ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

Р.Н.Фаустов

Связанная система двух частиц в квантовой электродинамике

ДУБНА

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

8246

Р.Н.Фаустов

СВЯЗАННАЯ СИСТЕМА ДВУХ ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ. ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ

Дубна 1974

Предисловие Редакционного совета

В последние годы Советом молодых ученых и специалистов Объединенного института ядерных исследований, наряду с проведением традиционных школ по физике, были организованы специальные циклы лекций для молодых сотрудников Института. Тематика этих лекций охватывает широкий круг различных проблем физики элементарных частиц и атомного ядра, разрабатываемых в ОИЯИ. К чтению лекционных курсов были привлечены ведущие специалисты Института, а также крупные ученые научных центров Советского Союза и других стран - участниц ОИЯИ.

Учитывая большой интерес молодых ученых к этому лекторию, дирекция ОИЯИ сочла возможным учредить специальную серию брошюр "Лекции для молодых ученых". В этой серии будут публиковаться лучшие лекционные курсы, прочитанные в аудиториях Института.

Изданием тезисов лекций, прочитанных доктором физико-математических наук Р.Н.Фаустовым в феврале-марте 1973 года для молодых теоретиков Объединенного института ядерных исследований, начинается выпуск данной серии брошюр.

Редакционный совет с благодарностью примет замечания и предложения, которые позволят усовершенствовать работу над выпуском брошюр серии "Лекции для молодых ученых".

1. Введение

Лэмбовский сдвиг уровней энергии водородоподобного атома является одним из важнейших радиационных эффектов [1,2], подтверждающих с большой точностью справедливость квантовой электродинамики. Как хорошо известно [2,3], при вычислении величины этого эффекта приходится одновременно устранять как ультрафиолетовые, так и инфракрасные расходимости. Это приводит к тому, что на практике обычно используется "смешанное" рассмотрение этой проблемы: нерелятивистское в области малых частот фотонов и релятивистское - в области больших. Как правило, в указанных областях применяются существенно разные методы описания водородоподобного атома, вследствие чего возникает известная проблема [2,3] "сшивания" полученных результатов. Отмеченную трудность можно избежать, если с самого начала использовать релятивистское уравнение Дирака во внешнем поле ядра с учетом радиационных поправок [1,2,4]. При этом, однако, полностью отсутствуют эффекты, связанные с движением /конечностью массы/ ядра. Была предпринята попытка [5] найти выход из этого положения с помощью модифицированного уравнения Дирака, учитывающего движение ядра в нерелятивистском приближении. Тем не менее, как отмечают сами авторы работы [5], в предложенной ими схеме, названной " моделью эффективного потенциала", не сформулирована последовательная процедура построения оператора потенциала и нарушена симметрия в описании обеих частиц.

Указанная выше проблема была впервые решена [6] на основе ковариантного уравнения Бете-Солпитера. Здесь, однако, возникают свои хорошо известные трудности, связанные с четырехмерным характером волновой функции. В этом отношении большими преимуществами обладает квазипотенциальный метод Логунова и Тавхелидзе /7/, позволяющий совмещать простоту и наглядность трехмерного описания нерелятивистской квантовой механики /уравнение Шредингера/ с ковариантным аппаратом квантовой теории поля. Квазипотенциальное уравнение было с успехом применено для вычисления тонкой и сверхтонкой структур водородоподобных атомов /8/.

Недавно удалось развить /9/ весьма общий метод суммирования вклада мягких /инфракрасных/ фотонов, основанный на новом уравнении типа Дайсона для двухчастичной функции Грина. Здесь мы применим этот формализм для вычисления лэмбовского сдвига низшего порядка $\alpha(Z\alpha)^4$ для произвольных масс частиц в рамках квазипотенциального подхода.

2. Квазипотенциальное уравнение в произвольной системе отсчета

В дальнейшем мы будем рассматривать связанную систему двух различных частиц со спином 1/2 и массами m_1 и m_2. Четырехимпульсы частиц в начальном состоянии обозначим через q_1 и q_2, а в конечном - через p_1 и p_2. Тогда, как показано в работе /10/, квазипотенциальное уравнение в произвольной системе отсчета имеет вид:

$$(E-\sqrt{\vec{p}_1^{\,2}+m_1^2}-\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m_2^2})\Psi_{\mathcal{P}}(\vec{p})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q\, V(\vec{p},\vec{q};\mathcal{P})\Psi_{\mathcal{P}}(\vec{q}), \qquad /2.1/$$

где полный четырехимпульс системы

$$\mathcal{P}=\{E,\vec{\mathcal{P}}\}=p_1+p_2, \quad E=\sqrt{\vec{\mathcal{P}}^{\,2}+M^2}, \qquad /2.2/$$

M - масса связанной системы. Относительный четырехимпульс системы двух частиц удобно ввести следующим образом:

$$p_1=\eta_1\mathcal{P}+p; \qquad \eta_1=\frac{M^2+m_1^2-m_2^2}{2M^2}$$

$$p_2=\eta_2\mathcal{P}-p; \qquad \eta_2=\frac{M^2+m_2^2-m_1^2}{2M^2} \qquad /2.3/$$

$$p=\eta_2p_1-\eta_1p_2; \qquad \eta_1+\eta_2=1.$$

$$(\mathcal{P}\cdot p)=Ep^\circ-\vec{\mathcal{P}}\cdot\vec{p}=\frac{1}{2}[(p_1^2-m_1^2)-(p_2^2-m_2^2)].$$

Такой выбор удобен тем, что на массовой поверхности

$$p_1^2=m_1^2, \quad p_2^2=m_2^2, \quad (\mathcal{P}\cdot p)\equiv 0$$

импульс p, определенный равенствами /2.3/, совпадает с известным четырехвектором относительного импульса, введенным Гордингом и Вайтманом. В случае слабо связанной системы, когда

$$M=m_1+m_2+W, \quad |W|\ll m_1+m_2, \qquad /2.4/$$

нетрудно видеть, что

$$\eta_{1,2}\cong\frac{m_{1,2}}{m_1+m_2}, \qquad /2.5/$$

и мы приходим к обычному нерелятивистскому определению относительного импульса.

Волновая функция Ψ спроектирована на подпространство положительных частот и имеет двухкомпонентные спинорные индексы /8,10/. Оператор квазипотенциала V удобно определить в терминах амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности:

$$V=T(1+\overline{G}_0^{(+)}T)^{-1}=T-T\overline{G}_0^{(+)}T+\dots, \qquad /2.6/$$

где

$$\overline{G}_0^{(+)}(\vec{p},\vec{q};\mathcal{P}) = \frac{(2\pi)^3\,\delta(\vec{p}-\vec{q})}{E-\sqrt{\vec{p}_1^{\,2}+\vec{m}_1^{\,2}}-\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+\vec{m}_2^{\,2}}}, \qquad /2.7/$$

а умножение понимается в операторном смысле как интегрирование по пространству относительных трех-импульсов. Амплитуда рассеяния

$$T = [\overline{G}_0^{(+)}]^{-1}\,\Delta\overline{G}^{(+)}[\overline{G}_0^{(+)}]^{-1},$$

$$\Delta\overline{G}^{(+)} \equiv \overline{G}^{(+)} - \overline{G}_0^{(+)} \qquad /2.8/$$

выражается через фурье-образ двухвременной функции Грина в импульсном пространстве

$$\overline{G}(\vec{p},\vec{q};\mathcal{P}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp^\circ\, dq^\circ\, G(p,q;\mathcal{P}), \qquad /2.9/$$

