ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

Б.Н.Валуев

применение алгебры клиффорда к решению задачи изинга-онсагера

ДУБНА

ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Выпуск 14

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р17 - 11020

Б.Н.Валуев

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ИЗИНГА-ОНСАГЕРА

Лекции, прочитанные в ЛТФ ОИЯИ в декабре 1976 г.

Дубна 1977

I. Введение

Ныне модель Изинга весьма популярна среди физиков. Она излагается в учебниках по статистической механике /I,2/ и теории магнетизма /3/, в книгах, посвященных фазовым переходам и критическим явлениям /4,5/, не говоря уж об отдельных статьях /6/ и лекциях /7/. Широкая известность этой модели началась с точного решения, впервые полученного для двумерной решетки Онсагером /8/ и содержавшего неожиданные для того времени результаты.

Важность модели Изинга не столько в том, что она пригодна для описания конкретных физических систем (например, анизотропного ферромагнетика), сколько в том, что она дает представление о характерных чертах фазового перехода. Наличие точных результатов в двумерном случае позволяет проверять различные гипотезы и схемы вычислений и, естественно, вдохновляет на поиски точного решения трехмерной задачи. Модель Изинга представляет интерес и для тех, кто занимается квантовой теорией поля, в силу общности вопросов, связывающих теорию фазовых переходов и теорию поля /9,I0/.

Существует много способов получить результат Онсагера, но не все из них доведены до полной ясности и строгости. Цель этих лекций - изложить вывод результата Онсагера наиболее прямым путем. Для этой цели лучше других подходит способ, предложенный Кауфман /II/ (см. также /I/) и в дальнейшем упрощенный /I2/. Этот путь не самый короткий, но он позволяет создать алгебраическую основу для понимания других подходов к решению задачи. Схема вывода проста. Сначала, как это делалось еще до работы Онсагера, статистическая сумма преобразуется к виду следа некоторой матрицы, которая затем выражается через γ- матрицы, а след вычисляется с помощью соотношений (I6) и (I7). Вывод изложен в разделах 5 и 6, а необходимые сведения из алгебры даны в разделах 2 и 3.

Отметим, что для осваивающих квантовую теорию поля может оказаться полезным изложение алгебры γ-матриц совместно с алгеброй фермионных операторов, а также замечание относительно интеграла по антикоммутирующим переменным в разделе 4. Этот раздел не нужен для понимания излагаемого способа решения задачи.

2. Начальные сведения из теории алгебр

Определение алгебры. Рассмотрим все квадратные матрицы n-го порядка А,В,С ... . Сложение матриц и умножение матриц на комплексные числа определяются естественным образом: $C = A + B$ означает, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; $\lambda A = \| \lambda a_{ij} \|$. Эти линейные операции и умножение матриц $AB = \| \sum_{\alpha} a_{i\alpha} b_{\alpha j} \|$ не выводят за пределы выбранной совокупности, которая называется полной матричной алгеброй. Это множество можно рассматривать как векторное пространство размерности n^2, а в качестве элементов базиса выбрать матрицы e_{ij}, у которых матричный элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен единице, а остальные равны нулю. Правила умножения для базисных элементов

$$e_{ij}\, e_{ke} = \delta_{jk}\, e_{ie} \qquad (\mathrm{I})$$

дают возможность найти произведение любых векторов (матриц). Теперь естественно привести общее определение абстрактной ассоциативной алгебры, которую далее будем называть просто алгеброй.

Алгебра - это векторное пространство над некоторым полем, причем на этом множестве введена еще операция умножения векторов,

которая удовлетворяет условиям ассоциативности

$$x(yz) = (xy)z$$

и дистрибутивности

$$x(y+z) = xy + xz \ , \quad (y+z)x = yx + zx \ .$$

Предполагается также, что $\lambda xy = (\lambda x) y = x(\lambda y)$, где λ - число (элемент выбранного поля).

Мы будем рассматривать алгебры над полем комплексных чисел. Стоит отметить, что указание поля весьма существенно . Так, алгебра кватернионов определяется как совокупность элементов вида $q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$, где q_α - вещественные числа (α = 0,I,2,3), e_0 отождествляется с единицей, а базисные векторы e_i умножаются по правилам

$$\begin{array}{lll} e_1 e_2 = e_3 & e_2 e_3 = e_1 & e_3 e_1 = e_2 \\ e_2 e_1 = -e_3 & e_3 e_2 = -e_1 & e_1 e_3 = -e_2 \\ & e_i^2 = -1 \ , \ i = 1,2,3 \ . & \end{array} \qquad (2)$$

Эта алгебра обладает тем свойством, что для каждого $q \neq 0$ (q = 0 означает, что $q_\alpha = 0$ для всех α) существует обратный элемент. Это свойство теряется при комплексных q_α .

Алгебра Грассмана - важный пример, который нам еще понадобится. Пусть заданы элементы $x_1, x_2 \ldots x_n$ со свойством умножения

$$x_i x_j = -x_j x_i \ , \ i,j = 1,2 \ldots n \ ; \ x_i^2 = 0 \ . \qquad (3)$$

Образуем произведения $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $k = 1,2 \cdots n$, и будем рассматривать эти одночлены и добавленный к ним единичный элемент (единицу) e_0, $e_0 x_i = x_i e_0 = x_i$, как базис алгебры с умножением, которое определяется правилами (3). Полученная совокупность элементов

$$g = g_0 e_0 + \sum_{\substack{K \geq 1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_K}} g_{i_1 i_2 \dots i_K} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_K} \qquad (4)$$

называется алгеброй Грассмана, а величины x_i - образующими, или грассмановыми переменными. Элемент e_0 можно отождествить с обычной единицей и в записи (4) опустить. Нетрудно видеть, что размерность (говорят также "порядок" /I4/ или "ранг" /I9/) полученной алгебры, т.е. число линейно независимых элементов, равна 2^n.

Отметим, что свойство умножения (3) инвариантно относительно линейных преобразований грассмановых переменных, т.е. если $f = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$, $h = \sum_{i=1}^{n} h_i x_i$, то $fh = -hf$, $f^2 = h^2 = 0$.

Пусть имеется n линейных форм $a_i = \sum_{K=1}^{n} a_{iK} x_K$, $i = 1, 2, \dots n$, a_{iK} - некоторые числа. Рассмотрим произведение

$$a_1 a_2 \dots a_n = \sum_{i_1, i_2 \dots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{n i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}.$$

Не равными нулю будут лишь члены, в которых все индексы $i_1, i_2 \dots i_n$ различны. Так как

$$x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = sign \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_n,$$

где $sign$ обозначает четность соответствующей перестановки, то

$$a_1 a_2 \dots a_n = Det \| a_{iK} \| x_1 x_2 \dots x_n. \qquad (5)$$

Используя алгебру Грассмана, можно с помощью соотношения (5) передоказать основные теоремы об определителях (см. /I4,I5/).

В произвольной алгебре не обязана присутствовать единица, но часто ее удобно вводить. Это связано с тем, что любая алгебра с единицей имеет точное матричное представление x). Действительно, пусть задана алгебра $\mathcal{F}$ с базисом $e_1, e_2 \dots e_n$ и соответствующим законом умножения: $e_i e_j = \sum_{K=1}^{n} c_{ij}^K e_K$. Числа c_{ij}^K называются структурными константами алгебры (в данном базисе). Конечно, их нельзя задать совсем произвольно, так как они должны удовлетворять требованиям, следующим из ассоциативности умножения: должно быть $e_i(e_j e_K) = (e_i e_j) e_K$ при любых i, j, K. Любому элементу f из $\mathcal{F}$ можно поставить в соответствие матрицу следующим образом. Рассмотрим все произведения $e_i f$ и выразим их через элементы базиса: $e_i f = \sum_K f_{iK} e_K$, где f_{iK} будут определенными комплексными числами. Элементу f поставим в соответствие матрицу $\hat{f} = \| f_{iK} \|$. Из соответствия $f \to \hat{f}$, $h \to \hat{h}$ следует, что

$$\lambda f + \mu h \to \lambda \hat{f} + \mu \hat{h}, \quad fh \to \hat{f} \hat{h},$$

$$e_i f h = \sum_K f_{iK} e_K h = \sum_{K, \ell} f_{iK} h_{K\ell} e_\ell,$$

где λ, μ - произвольные числа. Таким образом, указанное соответствие действительно дает представление алгебры матрицами.

x) Представление называется точным, если различным элементам алгебры соответствуют различные матрицы, т.е. соответствие взаимно однозначное.

