\delta)\cap X)$ является объединением попарно непересекающихся множеств диаметра меньше, чем $2\varepsilon_1$. Поскольку $T^{-N}x$ - ε_1 - плотное множество, то, по меньшей мере, одно из этих открытых множеств, скажем, $G_i(\delta)$, удовлетворяет неравенству $d(G_i(\delta),\partial X)>\varepsilon_1$. Притом можно $G_i(\delta)$ избрать таким образом, что $G_i(\delta)\subset G_i(\delta')$ для $\delta'>\delta$. Обозначим $\tilde{X}=\bigcap_{\delta>0}\overline{G_i(\delta)}$. Поскольку $d(G_i(\delta),\partial X)>0$, то $\tilde{X}\cap\partial X=\phi$. Покажем, что $\tilde{X}\subset X\setminus T^{-N}X$. Допустим, что верно обратное, и найдем $x\in\tilde{X}\cap T^{-N}X$. Тогда $T^{N}x\in\bar{V}_i(\delta)\cap X\subset\bar{U}_\delta\cap\bar{V}_i\cap X$ для всех $\delta>0$. Следовательно, $T^{N}x\in\partial X\cap\bar{V}_i\cap X\neq\phi$, что невозможно. Значит, $\tilde{X}\subset X\setminus T^{-N}X=\bigcap_{j=0}^{N-1}T^{-j}(X\setminus T^{-1}X)$. Но по утверждению (1), последнее множество - множество меры 0, откуда $\nu(\tilde{X})=0$. Это означает, что $\nu(\overline{G_i(\delta)})\to 0$ при $\delta\to 0$. Выберем $\delta>0$. Найдем $\varepsilon>0$ и такое открытое множество $U\supset\overline{G_i(\delta)}$, что $\nu(U\setminus\overline{G_i(\delta)})<\varepsilon$. Пусть $f\in C(\bar{X})$ определена соотношениями $f=1$ на $\overline{G_i(\delta)}$, $0\le f\le 1$, $f=0$ вне U. Тогда

$$\lambda^{N}[\nu(G_i(\delta))+\varepsilon]\geq\lambda^{N}\int f\,d\nu=\int\mathcal{L}_{\varphi}^{N}f\,d\mu\geq$$

$$\geq\inf_{y\in G_i(\delta)}\exp[S_N\varphi(y)]\,\nu(\partial X\cap V_i(\delta))=$$

$$=\inf_{y\in G_i(\delta)}\exp[S_N\varphi(y)]\,\nu(\partial X\cap V_i).$$

Используя упражнение 4,

$$\lambda^{N}\nu(\overline{G_i(\delta)})\geq d_i\,\nu(\partial X\cap X_i).$$

Итак, если $\delta\to 0$, то $\nu(\partial X\cap X_i)=0$, откуда $\nu(\partial X)=0$. □

Лекция УШ. ОБЩИЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

Один из общих принципов исследования стохастических свойств динамических систем состоит в замене одного большого параметра - числа степеней свободы, другим - временем. Время вводится при помощи определенного типа разбиений фазового пространства и исследования вероятностей перехода между состояниями, которые определяются как атомы разбиений. Используя такой подход, можно провести далекую аналогию со статистической механикой. Однако выполнение этой программы встречается с серьезными трудностями при попытке переформулировки термодинамического формализма. Напомним вариационный принцип (см. УП.1*)). Пусть (Σ_A,σ_A) - ТЦМ. Для любой функции $\varphi\in C(\Sigma_A)$ существует σ_A - инвариантная мера μ_φ (обозначим через $M_T(X)$ множество всех T-инвариантных мер на борелевских подмножествах метрического пространства X), для которой

$$h(\mu_\varphi)+\langle\varphi\rangle_{\mu_\varphi}=P(\sigma_A,\varphi)=\sup_{\nu\in M_{\sigma_A}(\Sigma_A)}\{h(\nu)+\langle\varphi\rangle_\nu\}. \qquad (\text{УШ}.1^*)$$

В доказательстве (УШ.1*) существенным образом используется тот факт, что преобразование σ_A является глобально растягивающим (см.лекцию П или /34 /).

Упражнение УШ.1*. Пусть (Σ_A,σ_A) - ТМЦ. Определите в Σ_A метрику равенством

$$d(x,y)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}2^{-|i|}\delta_{x_i y_i},\quad x=(x_i),\ y=(y_i)\in\Sigma_A.$$

Тогда σ_A является растягивающим отображением.

Поскольку последнее утверждение заведомо не выполняется для динамических систем, исследованных в предыдущих лекциях, то необходимо обобщить (УШ.1*).

Пусть M(X) (соотв. $M_T(X)$) - множество всех (соот. всех T-инвариантных) борелевских вероятностых мер на X. Обозначим через $\mathcal{B}(X)$ борелевское поле в X. Если $\mathcal{C}\subset\mathcal{B}(X)$ - поле, и $m\in M(X)$, то $E_m(\cdot|\mathcal{C})$ обозначает условное математическое ожидание.

Символом $I_m(\mathcal{B}(X)|\mathcal{C})$ обозначим условную информацию $\mathcal{B}(X)$ по отношению к $\mathcal{C}$. Есть несколько эквивалентных определений. Опишем одно из них. Если ξ - счетное разбиение на атомы из $\mathcal{B}(X)$, то положим

$$I_m(\xi|\mathcal{C})=-\sum_{E\in\xi}\log E_m(1\!\!1_E|\mathcal{C})$$

($E_m(\mathbb{1}_E|\mathcal{C}) = P_m(E|\mathcal{C})$ - условная вероятность события E). Возьмем растущую последовательность $\xi_n \uparrow \mathcal{B}(X)$ (это возможно, поскольку X всюду плотно в $\bar{X}$, а $\bar{X}$ - компактное и, стало быть, сепарабельное метрическое пространство). Тогда можно (в смысле $L_1(m)$ -нормы) определить

$$I_m(\mathcal{B}(X)|\mathcal{C}) = \lim_{n\to\infty} I_m(\xi_n|\mathcal{C}).$$

Теорема УШ.1. Пусть T удовлетворяет условию (1) определения УП.1 и пусть $g\in G(X_0)$ удовлетворяет (УП.5). Пусть $\sigma\in M(X)$. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\bar{\mathcal{L}}^*_{\log g}\,\sigma = \sigma$;

(2) $[\sigma\in M_T(X)]\ \&\ [\forall\{f\in C(\bar{X})\}$

$$E_\sigma(f|T^{-1}\mathcal{B})(x) = \sum_{y\in T^{-1}x} g(y)f(y)\ [\sigma],$$

где $\mathcal{B}=\mathcal{B}(X)$; и

(3) $[\sigma\in M_T(X)]\ \&\ [\forall\{m\in M_T(X)\}]$

$$\sigma[I_\sigma(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B})+\log g] \geq m[I_m(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B})+\log g].$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\log g}$ и $\bar{\mathcal{L}}^*\sigma=\sigma$. Тогда $\sigma\in M_T(X)$ (см. доказательство п. (1) Теоремы УП.3). Для $f\in C(\bar{X})$ имеем

$$\sigma(f) = \sigma(\bar{\mathcal{L}}f) = \sigma(\mathcal{L}f) = \sigma((\mathcal{L}f)_0 T) = \sigma[\Sigma^* g(y)f(y)],$$

откуда

$$E_\sigma(f|T^{-1}\mathcal{B})(x) = \Sigma^* g(y)f(y)\ [\sigma].$$

Следовательно, (1) $\Rightarrow$ (2). Покажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть (2) выполнено. Непосредственным следствием определений является равенство $I_\sigma(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) = -\log g$. Пусть $m\in M_T(X)$ и функция $g_m: X_0\to\mathbb{R}^1$ задается m-п.в. соотношениями $E_m(f|T^{-1}\mathcal{B})(x)=\Sigma^* g_m(y)f(y)$. Поскольку $m\in M_T(X)$, то $I_m(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) = -\log g_m$, откуда

$$m[I_m(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B})+\log g] = m(\log(g/g_m)) \leq m[(g/g_m)-1] =$$
$$= \int \Sigma^* g_m(y)[g(y)/g_m(y)-1]\, m(dx) = 0.$$

Наконец, покажем, что (3) $\Rightarrow$ (1). Если σ удовлетворяет (3), то $\sigma[(g/g_\sigma)-1] = \sigma[\log(g/g_\sigma)]$, так что $g = g_\sigma\ [\sigma]$. Если $f\in C(\bar{X})$, то последний факт влечет за собой

$$\sigma(\bar{\mathcal{L}}f) = \sigma(\mathcal{L}f) = \sigma((\mathcal{L}f)_0 T) = \int \Sigma^* g(y)f(y)\sigma(dy) = \sigma(f).$$

По определению $\bar{\mathcal{L}}^*$ это означает, что $\bar{\mathcal{L}}^*\sigma=\sigma$. □

В предыдущем доказательстве мы обнаружили, что любая инвариантная мера, удовлетворяющая условию (3), на самом деле удовлетворяет следующему вариационному равенству:

$$\sigma[I_\sigma(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B})+\log g] = 0. \qquad (\text{УШ.2})$$

Это приводит нас к известной формулировке вариационного прицнипа. А именно, если $|\sigma(\log g)|<\infty$, то (УШ.2) можно записать в виде

$$H_\sigma(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B})+\sigma(\log g) = 0, \qquad (\text{УШ.3})$$

где $H_\sigma(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) = \sigma[I_\sigma(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B})]$ - средняя условная энтропия. Если $X_0 = X = \bar{X}$ и T - растягивающее отображение с константой растяжения ε, то любое разбиение X на множества диаметра меньше, чем ε, является односторонней образующей (по отношению к любой инвариантной мере; см. /34/), вследствие чего утверждение (3) Теоремы 1 переходит в известную форму *вариационного принципа*:

$$\forall\{m\in M_T(X)\}\ h_\sigma(T)+\sigma(\log g) \geq h_m(T)+m(\log g). \qquad (\text{УШ.4})$$

Замечание УШ.1. Я.Г.Синай /5,35/ разработал другой подход к определению равновесных состояний, который для широкого класса динамических систем совпадает с вариационным подходом. Основная идея состоит в определении условных распределений Гиббса в конечных объемах, и в доказательстве существования предела этих условных распределений (при подходящем выборе граничных условий) к *предельному распределению Гиббса*. Оказывается, что предельные распределения Гиббса удовлетворяют вариационному принципу и, обратно, при достаточно общих условиях предельное распределение Гиббса можно построить для любой наперед заданной меры, удовлетворяющей вариационному принципу.

Определение УШ.1. Любую меру σ со свойством $\sigma(X)=1$ и обладающую любым (и, следовательно, всеми) из свойств (1), (2), (3) Теоремы 1, будем называть g *-мерой.*

Согласно Теоремам 1 и УП.3, если для функции g выполнено условие (УП.4), то существует, и притом единственная, g -мера, которая полностью характеризуется условием $\bar{\mathcal{L}}^n_{\log g} f \rightrightarrows \mu(f)$, $f \in C(\bar{X})$. Следующее следствие является итогом полученных результатов.

Следствие УШ.1. Пусть Т: $X_0 \to X$ удовлетворяет условию (1) определения УП.1 и $g \in G(X_0)$ - условию (УП.5). Пусть $\sigma \in M_T(X)$ - g -мера. Тогда соотношения

$$\mathcal{L}_{\log g} f(x) = \Sigma^*_x f(y) g(y)$$

определяют положительный линейный оператор на $L^1(\sigma)$ и справедливо утверждение

$$\forall\{f \in L^1(\sigma)\}\ \forall\{\ell \in L^\infty(\sigma)\}\ \sigma[\ell.\mathcal{I}_{\log g} f] = \sigma[(\ell_0 T).f].$$

Упражнение УШ.1. Докажите.