спроектированной на положительно частотные состояния:

$$\overline{G}^{(+)}(\vec{p},\vec{q};\mathcal{P}) = \overset{*}{u}_1(p_1)\overset{*}{u}_2(p_2)\overline{G}(\vec{p},\vec{q};\mathcal{P})\gamma_1^\circ\gamma_2^\circ u_1(q_1)u_2(q_2). \qquad /2.10/$$

Дираковские спиноры $u_{1,2}$ нормированы условием $\overset{*}{u}u = 1$. Импульсы частиц в системе центра масс обозначены на *рис. 1.*

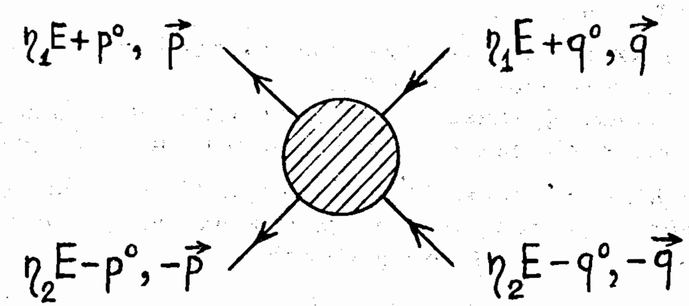

Рис. 1.

Двухчастичная функция Грина G удовлетворяет уравнению Бете-Солпитера /операторное умножение означает интегрирование по пространству относительных четырех-импульсов/:

$$G = G_0 + G_0KG = G_0 + GKG_0 =$$

$$= G_0 + G_0KG_0 + G_0KGKG_0\,,$$

где /2.11/

$$G_0(p,q;\mathcal{P}) = i(2\pi)^4\delta^4(p-q)S_1(p_1)S_2(p_2),$$

$$S_{1,2}^{-1}(p) = p\cdot\gamma_{1,2} - m_{1,2}\,,$$

$m_{1,2}$ - физическая /наблюдаемая/ масса частицы. Ядро K определено как бесконечная сумма неприводимых в смысле двухчастичных сечений диаграмм Фейнмана. Однако в рассматриваемой задаче обычная теория возмущений неприменима для построения ядра K. Указанная трудность возникает из-за необходимости учитывать эффекты "связанности" /взаимодействия/ в промежуточных состояниях системы двух частиц. Это обстоятельство тесно связано с наличием инфракрасных расходимостей в элементах матрицы рассеяния на массовой поверхности, которые используются для построения квазипотенциала в так называемом "приближении рассеяния". Необходимо поэтому произвести выборочное суммирование бесконечных последовательностей диаграмм, входящих в ядро K, что проще всего осуществить с помощью подходящего уравнения. В работе /9/ было показано, что ядро K подчиняется уравнению типа Дайсона /В.12/ /см. *Приложение В*/. Используя это уравнение в нужном приближении /*рис. 9* и *11а*/, мы получим для интересующей нас величины ΔG следующее представление:

$$\Delta G = G - G_0 \cong G_0[K_\gamma + K_G]G_0\,, \qquad /2.12/$$

где

$$K_\gamma(p,q)=e_1 e_2 \gamma_{1\mu} D^{\mu\nu}(p-q)\gamma_{2\nu}\ ;\ D^{\mu\nu}(k)=\frac{d(k^2)}{k^2}\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right), \qquad /2.13/$$

$$S_2(p_2)K_G(p,q;\mathcal{P})S_2(q_2)=$$

$$=\frac{ie_1^2}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2}\gamma_{1\mu}[G(p-\eta_2 k, q-\eta_2 k;\mathcal{P}-k)- \qquad /2.14/$$

$$-S_1(p_1-k)\big|_{p_1^2=m_1^2} S_2(p_2)(2\pi)^4\delta^4(p-q)]\gamma_1^\mu,\ e_1=-e,\ e_2=Ze.$$

Эти выражения изображены в виде диаграмм на *рис. 2.*

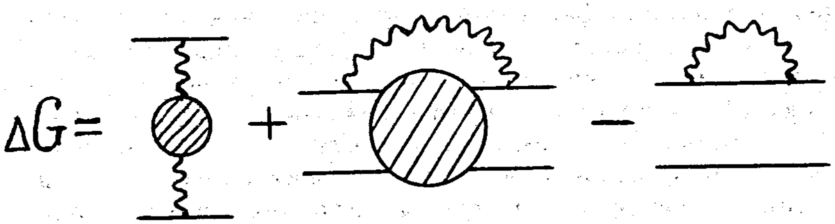

Рис. 2

В соответствии с представлением /2.12/ и на основании определений /2.6/, /2.8/ квазипотенциал

$$V \cong T = V_\gamma + V_G, \qquad /2.15/$$

где

$$V_{\gamma,G}=[\overline{G}_0^{(+)}]^{-1}[\overline{G_0 K_{\gamma,G} G_0}]^{(+)}[\overline{G}_0^{(+)}]^{-1}. \qquad /2.15a/$$

Поскольку ядро K включает диаграмму однофотонного обмена */рис. 2/*, удобно в явном виде выделить кулоновский потенциал:

$$V = V_c + \Delta V\ ,\quad V_c(\vec k) = -\frac{Ze^2}{\vec k^2}. \qquad /2.16/$$

Уравнение /2.1/ в нерелятивистском пределе, очевидно, переходит в обычное уравнение Шредингера:

$$\left(W-\frac{p^2}{2\mu}\right)\Psi(\vec p)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q\, V(\vec p,\vec q;W)\,\Psi(\vec q), \qquad /2.17/$$

где

$$W = M - m_1 - m_2;\quad \mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}.$$

В случае кулоновского потенциала мы получаем /3,10/ в качестве решения уравнения /2.17/ хорошо известные боровские уровни энергии

$$W_{cn}=-\frac{(Z\alpha)^2\mu}{2n^2},\quad \alpha=\frac{e^2}{4\pi},\quad n=1,2,\ldots \qquad /2.18/$$

и кулоновские волновые функции Ψ_{cn}, которые примем за исходное приближение. В дальнейшем нам понадобится значение следующей величины:

$$\left|\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\Psi_{cn}(\vec p)\right|^2=|\tilde\Psi_{cn}(\vec r=0)|^2=\frac{(\mu Z\alpha)^3}{\pi n^3}\delta_{\ell 0}, \qquad /2.18a/$$

где ℓ - орбитальное квантовое число. Сдвиг уровней энергии определяется обычной формулой теории возмущений

$$\Delta E_n = \langle n|\Delta V|n\rangle = \qquad /2.19/$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^6}\int d^3p\, d^3q\, \Psi^*_{cn}(\vec p)\,\Delta V(\vec p,\vec q;E)\,\Psi_{cn}(\vec q).$$

Перейдем теперь к построению квазипотенциала V в явном виде.