Оно называется правым регулярным представлением. Аналогично строится левое регулярное представление, если рассмотреть все произведения

$$f e_i = \sum_k \tilde{f}_{ki} e_k \quad .$$

В общем случае регулярное представление не обязано быть точным. Если же алгебра содержит единицу, то представление непременно точное. Действительно, пусть e_1 - единица алгебры. Тогда элементам $f = \sum_k f_k e_k$ и $h = \sum_k h_k e_k$ соответствуют матрицы правого регулярного представления, первые строки которых имеют вид $(f_1 f_2 \dots f_n)$ и $(h_1 h_2 \dots h_n)$, т.е. различны при $f \neq h$.

Если алгебра не содержит единицу, то ее всегда можно ввести и получить точное матричное представление /13/ . Таким образом, любую абстрактную алгебру можно рассматривать как подалгебру полной матричной алгебры x). Подалгеброй данной алгебры называется подпространство в ней, которое замкнуто относительно умножения, введенного в алгебре, т.е. подалгебра сама является алгеброй. Так, в алгебре Грассмана совокупность элементов, образованных линейными комбинациями произведений четного числа образующих, будет подалгеброй.

Алгебра Клиффорда. Рассмотрим элементы γ_i, удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2 \delta_{ij} e_0 \ , \quad i,j = 1,2 \dots n, \qquad (6)$$

---

x) Иными словами, на абстрактные алгебры можно смотреть как на средство, облегчающее изучение матричной алгебры.

и образуем базис из единичного элемента $e_0 = 1$ и всех различных произведений $\gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \cdots \gamma_{i_k}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $k = 1,2 \dots n$. Умножение для элементов базиса задается естественным образом в согласии с (6). Все линейные комбинации элементов этого базиса с комплексными коэффициентами образуют алгебру Клиффорда над полем комплексных чисел. Размерность алгебры равна 2^n, n - число образующих алгебры. Эта алгебра, изобретенная сто лет тому назад знаменитым английским математиком В.Клиффордом /16/, часто определяется с помощью образующих e_i , удовлетворяющих условию $e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$. Ясно, что над полем комплексных чисел это определение простым преобразованием базиса сводится к предыдущему. Такие алгебры, законы умножения которых совпадают при некотором выборе базиса, называются изоморфными и считаются эквивалентными.

Структура алгебры Клиффорда зависит от четности n . Рассмотрим сначала четные n . Именно этот случай важен для приложений, так как включает и матрицы Дирака ($n = 4$),и алгебру операторов рождения и уничтожения фермионов. Действительно, пусть $n = 2\nu$. Введем обозначения:

$$\gamma_{\nu+k} \equiv \bar{\gamma}_k \ , \quad k = 1,2 \dots \nu \ ;$$

$$c_k = \frac{1}{2}(\gamma_k + i\bar{\gamma}_k) \ , \quad c_k^+ = \frac{1}{2}(\gamma_k - i\bar{\gamma}_k) \ . \qquad (7)$$

Здесь i -мнимая единица, а крест следует рассматривать просто как обозначение. Новые образующие алгебры c_k , c_k^+ , как нетрудно проверить с помощью соотношений (6), удовлетворяют перестановочным соотношениям для фермионных операторов рождения и уничтожения:

$$\{c_k c_\ell\} = 0\,, \quad \{c_k^+ c_\ell^+\} = 0\,, \quad \{c_k c_\ell^+\} = \delta_{k\ell}\,, \tag{8}$$

$$k,\ell = 1,2 \dots \nu\,; \qquad \{xy\} \equiv xy + yx\,.$$

Построим теперь матричное представление алгебры для $n = 2\nu$. Рассмотрим сначала случаи $n = 2,4$. При $n = 2$ перестановочные соотношения (6) совпадают с условиями, которым удовлетворяют матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, положив $\hat{\gamma}_1 = \sigma_1$, $\hat{\gamma}_2 = \hat{\hat{\gamma}}_1 = \sigma_2$, мы получим матричное представление алгебры при $n = 2$. Нетрудно проверить, используя свойства прямого произведения [x)] матриц, что при $n = 4$ матрицы

$$\hat{\gamma}_1 = \sigma_1 \times I\,, \qquad \hat{\hat{\gamma}}_1 = \sigma_2 \times I\,,$$

$$\hat{\gamma}_2 = \sigma_3 \times \sigma_1\,, \qquad \hat{\hat{\gamma}}_2 = \sigma_3 \times \sigma_2\,, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

также удовлетворяют перестановочным соотношениям (6). После этого можно догадаться, как записать представление в общем случае при $n = 2\nu$. Оно имеет вид:

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_1 &= \sigma_1 \times I \times I \times \dots I \times I\,, & \hat{\hat{\gamma}}_1 &= \sigma_2 \times I \times I \times \dots I \times I\,,\\
\hat{\gamma}_2 &= \sigma_3 \times \sigma_1 \times I \times \dots I \times I\,, & \hat{\hat{\gamma}}_2 &= \sigma_3 \times \sigma_2 \times I \times \dots I \times I\,,\\
&\vdots & &\vdots\\
\hat{\gamma}_\nu &= \sigma_3 \times \sigma_3 \times \sigma_3 \times \dots \sigma_3 \times \sigma_1\,, & \hat{\hat{\gamma}}_\nu &= \sigma_3 \times \sigma_3 \times \sigma_3 \times \dots \sigma_3 \times \sigma_2\,.
\end{aligned} \tag{9}$$

---

x) Прямое произведение далее обозначается косым крестом. Необходимые сведения о свойствах прямого произведения матриц можно найти, например, в книге /I/.

Матрицы этого представления имеют порядок 2^ν. Покажем, что любую матрицу порядка 2^ν можно выразить через комбинации матриц (9). Рассмотрим с этой целью

$$\begin{aligned}
-i\hat{\gamma}_\alpha \hat{\hat{\gamma}}_\alpha &= I \times I \times \dots \times I \times \sigma_3 \times I \times \dots \times I \equiv Z_\alpha\,,\\
Z_1 Z_2 \dots Z_{\alpha-1} \hat{\gamma}_\alpha &= I \times I \times \dots \times I \times \sigma_1 \times I \times \dots \times I \equiv X_\alpha\,,\\
Z_1 Z_2 \dots Z_{\alpha-1} \hat{\hat{\gamma}}_\alpha &= I \times I \times \dots \times I \times \sigma_2 \times I \times \dots \times I \equiv Y_\alpha\,,\\
I \times I \times &\dots \times I \times I \times I \times \dots \times I \equiv 1\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь отличные от I множители стоят на α-м месте. Матрицы

$$\tfrac{1}{2}(1 + Z_\alpha) \equiv \tau_\alpha^{++}, \qquad \tfrac{1}{2}(X_\alpha + iY_\alpha) \equiv \tau_\alpha^{+-},$$

$$\tfrac{1}{2}(X_\alpha - iY_\alpha) \equiv \tau_\alpha^{-+}, \qquad \tfrac{1}{2}(1 - Z_\alpha) \equiv \tau_\alpha^{--}$$

имеют в качестве множителя на α-м месте матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно. Теперь нетрудно увидеть, что матрица

$$e_{\rho_1\rho_2\dots\rho_\nu;\,\tau_1\tau_2\dots\tau_\nu} = \prod_{\alpha=1}^{\nu} \tau_\alpha^{\rho_\alpha\tau_\alpha}\,, \quad \rho_\alpha = \pm 1\,, \; \tau_\alpha = \pm 1 \tag{11}$$

содержит только один отличный от нуля матричный элемент (равный единице) на пересечении строки $\rho_1\rho_2\dots\rho_\nu$ со столбцом $\tau_1\tau_2\dots\tau_\nu$, т.е. $2^{2\nu} = 2^n$ матриц (11) суть базисные элементы полной матричной алгебры.

Размерность исходной абстрактной алгебры также равна 2^n. Из совпадения размерностей следует, что представление (9) – точное. Действительно, если бы оно не было точным, то должны были существовать такие элементы f, h алгебры, что $\hat{f} = \hat{h}$ при $f \neq h$. А это означало бы появление линейной зависимости между образами базисных элементов, т.е. понижение размерности. Ясно также, что представление алгебры с помощью (9) является неприводимым, так как совокупность всех матриц данного порядка неприводима.