Следствие УШ.2. Пусть Т: $X_0 \to X$ удовлетворяет условиям определения УП.1, и пусть $\varphi \in C(X_0)$ удовлетворяет условиям (1) определения УП.2 и (УП.3). Пусть λ, ν, h, μ и g определены как в Теореме УП.2. Тогда

(1) μ - единственная g -мера (для $g = e^\varphi h / \lambda h_0 T$);

(2) μ - неатомическая и строго положительная для любого непустого открытого множества;

(3) $\nu_0 T^{-n} \Rightarrow \mu$ в слабой топологии пространства $M_T(X)$;

(4) если $\psi \in C(X_0)$ удовлетворяет тем же условиям, что и φ, то $\mu_\varphi = \mu_\psi$ тогда и только тогда, когда
$\varphi(x) - \psi(x) = f(Tx) - f(x) + C,\ x \in X_0$,

для некоторой константы $c \in \mathbb{R}^1$ и функции $f \in C(\bar{X})$;

(5) для всех $m \in M_T(X)$,
$\log g = \mu[I_\mu(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) + \varphi] \geq m[I_m(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) + \varphi]$;

(6) $\log\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \log \bar{\mathcal{L}}^n_\varphi 1$,

(7) (T, μ) - точный эндоморфизм (т.е. для любого множества $E \in \cap_{n=0}^\infty T^{-n}\mathcal{B}$, $\mu(E) \in \{0,1\}$).

Замечание УШ.2. Точные эндоморфизмы - это необратимая аналогия К-систем (т.е. систем, у которых существует перемешивание любого порядка; см. Добавление). Как увидим, условие точности вместе с одним условием технического характера будут обеспечивать самые хорошие свойства для канонического расширения эндоморфизма Т. Мы сформулируем это условие в виде следующей теоремы (которые приводим здесь без доказательства).

Теорема УШ.2. Пусть Т: $X_0 \to X$ и $\varphi \in C(X_0)$ такие же, как в следствии 2. Допустим, что существует такое конечное или счетное измеримое разбиение $\xi = (C_1, C_2, \dots)$ множества X, что:

(1) $T|C_i$ - взаимно-однозначное для любого $i = 1,2,\dots$;

(2) $\mu(\partial\xi) = \mu(\cup_i \partial C_i) = 0$;

(3) для всех j, TC_j почти всюду равно объединению атомов разбиения ξ;

(4) для любого набора $\{i_n\}$ из множества индексов разбиения ξ, множество $\cap_{n=0}^\infty T^{-n} C_{i_n}$ содержит не более одной точки; и

(5) любое C_i является подмножеством компоненты множества $T^{-1}B_{\varepsilon_0}(x_i)$ для некоторого i.

Тогда естественное расширение (T, μ) - бернуллиевское, т.е. изоморфное сдвигу Бернулли с конечной или бесконечной энтропией.

Дополнение к Лекции УШ.

Докажем следствие 2. Утверждение (1) вытекает из Теорем УП.1 и УП.3. Покажем (2). Пусть $\varepsilon > 0$. Следуя Лемме УП.3, найдем такие $N > 0$ и $b > 0$, что для всех $x, w \in X$ и некотором $y \in T^{-N}x \cap B_\varepsilon(w)$ выполняется $\Pi_0^{N-1} g(T^i y) \geq b$. Тогда

$$\mu(B_\varepsilon(w)) = \int \mathcal{L}^N_{\log g} 1\!\!1_{B_\varepsilon(w)}(x)\mu(dx) =$$
$$= \int \sum_{y \in T^{-N}x \cap B_\varepsilon(w)} \prod_{i=0}^{N-1} g(T^i y)\mu(dx) \geq b.$$

Следовательно, μ - мера любого ε -шара положительная, т.е. μ - строго положительная для всех непустых открытых множеств. Если бы у меры μ существовали атомы, то среди них можно было выбрать тот (x_0), у которого самая большая вероятность. Теперь

$$\mu(x_0) = \int \Sigma^* g(y) 1\!\!1_{\{x_0\}}(y)\mu(dx) = g(x_0)\mu(Tx_0).$$

Поскольку $g(x_0) \leq 1$, то обязательно $g(x_0) = 1$. Одновременно

$g > 0$ и $\sum_{z \in T^{-1}x_0} g(z) = 1$. Это противоречие завершает доказательство (2).

Из Теоремы УП.2 для любой функции $f \in C(\bar{X})$ получим

$$\int f\, d\nu T^{-n} = \int f_\circ T^n d\nu = \lambda^{-n} \int \bar{\mathcal{L}}_\varphi^n (f_\circ T^n) d\nu = \lambda^{-n} \int f_\circ \bar{\mathcal{L}}_\varphi^n 1\, d\nu \to$$
$$\to \int f h\, d\nu = \int f d\mu \quad (\mu = h\nu);$$

что показывает справедливость (3). Из Теоремы 1(2) вытекает, что если $\mu_\varphi = \mu_\psi$, то $g_\varphi = g_\psi [\mu_\varphi]$. Итак, $\varphi - \psi = \log \lambda_\varphi - \log \lambda_\psi + \log((h_\varphi / h_\psi)_\circ T) - \log(h_\varphi / h_\psi) [\mu_\varphi]$. Поскольку обе стороны являются функциями, непрерывными на X_0 и μ - положительная на всех открытых непустых множествах, то последнее равенство выполнено для всех $x \in X_0$. Обратно, пусть $\varphi - \psi = f_\circ T - f + c$ $(c \in \mathbb{R}^1,\ f \in C(\bar{X}))$. Тогда $\mathcal{L}_\psi^n = e^{-nc} \mathcal{L}_\varphi^n (\ell e^f) e^{-f}$, откуда

$$\frac{\mathcal{L}_\psi^n \ell}{e^{nc} \lambda_\varphi^n} = e^{-f} \frac{\mathcal{L}_\varphi^n (\ell e^f)}{\lambda_\varphi^n} \rightrightarrows h_\varphi e^{-f} \mu_\varphi \left(\frac{\ell e^f}{h_\varphi} \right); \quad \ell \in C(\bar{X}).$$

Значит, $\lambda_\psi = e^c \lambda_\varphi$, $h_\psi = h_\varphi e^{-f}$ и $\mu_\psi(\ell / h_\psi) = \mu_\varphi(e^f \ell / h_\varphi)$. Следовательно, $\mu_\psi = \mu_\varphi$. Тем самым мы доказали утверждение (4).

Используя Теорему УП.2 и единственность g -меры μ, получаем неравенство $\mu[I_\mu(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) + \log g] \geq m[I_m(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) + \log g]$ для всех $m \in M_T(X)$. Но $\varphi = \log g + \log \lambda + \log h_\circ T - \log g$. Из-за инвариантности меры μ, последние неравенства оказываются равносильными неравенствам $\mu[I_\mu(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) + \varphi] \geq m[I_m(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) + \varphi]$; $m \in M_T(X)$. Из (УШ.3) непосредственно вытекает, что $\mu[I_\mu(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) + \varphi] = \log \lambda$. Тем самым мы доказали (5).

Для доказательства (6) остается только взять $f \equiv 1$ в Теореме УП.2 и взять логарифмы.

Нам осталось доказать последнее утверждение. Соотношения $\mathcal{L}f(x) = \sum^* g(y) f(y)$ $(\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\log g})$ определяют оператор на $L^1(\mu)$. Проверим его непрерывность. Для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f \in L^1(\mu)$ найдется такая функция $\ell \in C(\bar{X})$, что $\int |f - \ell| d\mu < \varepsilon$. Тогда

$$\int |\mathcal{L}^n f - \mu(f)| d\mu \leq \int |\mathcal{L}^n f - \mathcal{L}^n \ell|\, d\mu + \int |\mathcal{L}^n(\ell) - \mu(\ell)|\, d\mu +$$
$$+ |\mu(\ell) - \mu(f)| \leq \int |f - \ell| d\mu + |\mu(\ell) - \mu(f)| + \int |\mathcal{L}^n \ell - \mu(\ell)|\, d\mu.$$

Согласно Теореме УП.1, последнее выражение, и тем самым всю сумму на правой стороне можно сделать сколь угодно малой. Итак,

$\int |\mathcal{L}^n f - \mu(f)| d\mu \to 0$ для любой функции $f \in L^1(\mu)$. Для доказательства точности достаточно показать, что

$$E_\mu(f | \cap_{n=0}^\infty T^{-n}\mathcal{B}) = \mu(f)\ [\mu]; \quad f \in L^1(\mu).$$

Но

$$\int |E_\mu(f | \cap_0^\infty T^{-n}\mathcal{B}) - \mu(f)|\, d\mu \leq$$
$$\leq \int |E_\mu(f) \cap_0^\infty T^{-n}\mathcal{B}) - E_\mu(f) T^{-N}\mathcal{B})| d\mu +$$
$$+ \int |E_\mu(f | T^{-N}\mathcal{B}) - \mu(f)| d\mu.$$

По Теореме о сходимости условных математических ожиданий второе слагаемое можно выбором большого N сделать произвольно малым. Оставшееся слагаемое можно выразить в форме

$$\int |(\mathcal{L}^n f)_\circ T^N - \mu(f)| d\mu = \int |\mathcal{L}^N f - \mu(f)| d\mu \to 0.$$

□

Лекция 1X. ПРИМЕНЕНИЕ К НЕКОТОРЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Сначала исследуем следующий вопрос. У нас существует априори определенная мера ν, и мы будем искать меру $\mu \in M_T(X)$, эквивалентную мере ν. Для удобства напомним совокупность основных предположений. Отображение T: $X_0 \to X$ удовлетворяет определению УП.1, $\nu \in M(\bar{X})$, $\nu(X_0)=1$, и ν является несингулярной и положительно несингулярной.

Последнее означает, что если $E \subset X$ и $\nu(E)=0$, то $\nu(T^{-1}E)=0$, соотв. если $E \subset X_0$ и $\nu(E)=0$, то $\nu(TE)=0$. В условиях Леммы УП.2 эти свойства доказываются следующим способом:

Лемма 1X.1. Пусть $\lambda>0$ и $\nu \in M(\bar{X})$ такие же, как в Лемме УП.2. Для любой компоненты A_i множества $T^{-1}(X \cap B_{2\varepsilon_0}(x))$ определим меру $\nu|A_i$ соотношением $(\nu/A_i)(E)=\nu(E \cap A_i)$. Тогда для почти всех $y \in A_i$ верно

$$[d(\nu T/A_i)/d\nu/A_i](y)=\lambda \exp(-\varphi(y)).$$

Доказательство. Пусть у $f \in C(\bar{X})$ компактный носитель $\{f>0\} \subset A_i$. Тогда

$$\lambda \int_{A_i} f d\nu = \lambda \int f d\nu = \int \bar{P}_\varphi f d\nu = \int_{TA_i} e^{\varphi(y_i)} f(y_i) d\nu ,$$

где y_i - тот элемент $T^{-1}x$, который лежит в A_i. Но последнее выражение равно

$$\int_{A_i} e^{\varphi(x)} f(x) \frac{d(\nu T/A_i)}{d(\nu/A_i)} d\nu .$$

Следовательно,

$$\lambda d\nu = e^{\varphi(y)}[d(\nu T/A_i)/d(\nu/A_i)]\, d\nu ,$$

т.е.

$$d(\nu T/A_i)/d(\nu/A_i) = \lambda \exp\{-\varphi(y)\}[\nu].$$

□

Следствие 1X.1. В условиях Леммы УП.2 ν является несингулярной и положительно несингулярной.

Доказательство. $\bar{X}$ - компактное метрическое пространство. Фиксируем $\varepsilon_0>0$, как в условии (1) определения УП.1 и построим конечное

покрытие $\bar{X}$ шарами $B_{2\varepsilon_0}(x_i)$, $1 \le i \le p$. Тогда множества $B_{2\varepsilon_0}(x_j) \cap X$, $1 \le j \le p$ образуют покрытие X. Следуя условию (1), X_0 можно покрыть компонентами этих множеств.

(а) Пусть $F \subset B_{2\varepsilon_0}(x_j) \cap X$ и $\nu(F)=0$. Обозначим $A_i(x_j)$ компоненты $T^{-1}(B_{2\varepsilon_0}(x_j) \cap X)$. Достаточно показать, что $\nu(T^{-1}F \cap A_j(x_j))=0$ (поскольку $T|A_i(x_j)$ - гомеоморфизм). Но согласно предыдущей Лемме,

$$\nu(F) = \int_{T^{-1}F \cap A_i(x_j)} \lambda e^{-\varphi(y)} \nu(dy).$$

Условие (1) для φ (см. определение УП.2) показывает, что $\lambda e^{-\varphi(y)}>0$ для всех y. Итак, если $\nu(F)=0$, то необходимо также $\nu(T^{-1}F \cap A_i(x_j))=0$.