3. Построение оператора квазипотенциала

Функцию Грина G, которая входит в выражения /2.14/, /2.15/, мы можем найти только приближенно. Для этого заметим, что все эффекты "связанности" проявляются лишь при малых импульсах виртуального фотона. Параметр λ, ограничивающий эту низкочастотную область, следует выбрать таким, чтобы

$$(Z\alpha)^2 \mu \ll \lambda \ll \mu \; . \qquad /3.1/$$

На практике удобно взять $\lambda \sim Z\alpha\mu$. В соответствии с этим интеграл по импульсу виртуального фотона разобьем на две части

$$\int d^3k\, dk^\circ = \Big[\int\limits_{|\vec{k}|<\lambda} d^3k + \int\limits_{|\vec{k}|>\lambda} d^3k \Big] \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk^\circ \; . \qquad /3.2/$$

Поскольку главную роль в эффектах "связанности" играет кулоновское взаимодействие, то в низкочастотной области $|\vec{k}|<\lambda$ мы можем использовать кулоновскую функцию Грина нерелятивистского уравнения Шредингера /2.17/, модифицированную соответствующим образом. С этой целью рассмотрим уравнение /2.11/ с кулоновским ядром

$$K_c(p,q) = \frac{e_1 e_2 \gamma_{10}\gamma_{20}}{(\vec{p}-\vec{q})^2} \; . \qquad /3.3/$$

Поскольку ядро K_c не зависит от относительной энергии /мгновенное взаимодействие/, то с учетом определения /2.9/ уравнению /2.11/ можно придать вид

$$G_c = G_0 + G_0 K_c G_0 + G_0 K_c \tilde{G}_c K_c G_0 \qquad /3.4/$$

или

$$G_0^{-1} \Delta G_c G_0^{-1} = K_c + K_c \tilde{G}_c K_c \; , \qquad /3.5/$$

где

$$\Delta G_c \equiv G_c - G_0 \; .$$

В свою очередь, как следует из соотношения /3.4/, двухвременная функция Грина $\tilde{G}_c$ удовлетворяет уравнению:

$$\tilde{G}_c = \tilde{G}_0 + \tilde{G}_0 K_c \tilde{G}_0 + \tilde{G}_0 K_c \tilde{G}_c K_c \tilde{G}_0 \; . \qquad /3.6/$$

Домножая равенство /3.5/ слева и справа на величину $\tilde{G}_0$ и используя уравнение /3.6/, мы приходим к полезному соотношению:

$$\tilde{G}_0 G_0^{-1} \Delta G_c G_0^{-1} \tilde{G}_0 = \Delta\tilde{G}_c \; , \qquad /3.7/$$

где

$$\Delta\tilde{G}_c \equiv \tilde{G}_c - \tilde{G}_0 \; .$$

В рассматриваемой области импульсов виртуального фотона с нужной точностью достаточно использовать лишь положительно частотную проекцию функции Грина G. Применяя определение /2.10/ в обеих частях соотношения /3.7/, мы найдем:

$$\tilde{G}_0^{(+)} [G_0^{(+)}]^{-1} \Delta G_c^{(+)} [G_0^{(+)}]^{-1} \tilde{G}_0^{(+)} = \Delta\tilde{G}_c^{(+)}$$

или

$$\Delta G_c^{(+)} = G_0^{(+)} [\tilde{G}_0^{(+)}]^{-1} \Delta\tilde{G}_c^{(+)} [\tilde{G}_0^{(+)}]^{-1} G_0^{(+)} , \qquad /3.8/$$

где

$$G_0^{(+)}(p,q) = i(2\pi)^4 \delta^4(p-q) S_1^{(+)}(p_1) S_2^{(+)}(p_2) ,$$
$$S_{1,2}^{(+)}(p) = \left(p^\circ - \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_{1,2}^2}\right)^{-1} . \qquad /3.8a/$$

Теперь мы можем в принятом приближении отождествить двухвременную функцию Грина $G_c^{(+)}$ с нерелятивистской кулоновской функцией Грина

$$\overline{G}^{(+)}_c(\vec p,\vec q;\mathcal{P}) \simeq G^{NR}_c(\vec p,\vec q;W) = \sum_n \frac{\Psi_{cn}(\vec p)\,\overset{*}{\Psi}_{cn}(\vec q)}{W - W_n + i0}, \qquad /3.9/$$

где суммирование ведется как по дискретному, так и по непрерывному спектру энергии. Таким образом, соотношение /3.8/ принимает окончательную форму:

$$G^{(+)}_c - G^{(+)}_0 = G^{(+)}_0[\overline{G}^{(+)}_0]^{-1}[G^{NR}_c - \overline{G}^{(+)}_0][\overline{G}^{(+)}_0]^{-1}G^{(+)}_0. \qquad /3.10/$$

Положительно частотная часть кулоновской функции Грина дает следующий вклад в представление /2.14/ для ядра K_G:

$$S_2(p_2)K_G(p,q;\mathcal{P})S_2(q_2) =$$

$$= \frac{ie_1^2}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2}\gamma_{1\mu}\Lambda^{(+)}_1(\vec p_1-\vec k)\Lambda^{(+)}_2(p_2)[G_c(p-\eta_2k,q-\eta_2k;\mathcal{P}-k) -$$

$$-S_1(p_1-k)\Big|_{p_1^2=m_1^2}S_2(p_2)(2\pi)^4\delta^4(p-q)]\gamma_{10}\gamma_{20}\Lambda^{(+)}_1(\vec q_1-\vec k)\Lambda^{(+)}_2(\vec q_2)\gamma_{10}\gamma_{20}\gamma_1^\mu, \qquad /3.11/$$

где проекционный оператор

$$\Lambda^{(+)}_{1,2}(\vec p) = \sum_{\sigma=-1/2}^{1/2} u^\sigma_{1,2}(\vec p)\,\overset{*}{u}{}^\sigma_{1,2}(\vec p).$$

В результате мы приходим к искомому выражению для ядра K_G в области малых импульсов фотона:

$$S_2(p_2)K^<_G(p,q;\mathcal{P})S_2(q_2) = \qquad /3.12/$$

$$= \frac{ie_1^2}{(2\pi)^4}\int_{|\vec k|<\lambda}\frac{d^4k}{k^2}\gamma_{1\mu}\,u_1(\vec p_1-\vec k)u_2(\vec p_2)[G^{(+)}_c(p-\eta_2k,q-\eta_2k;\mathcal{P}-k) -$$

$$-S^{(+)}_1(p_1-k)\Big|_{p_1^2=m_1^2}S^{(+)}_2(p_2)(2\pi)^4\delta^4(p-q)]\,\bar u_1(\vec q_1-\vec k)\bar u_2(q_2)\gamma_1^\mu,$$

$$\bar u = \overset{*}{u}\gamma_0,$$

где функция Грина $G^{(+)}_c$ определена соотношением /3.10/.

Для того чтобы найти соответствующий низкочастотный вклад в квазипотенциал V, теперь остается подставить выражение /3.12/ в определение /2.15a/.

Произведя проекцию на положительно частотные состояния с помощью соотношения /2.10/ до интегрирования по относительным энергиям, мы получим соотношение:

$$\overline{G}^{(+)}_0 V^<_G \overline{G}^{(+)}_0 =$$

$$= \frac{e_1^2}{i(2\pi)^6}\int dp^\circ dq^\circ S^{(+)}_1(p_1)\int_{|\vec k|<\lambda}\frac{d^4k}{k^2}\bar u_1(\vec p_1)\gamma_{1\mu}u_1(\vec p_1-\vec k)\times \qquad /3.13/$$

$$\times[G^{(+)}_c(p-\eta_2k,q-\eta_2k;\mathcal{P}-k) - S^{(+)}_1(p_1-k)\Big|_{p_1^2=m_1^2}S^{(+)}_2(p_2)(2\pi)^4\delta^4(p-q)]\times$$

$$\times\bar u_1(\vec q_1-\vec k)\gamma_1^\mu u_1(\vec q_1)S^{(+)}_1(q_1).$$

Поскольку нерелятивистская кулоновская функция Грина G^{NR}_c не зависит от относительных энергий p° и q°, интегрирование по этим параметрам в равенстве /3.13/ можно легко выполнить с помощью теории вычетов. С учетом соотношения /3.10/ мы имеем, например, интеграл

$$\int\frac{dp^\circ}{(E_1+p^\circ-\epsilon_1(\vec p_1))(E_2-p^\circ-\epsilon_2(p_2))(E_1-k^\circ+p^\circ-\epsilon_1(\vec p_1-\vec k))} = \qquad /3.14/$$

$$= \frac{(-2\pi i)}{(E-\epsilon_1(\vec{p}_1)-\epsilon_2(\vec{p}_2))(E-k^\circ-\epsilon_1(\vec{p}_1-\vec{k})-\epsilon_2(\vec{p}_2))},$$

где

$$E_{1,2}=\eta_{1,2}E\ ,\quad \epsilon_{1,2}(\vec{p})=\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m_{1,2}^2-i0}$$

и аналогичный интеграл по dq°.