Алгебра Клиффорда при $n=2\nu$ относится к классу простых алгебр. Алгебра называется простой, если она не содержит нетривиальных двусторонних идеалов. Правым (левым) идеалом алгебры $\mathcal{F}$ называется такая подалгебра $\mathcal{H}$, что элемент hf (fh) принадлежит $\mathcal{H}$ при $h\in\mathcal{H}, f\in\mathcal{F}$. Идеал, который является одновременно и правым и левым, называется двусторонним. Тривиальные двусторонние идеалы алгебры - это сама алгебра и нуль. Покажем, что полная матричная алгебра проста. Отсюда и из доказанного изоморфизма алгебры Клиффорда полной матричной алгебре будет следовать и простота алгебры Клиффорда при $n=2\nu$. Допустим, что полная матричная алгебра содержит двусторонний идеал, и рассмотрим элемент идеала $h=\sum\limits_{i,j} h_{ij}e_{ij}$, где h_{ij} - числа, не все равные нулю, а e_{ij} - базисные элементы со свойствами (I).

Пусть $h_{\kappa\ell}\neq 0$. Тогда $e_{\mu\kappa}h\,e_{\ell\nu}\dfrac{1}{h_{\kappa\ell}}=e_{\mu\nu}$, т.е. из h путем умножения справа и слева можно получить любой элемент алгебры, т.е. идеал совпадает со всей алгеброй.

Вернемся теперь к обсуждению свойств представлений алгебры Клиффорда при $n=2\nu$. Покажем, что любое нетривиальное представление этой алгебры - точное. Представление тривиально, если всем элементам алгебры соответствует нулевая матрица. Если представление не точное, то найдутся такие элементы f,g $(f\neq g)$, что $\hat{f}=\hat{g}$, т.е. будут существовать не равные нулю элементы алгебры, $f-g\neq 0$, которые отображаются в нуль. Совокупность всех таких элементов (включая нуль) называется ядром представления. Легко проверить, что ядро представления является двусторонним идеалом. Но из простоты алгебры следует, что идеал,

не состоящий из одного нуля, совпадает со всей алгеброй. Следовательно, все элементы алгебры должны были бы отображаться в нуль, что невозможно. В качестве простого следствия получаем, что низший порядок матриц представления есть 2^{ν}.

Другое представление типа (9) можно получить, например, взяв вместо матриц (9) матрицы

$$\hat{\gamma}_\alpha^{*}=\sum_{\beta=1}^{2\nu} O_{\alpha\beta}\hat{\gamma}_\beta\ ,\quad \alpha=1,2\ldots 2\nu\ , \tag{I2}$$

где числа $O_{\alpha\beta}$ составляют ортогональную матрицу, так что соотношения (6) удовлетворяются и матрицами $\hat{\gamma}_\alpha^{*}$. Переход от одного представления к другому порождает отображение полной матричной алгебры размерности $2^{2\nu}$ на себя. Это отображение взаимно однозначно и сохраняет алгебраические операции, т.е. из $A\leftrightarrow A^{*}$, $B\leftrightarrow B^{*}$ следует, что $\lambda A+\mu B\leftrightarrow\lambda A^{*}+\mu B^{*}$, $AB\leftrightarrow A^{*}B^{*}$. Такое отображение называется автоморфизмом алгебры. Покажем, что любой автоморфизм полной матричной алгебры является внутренним, т.е. существует такой элемент S, что

$$A\longleftrightarrow A^{*}=SAS^{-1}. \tag{I3}$$

Неособенная матрица S определяется самим автоморфизмом с точностью до численного множителя. Действительно, пусть S_1 и S_2 - две такие матрицы, что $A^{*}=S_1AS_1^{-1}=S_2AS_2^{-1}$ для любой матрицы A; тогда $AS_1^{-1}S_2=S_1^{-1}S_2A$, т.е. матрица $S_1^{-1}S_2$ коммутирует со всеми матрицами. В полной матричной алгебре таким свойством обладают лишь матрицы, кратные единичной.

Докажем теперь существование матрицы S. Для этого рассмотрим матричное уравнение для собственных значений $DX=\lambda X$, где D - некоторая заданная матрица, X - искомая матрица,

λ - искомый числовой множитель. Это уравнение при автоморфизме переходит в $D^*X^* = \lambda X^*$, т.е. D^* имеет те же собственные числа, что и D. Таким образом, если в качестве D взять диагональную матрицу $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$, где все λ_i различны, то найдется такая неособенная матрица V, что $D^* = VDV^{-1}$. Рассмотрим теперь автоморфизм $A \leftrightarrow A^{**} = V^{-1}AV$, где A - любая матрица. При этом автоморфизме, очевидно, $D \longleftrightarrow D^{**} = D$. Далее, равенства

$$D e_{ke} = \lambda_k e_{ke} \quad , \quad e_{ke} D = \lambda_e e_{ke}$$

переходят в равенства

$$D e_{ke}^{**} = \lambda_k e_{ke}^{**} \quad , \quad e_{ke}^{**} D = \lambda_e e_{ke}^{**},$$

где e_{ke} и e_{ke}^{**} - базисные элементы полной матричной алгебры со свойствами (I) и их образы. Элементы e_{ke}^{**} определяются последними равенствами с точностью до множителя

$$e_{ke}^{**} = d_{ke} e_{ke} \; , \; d_{ke} \neq 0 .$$

Кроме того, $(e_{kk}^{**})^2 = e_{kk}^{**}$, откуда следует, что $d_{kk} = 1$. Далее, из $e_{11}^{**} = e_{1k}^{**} e_{k1}^{**}$ следует, что $d_{k1} = d_{1k}^{-1}$, а из $e_{ke}^{**} = e_{k1}^{**} e_{1e}^{**}$ следует, что $d_{ke} = d_{1e} d_{1k}^{-1}$. Обозначая d_{1k}^{-1} через d_k, получаем, что

$$e_{ke}^{*} = V e_{ke}^{**} V^{-1} = V d_k e_{ke} d_e^{-1} V^{-1}$$

или

$$e_{ke}^{*} = S e_{ke} S^{-1}, \qquad \text{где} \quad S = V \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

В применении к различным нетривиальным представлениям γ- матриц размерности 2^ν эта теорема x) означает, что представление (9) является единственным с точностью до преобразования эквивалентности (I3). Естественно, что то же самое справедливо и для соответствующего представления фермионных операторов, которое легко получается из (9) с помощью (7).

В заключение отметим специфику алгебры Клиффорда при $n = 2\nu + 1$. В этом случае в алгебре содержится элемент, отличный от единичного, который коммутирует со всеми элементами алгебры: $\vartheta = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{2\nu+1}$. Общий элемент ω алгебры может быть представлен в виде $\omega = \omega_+ + \omega_-$, где

$$\omega_+ = \sum_{0 \le k \le \nu} \omega^{(+)}_{j_1 j_2 \ldots j_k} \gamma_{j_1} \gamma_{j_2} \cdots \gamma_{j_k} (1 + i^\nu \vartheta),$$

$$\omega_- = \sum_{0 \le k \le \nu} \omega^{(-)}_{j_1 j_2 \ldots j_k} \gamma_{j_1} \gamma_{j_2} \cdots \gamma_{j_k} (1 - i^\nu \vartheta) .$$

Нетрудно заметить, что ω_+ и ω_- являются двусторонними идеалами алгебры и алгебра представляется в виде прямой суммы ($\omega_+ \cdot \omega_- = 0$) двусторонних идеалов. Эта алгебра имеет неприводимые представления размерности $2^\nu \times 2^\nu$. Она нам не понадобится.

---

x) Эту теорему для матриц Дирака Паули /I7/ назвал фундаментальной. Мы следовали изложению Брауэра и Вейля /I8/ (см. также книгу Вейля /I9/).

3. Следы произведений γ-матриц и пфаффиан

Теперь мы рассмотрим задачу о вычислении следов произведений матриц $\hat\gamma_j$ ($j = 1,2 \dots n$; $n=2\nu$), удовлетворяющих перестановочным соотношениям (6). Точнее, нас будет интересовать

$$Sp\,(\hat P_1 \hat P_2 \dots \hat P_N),$$

где $\hat P_k$ - некоторые линейные комбинации матриц $\hat\gamma_j$ с комплексными коэффициентами: $\hat P_k = \sum_{\alpha=1}^{n} P_k^\alpha \hat\gamma_\alpha$. Удобно использовать обозначение $\overline{Sp}$ для следа, деленного на порядок матриц представления, так что $\overline{Sp}(1) = 1$.