(б) Пусть $\nu(E)=0$ и E - подмножество какой-нибудь компоненты. Согласно Лемме 1,

$$\nu(TE) = \int_E \lambda e^{-\varphi(y)} \nu(dy) = 0.$$

□

Поскольку T - гомеоморфизм локально в окрестности любой точки $x_0 \in X_0$ и поскольку ν является положительно несингулярной, то имеет смысл определить локальную производную Радона-Никодима $d\nu T/d\nu$ в каждой точке множества X_0. Таким образом, мы определим (п.н. однозначно) отображение

$$x \mapsto (d\nu T/d\nu)(x): X_0 \to \mathbb{R}^1.$$

Это, по существу, класс взаимно эквивалентных отображений, и поэтому мы будем считать, что можно выбрать непрерывного представителя этого класса. Положим $\varphi = -\log d\nu T/d\nu\ (\in C(X_0))$. Поскольку

$$\Sigma^* 1/\frac{d\nu T}{d\nu}(x) = \frac{d\nu T^{-1}}{d\nu}(x) ,$$

условие (1) определения (УП.2) можно записать в виде

$$(d\nu T^{-1}/d\nu)(x) \le K;\quad x \in X. \tag{1X.1}$$

Подобным образом, условие (УП.5) совпадает с

$$\sup_{n \ge 1} \sup_{y \in T^{-n}x} (d\nu T^n/d\nu(y'))/(d\nu T^n/d\nu(y)) \text{ - ограниченная для } d(x,x')<\varepsilon_0 \text{ и сходится к 1, если } d(x,x') \to 0 . \tag{1X.2}$$

Упражнение IX.1. Докажите.

Лемма IX.2. Для $\varphi = -\log(d\nu T/d\nu)$ верно $\bar{\mathcal{L}}_\varphi^* \nu = \nu$.

Упражнение IX.2. Докажите. (Указание: пусть $x \in X$ и пусть $T^{-1}(B_{2\varepsilon_0}(x) \cap X) = \bigcup_{i=1}^\infty A_i(x)$ как в определении УП.1. Пусть $T_i = T/A_i$. Используйте факт

$$(d\nu T_i^{-1}/d\nu)(T_i y)(d\nu T_i/d\nu)(y) = 1$$

для доказательства того, что $\int_E \bar{\mathcal{L}}_\varphi f d\nu = \int_{T^{-1}E} f d\nu$. Используйте то, что ν сосредоточена на X).

Теперь сформулируем несколько утверждений, которые непосредственно вытекают из ранее полученных общих результатов:

Теорема IX.1. Пусть $T: X_0 \to X$ удовлетворяет условиям определения УП.1 и пусть $\nu \in M(X)$ - несингулярная и положительно несингулярная мера. Допустим, что производная $d\nu T/d\nu$ удовлетворяет соотношениям (IX.1) и (IX.2). Тогда

(1) существует $h \in C(\bar{X})$, $h > 0$, так что $\bar{P}_\varphi^n \rightrightarrows h.\nu(f)$ для всех $f \in C(\bar{X})$;

(2) мера $\mu = h.\nu$ T -инвариантна и (T, μ) - точный эндоморфизм;

(3) $\nu_0 T^{-n} \Rightarrow \mu$ слабо в $M(\bar{X})$;

(4) μ - единственный элемент $M_T(X)$, для которого

$$D = \mu[I_\mu(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) - \log(d\nu T/d\nu)] \geq$$
$$\geq m[I_m(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) - \log(d\nu T/d\nu)], \ m \in M_T(X);$$

(5) если существует разбиение ξ такое, как в Теореме УШ.2, то естественное расширение (T, μ) является бернуллиевским.

Подобным образом мы получаем следующую теорему о существовании <u>равновесных состояний</u>, т.е. мер $\mu \in M_T(X)$, для которых справедливо неравенство (УШ.4) или более общее утверждение (3) Теоремы УШ.1:

Теорема IX.2. Пусть $T: X_0 \to X$ удовлетворяет условиям определения УП.1, и пусть $\varphi \in C(X_0)$ удовлетворяет условиям (1) определения УП.2 и (УП.3). Тогда

(1) у φ существует единственное равновесное состояние μ_φ;

(2) μ_φ - неатомическая и положительная на всех непустых открытых множествах;

(3) (T, μ_φ) - точный эндоморфизм;

(4) если существует разбиение ξ, как в Теореме УШ.2, то естественное расширение (T, μ_φ) - бернуллиевское; и

(5) если $\psi \in C(X_0)$ удовлетворяет тем же самым условиям, что и φ, тогда $\mu_\varphi = \mu_\psi$ точно тогда, когда существуют $c \in \mathbb{R}^1$ и $f \in C(\bar{X})$, для которых справедливо равенство $\varphi(x) - \psi(x) = f(Tx) - f(x) + c, x \in X_0$.

Теперь перейдем к исследованию примеров динамических систем, к которым применима общая теория из предыдущей лекции.

Пусть X - компактное связное многообразие и $T: X \to X$ - отображение класса C^1. Будем называть T <u>растягивающим</u>, если существуют $c > 0$, $\lambda > 1$ и метрика Римана на X, для которой $\|DT^n(v)\| \geq c\lambda^n \|v\|$ для всех касательных векторов v. Здесь DT - касательное отображение, индуцированное отображением T. Как хорошо известно, всегда можно выбрать метрику таким образом, чтобы c=1 (ляпуновская метрика). Стало быть, $\|DTv\| \geq \lambda \|v\|$. Мы считаем, что $X_0 = X = \bar{X}$. Пусть d - метрика на X, определенная при помощи метрики Римана. Тогда существует такое $\delta_0 > 0$, что $d(Tx, Tx') \geq \lambda d(x, x')$, если только $d(x, x') < \delta_0$. Из определения растягиваемости вытекает условие (1) определения УП.1, и притом любое множество $T^{-1}B_{2\varepsilon_0}(x)$ является объединением k множеств $A_1(x), \dots, A_k(x)$ таких, что T является гомеоморфизмом из $A_i(x)$ в $B_{2\varepsilon_0}(x)$ для $1 \leq i \leq k$.

Определение растягивающего эндоморфизма многообразия принадлежит Шубу /36/, который исследовал вопросы глобальной теории эндоморфизмов компактных дифференцируемых многообразий (типа грубости и топологической сопряженности таких эндоморфизмов). Из работы Шуба можно вывести также доказательство условия (П) определения УП.1. Мы это доказательство не приводим.

Пусть ν - гладкая вероятностная мера на X определена метрикой Римана (см. /26/). Мы ищем T-инвариантную вероятностную меру, эквивалентную мере ν. Рассмотрим линейное отображение $D_x T: T_x X \to T_{Tx} X$ ($T_x M$ обозначает касательное в точке $x \in M$ многообразие к многообразию M). Используя метрику Римана, можно определить определитель и положить $T'(x) = \det(D_x T)$. Тогда $(d\nu T/d\nu)(x) = |T'(x)|$, так что функция φ (см (IX.1), (IX.2)) имеет вид $\varphi(x) = -\log|T'(x)|$. Поскольку X является связным многообразием, то $T'(x)$ не может менять знак. Если T - класса C^n, то φ - класса C^{n-1}. Поскольку мощность множеств $\{T^{-1}x\}$ является ограниченной, то условие (IX.1) выполнено. Если T класса C^2, то выполняется и (1X.2). Это можно показать, проверяя условие (УП.3) для функции $\varphi = -\log |T'(x)|$.

Допустим, что $d(x,x') < \varepsilon_0$ и $y \in T^{-n}x$. Поскольку φ - отображение класса C^1, то мы найдем такую константу C, что

$$|\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(T^i y) - \varphi(T^i y')| \le C \sum_{i=0}^{n-1} d(T^i y, T^i y').$$

Но поскольку $d(T^i y, T^i y') \le d(x,x')/\lambda^{n-i}$, то получим

$$|\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(T^i y) - \varphi(T^i y')| \le C\, d(x,x')/(\lambda - 1),\ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1X.3. Пусть T: $X \to X$ - растягивающее отображение класса C^2. Тогда существует T-инвариантная мера μ, эквивалентная гладкой мере ν. Более того, верны следующие утверждения:

(1) существует такая $h \in C(X), h > 0$, что $\mu = h\nu$ и

$$\sum_{y \in T^{-n}x} \{f(y)/(T^n)'(y)\} \rightrightarrows h\nu(f),\ f \in C(X),$$

(2) $\nu_0 T^{-n} \Rightarrow \mu$ в $M(X)$;

(3) (T, μ) - точный эндоморфизм;

(4) естественное расширение (T, μ) - бернуллиевское;

(5) μ однозначно определяется условиями $\mu \in M_T(X)$ и
$\forall \{m \in M_T(X)\}\ h_\mu(T) - \mu|\log|T'(x)|| \ge h_m(T) - m(\log|T'(x)|)$;

(6) $h_\mu(T) = \mu(\log|T'(x)|)$, и

(7) $\nu \in M_T(X)$ тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$,

$$\sum_{y \in T^{-1}x} 1/|T'(y)| = 1.$$

Упражнение 1X.2. Докажите утверждение (7). (Указание: какой функции h соответствует условие $\nu \in M_T(X)$?).

Теорема 1 и определяющее упражнение позволяют непосредственно получить все утверждения Теоремы 3, за исключением (4). Доказательство (4) требует доказательства существования разбиения ξ, описанного в Теореме УШ.2. К этой проблеме мы возвратимся немного позднее.

Заметим, что любая функция $\varphi \in C(X)$ удовлетворяет условию (1) определения УП.2, поскольку $card(T^{-1}x)$ - ограниченная как функция от x.

Упражнение 1X.3. Функцию φ назовем функцией Гелдера, если существуют такие M и $0 < \alpha < 1$, что $|\varphi(x) - \varphi(x')| \le M d(x,x')^\alpha$. Любая функция Гелдера удовлетворяет условию (УП.3). Докажите. (Указание: используйте подход, указанный при доказательстве неравенства перед Теоремой 3).

На основе последнего упражнения и в соответствии с Теоремой 2 мы получим три первых утверждения следующей теоремы.

Теорема 1X.4. Пусть T: $X \to X$ - растягивающее отображение класса C^2 и пусть $\varphi: X \to \mathbb{R}^1$ - функция Гелдера. Тогда у φ существует единственное равновесное состояние μ_φ. Более того,

(1) μ_φ - непрерывная мера, положительная для всех непустых открытых множеств;

(2) (T, μ_φ) - точный эндоморфизм, и его естественное расширение - бернуллиевское;

(3) если $\psi: X \to \mathbb{R}^1$ - тоже функция Гелдера, то $\mu_\varphi = \mu_\psi$ точно тогда, когда найдем такие $f \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}^1$, что $\varphi - \psi = f_0 T - f + c$; и

(4) пусть гладкая мера ν является T-инвариантной и пусть T - класса C_2. Тогда ν - единственная мера максимальной энтропии (т.е. равновесное состояние для функции $\varphi \equiv 0$) тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$ число $|T'(x)|$ - целое.

Доказательство. Нам осталось доказать (4). Пусть μ_0 - мера максимальной энтропии и $\lambda_0, \nu_0, h_0, g_0$ определяются по-прежнему для функции $\varphi \equiv 0$. Тогда

$$\int \sum^* f(y)\, \nu_0(dx) = \lambda_0 \int f d\nu_0,\quad f \in C(X),$$

следовательно, $\lambda_0 = k$. Несложно проверить, что $h_0 \equiv 1$. Поэтому $g_0 = 1/k$. Если $\nu \in M_T(X)$, то ν - единственное равновесное состояние для $\varphi(x) = -\log|T'(x)|$. Стало быть, $\nu = \mu_0$ тогда и только тогда, когда $g_\varphi = g_0$. Но, следуя утверждению (7) Теоремы 3, $g_\varphi(y) = 1/|T'(y)|$, и поэтому $\nu = \mu_0$ точно тогда, когда $|T'(x)| = k$ для всех $x \in X$.