Таким образом, на основании соотношения /3.13/ мы приходим к следующему выражению для интересующей нас низкочастотной части квазипотенциала $V_G^<$ в системе центра масс /где $\vec{\mathcal{P}}=0$, $\vec{p}_1=\vec{p}$ /:

$$V_G^<(\vec{p},\vec{q};\mathcal{P})=$$

$$=\frac{e_1^2}{i(2\pi)^4}\int_{|\vec{k}|<\lambda}\frac{d^4k}{k^2}\bar{u}_1(\vec{p})\gamma_{1\mu}u_1(\vec{p}-\vec{k})[G_c^{NR}(\vec{p}-\eta_2\vec{k},\vec{q}-\eta_2\vec{k};\mathcal{P}-k)-$$

/3.15/

$$-\frac{i(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})}{\epsilon_1(\vec{p})-\epsilon_1(\vec{p}-\vec{k})-k^\circ+i0}]\bar{u}_1(\vec{q}-\vec{k})\gamma_1^\mu u_1(\vec{q}),$$

$$\mathcal{P}=\{M,\vec{0}\}.$$

Используя явное выражение /3.9/ для кулоновской функции Грина G_c^{NR}, мы сможем без труда проинтегрировать в равенстве /3.15/ по нулевой компоненте импульса фотона и в результате найдем:

$$V_G^<(\vec{p},\vec{q};W)= \qquad /3.16/$$

$$=-\frac{e_1^2}{(2\pi)^3}\int_{k<\lambda}\frac{d^3k}{2k}\bar{u}_1(\vec{p})\gamma_{1\mu}u_1(\vec{p}-\vec{k})\{\sum_n\frac{\Psi_{cn}(\vec{p}-\eta_2\vec{k})\Psi^*_{cn}(\vec{q}-\eta_2\vec{k})}{W-W_n-k+i0}-$$

$$-\frac{(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})}{\epsilon_1(\vec{p})-\epsilon_1(\vec{p}-\vec{k})-k+i0}\}\bar{u}_1(\vec{q}-\vec{k})\gamma_1^\mu u_1(\vec{q}),$$

$$k=|\vec{k}|\ .$$

При вычислении вклада высокочастотной области $|\vec{k}|>\lambda$ в представлении /2.14/ достаточно применить обычную теорию возмущений для входящей туда функции Грина:

$$\Delta G(p,q;\mathcal{P})=e_1e_2S_1(p_1)S_2(p_2)\gamma_{1\mu}D^{\mu\nu}(p-q)\gamma_{2\nu}S_1(q_1)S_2(q_2)+\dots$$

/3.17/

Тогда выражение /2.14/ для указанной части ядра K_G принимает следующий простой вид:

$$K_G^>(p,q;\mathcal{P})=$$

$$=\frac{ie_1^3e_2}{(2\pi)^4}\int_{|\vec{k}|>\lambda}\frac{d^4k}{k^2}\gamma_1^\kappa S_1(p_1-k)\gamma_{1\mu}S_1(q_1-k)\gamma_{1\kappa}D^{\mu\nu}(p-q)\gamma_{2\nu}=$$

/3.18/

$$=-e_1e_2\Gamma^{(2)}_{1\mu}(p_1,q_1)D^{\mu\nu}(p-q)\gamma_{2\nu},$$

где $\Gamma_\mu^{(2)}$ - обычная вершинная функция второго порядка, изображенная на *рис. 3*, в которой произведено инфракрасное обрезание по трехмерному импульсу фотона.

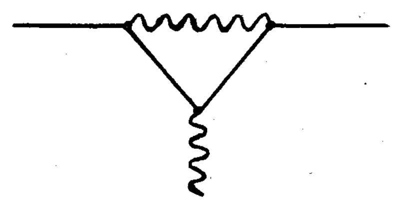

Рис. 3

В силу малости средних значений импульсов $(\langle \vec{p}^{\,2} \rangle_c = -2\mu W_c)$ и энергии связи W_c, частицы, составляющие водородоподобный атом, находятся вблизи массовой поверхности. Благодаря этому обстоятельству при вычислении высокочастотного вклада в квазипотенциал $V_G^>$ можно с достаточной точностью полностью пренебречь эффектами "связанности" и воспользоваться так называемым "приближением рассеяния", считая, что обе частицы лежат почти на массовой поверхности. С этой целью мы положим в ядре $K_G^>$ относительные энергии p° и q° равными нулю, но по-прежнему оставим

$$E \neq \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_2^2}\,, \quad \vec{p}^{\,2} \neq \vec{q}^{\,2}\,,$$

чем определим способ выхода за энергетическую поверхность. Более строгое обоснование такого метода построения квазипотенциала содержится в работах [7,8,11], где показана его эквивалентность методу двухвременных функций Грина при вычислении уровней энергии связанной системы. Следуя предложенной процедуре, с учетом определения /2.15а/, найдем искомую часть квазипотенциала:

$$V_G^>(\vec{p},\vec{q}) = \bar{u}_1(\vec{p})\bar{u}_2(-\vec{p})K_G^>(p,q)\Big|_{p^\circ=q^\circ=0} u_1(\vec{q})u_2(-\vec{q}) = \qquad /3.19/$$

$$= -e_1e_2\bar{u}_1(\vec{p})\Gamma^{(2)}_{1\mu}(p-q)u_1(\vec{q})D^{\mu\nu}(p-q)\bar{u}_2(-\vec{p})\gamma_{2\nu}u_2(-\vec{q}),$$

$$p-q = (0,\vec{p}-\vec{q})\,.$$

Описанный выше подход применим также и для получения однофотонной части квазипотенциала V_γ, соответствующей ядру /2.13/:

$$V_\gamma(\vec{p},\vec{q}) = \bar{u}_1(\vec{p})\bar{u}_2(-\vec{p})K_\gamma(p,q)\Big|_{p^\circ=q^\circ=0} u_1(\vec{q})u_2(-\vec{q}) = \qquad /3.20/$$

$$= -e_1e_2\bar{u}_1(\vec{p})\gamma_{1\mu}u_1(\vec{q})D^{\mu\nu}(p-q)\,\bar{u}_2(-\vec{p})\gamma_{2\nu}\,u_2(-\vec{q}).$$