Эта задача была подробно изучена для случая матриц Дирака /15,26/, и, хотя переход к общему случаю не вносит практически никаких изменений, представляется полезным последовательно изложить вывод нужных нам соотношений.

Прежде всего отметим, что след произведения нечетного числа γ-матриц равен нулю. Это следует из того, что существует матрица $U = \pm(i)^\nu \hat\gamma_1 \hat\gamma_2 \dots \hat\gamma_{2\nu}$, которая антикоммутирует с каждой из матриц $\hat\gamma_j$:

$$Sp\,(U\hat\gamma_j U) = Sp\,\hat\gamma_j = -Sp\,\hat\gamma_j\,, \quad U^2 = 1\,.$$

Будем поэтому считать, что число сомножителей $\hat P_k$ четно, $N=2m$. Тогда, многократно используя перестановочные соотношения

$$\hat P_j \hat P_k + \hat P_k \hat P_j = 2\sum_{\alpha=1}^{n} P_j^\alpha P_k^\alpha \equiv 2(P_j P_k),$$

нетрудно получить, что

$$\overline{Sp}(\hat P_1 \hat P_2 \dots \hat P_{2m}) = 2(P_1P_2)\,\overline{Sp}\,(\hat P_3 \hat P_4 \dots \hat P_{2m}) -$$

$$-2(P_1P_3)\,\overline{Sp}\,(\hat P_2 \hat P_4 \dots \hat P_{2m}) + \dots + (-1)^k \cdot 2(P_1P_k)\,\overline{Sp}\,(\hat P_2 \dots \hat P_{k-1} \hat P_{k+1}) +$$

$$\dots + 2(P_1P_{2m})\,\overline{Sp}\,(\hat P_2 \hat P_3 \dots \hat P_{2m-1}) -$$

$$- \overline{Sp}\,(\hat P_2 \hat P_3 \dots \hat P_{2m} \hat P_1)\,,$$

откуда

$$\overline{Sp}(\hat P_1 \hat P_2 \dots \hat P_{2m}) = (P_1P_2)\,\overline{Sp}\,(\hat P_3 \hat P_4 \dots \hat P_{2m}) - (P_1P_3)\,\overline{Sp}\,(\hat P_2 \hat P_4 \dots \hat P_{2m}) + \dots + (-1)^k (P_1P_k)\,\overline{Sp}\,(\hat P_2 \dots \hat P_{k-1} \hat P_{k+1} \dots \hat P_{2m}) + \dots + (P_1P_{2m})\,\overline{Sp}\,(\hat P_2 \hat P_3 \dots \hat P_{2m-1})\,. \tag{14}$$

Заметим, что знаковый множитель $(-1)^k$ равен четности перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2m \\ 1 & k & 2 & \dots & \dots \end{pmatrix}$. Применяя теперь $m-1$ раз формулу (14), доводим редукцию следа до конца. Знаковые множители просто учесть, воспользовавшись групповым свойством перестановок.

В итоге имеем

$$\overline{Sp}(\hat P_1 \hat P_2 \dots \hat P_{2m}) = \sum{}' sign \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2m \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} (P_{i_1}P_{j_1})(P_{i_2}P_{j_2}) \dots (P_{i_m}P_{j_m}). \tag{15}$$

Из способа получения этой суммы ясно, что сумма распространяется на все перестановки, удовлетворяющие неравенствам:

$$i_1 < i_2 < i_3 \dots < i_m\,,\ i_1 < j_1\,,\ i_2 < j_2 \dots i_m < j_m \tag{15a}$$
$$(i_1 = 1)\,.$$

Штрих у знака суммы будет обозначать эти ограничения. Удобно ввести величины

$$C_{ij} = \begin{cases} (P_i P_j) & \text{при} \quad i<j \\ 0 & \text{при} \quad i=j \\ -(P_i P_j) & \text{при} \quad i>j \end{cases} .$$

Тогда

$$\overline{Sp}(\hat P_1 \hat P_2 \ldots \hat P_{2m}) = \sum{}' \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1\,2 \ldots 2m\\ i_1 j_1 \ldots j_m\end{pmatrix} c_{i_1 j_1}\cdots c_{i_m j_m} \equiv Pf\,C, \quad (16)$$

и в правой части мы получаем алгебраическое выражение, известное с прошлого века и называемое пфаффианом. Обычно оно обозначается через $Pf\,C$, где $C = \|c_{ij}\|$. Это выражение появилось в результате извлечения квадратного корня из определителя кососимметрической матрицы. Оказалось, что этот корень является целой рациональной функцией матричных элементов и дается выражением (16).

Докажем, что

$$(Pf\,C)^2 = Det\,C. \quad (17)$$

Это равенство можно доказать непосредственно, сравнивая правую и левую части (17), что и сделано в приложении I. Мы приведем здесь другое доказательство, использующее грассманову алгебру. Введем форму $f = \sum_{i,j=1}^{2m} c_{ij} x_i x_j$, где $x_1, x_2 \ldots x_{2m}$ – грассмановы переменные, и рассмотрим ее m - ю степень

$$f^m = \sum_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} c_{i_1 j_1} c_{i_2 j_2}\cdots c_{i_m j_m}\, x_{i_1} x_{j_1} x_{i_2} x_{j_2}\cdots x_{i_m} x_{j_m} .$$

В силу свойств умножения (см. (3)) в этой сумме отличны от нуля лишь члены с различными индексами, т.е. всего ($2m)!$ членов. Среди всех перестановок индексов перестановки пар индексов $i_\alpha j_\alpha \leftrightarrow i_\beta j_\beta$ (их $m!$) и перестановки индексов внутри каждой

из пар $i_\alpha j_\alpha \leftrightarrow j_\alpha i_\alpha$ (их 2^m) дают одинаковые члены. Поэтому

$$f^m = 2^m \cdot m!\, Pf\,C\, x_1 x_2 \cdots x_{2m} . \quad (18)$$

Это соотношение можно рассматривать и как определение пфаффиана (ср. с (5)). Рассмотрим теперь невырожденное линейное преобразование грассмановых переменных:

$$x_i = \sum_k L_{ik} y_k , \quad Det\,L \neq 0 .$$

При этом

$$x_1 x_2 \ldots x_{2m} = Det\,L\, y_1 y_2 \cdots y_{2m} ,$$

$$f = \sum_{k,l} \tilde c_{kl}\, y_k y_l , \qquad \tilde C = \|\tilde c_{kl}\| = L^T C L .$$

Значок T означает транспонирование. Используя (18), получаем

$$Pf\,C\, x_1 x_2 \cdots x_{2m} = Pf\,C \cdot Det\,L\, y_1 y_2 \cdots y_{2m} = Pf\,\tilde C\, y_1 y_2 \cdots y_{2m} ,$$

откуда

$$Pf\,\tilde C = Pf\,C \cdot Det\,L . \quad (19)$$

Пусть C – вещественная матрица. Тогда ортогональным преобразованием ее можно привести к нормальной форме (см. /20/):

$$\tilde C = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & \lambda_1 & & \\ -\lambda_1 & 0 & & \\ & & 0 & \lambda_2 \\ & & -\lambda_2 & 0 \\ & & & & \ddots \end{array} \right\|$$

При этом преобразование можно выбрать так, чтобы $Det\,L = 1$. Тогда

$$Pf\,\tilde C\, y_1 y_2 \cdots y_{2m} = Pf\,C\, y_1 y_2 \cdots y_{2m} =$$

$$= \frac{1}{m!}\left(\lambda_1 y_1 y_2 + \lambda_2 y_3 y_4 + \dots + \lambda_m y_{2m-1} y_{2m}\right)^m =$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m y_1 y_2 \dots y_{2m} .$$

Так как при нашем выборе L справедливы равенства $Det\, C = Det\, \tilde{C} = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m)^2$, получаем (I7). Поскольку равенство (I7) есть соотношение между полиномами, то оно сохраняется и при комплексных c_{ij}.

Соотношение (I7) позволяет свести задачу вычисления следов к вычислению определителей. Отметим одно простое и важное следствие проведенных преобразований:

$$\overline{Sp}\left(\hat{P}_1 \hat{P}_2 \dots \hat{P}_k \hat{P}'_{k+1} \hat{P}'_{k+2} \dots \hat{P}'_{2m}\right) = \overline{Sp}\left(\hat{P}_1 \hat{P}_2 \dots \hat{P}_k\right) \times \overline{Sp}\left(\hat{P}'_{k+1} \hat{P}'_{k+2} \dots \hat{P}'_{2m}\right), \tag{20}$$

если $(P_i P'_j) = 0$, $i = 1,2 \dots k$; $j = k+1, k+2 \dots 2m$.