□

Теперь обратим внимание на вопрос о существовании разбиения ξ, свойства которого перечислены в Теореме УШ.2. Доводы в пользу существования такого разбиения содержатся в конструкции Боуена марковских разбиений для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А (см./13/). Идея восходит, по-видимому, к Аносову /7/.

Лемма 1X.3. Пусть (X, d) - компактное метрическое пространство и пусть $T: X \to X$ такое отображение, что существуют константы $\delta_0 > 0$ и $\lambda > 1$, для которых $d(Tx, Tx') \geqslant \lambda d(x,x')$, если только $d(x,x') < \delta_0$. Тогда

(1) $\forall \{\beta > 0\} \exists \{\alpha > 0\} \forall \{x_i\}_0^\infty \subset X, d(Tx_i, x_{i+1}) < \alpha, i \geqslant 0\}$

$\exists \{x \in X\} \forall \{i \geqslant 0\}\, d(x_i, T^i x) < \beta.$

Точка x - единственная, если 2β меньше константы растягивания отображения Т.

(2) Для любого достаточно малого β существует замкнутое покрытие $\{R_1, \ldots, R_m\}$ пространства X, причем элементы этого покрытия пересекаются только на границах, $X \setminus \bigcup_i \partial R_i$ - открытое плотное множество, $diam(R_i) < \beta, T(\bigcup_i \partial R_i) \subset \bigcup_i \partial R_i$ и, если $int(R_i) \cap T_{int}(R_j) \neq \phi$, то $R_i \subset TR_j$.

Замечание 1X.1. Объясним смысл утверждения (1). Последовательность $\{x_i\} \subset X, d(Tx_i, x_{i+1}) < \alpha, i \geqslant 0$ будем называть α -траекторией. Тогда (1) гласит, что любую α -траекторию можно в течение всего времени отслеживать настоящей траекторией какой-то точки $x \in X$ на расстоянии, не большем β. Возникновение α -траектории можно представить себе следующим образом. Вместо истинной динамики (заданной преобразованием Т) мы обнаруживаем траектории, соответствующие отображению $\widetilde{T}$, "близкому" к Т. Это типичное явление при моделировании динамических систем на ЭВМ. Если мы вычисляем последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_N$, то обычно нам удается обеспечить только условие $d(x_{n+1}, Tx_n) < \varepsilon$, $n = 0,1,\ldots,N-1$, где ε - малое число (которое задается погрешностью вычислительного процесса, скажем, $\varepsilon \sim 10^{-6} - 10^{-10}$). Но суммарная ошибка растет со временем, так что после большого числа шагов N расстояние между истинным значением $T^N x_0$ и результатом x_N вычисления может оказаться большим. Утверждение (1) говорит, что для растягивающих отображений все-таки ситуация не становится слишком плохой.

Замечание 1X.2. С физической точки зрения утверждение (1) также оказывается чрезвычайно полезным. В этом можно убедиться при помощи следующего рассуждения (см. /8/). Допустим, что точка x_0 вместо Tx_0 переходит в точку x_1, близкую к Tx_0. Обозначим переходную вероятность, которая описывает случайный переход от точки Tx_0 к точке x_1, через $P(\cdot | Tx_0)$, т.е. точка x_0 переходит сначала в точку Tx_0, а затем в точку x_1, в соответствии с распределением $P(\cdot | Tx_0)$. Если это распре-

деление сосредоточено в окрестности радиуса не больше половины константы растягивания, то утверждение (1) показывает, что у только что описанной стохастической цепи Маркова траекторий, в некотором смысле не больше, чем траекторий у исходной динамической системы. Таким образом, мы приходим к следующему заключению: внутренняя стохастичность сильнее стохастичности, вызванной малыми случайными добавками.

Мы не будем приводить доказательства утверждения (1), поскольку оно имеется во многих работах (см. например, /8,13,37/), и докажем только второе утверждение Леммы 3.

Доказательство Леммы 3 (2). Возьмем такое β, чтобы 4β оказалось меньше константы растягивания Т, и, следуя (1), найдем соответствующее $\alpha > 0$. Пусть $\gamma < \beta$, $\gamma < \alpha/2$ такое, что $d(x,x') < \gamma$ влечет за собой $d(Tx, Tx') < \alpha/2$. Пусть $C = \{x_1, \ldots, x_r\}$-γ- плотное подмножество X. Положим $\Sigma(C) = \{q \in \Pi_0^\infty C : d(Tq_i, q_{i+1}) < \alpha, i \geqslant 0\}, q = \{q_i\}_0^\infty$. Определим отображение $\theta : \Sigma(C) \to X$, положив $\theta(q)$ равным единственной точке, существование которой обеспечено утверждением (1). Тогда θ - - непрерывное отображение на все X. Пусть $P_i = \{\theta(q) : q_0 = x_i\}$.
Тогда $\{P_i, \ldots, P_r\}$ - замкнутое покрытие X и $X - \bigcup_i \partial P_i$ является открытым и плотным множеством. Если взять систему всех перечислений множеств типа $int(P_i \cup P_j)$ и $int(P_k \cup P_\ell)$, то получим систему $D_1, \ldots, D_m$ открытых и попарно непересекающихся множеств. Система $R_i = \bar{D}_i$ и является искомой.

Упражнение 1X.4. Проверьте, что $\{R_1, \ldots, R_m\}$ удовлетворяет всем условиям Леммы 3 (2).

Следствие 1X.2. В условиях Леммы 3 пусть $\xi = \{R_1, \ldots, R_m\}$. Если μ - Т-эргодическая мера, положительная для всех непустых открытых множеств, то ξ является п.в. разбиением X, и выполнены все утверждения Теоремы УШ.2.

Упражнение 1X.5. Проверьте утверждения (1), (4) и (5) Теоремы УШ.2. Остальные утверждения можно получить следующим образом. По определению, $\partial\xi \subset T^{-1}(\partial\xi)$. Следовательно, $\mu(\partial\xi) \in \{0,1\}$, поскольку μ - эргодическая. Но X - $\partial\xi$ - открытое плотное множество, в силу чего $\mu(\partial\xi) = 0$, т.е. (2) из Теоремы УШ.2. Из утверждения (2) Леммы 3 вытекает (3) из этой теоремы. Все остальное вытекает из локальной растягиваемости Т.

Замечание 1X.3. Возникает естественный вопрос: утверждает ли теория растягивающих эндоморфизмов что-то нетривиальное? Для этой цели мы приведем несколько примеров, которые представляют и самостоятельный интерес, будучи характеристиками некоторых известных структур.

Если Н - связная группа Ли и Е: $H \to H$ -растягивающий групповой автоморфизм, то Н является диффеоморфной $\mathbb{R}^n$ (/36/, Лемма 5).

Если M - компактная, связная и действительно аналитическая группа Ли и E: M→M -растягивающий эндоморфизм, то M является n -мерным тором, где $n = dim(M)$ (/36/, утверждение 7).

Во многих физических проблемах наблюдаемые можно зачастую представить в виде генераторов подходящих групп Ли, а эндоморфизм таких групп - это представление динамики наблюдаемых величин. Если эти эндоморфизмы окажутся растягивающими, то у последовательностей наблюдений гарантируются хорошие эргодические свойства. То же самое свойство растягиваемости может индуцировать и относительно простую структуру этих групп, а тем самым позволяет получить простые аналитические выражения для наблюдаемых величин.

Теперь пусть $\bar{X} = [0,1], X = (0,1)$. Пусть $\{a_n\}$ - конечная или бесконечная последовательность точек из X, для которой $a_n \leq a_{n+1}, n = 1,2,\ldots$ Обозначим через I_i отрезок (a_{i-1}, a_i). Пусть $X_0 = U_n I_n$. Допустим, что $T: X_0 \to X$ определено так, что для всех $i \geq 1$, T/I_i является C^1-диффеоморфизмом отрезка I_i на все X. Мера Лебега ν на $\bar{X}$, очевидно, является несингулярной и положительно несингулярной. Проблемой существования инвариантных мер занималось много авторов (в том числе Реньи /38/, Адлер /25/, Рудольфер и Вилькинсон /39/).

<u>Теорема 1X.5.</u> /25,33/. Пусть у T вышеописанная структура. Допустим, что (а) T/I_i - класса C^2 для любого i (б) существует $k \in \mathbb{Z}_+$, что $\inf \{|(T^k)'(x)| : i \in \mathbb{Z}, x \in I_i\} = \lambda > 1$, и (с)

$$\sup_{\substack{x,y,z \in I_i \\ i \in \mathbb{Z}}} \left| \frac{T''(x)}{T'(y)T'(z)} \right| = Q < \infty .$$

Тогда

(1) существует T-инвариантная мера $\mu = h.\nu$, где $h > 0$ и $h \in C[0,1]$;

(2) $\nu_0 T^{-n} \Rightarrow \mu$ в $M([0,1])$;

(3) (T, μ) - точный эндоморфизм, и его естественное расширение является бернуллиевским; и

(4) μ - единственная мера в $M_T([0,1])$, для которой

$$\mu[I_\mu(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) - \log|T'|] \geq m[I_m(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) - \log|T'|]$$

для всех $m \in M_T([0,1])$.

Доказательство (на основе общей теории, разработанной в предыдущих лекциях) дано в дополнении. Другое доказательство Адлера /25/ подробно изложено в книге /26/.

Условие (b) в теореме - условие растягивания для T. Если бы T было линейным на каждом из отрезков I_i, то сама мера ν оказалась бы T-инвариантной и у (T, ν) существовало бы бернуллиевское естественное расширение. Для таких отображений $Q = 0$. Таким образом, условие (с) ограничивает степень нелинейности отображения T на отрезках I_i для всех i одновременно.

<u>Пример 1X.1.</u> Пусть $a_n = 1/|n|, n < 0, a_n = 1$ для $n \geq 0$, $Tx = 1/x \pmod 1$. В условии (b) Теоремы 5 можно взять $k = 2$ и $\lambda = 4$. В условии (с) можно выбрать $Q = 16$. Как хорошо известно (см., например, /40/),

$$h(x) = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{1+x} .$$

Поскольку $|\mu(\log x^2)| < \infty$, то $H_\mu(\xi) < \infty$ (где ξ - разбиение отрезка /0,1/ на компоненты однозначности T) (см. Лемму 4 ниже). Утверждение (4) Теоремы 5 показывает, что μ - единственная мера, для которой $h_\mu(T) + \mu(\log x^2) \geq m[I_m(\mathcal{B}|T^{-1}\mathcal{B}) + \log x^2], m \in M_T[0,1]$.
Более того,

$$h_\mu(T) = -\mu(\log x^2) = \frac{\pi^2}{6.(\log 2)^2} .$$

Подобным образом можно изучать и равновесные состояния для отображений T типа, описанного в предыдущем примере.

<u>Теорема 1X.6.</u> Пусть T удовлетворяет условиям (а) и (b) Теоремы 5. Допустим, что существует такая константа $c > 0$, что $|T'(x)| \geq c$ для всех $x \in X_0$. Пусть для $\varphi \in C(X_0)$ верны предположения

(а) $\exists \{K\} : \sum_{y \in T^{-1}x} exp(\varphi(y)) \leq K$, и

(b) $\exists \{\alpha \leq 1\} \ \forall \{x, z \in I_i\} \ |\varphi(x) - \varphi(z)| \leq M_i |x - z|^\alpha$ и

$$\sup_{y \in T_i, i \in \mathbb{Z}} \frac{M_i}{|T'(y)|^\alpha} \leq W < \infty .$$

Тогда

(1) у φ существует единственное равновесное состояние μ_φ;

(2) μ_φ - неатомическая и положительная на всех непустых открытых множествах;

(3) (T,μ_φ) - точный эндоморфизм, и естественное расширение (T,μ_φ) - бернуллиевское;

(4) если $\psi\in C(X_0)$ также удовлетворяет условиям (a) и (b), то $\mu_\varphi=\mu_\psi$ точно тогда, когда $\varphi(x)=\psi(x)+f(Tx)-f(x)+c$ для некоторых $c\in\mathbb{R}^1$ и $f\in C(\bar{X})$.