Ввиду сходства частей квазипотенциала /3.19/ и /3.20/ естественно объединить их вместе:

$$V_\gamma^>(\vec{p},\vec{q}) = V_G^>(\vec{p},\vec{q}) + V_\gamma(\vec{p},\vec{q}) = \qquad /3.21/$$

$$= -e_1e_2\bar{u}(\vec{p})\Gamma_{1\mu}(p-q)u_1(\vec{q})D^{\mu\nu}(p-q)\bar{u}_2(-\vec{p})\gamma_{2\nu}u_2(-\vec{q}),$$

$$p-q = (0,\vec{p}-\vec{q})\,,$$

где

$$\Gamma_{1\mu}(k) = \gamma_{1\mu} + \Gamma^{(2)}_{1\mu}(k)\,,$$

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{d(k^2)}{k^2}\Big(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big).$$

Вершинная функция $\Gamma_{1\mu}$ имеет хорошо известную структуру:

$$\Gamma_{1\mu}(k) = \gamma_{1\mu}\rho_1(k^2) + \frac{i}{2m_1}\sigma_{1\mu\nu}k^\nu f_1(k^2)\,. \qquad /3.22/$$

Квазипотенциал $V_\gamma^>$ приводит, в частности, к обычному тонкому и сверхтонкому расщеплению кулоновских уровней энергии [8], которое мы не будем здесь рассматривать.

В интересующее нас радиационное смещение уровней энергии, снимающее вырождение уровней $S_{1/2}$ и $P_{1/2}$ /лэмбовский сдвиг/, дает вклад следующая часть квазипотенциала $V_\gamma^>$ /см. *Приложение А*/:

$$\Delta V^>_{\gamma\mathfrak{L}}(\vec{p},\vec{q}) = \frac{e_1e_2}{\vec{k}^2}\{[\rho_1(k^2) - \frac{\vec{k}^2}{4m_1^2}f_1(k^2)]d(k^2) - 1 +$$

$$+ i\frac{[\vec{p}\times\vec{q}]}{2m_1^2}\cdot\vec{\sigma}_1\Big(1 + \frac{m_1}{m_2}\Big)f_1(k^2)\}, \qquad /3.23/$$

$$\vec{k} = \vec{p}-\vec{q}\,, \quad k^2 = -\vec{k}^2\,.$$

Для формфакторов $\rho_1(k^2)$, $f_1(k^2)$ и функции $d(k^2)$ известны /1,2/ явные выражения, которые при малых передачах импульса имеют вид:

$$\rho_1(k^2) \cong 1 + k^2 \frac{d\rho(k^2)}{dk^2}\Big|_{k^2=0} = 1 + \frac{\alpha}{3\pi}\left(\ell n \frac{m_1}{2\lambda} + \frac{11}{24}\right)\frac{k^2}{m_1^2},$$

$$f_1(k^2) \cong f_1(0) = \kappa_1 = \frac{\alpha}{2\pi}, \qquad /3.24/$$

$$d(k^2) \cong 1 - \frac{\alpha}{15\pi}\,\frac{k^2}{m^2},$$

где λ - инфракрасное обрезание по трехимпульсу виртуального фотона. Часто при устранении инфракрасной расходимости вводится фиктивная малая масса фотона m_γ, связанная с импульсом обрезания λ соотношением /2,3/

$$\ell n \frac{2\lambda}{m_\gamma} = \frac{5}{6}. \qquad /3.25/$$

Таким образом, равенства /3.16/, /3.23/ и /3.24/ полностью определяют нужную нам часть квазипотенциала. Теперь мы легко можем вычислить соответствующую поправку к уровням энергии.

4. *Лэмбовский сдвиг уровней энергии*

Начнем с низкочастотного вклада в сдвиг уровней энергии. Подставляя выражение /3.16/ для части квазипотенциала $V_C^<$ в формулу /2.19/, мы получим поправку к уровням энергии:

$$\Delta E_n^< =$$

$$= -\frac{e_1^2}{(2\pi)^9}\int d^3p\, d^3q\, \overset{*}{\Psi}_{cn}(\vec p) \int_{k<\lambda} \frac{d^3k}{2k}\, \bar u_1(\vec p)\gamma_{1\mu} u_1(\vec p-\vec k)\times \qquad /4.1/$$

$$\times\Big\{\sum_{n'} \frac{\Psi_{cn'}(\vec p-\eta_2\vec k)\overset{*}{\Psi}_{cn'}(\vec q-\eta_2\vec k)}{W_{cn}-W_{cn'}-k+i0} - \frac{(2\pi)^3\delta^3(\vec p-\vec q)}{\epsilon_1(\vec p)-\epsilon_1(\vec p-\vec k)-k+i0}\Big\}\times$$

$$\times \bar u_1(\vec q-\vec k)\gamma_1^\mu u_1(\vec q)\Psi_{cn}(\vec q).$$

Хорошо известно /3,4/, что в случае кулоновских волновых функций справедливо соотношение:

$$\langle n|\vec p^{\,2}|n\rangle = -2\mu W_{cn} = \frac{(Z\alpha\mu)^2}{n^2}. \qquad /4.2/$$

С учетом условия $\lambda \sim Z\alpha\mu$ мы видим, что

$$k < \sqrt{\langle p^2\rangle}. \qquad /4.3/$$

Таким образом, с достаточной точностью можем положить

$$\bar u_1(\vec p)\gamma_{1\mu} u_1(\vec p-\vec k)\bar u_1(\vec q-\vec k)\gamma_1^\mu u_1(\vec q) \cong$$
$$\cong 1 - \frac{(\vec p\cdot\vec q)}{m_1^2}. \qquad /4.4/$$

Соответственно, выражение /4.1/ разбивается на две части. Первую часть, возникшую от единичного слагаемого в равенстве /4.4/, преобразуем, воспользовавшись тождествами:

$$\frac{1}{W_n-W_{n'}-k} \equiv -\frac{1}{k} + \frac{(W_n-W_{n'})^2}{k^2(W_n-W_{n'}-k)} - \frac{W_n-W_{n'}}{k^2},$$

$$\frac{1}{\epsilon_1(\vec p)-\epsilon_1(\vec p-\vec k)-k} \equiv -\frac{1}{k} + \frac{[\epsilon_1(\vec p)-\epsilon_1(\vec p-\vec k)]^2}{k^2[\epsilon_1(\vec p)-\epsilon_1(\vec p-\vec k)-k]} -$$

$$-\frac{\epsilon_1(p)-\epsilon_1(\vec p-\vec k)}{k^2}. \qquad /4.5/$$

С учетом уравнения /2.17/ для волновых функций нетрудно показать, что

$$(W_n - W_{n'}) \int d^3p \, \overset{*}{\Psi}_{cn}(\vec p)\, \Psi_{cn'}(\vec p - \eta_2 \vec k) \cong$$
$$\cong \int d^3p \, \overset{*}{\Psi}_{cn}(\vec p) \frac{(\vec p\cdot\vec k)}{m_1} \Psi_{cn'}(\vec p - \eta_2 \vec k). \qquad /4.6/$$

С такой же точностью можно положить

$$\epsilon_1(\vec p) - \epsilon_1(\vec p - \vec k) \cong \frac{(\vec p\cdot\vec k)}{m_1}. \qquad /4.7/$$

Кроме этого, нам потребуется условие полноты для кулоновских волновых функций

$$\sum_n \Psi_{cn}(\vec p)\, \overset{*}{\Psi}_{cn}(\vec q) = (2\pi)^3 \delta^3(\vec p - \vec q). \qquad /4.8/$$