4. Об интеграле по антикоммутирующим переменным

В некоторых работах [21,22], посвященных двумерной модели Изинга, использовался так называемый интеграл по антикоммутирующим переменным, формальное определение которого было дано Березиным в его книге [23]. Впоследствии этот интеграл широко использовался в теории поля и в работах других авторов (см.[24]). Цель этого раздела - указать на связь этого интеграла со следами элементов алгебры Клиффорда. Тем самым мы получим реализацию этой абстрактно определенной операции интегрирования.

Интеграл по антикоммутирующим переменным определяется на элементах алгебры Грассмана вида (4) и обозначается символом

$$\int g(x)\, dx_n\, dx_{n-1} \dots dx_1 .$$

На одночленах этот интеграл был определен (см.[23]) как повторный, причем однократные интегралы по определению таковы:

$$\int dx_i = 0 , \qquad \int x_i\, dx_i = 1 , \tag{21}$$

а символы dx_k подчиняются соотношениям

$$\{ dx_i, dx_k \} = 0, \tag{22а}$$

$$\{ x_i, dx_k \} = 0 . \tag{22б}$$

На произвольные $g(x)$ интеграл распространяется по линейности. Тогда, как нетрудно видеть,

$$\int g(x)\, dx_n\, dx_{n-1} \dots dx_1 = g_{12\dots n} ,$$

где $g_{12\dots n}$ - коэффициент при старшем члене в разложении $g(x)$.

Сделаем два замечания по поводу этого определения. Во-первых, требование (22б) излишне. Свойств (2I) и (22а) достаточно для вычисления интеграла, так как символы dx_k всегда стоят справа от $g(x)$, и,после замены $\int x_n dx_n$ на единицу, можно последовательно проинтегрировать по всем остальным пременным, не используя (22б). Это условие следует опустить, так как оно мешает матричной реализации интеграла. Действительно, рассмотрим второй из интегралов (2I) и предположим, что x_i и dx_i представлены матрицами, удовлетворяющими (22а,б), т.е. матрицами, реализующими алгебру Грассмана с удвоенным числом образующих. Пусть существует отображение, которое матрице $x_i dx_i$ ставит в соответствие +I. Тогда без нарушения соотношений (22) в качестве матрицы x_i

можно взять матрицу dx_i и наоборот. Получается, что то же самое отображение даст -I. Следовательно, отображения со свойством (2I), не зависящего от выбора представления для элементов алгебры, не существует.

Во-вторых, интеграл определен лишь как интеграл максимальной кратности n. Например, символ

$$\int x_1 x_2 \cdots x_n \, dx_n \, dx_{n-1} \cdots dx_k \ , \ k > 1 \ ,$$

не определен. Его можно доопределить двумя естественными способами.

I) Будем считать, что непарные переменные (в нашем примере $x_1, x_2 \ldots x_{k-1}$) можно выносить за знак интеграла. Оставшиеся переменные тогда дадут число. В этом случае интеграл есть элемент алгебры, вообще говоря, отличный от кратного единичному.

2) Можно считать, что при наличии непарных переменных интеграл равен нулю. В этом случае интеграл всегда есть число и его можно реализовать следующим образом:

$$\int g(x) \, dx_n \, dx_{n-1} \cdots dx_k = 2^{n-k+1} \, \overline{Sp} \left(g(x) x_n^+ x_{n-1}^+ \cdots x_k^+ \right), \quad (23)$$

где справа вместо абстрактных элементов имеются в виду представляющие их матрицы со свойствами фермионных операторов

$$\{ x_j, x_k^+ \} = \delta_{jk} \ , \quad \{ x_k^+, x_j^+ \} = \{ x_k, x_j \} = 0 \ .$$

Степень двойки равна числу "дифференциалов". В случае интеграла максимальной кратности двойки можно опустить, если заменить $\overline{Sp} \to Sp$ и считать, что используется неприводимое представление для операторов рождения и уничтожения.

В случае I нетрудно показать, что операция интегрирования тождественна последовательному дифференцированию справа $g \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_n} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_k}$. Операция дифференцирования и ее свойства описаны в книге /23/. Такая интерпретация интеграла уже отмечалась в литературе (см. /24,25/), однако не было замечено, что условие (22б) следует опустить.

Отметим также, что интеграл (23) можно рассматривать как среднее выражения под знаком следа по фермионному вакууму.

Интеграл по антикоммутирующим переменным в применении к модели Изинга /2I,22/ играл, по существу, роль удачно угаданного комбинаторного средства, а не возникал из исходной формулировки естественным образом.

5. Преобразование статистической суммы

Приступим, наконец, к решению основной задачи. Рассмотрим плоскую прямоугольную решетку с размерами $p \times q$, где p - число узлов по вертикали, q - число узлов по горизонтали. Пусть в каждом из узлов расположен магнитный диполь (стрелка), проекция которого S_{ik} на некоторую ось может принимать лишь два значения: $S_{ik} = \pm$ I. Здесь i - номер "строки", в которой расположен диполь, а k - номер "столбца". Проекции S_{ik} $(i = 1, 2 \ldots p \ , \ k = 1, 2, \ldots q)$ полностью характеризуют состояние такой решетки. Энергию состояния $E(s)$ зададим в виде

$$E(s) = -\varepsilon_1 \sum_{i,k} S_{ik} S_{ik+1} - \varepsilon_2 \sum_{i,k} S_{ik} S_{i+1k} \quad (\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0),$$

т.е. соседние диполи стремятся ориентироваться параллельно. Такова первоначальная формулировка модели Изинга. Здесь мы сталкиваемся с примером системы, обладающей вырожденным вакуумом. Два состояния, когда все $S_{ik} = 1$ или когда все $S_{ik} = -1$, имеют наименьшую энергию.

Наша задача заключается в том, чтобы вычислить статистическую сумму Q для изинговской решетки, т.е. получить выражение для

$$Q=\sum_{(s=\pm1)} e^{-\frac{E(s)}{KT}}=\sum_{(S_{ik}=\pm1)} e^{a\sum\limits_{i,k} s_{ik}s_{ik+1}+b\sum\limits_{i,k}s_{ik}s_{i+1k}}, \qquad (24)$$

удобное для вычисления $\lim\limits_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}\frac{\ln Q}{pq}$, т.е. для перехода к термодинамическому пределу. Зависимость от температуры T мы включили в параметры a, b $(a>0, b>0)$. Для дальнейшего удобно представить решетку свернутой в тор, а именно- добавить в энергию члены $a\sum_i s_{iq}s_{i1}+b\sum_k s_{pk}s_{1k}$ и считать, что $S_{p+1k}=S_{1k}$, $S_{iq+1}=S_{i1}$. Термодинамический предел при этом не меняется.

Преобразуем теперь статистическую сумму (24) к матричной форме. Обозначим через $\vec S_k$ совокупность $(s_{1k}, s_{2k}\dots s_{pk})$, характеризующую состояние k-го столбца. Тогда выражение (24) можно переписать в виде

$$Q=\sum_{\vec s_1,\vec s_2\dots\vec s_n} M(\vec s_1,\vec s_2)M(\vec s_2,\vec s_3)\dots M(\vec s_n,\vec s_1),$$

где

$$M(\vec s,\vec s')=e^{b\sum\limits_{i=1}^p s_is_{i+1}}\cdot e^{a\sum\limits_{i=1}^p s_is_i'}.$$

Эту величину можно рассматривать как матричный элемент матрицы M, а $\vec s$ и $\vec s'$ - как индексы, каждый из которых принимает 2^p значений. Тогда

$$Q=Sp\, M^q. \qquad (25)$$

В свою очередь, матрицу M можно записать в виде произведения матриц BA, или, на языке матричных элементов,

$$M(\vec s,\vec s')=\sum_{(s_i''=\pm1)} B(\vec s,\vec s'')A(\vec s'',\vec s'),$$

где

$$A(\vec s'',\vec s')=e^{a\sum\limits_{i=1}^p s_i''s_i'},\quad B(\vec s,\vec s'')=e^{b\sum\limits_{i=1}^p s_is_{i+1}}\cdot\prod_{k=1}^p\delta_{s_ks_k''}.$$

Выявим теперь структуру матриц A и B. Имеем

$$A(\vec s'',\vec s')=\prod_{i=1}^p\hat a(s_i'',s_i').$$

Здесь величины $\hat a(s_i'',s_i')\equiv e^{a s_i''s_i'}$ можно рассматривать как матричные элементы двухрядной матрицы $\hat a$, в которой $s_i''=+1$ соответствует первой строке и $s_i'=+1$ соответствует первому столбцу. Тогда, очевидно,

$$\hat a=\begin{Vmatrix} e^a & e^{-a}\\ e^{-a} & e^a\end{Vmatrix}=e^aI+e^{-a}\sigma_1,$$

и матрица A равна $\hat a\times\hat a\times\dots\times\hat a$ (всего p сомножителей) согласно определению прямого произведения матриц.