Если число отрезков I_i конечное, то любая функция Гельдера $\varphi:\bar{X}\to\mathbb{R}^1$ удовлетворяет условиям (a) и (b). Доказательство этой теоремы (которое сводится к проверке условий Теоремы 2) тоже приведено в дополнении.

Упражнение 1X.5. Пусть $Tx=1/x \,(\mathrm{mod}\, 1)$. Найдите функцию φ, удовлетворяющую условиям Теоремы 6.

Лемма 1X.4. Пусть T: $X_0\to X$ удовлетворяет условиям (1) и (П) определения УП.1 и, более того, $T^{-1}X$ является конечным или счетным объединением открытых множеств $A_1, A_2,\dots$, и $T|A_i$ - гомеоморфизм A_i на X, который не уменьшает расстояний. Пусть $g\in G(X_0)$ удовлетворяет условию (УШ.6). Тогда единственная мера μ удовлетворяет условию $H_\mu(\eta)<\infty$ ($\eta=(A_1, A_2,\dots)$) точно тогда, когда $|\mu(\log g)|<\infty$.

Доказательство. Из (УП.6) вытекает, что для всех $y, y'\in A_i$ и для всех i верны соотношения $D^{-1}\le g(y)/g(y')\le D$, $D>0$. Если $T_i=T|A_i$, то $\mu(A_i)=\int g(T_i^{-1}x)\mu(dx)$. Итак,

$$\sum_i \mu(A_i)\log(\min_{A_i} g)\le\sum_i\mu(A_i)\log\mu(A_i)\le\sum_i\mu(A_i)\log(\max_{A_i} g).$$

Одновременно,

$$\sum_i \mu(A_i)\log(\min_{A_i} g)\le\int\log g\, d\mu\le\sum_i\mu(A_i)\log(\max_{A_i} g).$$

Но $|\log(\min_{A_i} g)-\log(\max_{A_i} g)|<\log D$, так что внешние ряды либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Но это и является утверждением леммы.

□

Пример 1X.2. Пусть $X=[0,1]$, λ - мера Лебега, $\eta=(I_1,I_2,\dots)$ - конечное или счетное разбиение на полуоткрытые отрезки. Пусть φ : X на X такое отображение, что $\varphi|I_i$ является одно-однозначным (т.е. биекцией). Последовательности $(x_0,x_1,\dots)$, определенные соотношениями $\varphi^i x\in I_{x_i}$, назовем f - разложениями элементов единичного отрезка. На самом деле, такие разложения первоначально записывались в виде

$$x=f(x_0+f(x_1+f(\cdots))),$$

где f - функция, связанная с φ. Для примера непрерывных дробей (см. пример 1) $x=1/(x_0+1/(x_1+\dots))$ входит в нашу схему, если φx - дробная часть x, а $\eta=(I(k+1)^{-1}, k^{-1});\ k\in N)$.

Дополнение к Лекции 1X

Сначала докажем Теорему 5. Поскольку в условиях теоремы не обеспечено выполнение неравенства $|T'(x)|\ge 1$ для всех $x\in X_0$, мы обязательно должны изменить метрику для того, чтобы выполнилось условие (1) определения УП.1. Для этой цели мы сначала покажем, что существует такое $c>0$, что для всех $x\in X_0$, $|T'(x)|\ge c$. Допустим, что это не так. Тогда для любого $n\ge 1$ можно найти $i_n\in\mathbb{Z}$ и $y_{i_n}\in I_{i_n}$ так, что $|T'(y_{i_n})|\le 1/n$. Из условия (c) теоремы мы получим $\sup\{|T''(x)|: x\in I_{i_n}\}\le Q/n^2$. Следуя теореме о среднем для всех $z\in I_{i_n}$

$$|T'(z)|\le|T'(z)-T'(y_{i_n})|+|T'(y_{i_n})|\le\frac{Q}{n^2}|z-y_{i_n}|+\frac{1}{n}\le Q/n^2+1/n.$$

Если n - достаточно большое, то для всех $x\in I_{i_n}$ мы получим неравенство $|T'(x)|\le 1/2$, что противоречит факту, что $T(I_{i_n})=X$. Теперь мы определим новую метрику на (0,1):

$$\rho(x,x')=\sup_{y\in T^{-n}x,\, n\ge 0}|y-y'|,$$

и расширим ее на $[0,1]$. Поскольку $|T'|\ge c$, $|(T^k)|\ge\lambda>1$, то $|x-x'|\le\rho(x,x')\le\max\{1,c^k\}\cdot|x-x'|$. Итак, метрика ρ является эквивалентной обычной метрике. Если положить $\varepsilon_0=1$, то условие (1) определения УП.1 выполнено при выборе ρ в качестве метрики. Поскольку условия (п) и (1x.1), (1X.2) не зависят от выбора метрики, то их можно проверить для любой метрики.

Пусть $\varepsilon>0$. Нам необходимо найти такое N, чтобы для всех $x\in X$, $T^N(B_\varepsilon(x))=X$ (здесь под символом $T^N(E)$ подразумеваем $T^N(E\cap T^{-N}X$)). Мы знаем, что T^k является C^2-диффеоморфизмом на любом элементе разбиения $\eta_k=\vee_0^{k-1}T^{-i}\eta$, и что оно растягивает расстояния по меньшей мере в λ раз на любом элементе. Пусть U - открытый отрезок длины 2ε. Либо U содержит элемент разбиения η_k, и тогда $T^kU=X$, либо U пересекается с двумя элементами η_k. Пусть это отрезки (a,b) и (b,c). Определим $T_-^k(b)=\lim_{x\to b-}T_x^k\in\{0,1\}$, $T_+^k(b)=\lim_{x\to b+}T^k(x)$. Если $T_-^k(b)=T_+^k(b)$, то у T^kU длина не менее $\lambda\varepsilon$, и T^kU является отрезком либо типа $(0,d)$, либо $(e,1)$. Следовательно, $T^{2k}U$ длины не меньше $\lambda^2\varepsilon$, и снова имеет вид либо $(0, d_1)$, либо $(e_1, 1)$. Если выбрать такое M, что $\lambda^M \varepsilon > 1$, то $T^{Mk} U = X$. Если $T_-^k(b) \neq T_+^k(b)$, то $T^k U$ является объединением отрезков типа $(0, d)$ и $(e, 1)$, и его длина не меньше $2\lambda\varepsilon$. По меньшей мере у одного из этих отрезков длина по меньшей мере $\lambda\varepsilon$, и применением предыдущих рассуждений снова получим $T^{Mk}(U) = X$. Итак, условие (П) определения УП.1 выполнено.

Теперь проверим (1X.1). Для $x, x' \in X$ имеем

$$\frac{d\nu T^{-1}}{d\nu}(x) = \sum_{y \in T^{-1}x} \frac{1}{|T'(y)|} \geq -\sum_{y \in T^{-1}x} \left| \frac{1}{T'(y)} - \frac{1}{T'(y')} \right| +$$

$$+ \sum_{y' \in T^{-1}x'} \frac{1}{|T'(y')|} = \frac{d\nu T^{-1}}{d\nu}(x) - \sum_{y \in T^{-1}x} \left| \frac{T'(y') - T'(y)}{T'(y)\, T'(y')} \right| \geq (d\nu T^{-1}/d\nu)(x') - Q$$

как следствие условия (с). Поскольку последние неравенства должны выполняться для всех $x, x' \in X$, то (1X.1) тоже верно.

Для проверки (1X.2) достаточно проверить условие (УП.3) для функции $\varphi(y) = -\log|T'(y)|$. Пусть $x, x' \in X$, $y \in X^{-n}$ и $y' \in T^{-n}x'$ – соответствующая точке y точка (см. оговорку после определения УП.1. Тогда

$$\varphi(T^i y) - \varphi(T^i y') = \varphi'(z_i)(T^i y - T^i y')$$

для какого-то $z_i \in (T^i y, T^i y')$. Но последнее выражение равно $\varphi'(z_i)(x - x')/(T^{n-i})'(w_i)$ для точки w_i между $T^i y$ и $T^i y'$. Поскольку $\varphi'(z) = T''(z)/T'(z)$, то

$$|\varphi(T^i y) - \varphi(T^i y')| = \left| \frac{T''(z_i)}{T'(z_i)(T^{n-i})'(w_i)} \right| |x - x'| \leq$$

$$\leq \frac{Q|x - x'|}{|T'(Tw_i) \ldots T'(T^{n-i-1} w_i)} \leq \frac{Q}{c^k \lambda^{[(n-i-1)/k]}} |x - x'| .$$

Стало быть, для всех $y \in T^{-n}x$ и всех $n \geq 1$ получим искомую оценку

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(T^i y) - \varphi(T^i y')| \leq \frac{Q}{c^k(\lambda - 1)} |x - x'| .$$

Теперь достаточно применить Теорему 1. Необходимо заметить, что разбиение ξ удовлетворяет всем условиям Теоремы УШ.2. Только условие (4) не является очевидным, но оно вытекает из факта, что $d(T^k x, T^k x') \geq \lambda d(x, x')$, если $x, x' \in I_i$ для некоторого i.

□

Доказательство Теоремы 6. Как и в предыдущем доказательстве, мы изменим метрику таким образом, чтобы выполнялись условия определения УП.1. Остальное вытекает из Теоремы 2 и следующих оценок. Пусть $y \in T^{-n}x$. Тогда

$$|\varphi(T^i y) - \varphi(T^i y')| \leq M_i |T^i y - T^i y'| \leq \frac{M_i}{|(T^{n-i})'(T^i y_2)|^\alpha} |x - x'|^\alpha$$

для y_2' между y и y'. Из этого вытекает

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(T^i y) - \varphi(T^i y') \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{W}{\lambda^{[(n-i-1)/k]\alpha} C^{k\alpha}} |x - x'| \leq$$

$$\leq \frac{W|x - x'|^\alpha}{C^{k\alpha}(\lambda^\alpha - 1)} .$$

□

Лекция X. КУСОЧНО-МОНОТОННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОБОБЩЕННАЯ СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Хотя теория, разработанная в предыдущих лекциях, охватывает большое число интересных примеров, условия локальной растягиваемости и локального гомеоморфизма все-таки еще слишком ограничительны (см. рис.16). Частным случаем кусочно-линейного преобразования будет:

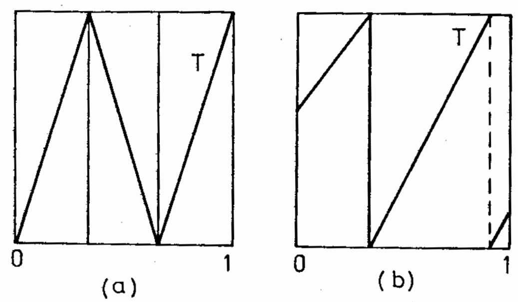


Рис. 16

Преобразование T является локальным гомеоморфизмом в случае (a), а не в случае (b) ($Tx=\beta x+\alpha \pmod 1$).

$$Tx=\beta x+\alpha \pmod 1 \quad (\beta>1,\ 0\le\alpha<1)$$

является β -<u>преобразование</u> $Tx=\beta x \pmod 1$, $\beta>1$. Уолтерс /42/ модифицировал вышеприведенные методы для исследования инвариантных мер и равновесных состояний для β -преобразований. Оказалось, что отказ от предположения локального гомеоморфизма приводит лишь к техническим (но зато весьма затруднительным) усложнениям, и что идея использования оператора Перрона-Фробениуса применима в довольно общих условиях.

Преобразования, которые возникают в итоге обобщения кусочно-линейных преобразований, изучал Хофбауер /42-45/ при помощи методов, которые обобщают методы символической динамики. В последующих работах /46-48/ показано, что все эти результаты можно сформулировать в рамках единой модели, а именно, при помощи оператора Перрона-Фробениуса (см. Лекцию XI). Аппарат, который будет разработан для общей теории оператора Перрона-Фробениуса, позволит нам без особенных усилий исследовать стохастические свойства систем Аносова и аттракторов Лоренца. В настоящей лекции мы приведем основные идеи символического представления.