Последние члены в тождествах /4.5/ вклада не дают вследствие условия полноты /4.8/ и поскольку

$$\int d^3k \,(\vec p\cdot\vec k) = 0$$

после интегрирования по угловым переменным. Вклады от первых слагаемых тождеств /4.5/, очевидно, взаимно уничтожаются, и в результате с учетом соотношений /4.6/, /4.7/ и /4.8/ мы приходим к следующему выражению для сдвига уровней энергии:

$$\Delta E_n^< \cong \frac{e_1^2}{(2\pi)^9} \int d^3p\, d^3q\, \overset{*}{\Psi}_{cn}(\vec p) \int_{k<\lambda} \frac{d^3k}{2k} \frac{1}{m_1^2} \Big[(\vec p\cdot\vec q) -$$
$$- \frac{(\vec p\cdot\vec k)(\vec q\cdot\vec k)}{k^2} \Big] \sum_{n'} \Psi_{cn'}(\vec p - \eta_2 \vec k)\, \overset{*}{\Psi}_{cn'}(\vec q - \eta_2 \vec k) \Big\{ \frac{1}{W_n - W_{n'} - k} -$$
$$- \frac{1}{\epsilon_1(\vec p) - \epsilon_1(\vec p - \vec k) - k} \Big\} \Psi_{cn}(\vec q). \qquad /4.9/$$

Поскольку мы уже выделили в явном виде "малый" множитель порядка $\langle p^2 \rangle$, то теперь можем, не уменьшая точности, пренебречь "запаздыванием", т.е. пренебречь везде импульсом k по сравнению с импульсом p в выражении /4.9/. Интегрируя по углам, мы получим

$$\int d^3k \Big[(\vec p\cdot\vec q) - \frac{(\vec p\cdot\vec k)(\vec q\cdot\vec k)}{k^2} \Big] = 4\pi \frac{2}{3} (\vec p\cdot\vec q) \int k^2 dk. \qquad /4.10/$$

Таким образом, выражение /4.9/ принимает довольно простой вид:

$$\Delta E_n^< \cong \frac{2\alpha}{3\pi m_1^2} \int_{k<\lambda} dk \sum_{n'} \frac{\langle n|\vec p|n'\rangle \langle n'|\vec q|n\rangle (W_n - W_{n'})}{W_n - W_{n'} - k + i0}, \qquad /4.11/$$

где

$$\langle n|\vec p|n'\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \, \overset{*}{\Psi}_{cn}(\vec p)\, \vec p\, \Psi_{cn'}(\vec p).$$

Интеграл по переменной k легко берется, и мы находим:

$$\mathrm{Re}\, \Delta E_n^< = \frac{2\alpha}{3\pi m_1^2} \sum_{n'} |\langle n'|\vec p|n\rangle|^2 (W_{n'} - W_n) \ln \frac{\lambda}{|W_n - W_{n'}|}, \qquad /4.12а/$$

$$\mathrm{Im}\, \Delta E_n = -\frac{2\alpha}{3m_1^2} \sum_{W_{n'}<W_n} |\langle n'|\vec p|n\rangle|^2 (W_n - W_{n'}). \qquad /4.12б/$$

Ясно, что действительная часть поправки $\Delta E^<$ представляет собой искомый вклад в радиационный сдвиг уровней энергии, а мнимая часть описывает естественную ширину линии и определяет, следовательно, вероятность распада возбужденного состояния атома

$$\Gamma_n = w_n = 2\mathrm{Im}\, \Delta E_n =$$
$$= \frac{4\alpha\mu^2}{3m_1^2} \sum_{W_{n'}<W_n} |\langle n'|\vec r|n\rangle|^2 (W_n - W_{n'})^3, \qquad /4.13/$$

где дипольный матричный элемент

$$\langle n'|\vec{r}|n\rangle = \int d^3r\, \overset{*}{\Psi}_{cn'}(\vec{r})\,\vec{r}\,\tilde{\Psi}_{cn}(\vec{r}).$$

При выводе выражения /4.13/ мы воспользовались известными операторными соотношениями:

$$(W_n - W_{n'})\langle n'|\vec{r}|n\rangle = \langle n'|[\vec{r},H]|n\rangle = \frac{i}{\mu}\langle n'|\vec{p}|n\rangle, \qquad /4.14/$$

где нерелятивистский гамильтониан

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + V_c\ , \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}.$$

Этот результат иллюстрирует общее утверждение квазипотенциального метода, согласно которому мнимая часть квазипотенциала характеризует неупругие процессы, происходящие в двухчастичной системе, например, распады нестабильных состояний.

Вернемся теперь к рассмотрению действительной части поправки $\Delta E^<$. Преобразуем выражение /4.12а/ так, чтобы отделить явно зависимость от параметра инфракрасного обрезания λ.

$$\mathrm{Re}\Delta E_n^< = \frac{2a}{3\pi m_1^2}\Big\{\ln\frac{(Za)^2\mu}{2\Delta W_n^{av}} + \delta_{\ell 0}\ln\frac{2\lambda}{(Za)^2\mu}\Big\}\sum_{n'}|\langle n'|\vec{p}|n,\ell=0\rangle|^2(W_{n'}-W_n), \qquad /4.15/$$

где, по определению,

$$\ln\frac{2\Delta W_n^{av}}{(Za)^2\mu}\sum_{n'}|\langle n'|\vec{p}|n,\ell=0\rangle|^2(W_{n'}-W_n) = \sum_{n'}|\langle n'|\vec{p}|n\rangle|^2(W_{n'}-W_n)\ln\frac{2|W_n-W_{n'}|}{(Za)^2\mu}.$$

Сумму, стоящую в правой части равенства /4.15/, легко вычислить, воспользовавшись операторным соотношением:

$$(W_{n'}-W_n)\langle n'|\vec{p}|n,\ \ell=0\rangle = \langle n'|[H,\vec{p}]|n,\ \ell=0\rangle = \langle n'|[V_c,\vec{p}]|n,\ \ell=0\rangle. \qquad /4.16/$$

Здесь, как и прежде,

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + V_c\ .$$

В результате, с учетом условия полноты /4.8/ имеем:

$$\sum_{n'}|\langle n'|\vec{p}|n,\ell=0\rangle|^2(W_{n'}-W_n) = \frac{1}{2}\sum_{n'}\{\langle n,\ell=0|\vec{p}|n'\rangle\langle n'|[V_c,\vec{p}]|n,\ell=0\rangle - \langle n,\ell=0|[V_c,\vec{p}]|n'\rangle\langle n'|\vec{p}|n,\ell=0\rangle\} = \frac{1}{2}\langle n,\ell=0|[\vec{p},[V_c,\vec{p}]]|n,\ell=0\rangle. \qquad /4.17/$$

Используя явный вид кулоновского потенциала и соотношение /2.18а/, окончательно получим:

$$\sum_{n'}|\langle n'|\vec{p}|n,\ell=0\rangle|^2(W_{n'}-W_n) = \frac{Ze^2}{2}\langle n,\ \ell=0|\delta^3(\vec{r})|n,\ell=0\rangle = 2(Za)^4\frac{\mu^3}{n^3}. \qquad /4.18/$$

Таким образом, после подстановки результата суммирования /4.18/ в равенство /4.15/ выражение для низкочастотного вклада в поправку к уровням энергии принимает вид:

$$\mathrm{Re}\,\Delta E_n^< = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4\mu^3}{3\pi n^3 m_1^2}\left\{\ln\frac{(Z\alpha)^2\mu}{2\Delta W_n^{av}} + \delta_{\ell 0}\ln\frac{2\lambda}{(Z\alpha)^2\mu}\right\}. \qquad /4.19/$$