Используем теперь матрицы $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$, определеннные равенствами (10) при $\nu=p$. С помощью этих матриц A записывается в виде

$$A=\prod_{k=1}^p(e^a+e^{-a}X_k). \qquad (26)$$

Рассмотрим далее матричный элемент $(Z_kZ_{k+1})_{\vec s;\vec s''}$

$$(Z_kZ_{k+1})_{\vec s;\vec s''}=\left(\prod_{\substack{i\ne k\\ i\ne k+1}}\delta_{s_is_i''}\right)\cdot(\sigma_3)_{s_ks_k''}\cdot(\sigma_3)_{s_{k+1}s_{k+1}''}=s_ks_{k+1}\prod_{i=1}^p\delta_{s_is_i''}.$$

Отсюда следует, что

$$B=e^{b\sum\limits_{k=1}^p Z_kZ_{k+1}},\quad Z_{p+1}\equiv Z_1. \qquad (27)$$

Выразим теперь матрицы A и B через γ-матрицы. Для этого удобно использовать представление, которое получается из представления (9) при $\nu=p$ заменой $\sigma_1\to\sigma_3$, $\sigma_3\to\sigma_1$. Тогда, используя матрицы $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ (см. (10)) и опуская далее шляпку в обозначении γ- матриц, получаем

$$\gamma_k = X_1 X_2 \ldots X_{k-1} Z_k\,, \quad \bar\gamma_k = X_1 X_2 \cdots X_{k-1} Y_k\,, \tag{28}$$
$$k = 1, 2, \ldots p\,,$$

$$X_k = i\gamma_k \bar\gamma_k\,,$$
$$Z_k Z_{k+1} = i\,\bar\gamma_k \gamma_{k+1} \quad (k = 1, 2 \ldots p-1), \tag{29}$$
$$Z_p Z_1 = -i\,U \bar\gamma_p \gamma_1\,,$$

где $\quad U = \prod_{\alpha=1}^{p} X_\alpha = i^p \prod_{\alpha=1}^{p} \gamma_\alpha \bar\gamma_\alpha\,, \quad U^2 = 1\,.$

Отсюда

$$A = \prod_{\alpha=1}^{p} \left(e^{a} + i e^{-a} \gamma_\alpha \bar\gamma_\alpha\right),$$
$$B = e^{ib\sum_{\alpha=1}^{p-1} \bar\gamma_\alpha \gamma_{\alpha+1}} \cdot e^{-ib\,U \bar\gamma_p \gamma_1}\,. \tag{30}$$

Отметим, что все множители в A коммутируют между собой. То же справедливо и для множителей в B , а матрица U коммутирует со всеми множителями, так как они содержат четное число γ-матриц. Для дальнейшего удобно записать выражение для B в виде:

$$B = \frac{1}{2} B_-(1+U) + \frac{1}{2} B_+(1-U)\,,$$
$$B_\pm = e^{ib\sum_1^{p-1} \bar\gamma_\alpha \gamma_{\alpha+1} \pm ib\,\bar\gamma_p \gamma_1}\,, \tag{31}$$

воспользовавшись тем, что

$$e^{-ib\,U \bar\gamma_p \gamma_1} = \frac{1}{2} e^{-ib\,\bar\gamma_p \gamma_1}(1+U) + \frac{1}{2} e^{ib\,\bar\gamma_p \gamma_1}(1-U)\,.$$

Поскольку

$$\left[\frac{1}{2}(1 \pm U)\right]^q = \frac{1}{2}(1 \pm U)\,, \quad (1+U)(1-U) = 0\,,$$

окончательно получаем выражение для статистической суммы двумерной решетки

$$Q = \frac{Sp}{2}\left[(AB_+)^q (1-U) + (AB_-)^q (1+U)\right]. \tag{32}$$

Следует сказать, что приведение к такому виду в принципе решает задачу, так как каждое из четырех слагаемых под знаком следа представляется в виде произведения линейных комбинаций γ -матриц:

$$e^{a} + i e^{-a} \gamma_k \bar\gamma_k = e^{a} \gamma_k (\gamma_k + i\xi \bar\gamma_k), \quad \xi \equiv e^{-2a},$$
$$e^{ib\,\bar\gamma_k \gamma_{k+1}} = ch\,b + i\,sh\,b\,\bar\gamma_k \gamma_{k+1} = ch\,b\,\bar\gamma_k (\bar\gamma_k + i\eta \gamma_{k+1}),$$
$$\eta \equiv th\,b\,. \tag{33}$$

А тогда формулы (I6) и (I7) позволяют свести задачу к вычислению определителей.

Отметим теперь, где сказывается специфика двумерной задачи. Все преобразования вплоть до аналога формулы (27) можно провести и в трехмерном случае. Однако матрица, аналогичная B , выраженная через γ -матрицы, уже не будет иметь столь простого вида, как в (30), и пока ещё никому не удалось преодолеть возникающие осложнения.

6. <u>Вычисление следов. Результат</u>

Вычислим теперь следы, фигурирующие в формуле (32). Рассмотрим сначала

$$\overline{Sp}\,(AB_+)^q \cdot (e^{a} ch\,b)^{-pq} =$$
$$= \overline{Sp}\left[(1 + i\xi \gamma_1 \bar\gamma_1) \ldots (1 + i\xi \gamma_p \bar\gamma_p)(1 + i\eta \bar\gamma_1 \gamma_2) \ldots (1 + i\eta \bar\gamma_p \gamma_1)\right]^q =$$
$$= \overline{Sp}\left[(\bar\gamma_1 + i\xi \gamma_1)(\bar\gamma_2 + i\xi \gamma_2) \cdots (\bar\gamma_p + i\xi \gamma_p) \cdot\right.$$
$$\left.\cdot (\bar\gamma_1 + i\eta \gamma_2)(\bar\gamma_2 + i\eta \gamma_3) \cdots (\bar\gamma_p + i\eta \gamma_1)\right]^q \cdot (-1)^{\frac{(p-1)pq}{2}}\,. \tag{34}$$

Чтобы применить формулы (I6) и (I7), выпишем матрицу C, соответствующую следу (34):

$$C = \begin{Vmatrix} K & S & S & \dots & S \\ -S & K & S & \dots & S \\ -S & -S & K & \dots & S \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -S & -S & -S & & K \end{Vmatrix} .$$

Эта матрица содержит q^2 блоков, каждый из которых имеет порядок $2p$:

$$K = \left\Vert \begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & -\xi\eta \\ & 0 & & & -\xi\eta & 1 & & \\ & & & & & -\xi\eta & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & -\xi\eta & 1 \\ \hline -1 & \xi\eta & & & & & & \\ & -1 & \xi\eta & & & 0 & & \\ & & -1 & \ddots & & & & \\ & & & \ddots\ \xi\eta & & & & \\ \xi\eta & & & -1 & & & & \end{array} \right\Vert , \quad S = \left\Vert \begin{array}{cccc|cccc} 1-\xi^2 & & & & 1 & & & -\xi\eta \\ & 1-\xi^2 & & & -\xi\eta & 1 & & \\ & & \ddots & & & -\xi\eta & \ddots & \\ & & & 1-\xi^2 & & & -\xi\eta & 1 \\ \hline 1 & -\xi\eta & & & 1-\eta^2 & & & \\ & 1 & -\xi\eta & & & 1-\eta^2 & & \\ & & \ddots & -\xi\eta & & & \ddots & \\ -\xi\eta & & & 1 & & & & 1-\eta^2 \end{array} \right\Vert .$$