Пусть X = /0,1/ и пусть T - <u>кусочно-монотонно возрастающее преобразование,</u> т.е. существуют попарно непересекающиеся отрезки $I_1,\dots,I_n$, так что $\cup I_i = X$ и $T|I_i$ - строго возрастает и непрерывно (см., например, рис. 11 (b)). Более того, мы предположим, что

(a) $\cup_{m=0}^{\infty} T^{-m}\{j_0,\dots,j_n\}$ - плотное множество в X, где $0=j_0<j_1<\dots<j_n=1$ - концевые точки отрезков I_i , т.е. система ($I_1,\dots,I_n$) является (топологической) образующей динамической системы (X,T); и

(b) $h_{top}(T)>0$, где $h_{top}(T)$ - топологическая энтропия (см. /34/ или /13/).

<u>Упражнение X.1.</u> Проверьте условие (a) для преобразования

$$Tx = 2x + 1/2 \pmod 1 .$$

Нашей целью будет определение множества <u>максимальных мер</u>,т.е. тех мер $\mu\in M_T(X)$, для которых $h_\mu(T)=h_{top}(T)$. Другими словами, нас интересуют равновесные состояния для функции $\varphi\equiv 0$. (Это вытекает из общей теоремы Динабурга-Гудмана /34/). Если (X,T) - динамическая система, то множество $N\subset X$ будем называть <u>малым</u>, если

$$[\mu\in M_T(X)]\ \&\ [\mu(N)=1] \Rightarrow [h_\mu(T)=0] . \qquad (X.1)$$

<u>Лемма X.1.</u> Если $N\subset X$ - малое множество, то $\mu(N)=0$ для любой максимальной меры $\mu\in M_T(X)$.

<u>Доказательство.</u> Пусть мера μ - максимальная. Разложим ее в виде $\mu=\delta\nu_1+(1-\delta)\nu_2$, где ν_2 сосредоточена на малом множестве N , а ν_1 - на $X\setminus N$. Поскольку N - малое, то $h_{\nu_2}(T)=0$. Из аффинности энтропии следует, что $h_\mu(T)=\delta h_{\nu_1}(T)$, т.е. $h_{\nu_1}(T)=\delta^{-1}h_\mu(T)$. Но поскольку $\delta<1$, то $h_{\nu_1}(T)>h_\mu(T)$, что невозможно из-за максимальности меры μ . Следовательно, $\delta=1$ и $\mu=\nu_1$. В частности, $\mu(N)=0$. □

Из Леммы 1 вытекает, что, если две системы (X,T) и (X',T') изоморфны по модулю малых множеств (т.е. они изоморфны после удаления малых множеств N,N' из X, соот. X'), то у (X,T) и (X',T') одинаковые множества максимальных мер.

Основной целью символического представления является построение изоморфизмов по модулю малых множеств $\varphi:(X,T)\to(\Sigma_T^+,\sigma)$, где Σ_T^+ - подсдвиг преобразования одностороннего сдвига σ в пространстве $\{1,\dots,n\}^{\mathbb{N}}$ и $\psi:(\Sigma_T,\sigma)\to(\Sigma_M,\sigma)$, где Σ_T - естественное расширение Σ_T^+ и Σ_M - топологическая цепь Маркова в $C^{\mathbb{Z}}$, где $C=\{1,1/2,1/3,\dots\}\subset\mathbb{R}^1$, и M - соответствующая(бесконечномерная) переходная матрица.

Используя соответствия $\mu \mapsto \mu\varphi^{-1} = \nu$ и $\nu \mapsto \nu\psi^{-1}$, на основе предыдущих рассуждений получим, что у систем (Σ_M, σ) и (X,T) - одни и те же множества максимальных мер. Но максимальные меры для (Σ_M, σ) поддаются сравнительно простому описанию.

В основном тексте мы приводим только некоторые идеи построения, а для подробностей отсылаем читателей к дополнению этой лекции.

Сначала мы построим изоморфизм φ. Пусть (X,T) - динамическая система описанного выше типа, для которой выполнено условие (a). Определим отображение $i: X \to \{1,2,\dots n\}$ соотношением $i(x) = k$, если $x \in I_k$. Пусть $\varphi(x) = i(x)\,i(Tx)\,i(T^2x)\dots$ Из-за (a) φ - однозначное отображение. Пусть

$$\Sigma_T^+ = \overline{\varphi(x)} \subset \Sigma_n^+. \qquad (X.2)$$

Упражнение X.2. $\sigma_0\varphi = \varphi_0 T$ и $\varphi_1\ \varphi^{-1}|\varphi(X)$ - измеримые отображения. Докажите.

Лемма X.2. Рассмотрим в Σ_n^+ (и в Σ_T^+) лексикографическое упорядочение $<$. Тогда $x<y$ в X равносильно выполнению неравенства $\varphi(x)<\varphi(y)$ в Σ_T^+; $x, y \in X$ (т.е. φ - изотонное изображение).

Лемма X.3. Множество $\Sigma_T^+ \setminus y(X)$ является счетным, следовательно, оно малое.

Следствие X.1. $\varphi: (X,T) \to (\Sigma_T^+, \sigma)$ - изоморфизм по модулю малых множеств.

Доказательства этих утверждений приведены в дополнении. Для последующих рассуждений нам понадобится более подробная информация о структуре пространства Σ_T^+. Обозначим ${}_0[x_0,\dots,x_{m-1}] = \{y \in \Sigma_T^+$ (или $y \in \Sigma_n^+$): $x_i = y_i,\ 0 \le i \le m-1\}$, $y=(y_i)$. Пусть

$$I_{x_0\dots x_{m-1}} = I_{x_0} \cap T^{-1} I_{x_1} \cap \dots \cap T^{-m+1} I_{x_{m-1}} \subset X.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0^{-1}[x_0,\dots x_{m-1}] = I_{x_0\dots x_{m-1}}\ ; \\ &(\varphi(I_{x_0\dots x_{m-1}}))^- = {}_0[x_0,\dots,x_{m-1}]. \end{aligned}\right\} \qquad (X.3)$$

Для $k \in \mathbb{N}$ определим

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{a}^k = \lim_{t\in I_k,\, t\uparrow j_{k-1}} \varphi(t)\,(=\varphi(j_{k-1}), \quad \text{если } j_{k-1} \in I_k), \\ &\mathfrak{b}^k = \lim_{t\in I_k,\, t\downarrow j_k} \varphi(t)\,(=\varphi(j_k), \quad \text{если } j_k \in I_k). \end{aligned}\right\} \qquad (X.4)$$

Пусть $A = \{\mathfrak{a}^1,\dots,\mathfrak{a}^n\}$, $B = \{\mathfrak{b}^1,\dots,\mathfrak{b}^n\}$. Символом / , / мы будем обозначать замкнутый отрезок в Σ_T^+ или в Σ_n^+ (по отношению к лексикографическому упорядочению).

Пусть

$$\left.\begin{aligned} &G_{x_0} = [\sigma\mathfrak{a}^{x_0}, \sigma\mathfrak{b}^{x_0}] = \sigma\,[\mathfrak{a}^{x_0}, \mathfrak{b}^{x_0}]\ ; \\ &G_{x_0\dots x_{m-1}} = \sigma\,[\mathfrak{a}^{x_{m-1}}, \mathfrak{b}^{x_{m-1}}]\, G_{x_0\dots x_{m-2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (X.5)$$

и $G'_{x_0\dots x_{m-1}}$ определяются точно так же, как для подмножества Σ_n^+. Все эти множества оказываются либо интервалами, либо пустыми.

Лемма X.4. $G_{x_0\dots x_{m-1}} = \sigma^m({}_0[x_0,\dots,x_{m-1}])$, где последнее множество считаем подмножеством Σ_T^+.

Упражнение X.3. Докажите. (Указание: используйте индукцию по m).

Теорема X.1. Следующие утверждения оказываются эквивалентными друг другу:

(1) $x \in \Sigma_T^+$,

(2) для всех $m \ge 0$, $\mathfrak{a}^{x_m} \le \sigma^m x < \mathfrak{b}^{x_m}$, и

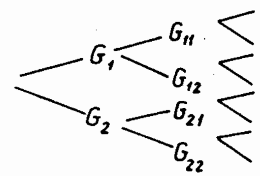
(3) $\sigma^m x \in G'_{x_0,\dots,x_{m-1}}$ для всех $m \ge 1$.

Доказательство (см. дополнение). Теперь мы обратим внимание на конструкцию изоморфизма ψ. Основную идею целесообразно изложить на примере.

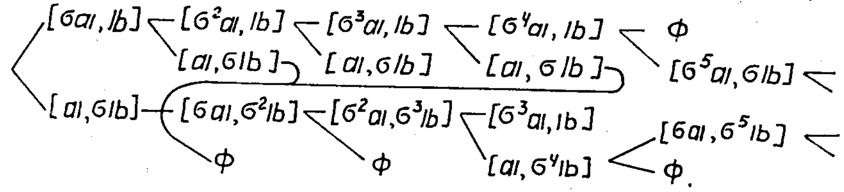
Пример X.1. Пусть

$$T(x) = \begin{cases} \frac{16}{15}x + \frac{1}{5}, & 0 \le x \le 3/4 \\ \sqrt{x-(3/4)}, & 3/4 < x \le 1. \end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{a}^1$ = 111121121..., $\mathfrak{a}^2 = 2\mathfrak{a}^1$, $\mathfrak{b}^1 = 1.\mathfrak{b}^2$, и $\mathfrak{b}^2$ = 2112112 112...
Используя множества $G_{x_0\dots x_{m-1}}$, можно нарисовать следующую диаграмму для Σ_T^+:



С использованием (X.5) ($\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}'$) мы получим



Любой путь, который не оканчивается Φ , соответствует элементу Σ_T^+ , если написать 1 в случае, когда путь движется вверх, и 2, если он движется вниз.

Сначала определим ψ на Σ_T^+ соотношением

$$\psi(x) = (x_0, G_{x_0})(x_1, G_{x_0 x_1})(x_2, G_{x_0 x_1 x_2})\ldots \qquad (X.6)$$

Это означает, что x представляем при помощи вершин соответствующего пути. Используя (X.5), нетрудно проверить, что любое из множеств $G_{x_0\ldots x_{m-1}}$ вида $[\sigma^k\mathbf{a},\sigma^k\mathbf{b}]$, где $\mathbf{a}\in A$, $\mathbf{b}\in B$, $a_{k-1} = b_{l-1} = x_{m-1}$, $a_{k-j} = b_{l-j} (1\le j\le \min\{k,l\})$. Следовательно, $G_{x_0\ldots x_{m-1}}$ является

$$\left.\begin{array}{llll}
\Phi, & \text{если } x_m < a_{k+1} & \text{или} & x_m > b_{l+1}; \\
{[\sigma^{k+1}\mathbf{a}, \sigma\mathbf{b}^{x_m}]}, & x_m = a_{k+1} & \text{и} & x_m < b_{l+1}; \\
{[\sigma\mathbf{a}^{x_m}, \sigma^{l+1}\mathbf{b}]}, & x_m = b_{l+1} & \text{и} & x_m > a_{k+1}; \\
{[\sigma^{k+1}\mathbf{a}, \sigma^{l+1}\mathbf{b}]}, & x_m = a_{k+1} = b_{k+1} & & \\
{[\sigma\mathbf{a}^{x_m}, \sigma\mathbf{b}^{x_m}]}, & a_{k+1} < x_m < b_{l+1}. & &
\end{array}\right\} \qquad (X.7)$$

Пусть

$$\left.\begin{array}{l}
D = \{(i,[\sigma^k\mathbf{a}, \sigma^l\mathbf{b}]) : \mathbf{a}\in A, \mathbf{b}\in B, i = a_{k-1} = b_{l-1}, \\
k,l\ge 1;\ a_{k-j} = b_{l-j} \quad \text{для} \quad i\le j\le \min\{k,l\}\}.
\end{array}\right\} \qquad (X.8)$$

Тогда ψ отображает Σ_T^+ в $D^{\mathbb{N}}$, но трудность состоит в том, что образ $\psi(\Sigma_T^+)$ не является σ -инвариантным. Поэтому мы перейдем к естественному расширению

$$\Sigma_T = \{x\in\Sigma_n ;\ x_k x_{k+1}\ldots \in \Sigma_T^+ \quad \text{для всех } k\in\mathbb{Z}\}.$$

Пусть $x\in\Sigma_T$. Для любого $k\ge 0$ положим

$$y^k = (x_k x_{k+1}\ldots) = (x_k, G_{x_k})(x_{k+1}, G_{x_k x_{k+1}})\ldots \in \prod_k^\infty D ,$$

т.е. у нас получится диаграмма:

$$\left.\begin{array}{lllllll}
 & & y_0^0 & y_1^0 & y_2^0 & y_3^0 \ldots & = y^0 \\
 & y_{-1}^{-1} & y_0^{-1} & y_1^{-1} & y_2^{-1} & y_3^{-1} \ldots & = y^{-1} \\
y_{-2}^{-2} & y_{-1}^{-2} & y_0^{-2} & y_1^{-2} & y_2^{-2} & y_3^{-2} \ldots & = y^{-2}
\end{array}\right\}. \qquad (X.9)$$

Определим $N\subset\Sigma_T$ как следующее инвариантное множество:

$$N = \{x\in\Sigma_T : \exists(m\in\mathbb{Z})\,\forall\{j<m\}\,\exists\{k\le j\};\ x_k\ldots x_m = a_0\ldots a_{m-k},$$

$$\mathbf{a}\in A\cup B, \ldots x_{m-1}, x_m \text{ не является периодической для любого } m\}.$$

Лемма X.5. Для $x\in\Sigma_T\setminus N$ существует $y\in D^{\mathbb{Z}}$, так что $y^k\to y\ (k\to-\infty)$, т.е. столбцы в последней диаграмме, начиная с определенного столбца, все постоянные.