Перейдем теперь к вычислению высокочастотного вклада в сдвиг уровней энергии

$$\Delta E_n^> = \langle n|\Delta V_\gamma^> \mathfrak{L}|n\rangle, \qquad /4.20/$$

где соответствующая часть квазипотенциала $\Delta V_{\gamma\mathfrak{L}}^>$ определена равенствами /3.23/ и /3.24/. После несложных преобразований найдем:

$$\Delta E_n^> = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4\mu^3}{3\pi n^3 m_1^2}\left\{\left[\ln\frac{m_1}{2\lambda} + \frac{11}{24} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{m_1^2}{5m^2} - \frac{3m_1}{8m_2}\right]\delta_{\ell 0} + \qquad /4.21/$$

$$\left. + \frac{3}{8}\left[\frac{1}{\ell+1/2} - \frac{1}{j+1/2}\right]\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\right\},\ j = \ell \pm \frac{1}{2}, \ell = 0,1,2,\ldots$$

Складывая вместе обе части поправки к уровням энергии /4.19/ и /4.21/, мы видим, что зависимость от параметра инфракрасного обрезания, как и следовало ожидать, исчезает, и в результате сдвиг уровней энергии имеет вид:

$$\Delta E_n^{\mathfrak{L}} = \Delta E_n^< + \Delta E_n^> =$$

$$= \frac{4\alpha(Z\alpha)^4\mu^3}{3\pi n^3 m_1^2}\left\{\left[\ln(Z\alpha)^{-2} + \frac{11}{24} - \right.\right. \qquad /4.22/$$

$$- \frac{m_1^2}{5m^2} + \ln\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) - \frac{3m_1}{8m_2}\right]\delta_{\ell 0} +$$

$$\left. + \ln\frac{(Z\alpha)^2\mu}{2\Delta W_n^{av}} + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2\ell+1} - \frac{1}{2j+1}\right]\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\right\}.$$

Таким образом, мы получили выражение для радиационного сдвига уровней энергии водородоподобного атома с точностью до членов порядка $\alpha(Z\alpha)^4 = \alpha\,[fs]$ для произвольных масс частиц. В случае реального атома водорода нужно положить m_1 равной массе электрона, а m_2 - равной массе протона и, следовательно, считать

$$m_1 \ll m_2, \quad m = m_1.$$

Кроме того, требуется учесть влияние электромагнитной структуры /формфактора/ протона, что приведет к появлению дополнительного вклада, пропорционального среднеквадратичному радиусу протона [8] /см. *Приложение А*/:

$$\Delta E_n^{str} = \frac{2(Z\alpha)^4}{3n^3}\mu^3 \langle r_{E2}^2\rangle \delta_{\ell 0}, \qquad /4.23/$$

где

$$\langle r_{E2}^2\rangle = 6\left.\frac{dG_{E2}(k^2)}{dk^2}\right|_{k^2=0},$$

а электрический формфактор протона

$$G_{E2}(k^2) = \rho_2(k^2) + \frac{k^2}{4m_2^2}f_2(k^2).$$

Поправка /4.22/ для атома водорода приводит к следующему численному значению лэмбовского расщепления уровней энергии с $n=2$:

$$\mathfrak{L}_H^{th} = E(2S_{1/2}) - E(2P_{1/2}) = 1050,556\ \textit{МГц}. \qquad /4.24/$$

Имеются многочисленные дополнительные поправки к сдвигу уровней энергии /4.22/, одна из которых представлена выражением /4.23/. Из них наибольший вклад [4] дает поправка порядка $\alpha(Z\alpha)^5$. Полностью вычислены [4,5,6,8,13] также значения членов порядка $\alpha(Z\alpha)^6$, $\alpha^2(Z\alpha)^4$ при $(m_1/m_2)=0$ и члена $(Z\alpha)^5$ для произвольных масс частиц. Последний член в случае атома водорода ($m_1 \ll m_2$) имеет порядок $(Z\alpha)^5\,(m_1/m_2)$ и поэтому дает малый вклад. С учетом всех этих поправок теоретическое значение /12/ лэмбовского расщепления

$$\mathfrak{L}_H^{th} = 1057,911 \pm 0,012 \text{ МГц} . \qquad /4.25/$$

Наиболее точное экспериментальное значение /12/ этой величины

$$\mathfrak{L}_H^{exp} = 1057,90 \pm 0,06 \text{ МГц} . \qquad /4.26/$$

Прекрасное согласие значений /4.25/ и /4.26/ для $\mathfrak{L}_H$ служит важным подтверждением справедливости квантовой электродинамики и релятивистской теории связанных состояний двух частиц.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Квазипотенциал однофотонного обмена

Общее выражение для квазипотенциала однофотонного обмена в "приближении рассеяния" имеет следующий вид /в системе центра масс/:

$$V_\gamma(\vec p,\vec q) = e_1 e_2\, \bar u_1(\vec p)\,\Gamma_{1\mu}(k)\,u_1(\vec q)\,D^{\mu\nu}(k)\,\bar u_2(-\vec p)\,\Gamma_{2\nu}(-k)\,u_2(-\vec q), \qquad /A.1/$$

где

$$\Gamma_\mu(k) = \gamma_\mu\, \rho(k^2) + \frac{i}{2m}\,\sigma_{\mu\nu} k^\nu\, f(k^2),$$

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{d(k^2)}{k^2}\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right),$$

$$\rho_{1,2}(0) = 1, \quad f_{1,2}(0) = \kappa_{1,2}, \quad d(0) = 1,$$

$$k = (0, \vec p - \vec q).$$

Дираковские спиноры, нормированные условием $\overset{*}{u}u = 1$, возьмем в стандартном представлении:

$$u(\vec p) = \sqrt{\frac{\epsilon(p)+m}{2\epsilon(p)}}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\vec\sigma\cdot\vec p}{\epsilon(p)+m}\end{pmatrix} w, \quad \epsilon(p) = \sqrt{p^2+m^2}, \qquad /A.2/$$

здесь w - двухкомпонентный паулиевский спинор. Произведя разложение по (p^2/m^2) в равенстве /A.1/ и оставив лишь члены первого порядка по этому параметру, после несложных преобразований найдем:

$$V_\gamma(\vec p,\vec q) = e_1 e_2 \frac{d(k^2)}{\vec k^2}\Big\{ G_{E1}(k^2) G_{E2}(k^2) +$$

$$+ \rho_1(k^2)\rho_2(k^2)\left[\frac{\vec p^2 + \vec q^2}{2 m_1 m_2} - \frac{(\vec p^2 - \vec q^2)^2}{4 m_1 m_2 \vec k^2} - \frac{\vec k^2}{8\mu^2}\right] +$$

$$+ \frac{i[\vec p\times\vec q]}{4m_1}\cdot\vec\sigma_1\, \rho_2(k^2)\left[\left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2}\right)\rho_1(k^2) + \frac{2}{\mu} f_1(k^2)\right] + \qquad /A.3/$$

$$+ \frac{i[\vec p\times\vec q]}{4m_2}\cdot\vec\sigma_2\, \rho_1(k^2)\left[\left(\frac{1}{m_2} + \frac{2}{m_1}\right)\rho_2(k^2) + \frac{2}{\mu} f_2(k^2)\right] -$$

$$- \frac{1}{4m_1 m_2} G_{M1}(k^2) G_{M2}(k^2)\left[(\vec\sigma_1\cdot\vec\sigma_2)\vec k^2 - (\vec k\cdot\vec\sigma_1)(\vec k\cdot\vec\sigma_2)\right]\Big\},$$

$$\vec k = \vec p - \vec q, \quad k^2 = -\vec k^2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

где введены обычные электрические и магнитные формфакторы:

$$G_E(k^2)=\rho(k^2)+\frac{k^2}{4m^2}f(k^2)$$

$$G_M(k^2)=\rho(k^2)+f(k^2).$$

Лэмбовскую часть квазипотенциала /3.23/ можно выделить из выражения /A.3/, если положить в нем $\rho_2(k^2)=1$ и $f_2(k^2)=0$. В квазипотенциале /A.3/ содержится также член, приводящий к поправке /4.23/.