Как нетрудно заметить, матрица C представляет собой частный случай блочной матрицы вида C_- (см. приложение П.2), а блоки порядка p в матрицах K и S являются частными случаями циркулянта C_+. Применяя формулы (П.3) приложения, получаем, что

$$\operatorname{Det} C = \prod_{e=0}^{q-1} \prod_{k=0}^{p-1} D(k,e) ,$$

$$D(k,e) = \operatorname{Det} \begin{Vmatrix} (1-\xi^2)\tau_e & (1-\xi\eta\bar{\alpha}_k)(\tau_e+1) \\ (1-\xi\eta\alpha_k)(\tau_e-1) & (1-\eta^2)\tau_e \end{Vmatrix} ,$$

$$\alpha_k = e^{\frac{2\pi i}{p}k} , \ \bar{\alpha}_k = e^{-\frac{2\pi i}{p}k} , \ \beta_e = e^{\frac{\pi i}{q}(2e+1)} , \ \tau_e = \frac{1+\beta_e}{1-\beta_e} .$$

После элементарных вычислений имеем

$$\operatorname{Det} C = 2^{p(q-2)} \times$$
$$\times \prod_{k,e} \left[(1+\xi^2)(1+\eta^2) - 4\xi\eta\cos\frac{2\pi k}{p} - (1-\xi^2)(1-\eta^2)\cos\frac{\pi}{q}(2e+1) \right] . \quad (35)$$

Отметим, что выражение в квадратных скобках положительно, но может стремиться к нулю при $q \to \infty$ и $\xi = \eta$. Согласно равенству (I7), нужно извлечь квадратный корень из определителя. Как видно из (34), если положить $\xi = \eta = 0$, при этом следует взять положительное значение корня. Вспоминая выражение для ξ и η (см. (33)), получаем

$$Sp(AB_+)^q = 2^{pq} \prod_{k,e} \left[ch2a\, ch2b - sh2a \cos\frac{\pi}{q}(2e+1) - sh2b\cos\frac{2\pi k}{p} \right]^{1/2} . \quad (36)$$

След $(AB_-)^q$ вычисляется аналогично, а результат отличается от (36) лишь заменой $\cos\frac{2\pi k}{p}$ на $\cos\frac{\pi}{p}(2k+1)$.

Немного сложнее получить выражение для $Sp[(AB_+)^q U]$. В этом случае нужно вычислить определитель матрицы $\tilde{C}$:

$$\tilde{C} = \left\Vert \begin{array}{cccc|c} K & S & \dots & S & R \\ -S & K & & S & R \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ -S & -S & \dots & K & R \\ \hline -R^T & -R^T & \dots & -R^T & 0 \end{array} \right\Vert , \quad R = \left\Vert \begin{array}{cccc|cccc} i\xi & & & & 1 & & & \\ & i\xi & & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & i\xi & & & & 1 \\ \hline 0 & i\eta & & & 1 & & & \\ & 0 & i\eta & & & 1 & & \\ & & \ddots & i\eta & & & \ddots & \\ i\eta & & & 0 & & & & 1 \end{array} \right\Vert .$$

Блоки K и S здесь имеют прежний вид. Элементарные преобразования дают:

$$\operatorname{Det}\tilde{C} = \operatorname{Det}\begin{Vmatrix} K+S & S-K & & \\ & K+S & S-K & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & K+S & S-K \\ -2S & -2S & \cdots -2S & -2S \end{Vmatrix}\cdot\frac{\operatorname{Det}R\cdot\operatorname{Det}R^T}{2^{2p}\cdot\operatorname{Det}S}.$$

Оказывается, что $(\operatorname{Det}R)^2 = \operatorname{Det}S$. Первый сомножитель сводится к циркулянту, если к последней строке прибавить все остальные. После этого простые выкладки приводят к выражению, которое отличается от (36) лишь заменой $\cos\frac{\pi}{q}(2\ell+1)$ на $\cos\frac{2\pi\ell}{q}$. Чтобы получить результат для $Sp[(AB_-)^q U]$, нужно в (36) заменить $\cos\frac{2\pi k}{p}$ на $\cos\frac{\pi}{p}(2k+1)$ и $\cos\frac{\pi}{q}(2\ell+1)$ на $\cos\frac{2\pi\ell}{q}$.

Знак корня в последних двух случаях удобно определять из сравнения результата с исходным выражением для следа при $\xi\to 1$, $\eta\to 0$, что соответствует температуре $T\to\infty$. Этот знак может измениться, если выражение для следа обращается в нуль при некоторых значениях параметров. Как нетрудно показать,

$$\omega(\varphi,\psi) = ch2a\,ch2b - sh2a\cos\varphi - sh2b\cos\psi \geq \omega_{min},$$
$$\omega_{min} = e^{2a}ch^2 b\,(\xi-\eta)^2.$$

Из этого неравенства видно, что в нуль может обратиться лишь след, содержащий $\cos\frac{2\pi k}{p}$ и $\cos\frac{2\pi\ell}{q}$, причем множитель с $\ell=k=0$ пропорционален $\xi-\eta$. Отсюда вытекает, что этот след меняет знак при $\xi=\eta$. Это условие определяет некоторое значение температуры $T=T_c$, при которой, как оказывается, появляется спонтанная намагниченность (если двигаться со стороны высоких температур).

Теперь мы можем выписать точное выражение для статистической суммы решетки Изинга с периодическими граничными условиями:

$$Q = 2^{N-1}\Big\{\prod_{k,\ell}\Big[ch2a\,ch2b - sh2a\cos\frac{\pi}{q}(2\ell+1) - sh2b\cos\frac{\pi}{p}(2k+1)\Big]^{1/2} +$$
$$+\prod_{k,\ell}\Big[ch2a\,ch2b - sh2a\cos\frac{\pi}{q}(2\ell+1) - sh2b\cos\frac{2\pi k}{p}\Big]^{1/2} +$$
$$+\prod_{k,\ell}\Big[ch2a\,ch2b - sh2a\cos\frac{2\pi\ell}{q} - sh2b\cos\frac{\pi}{p}(2k+1)\Big]^{1/2} -$$
$$-\sigma\prod_{k,\ell}\Big[ch2a\,ch2b - sh2a\cos\frac{2\pi\ell}{q} - sh2b\cos\frac{2\pi k}{p}\Big]^{1/2}\Big\}. \quad (37)$$

Здесь σ означает знак $T-T_c$, $N=pq$. Полученная формула дает решение задачи для конечной решетки. Хотя результат (37) прост, некоторые вычисления были сравнительно громоздкими. Это связано с тем, что в изложенном подходе строки и столбцы решетки рассматривались несимметричным образом. Этот недостаток искупается, на наш взгляд, последовательным и чисто алгебраическим характером вывода.

Имея выражение (37),уже нетрудно перейти к термодинамическому пределу и получить классический результат Онсагера:

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}\frac{\ln Q}{N} = \ln 2 +$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} d\varphi\, d\psi\,\ln\big[ch2a\,ch2b - sh2a\cos\varphi - sh2b\cos\psi\big]. \quad (38)$$

К этому равенству мы приходим, записывая каждое произведение в (37) в виде экспоненты и переходя затем в показателе экспоненты от суммы к интералу:

$$\sum_{k,l} \ln w(\varphi_k,\psi_l)\Delta\varphi\Delta\psi = \iint \ln w(\varphi,\psi)\,d\varphi\,d\psi + \delta_N \qquad (p=q).$$

Здесь $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{p}$, $\Delta\psi = \frac{2\pi}{p}$; φ_m, ψ_m равны $\frac{2\pi m}{p}$ или $\frac{\pi}{p}(2m+1)$. Величину δ_N легко оценить, используя теорему о среднем и вид функции w:

$$\delta_N < \frac{Const}{\sqrt{N}} \cdot \frac{\sqrt{(sh 2a)^2 + (sh 2b)^2}}{w_{min}}.$$

Этой оценки достаточно для обоснования предельного перехода при любой температуре $T \neq T_c$. Свободная энергия, которая пропорциональна выражению (38), неаналитична в точке $T=T_c$. Можно показать (см. /2/), что вблизи этой точки свободная энергия имеет вид

$$f_1 - f_2(T-T_c)^2 \ln(T-T_c)^2, \quad f_2 > 0,$$

откуда следует, что теплоемкость пропорциональна $\ln|T-T_c|$, т.е. стремится к бесконечности при $T \to T_c$.

Для трехмерной решетки не существует подобных результатов, хотя многое уже известно из численных расчетов. Представляется вероятным, что если какие-либо точные результаты в трехмерном случае будут получены, то это будет сделано с помощью алгебры Клиффорда, естественность применения которой к задаче Изинга-Онсагера мы и старались показать.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.I. Прямое доказательство равенства $Det\, C = (Pf\, C)^2$

Пусть $C = \|c_{ij}\|$, $c_{ij} = -c_{ji}$, $i,j = 1,2,\ldots 2m$.