Доказательство (см. дополнение). Пусть теперь y, как в последней лемме. Мы определим отображение $\psi: \Sigma_T\setminus N\to D^{\mathbb{Z}}$, положив $\psi(x) = y$. Следуя (X.7), можно увидеть, что после заданного элемента $(i[\sigma^k\mathbf{a},\sigma^l\mathbf{b}]) \in D$ могут следовать в последовательности $y\in\psi(\Sigma_T\setminus N)$ только элементы:

$$\begin{array}{l}
(a_k, [\sigma^{k+1}\mathbf{a}, \sigma\mathbf{b}^{a_k}]), (i,[\sigma\mathbf{a}^i, \sigma\mathbf{b}^i]), a_k < i < b_k ; \\
(b_l, [\sigma\mathbf{a}^k, \sigma^{l+1}\mathbf{b}]), a_k < b_l ; \\
(a_k, [\sigma^{k+1}\mathbf{a}, \sigma^{l+1}\mathbf{b}]), a_k = b_l .
\end{array} \qquad (X.10)$$

Пусть M - соответствующая матрица переходов (в качестве множества индексов стоит D). Отображение ψ^{-1} задано как проекция элементов D на первую координату.

Лемма X.6. Если для $y\in D^{\mathbb{Z}}$ выполняются свойства (X.10), то $x = \psi^{-1}(y)\in\Sigma_T$.

Доказательство приведем в дополнении. Теперь почти очевидно, что ψ и ψ^{-1} - измеримые отображения и, более того, что ψ коммутирует с преобразованием сдвига. Итак, ψ оказывается изоморфизмом между $\Sigma_T\setminus N$ и топологической щелью Маркова в $D^{\mathbb{Z}}$, определенной при помощи соотношений (X.10). Ясно, что D - счетное множество. Превратим D в компактное множество C при помощи одноточечной компактификации и рассмотрим замыкание множества $\psi(\Sigma_T\setminus N)$ в $C^{\mathbb{Z}}$. Это снова топологическая цепь Маркова с матрицей перехода M (в качестве множества индексов стоит C) и $M|D = M'$. Последнюю цепь Маркова обозначим через Σ_M.

. <u>Упражнение X.4.</u> Покажите, что матрицу M можно определить правилами (X.10) и следующими правилами: 0 следует только за 0, а за 0 может следовать любой такой элемент из D, который, в свою очередь, может следовать после бесконечного числа элементов из D и 0.

Итак, $\Sigma_M \setminus \psi(\Sigma_T \setminus N)$ состоит из всех точек, для которых можно найти такое $m \in \mathbb{Z}$, что $y_k = 0$ для всех $k \leq m$. Из этого сразу же получается следующая лемма:

<u>Лемма X.7.</u> Множество $\Sigma_M \setminus \psi(\Sigma_T \setminus N)$ является малым.

Однако для конечной цели необходимо также доказать, что <u>само множество</u> N - малое. Доказательство этого факта оказывается довольно сложным (первую попытку сделал Такахаши /49/, но его доказательство содержит ошибку. Хофбауер /50/ дал полное доказательство в случае β - сдвигов, и это доказательство с минимальными изменениями можно перенести и на наш случай). Следуя Лемме 7, мы непосредственно получаем, используя последнее утверждение, теорему:

<u>Теорема X.2.</u> $\psi : (\Sigma_T, \sigma) \to (\Sigma_M, \sigma)$ - изоморфизм по модулю малых множеств.

Как хорошо известно (см., например, /34,13/), для динамических систем типа (Σ_T^+ , σ) <u>топологическая энтропия</u> определяется через асимптотику числа допустимых блоков длины k в Σ_T^+ для $k \to \infty$:

$$h_{top}(\Sigma_T^+) = \lim_{k \to \infty} k^{-1} \log r_k . \qquad (X.11)$$

Теперь мы займемся вычислением топологической энтропии. Пусть $k \geq 1$ и $i \in D$. Пусть $\mathcal{N}_k^i$ - множество всех векторов $x_0 \dots x_{k-1}$, таких, что ${}_0[x_0 \dots x_{k-1}] \neq \phi$ в Σ_T^+ и $(x_0 \dots x_{k-1})$ оканчивается буквой i. Пусть $N_k^i = card(\mathcal{N}_k^i)$. Тогда $N_k = (N_k^i)_{i \in D} \in \ell^1$. Множество $\mathcal{N}_{k+1}^j$ получим из $U_i \mathcal{N}_k^i$ добавлением k -тых элементов x_k таким образом, чтобы ${}_0[x_0 \dots x_{k+1}] \subset \Sigma_T^+$ было непустым, и последняя буква слова $\psi(x_0, \dots x_k)$ была j. Это возможно для всех слов $x_0 \dots x_{k-1} \in \mathcal{N}_k^i$, если буква j может появиться после буквы i (в Σ_M), т.е. если $M_{ij} = 1$. Но по (X.6) x_k необходимо должно совпадать с первой координатой пары j. Итак,

$$N_{k+1}^j = \sum_{i : M_{ij} = 1} N_k^i = \sum_{i \in D} M_{ij} N_k^i, \quad \text{т.е. } N_{k+1} = N_k M'. \qquad (X.11)$$

Если $N_1 = (1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$, где точно n единиц, то мы можем писать $N_k = N_1 (M')^k$. Но $n_k = \| N_k \|_1 = \Sigma_i N_k^i$ (заметим, что N_k имеет только конечное число ненулевых элементов), так что

$$h_{top}(\Sigma_T^+) = \lim_{k \to \infty} k^{-1} \log \| N_1 (M')^k \|_1 = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \log \| (M')^k \|_1 .$$

Последнее равенство верно потому, что с растущим k матрица $N_1 (M')^k = N_k$ становится покомпактно положительной, а тем самым становится такой же на любом неприводимом подмножестве множества индексов D матрицы M'. Итак, мы получили следующую теорему:

<u>Теорема X.3.</u> $h_{top}(T) = h_{top}(\Sigma_T^+) = h_{top}(\Sigma_M) = \log r(M')$, где $r(M')$ - спектральный радиус матрицы M'.

<u>Замечание X.1.</u> Мы можем понимать M как оператор в пространстве всех непрерывных суммируемых функций на $C \simeq \{1, 1/2, \dots\} \subset \mathbb{R}^1$ с ℓ^1 - нормой. Тогда $\| M^k \|_1 = \| (M')^k \|_1$, так что $r(M) = r(M')$ и $h_{top}(\Sigma_T^+) = \log r(M)$. Поскольку $\Sigma_M \setminus \Sigma_{M'}$ является μ -пренебрежимым множеством для любой максимальной меры, то можно работать только с D и M'.

Пока мы не доказали существования максимальных мер. Для этой цели нам понадобятся некоторые сведения о собственных значениях матрицы M'. Разложим M' на неприводимые субматрицы $M^1, M^2, \dots$ (если то же самое сделать для M, то получим снова матрицы M^i и 1x1 матрицу, индексированную элементом $\{0\} = C \setminus D$). Мы будем интересоваться эргодическими максимальными мерами, которые сосредоточены на подсдвигах Σ_{M^i} сдвига Σ_M. Фиксируем $M^i = L$ и обозначим через $E \subset D$ соответствующее множество индексов. Допустим, что μ - максимальная мера, сосредоточенная на Σ_L.

<u>Лемма X.8. /49,42/.</u> Мера μ является марковской мерой, и определяется соотношениями

$$\mu[{}_0[y_0, \dots, y_{k-1}]] = \pi_{y_0} P_{y_0 y_1} \dots P_{y_{k-2} y_{k-1}},$$

где $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$ и $P = (P_{ij})_{(i,j) \in E \times E}$ - подходящие вектор и матрица, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{array}{l} \pi_i \geq 0, \ P_{ij} \geq 0, \ [L_{ij} = 0] \Rightarrow [P_{ij} = 0]; \\ \sum\limits_{i \in E} \pi_i P_{ij} = \pi_j, \ \sum\limits_{i \in E} \pi_i = 1, \ \sum\limits_{j \in E} P_{ij} = 1 \end{array}\right\}. \qquad (X.12)$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $\pi_i = \mu({}_0[i]), P_{ij} = \mu({}_0[ij]) / \mu({}_0[i])$. Ясно, что такой выбор π и P удовлетворяет всем требованиям (X.12). Пусть m - соответствующая мера Маркова, и пусть $\alpha = \{{}_0[i]\}_{i \in E}$.

Тогда

$$h_\mu = H_\mu(\alpha \mid \bigvee_{k\geq 1} \sigma^{-k}\alpha) \leq H_\mu(\alpha|\sigma^{-1}\alpha) = H_m(\alpha \mid \sigma^{-1}\alpha) = h_m \ ,$$

и $h_\mu = h_m$ только тогда, когда $\mu = m$ /51/. Поскольку μ - максимальная, то $h_\mu \geqslant h_m$. Тем самым мы получили $h_\mu = h_m$ и, стало быть, мера $\mu = m$ - марковского типа.

□

К любой паре $(i,j)\in E\times E, L_{ij}=1$ присоединим случайную величину X_{ij} таким образом, что

$$X_{ij} \geqslant 0,\ \sum_{j:L_{ij}=1} X_{ij} = \sum_{j:L_{ij}=1} X_{ij}\ (i\in E);\ \sum_{i,j:L_{ij}=1} X_{ij} = 1. \qquad (X.13)$$

Пусть $X=(X_{ij})$. Существует одно-однозначное соответствие между множествами всех (π, P) , удовлетворяющих (X.12), и всех X, удовлетворяющих (X.13). На самом деле, положив $X_{ij}=\pi_i P_{ij}, \pi_i=\Sigma_k X_{ik}, P_{ij}=X_{ij}/\Sigma_k X_{ik}$, мы получим искомое соответствие. Более того, из элементарных свойств энтропии (см. /44/ или /34/) вытекает, что $H(\pi,P)=-\Sigma_{i,j}\pi_i P_{ij}\log P_{ij}$. Пусть

$$H(X) = -\Sigma_{ij} X_{ij} \log X_{ij} + \sum_i [\sum_j X_{ij}] \log [\sum_j X_{ij}] .$$

<u>Упражнение X.5.</u> Если $X \longleftrightarrow (\pi, P)$ в рамках описанного соответствия, то $H(X)=H(\pi,P)$. Докажите.

<u>Упражнение X.6.</u> Пусть μ - максимальная мера на Σ_L . Тогда μ соответствует X, удовлетворяющему (X.13), на котором H(X) достигает своего супремума $\log r(M')$. Докажите.

<u>Лемма X.9.</u> Пусть H достигает своего супремума в точке X. Тогда $X_{ij}>0$ для любой такой пары (i,j) , что $L_{ij}=1$.