Произвольный член в разложении $Det\, C$

$$sign\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 2m \\ k_1 & k_2 & & k_{2m} \end{pmatrix} c_{1k_1} c_{2k_2} \ldots c_{2m\,k_{2m}}$$

запишем в виде произведения циклов

$$\prod sign\begin{pmatrix} j_1 j_2 \ldots j_l \\ j_2 j_3 \ldots j_1 \end{pmatrix} c_{j_1 j_2} c_{j_2 j_3} \ldots c_{j_l j_1}, \quad sign\begin{pmatrix} j_1 j_2 \ldots j_l \\ j_2 j_3 \ldots j_1 \end{pmatrix} = (-1)^{l-1}.$$

Такое представление однозначно, если запись каждого цикла начинать с наименьшего индекса в цикле, а циклы располагать в порядке возрастания первых индексов.

Сначала заметим, что в разложении определителя кососимметрической матрицы нужно учитывать только те члены, которые разлагаются в произведения циклов лишь четной длины l. Действительно, члены, содержащие циклы нечетной длины, в сумме дают нуль, ибо наряду с циклом ($j_1 j_2 \ldots j_{l-1} j_l$) всегда есть цикл $(j_l j_{l-1} \ldots j_2 j_1) = (j_1 j_l j_{l-1} \ldots j_2)$, а сомножитель, соответствующий последнему циклу, равен

$$c_{j_1 j_l} c_{j_l j_{l-1}} \ldots c_{j_2 j_1} = (-1)^l c_{j_1 j_2} c_{j_2 j_3} \ldots c_{j_{l-1} j_l} c_{j_l j_1}.$$

Далее, каждый цикл четной длины $l = 2r$ можно представить следующим образом

$$sign\begin{pmatrix} j_1 j_2 \ldots j_{2r} \\ j_2 j_3 \ldots j_1 \end{pmatrix} c_{j_1 j_2} c_{j_2 j_3} \ldots c_{j_{2r} j_1} =$$

$$= sign\begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2r} \\ j_1 j_2 \ldots j_{2r} \end{pmatrix} sign\begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2r} \\ j_2 j_3 \ldots j_1 \end{pmatrix} c_{j_1 j_2} c_{j_3 j_4} \ldots c_{j_{2r-1} j_{2r}} \times$$

$$\times c_{j_2 j_3} c_{j_4 j_5} \ldots c_{j_{2r} j_1},$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{2r}$ - это набор индексов $j_1, j_2, \dots j_{2r}$, записанных в естественном порядке: $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{2r}$. Произведение матричных элементов записано в виде произведения двух множителей так, что в каждом из них любой индекс набора появляется один и только один раз. Используя свойства

$$sign\left(\dots ij \dots\right) c_{ij} = sign\left(\dots ji \dots\right) c_{ji} ,$$

$$sign\left(\dots ij \dots ke \dots\right) = sign\left(\dots ke \dots ij \dots\right) ,$$

можно записать произведения c_{ij} так, чтобы было $i<j$ и чтобы первые индексы следовали в естественном порядке. Окончательно получаем, что любой член разложения $Det\, C$, который представляется в виде произведения циклов четной длины, записывается в виде

$$sign\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2m \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} c_{i_1 j_1} c_{i_2 j_2} \dots c_{i_m j_m} \times$$

$$\times\, sign\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2m \\ i_1' & j_1' & i_2' & j_2' & \dots & j_m' \end{pmatrix} c_{i_1' j_1'} c_{i_2' j_2'} \dots c_{i_m' j_m'} , \qquad (\text{П.I})$$

где

$$i_\beta < j_\beta \,, \quad i_\beta' < j_\beta' \,, \quad \beta = 1, 2, \dots m \,,$$

$$i_1 < i_2 < \dots < i_m \,, \quad i_1' < i_2' < \dots < i_m' \,.$$

И наоборот, каждый член разложения $(Pf\, C)^2$ равен одному из членов разложения $Det\, C$. Это нетрудно показать, записывая выражение (П.I) в виде произведения циклов четной длины, т.е. проводя преобразования в обратном порядке. Из взаимной однозначности соответствия и следует доказываемое равенство. Ясно, что $Pf\, C$ можно определить как то значение квадратного корня из определителя, в которое член $c_{12} c_{34} \dots c_{2m-1\, 2m}$

входит с плюсом.

Отметим, что из приведенного доказательства следует также, что полное число перестановок $2m$ элементов, которые разлагаются в произведения циклов только четной длины, есть $[(2m-1)!!]^2$.

П.2. Циркулянты

В задачах, связанных с решетками, при циклических граничных условиях характерно появление матриц вида

$$C_\pm = \begin{Vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ \pm c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ \pm c_{n-2} & \pm c_{n-1} & c_0 & c_1 \dots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm c_1 & \pm c_2 & \pm c_3 & \dots & c_0 \end{Vmatrix} . \qquad (\text{П.2})$$

Матрица C_+ (циркулянт) давно известна (см.,например, /27 /). Собственные значения $\lambda_\pm$ и собственные векторы этих матриц легко найти, если заметить, что $C_\pm = \sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell \omega_\pm^\ell$, где

$$\omega_\pm = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ \pm 1 & & & & 0 \end{Vmatrix} .$$

Имеем

$$(\lambda_+)_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} C_\ell \alpha_k^\ell \quad , \quad (\lambda_-)_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} C_\ell \beta_k^\ell \quad ,$$

$$\alpha_k = e^{\frac{2\pi i}{n}k} \,,\; \beta_k = e^{\frac{\pi i}{n}(2k+1)} \,,\; k=0,1,2..n-1. \quad (\text{П}.3)$$

Если элементами матриц $C_\pm$ являются не числа, а матрицы, то выражения (П.3) определяют диагональные блоки эквивалентных квазидиагональных матриц.

Стоит отметить, что совокупность невырожденных матриц вида C_+ (C_-) образует коммутативную группу.

ЛИТЕРАТУРА

1. К.Хуанг. Статистическая механика. Изд-во "Мир", 1966.
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика, ч.I. Изд-во "Наука", М., 1976.
3. Д.Маттис. Теория магнетизма. Изд-во "Мир", М., 1967.
4. H.S.Green, C.A.Hurst. Order-Disorder Phenomena, Interscience Publishers, 1964.
5. Г.Стенли. Фазовые переходы и критические явления. Изд-во "Мир", М., 1973.
6. T.Schultz, D.Mattis, E.Lieb. Rev.Mod.Phys., 36, 856 (1964).
7. Ф.Дайсон, Э.Монтролл, М.Кац, М.Фишер. Устойчивость и фазовые переходы. Изд-во "Мир", 1973.
8. L.Onsager. Phys.Rev., 65, 117 (1944).
9. К.Вильсон. Дж.Когут. Ренормализационная группа и ε-разложение. Изд-во "Мир", М., 1976.

10. Квантовая теория поля и физика фазовых переходов. Сб.статей. Изд-во "Мир", М., 1975.
11. B.Kaufmann. Phys.Rev., 76, 1232 (1949).
12. Б.Н.Валуев. Сообщения ОИЯИ, Р17-9762, Дубна, 1976.
13. Г.Е.Шилов. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. Изд-во "Наука", М., 1969.
14. Н.Г.Чеботарев. Введение в теорию алгебр. Гостехиздат, 1949.
15. R.E.Caianiello. Nuovo Cim.Suppl., 14, 177 (1959).
16. W.Clifford. Am.Journ.of Math. 1, 350 (1878).
17. P.Pauli. Ann.Inst.Poincare, 6, 109 (1936). В.Паули. Труды по квантовой теории. Статьи 1928-1959. Изд-во "Наука", М., 1977.
18. R.Brauer, H.Weyl. Am.Journ.of Math. 57, 425 (1935).
19. Г.Вейль. Классические группы. ИЛ, М., 1947.
20. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. Изд-во "Наука", М., 1967.
21. Ф.А.Березин. УМН 24, вып.3, 3 (1969).
22. В.Н.Попов. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. Атомиздат, М., 1976.
23. Ф.А.Березин. Метод вторичного квантования. "Наука", М.,1965.
24. В.И.Огиевецкий, Л.Мезинческу. УФН, 117, вып.4, 637 (1975).
25. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1976.
26. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, М., 1963.
27. Э.Чезаро. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Часть первая, ОНТИ, 1936.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Рукопись поступила в издательский отдел
I7 октября I977 года.