Доказательство (см. дополнение). Последнее означает, что супремум H достигается во внутренней точке области, определенной условиями (X.13). Итак, можно использовать метод Лагранжа, следуя которому, функция

$$f(X,\lambda_i,\varkappa) = H(X) + \sum_{i\in E} \lambda_i \left(\sum_j X_{ij} - \sum_j X_{ji}\right) + \varkappa\left(\sum_{i,j} X_{ij} - 1\right)$$

должна для максимального X удовлетворить уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial X_{ij}}(X)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(X)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial \varkappa}(X)=0.$$

После подстановки мы получим соотношения:

$$\sum_{j:L_{rj}=1} X_{rj} = \exp(\lambda_s-\lambda_r-\varkappa)X_{rs}\ ;\ (r,s): L_{rs}=1\ ; \qquad (X.14)$$

$$\sum_{j:L_{ij}=1} X_{ij} = \sum_{j:L_{ij}=1} X_{ji},\ i\in E\ ; \qquad (X.15)$$

$$\sum_{i,j:L_{ij}=1} X_{ij} = 1. \qquad (X.16)$$

В соответствии с (X.14) в случае $L_{rs}=L_{rt}=1$ мы получим $\exp(\lambda_s-\lambda_r-\varkappa)X_{rs}=\exp(\lambda_t-\lambda_r-\varkappa)X_{rt}$, т.е. $X_{rt}=X_{rs}\exp(\lambda_s-\lambda_t)$. Суммируя по всем таким t , что L_{rt} = 1, получим

$$\exp(\lambda_s)X_{rs}\sum_{t:L_{rt}=1}\exp(-\lambda_t) = \sum_{t:L_{rt}=1} X_{rt}$$

и, снова применив (X.14), если L_{rs} = 1, то

$$\exp(\lambda_s)X_{rs}\sum_{t:L_{rt}=1}\exp(-\lambda_t) = \exp(\lambda_s-\lambda_r-\varkappa)X_{rs} .$$

Поскольку $X_{rs}>0$, то

$$\sum_{t\in E} L_{rt}\exp(-\lambda_t) = \exp(-\varkappa)\exp(-\lambda_r);\quad r\in E . \qquad (X.17)$$

Снова используя (X.14),

$$\exp(-\lambda_r)\sum_j X_{rj} = \exp(\lambda_s-\varkappa)X_{rs},\ \text{если}\quad L_{rs}=1,$$

т.е.

$$\sum_{r:L_{rs}=1}\exp(\lambda_r)\sum_{j:L_{rj}=1} X_{rj} = \exp(-\varkappa+\lambda_s)\sum_{r:L_{rs}=1} X_{rs};\ s\in E,$$

т.е.

$$\sum_{r\in E}[\exp(\lambda_r)\sum_{j:L_{rj}=1} X_{rj}]L_{rs} = \exp(\lambda_r-x)\sum_{r:L_{rs}=1} X_{rs};\ s\in E. \qquad (X.18)$$

Из (X.17) и (X.18) вытекает, что для собственного значения $e^{-\varkappa}$ у матрицы L имеются левый собственный вектор $U=(U_r)$; $U_r=\exp(\lambda_r)\Sigma_j X_{rj}$, и правый собственный вектор $\vartheta=(\vartheta_r)$; $\vartheta=\exp(-\lambda_r)$. Более того, $\langle U,\vartheta\rangle = \Sigma_{r,j}X_{rj}=1,$ и $\exp(-\varkappa)$ обязательно совпадает со спектральным радиусом матрицы L . Итак, если существует максимальная мера (π, P), сосредоточенная на Σ_L , то существует только что описанная пара (U,ϑ) собственных векторов матрицы L (для собственного значения $\lambda=r(L)$) и $\langle U,\vartheta\rangle=1$. Следовательно,

$$\pi_i = u_i \vartheta_i , \quad P_{ij} = L_{ij} \vartheta_j / \lambda \vartheta_i . \qquad (X.19)$$

Энтропия этой меры прямо вычисляется как $\log\lambda = \log\tau(L)$. Из максимальности следует, что $\tau(L) = \tau(M')$. С другой стороны, нетрудно убедиться в том, что пара (π, P) из (X.19) приводит к мере μ на Σ_L, у которой энтропия $\log\lambda$. Стало быть, мы окончательно получили следующий результат:

Теорема X.4. Любая эргодическая максимальная мера для Σ_M сосредоточена на Σ_{M^i}, причем $\tau(M^i) = \tau(M)$. Для таких M^i существует одно-однозначное соответствие между множествами всех максимальных мер на Σ_{M^i} и множеством

$$\{(u,\vartheta):\ \text{и}\ M^i = \tau(M^i)u, \quad M^i\vartheta = \tau(M^i)\vartheta, <u,\vartheta> = 1, u_1 = 1\}.$$

Теорема X.5. (см. /52/). Если $\tau(M^i) = \tau(M)$, то существует не более одной максимальной меры на Σ_{M^i}. Эта мера является мерой марковского типа и определяется соотношениями (X.19).

Упражнение X.7. Докажите. (Указание: пусть μ_1, μ_2 - две максимальные меры. Покажите, что $\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2$ - снова максимальная мера. При помощи μ определите пару (π, P), как в начале доказательства Леммы 8. Используя Лемму 8, покажите, что P - неприводимая матрица. Следовательно, марковская мера $\nu = \nu(\pi, P)$ - эргодическая. Следовательно, $\nu \neq \mu$ (почему?). Из этого окончательно покажите, что $h_\nu > h_\mu$ - противоречие, доказывающее Теорему 5).

Теперь будем, следуя Хофбауеру /45/, интересоваться динамическими системами (X,T), где $X = [0,1] = U_{i=1}^{n} I_i$, а I_i - попарно непересекающиеся отрезки, на которых T/I_i является непрерывным и либо строго растущим, либо строго убывающим. Снова принимаем предположение о том, что система ($I_1, \dots, I_n$) - топологическая образующая и что $h_{top}(T) > 0$. Основная техническая трудность здесь состоит в том, что f - разложение φ для настоящего типа преобразований не сохраняет упорядочения (т.е. Лемма 1 неверна).

Теперь кратко опишем метод, позволяющий преодолеть это затруднение. Грубо говоря, основной мыслью метода является построение кусочно-возрастающего преобразования $S: [0,1] \to [0,1]$ такого, что (X,T) будет фактором (X,S), т.е. сведение проблемы к ситуации, которую мы уже изучали.

Мы приведем примеры такого рода конструкций[x)].

---

x) На этом конспект лекций, подготовленный Ш.Шуяном к прочтению в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, обрывается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stenberg S. Celestial Mechanics. Parts I,II, New York, W.A.Benjamin, Inc., 1969.
2. Smale S. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 73, 747-817.
3. Рохлин В.А. Изв. АН СССР, сер.мат., 1961, 25, 499-530.
4. Аносов А.В., Синай Я.Г. УМН, 1967, 22, № 5, 107-172.
5. Синай Я.Г. УМН, 1972, 27, 21-64.
6. Arnold V.I., Avez A. Problems Ergodic de Pa Mechanique Classique. Paris Gauthier-Villar, 1967.
7. Аносов Д.В. Тр.мат.ин-та им. В.А.Стеклова, 1967, 70, с.3.
8. Синай Я.Г. Стохастичность динамических систем. В кн.: "Нелинейные волны". "Наука", М., 1975.
9. Bunimovich L.A., Sinai Ya.G. Comm.Math.Phys., 1980, 78, p.247.
10. Rather M. Israel J. Math., 1978, 31, 298-314.
11. Bogoluboff N.N., Kriloff N.M. Ann. of Math., 1937, 38, 65-113.
12. Алексеев В.М. Вест. Москов. ун-та, 1958, № 5, 13-15.
13. Боуэн Р. Методы символической динамики /сб. статей/. "Мир", М., 1979.
14. Lasota A., Pianigiani G. Boll. Univ. Mat. Ital.,1977,14,592-603.
15. Lasota A., Yorke J. Trans. Amer.Math.Soc., 1973, 186, 481-488.
16. Pianigiani G. Applied Nonlinear Analysis (Proc. Third Juster.Conf. Univ. Texas, Arlington, Tex., 1978), pp.299-307, Academic Press., N.Y., 1979; Israel J.Math., 1980, 35, 32-48.
17. Ulam S.M., von Neumann J. Bull.Amer.Math.Soc., 1947, 53, p.1120.
18. Бунимович Л.А. Изв. АН СССР, сер.мат., 1974, 38, № 1, 213-227.
19. Wong S. Trans.Amer.Math.Soc., 1978, 246, 493-500; Ann.Probab., 1979, 7, 500-514.
20. May R.M. Nature, 1979, 261, 459-467.
21. Smale S., Williams R.W. J.Math.Biol., 1979, 3, 1-5.
22. Guckenheimer J., Oster G., Ipaktahi A. J.Math.Biol., 1977, 4, 101-147.
23. Ruelle D. Comm.Math.Phys., 1968, 9, 267-278.
24. Якобсон М.В. ДАН СССР, 1978, 243, № 4, 866-869.
25. Adler R. F -expansions Revisited. Lecture Notes in Math., 1973, No.318, 1-5.
26. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория, "Наука", М., 1980.
27. Guckenheimer I. Bifurcations of Dynamical Systems, CIME Lectures, 1979; Invetiones Math., 1977, 39, 165-178; Comm.Math.Phys., 1979, 70, 161-167.

28. Pianigiani G., Yorke J.A. Trans.Amer.Math.Soc., 1979, 252,351-366.
29. Yorke E.D., Yorke J.A. J.Statist.Phys., 1979, 21, 263-277.
30. Ruelle D., Takens F. Comm.Math.Phys., 1971, 20, 167-192; 1971, 23, 343-344.
31. Lorentz H. Proc.Amst.Acad., 1905, 7, pp.438, 585, 604.
32. Kaplan J., Yorke J. Lecture Notes Math., 1979, 780, p.204.
33. Walters P. Trans.Amer.Math.Soc., 1978, 236, 121-153.
34. Denker M., Grillenberger C., Sigmund K. Ergodic Theory on Compact Spaces. Lect.N.Math., Vol.527, Springer V., 1976.
35. Каток А.Б., Синай Я.Г., Стёпин А.М. "Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой" В сб.: Математический анализ, т.13, /Итоги науки и техники/ ВИНИТИ, М., 1975, с.129-262.
36. Shub M. Amer.J.Math., 1969, 91, 175-199.
37. Каток А.Б. Локальные свойства гиперболических множеств. Добавление 1. Нитецки З. "Введение в дифференциальную динамику". "Мир", М., 1975.
38. Renyi A. Acta Math.Acad.Sci. Hungar, 1957, 8, 477-493.
39. Rudolfer S.M., Wilkinson K.M. Math.Systems Theory, 1973, 7, 14-24.
40. Billingsley P. Ergodic Theory and Information. J. Wiley, New York, 1965.
41. Walters P. Math.Z., 1978, 65-88.
42. Hofbauer F. Israel J.Math., 1979, 34, 213-237.
43. Hofbauer F. Monatsh.Math., 1980, 90, 117-141.
44. Hofbauer F. Z.Wahrsteinlichkeits Theor. und Verw.Geb., 1980, 52, 289-300.
45. Hofbauer F. Israel J.Math., 1981, 38, 107-115.
46. Hofbauer F. Ergod.Theory and Dyn.Syst., 1981, 1, 159-178.
47. Hofbauer F., Keller G. Math.Z., 1982, 180, 119-140.
48. Hofbauer F., Keller G. Ergod.Theory and Dyn.Syst., 1982, 2, 23-43.
49. Takahashi Y. Osaka J.Math., 1973, 10, 175-184.
50. Hofbauer F. Ergodic Theory (Proc., Conf.Math.Forsch., Oberwolfach 1979), pp.66-77. Lect.Notes Math., 729, Springer V., W.Berlin, 1979.
51. Parry W. Trans.Amer.Math.Soc., 1964, 112, 55-66.
52. Kiefer J. IEEE Trans.Inform.Theory IT-28, 1982, 26-35; IT-26, 1980, 679-692.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 ноября 1986 года.