B. Уравнение Дайсона для двухчастичной функции Грина

Рассмотрим функцию Грина двух различных частиц с массами m_1 и m_2 и спином 1/2:

$$G(x_1,x_2;y_1,y_2)=-i\langle 0|T\{\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\bar\psi_1(y_1)\bar\psi_2(y_2)\}|0\rangle. \quad /B.1/$$

В квантовой электродинамике неперенормированные гейзенберговы операторы спинорных полей $\psi_{1,2}$ подчиняются уравнению:

$$(\hat p_x-m_0)\psi(x)=e\hat A(x)\psi(x), \quad /B.2/$$

где

$$\hat p_x=i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\gamma_\mu;\quad \hat A(x)=A^\mu(x)\gamma_\mu,\quad m_0=m-\delta m.$$

$A^\mu(x)$ - гейзенбергов оператор поля фотонов. Подействуем оператором $(\hat p-m_0)$ на функцию Грина G. Тогда, используя определение T-произведения через θ-функции, уравнение /B.2/ и канонические одновременные коммутационные соотношения для операторов ψ, мы получим соотношения:

$$(\hat p_{x_1}-m_{01})G(x_1,x_2;y_1,y_2)=i\delta^4(x_1-y_1)S_2(x_2-y_2)- \quad /B.3/$$

$$-ie_1\gamma_{1\mu}\langle 0|T\{A^\mu(x_1)\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\bar\psi_1(y_1)\bar\psi_2(y_2)\}|0\rangle,$$

здесь

$$S(x-y)=-i\langle 0|T\{\psi(x)\bar\psi(y)\}|0\rangle$$

- полная одночастичная функция Грина /пропагатор/ фермиона. Первый член в правой части равенства /B.3/ получается от дифференцирования θ-функций.

Определим теперь вершинную функцию Γ двухчастичной системы аналогично тому, как это делается для случая одной частицы. С этой целью рассмотрим пятиточечную функцию Грина

$$R^\mu(x_1,x_2;y_1,y_2|z)=\langle 0|T\{\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)A^\mu(z)\bar\psi_1(y_1)\bar\psi_2(y_2)\}|0\rangle \quad /B.4/$$

и положим

$$R^\mu=D^{\mu\nu}G*\Gamma_\nu*G, \quad /B.5/$$

где

$$D^{\mu\nu}(x-y)=i\langle 0|T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}|0\rangle$$

- полная однофотонная функция Грина, а G - двухчастичные функции Грина, определенные равенством /B.1/. В операторном равенстве /B.5/ знак(*) обозначает "свертку" по двухчастичным виртуальным промежуточным состояниям. Графически определение /B.5/ можно изобразить в виде диаграмм *рис. 4:*

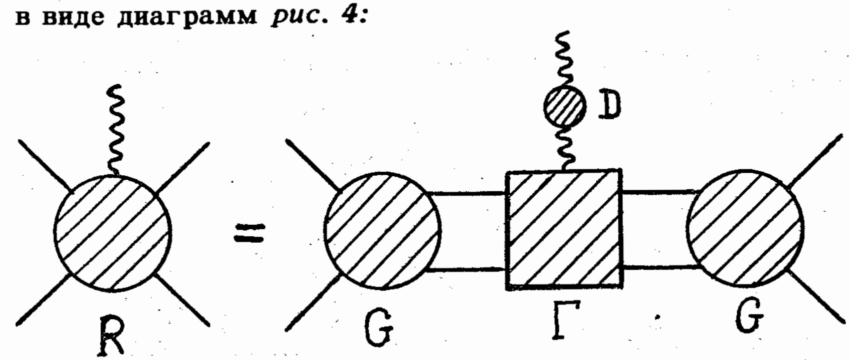

Рис. 4

Уравнение /В.3/ для функции Грина G можно теперь переписать, используя определение /В.4/, следующим образом:

$$(\hat{p}_{x_1} - m_{01}) G(x_1, x_2; y_1, y_2) = i\delta^4(x_1 - y_1) S_2(x_2 - y_2) -$$

$$- ie_1 \gamma_{1\mu} R^{\mu}(x_1, x_2; y_1, y_2 | x_1). \qquad /В.6/$$

Перейдем с помощью фурье-преобразования в импульсное пространство. Тогда, с учетом определения /В.5/ обобщенной вершинной функции Γ, уравнение /В.6/ принимает следующий операторный вид:

$$S_{f1}^{-1} G(\mathcal{P}) = i I_1 S_2 -$$

$$/В.7/$$

$$- ie_1 \gamma_{1\mu} \int d^4k\, D^{\mu\nu}(k)\, G(\mathcal{P} - k) * \Gamma_{\nu}(\mathcal{P} - k, \mathcal{P}) * G(\mathcal{P}).$$

Здесь $\mathcal{P}$ - полный четырехимпульс системы двух частиц, S_f - функция Грина /пропагатор/ свободной частицы /без учета взаимодействия с полем фотонов/, удовлетворяющая уравнению

$$(\hat{p} - m_0) S_f(p) = 1. \qquad /В.8/$$

Уравнение /В.7/ можно изобразить с помощью диаграмм Фейнмана:

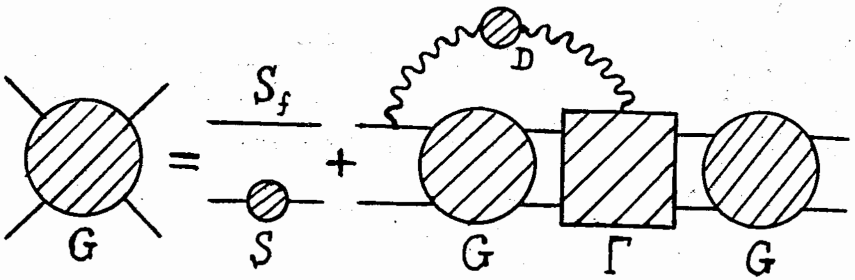

Рис. 5

Введем теперь, согласно Дайсону, одночастичный массовый оператор по формуле

$$S = S_f + S_f M S$$

или

$$M = S_f^{-1} - S^{-1}. \qquad /В.9/$$

Уравнение Бете-Солпитера для двухчастичной функции Грина имеет вид:

$$G = G_0 + G_0 * K * G, \qquad /В.10/$$

где

$$G = i S_1 S_2,$$

откуда для ядра K получается следующее операторное выражение:

$$K = G_0^{-1} - G^{-1}. \qquad /В.11/$$

Используя определения /В.9/ и /В.11/, найдем искомое представление для ядра K:

$$K(\mathcal{P}) = - e_1 \gamma_{1\mu} S_2^{-1} \int d^4k\, D^{\mu\nu}(k)\, G(\mathcal{P} - k) * \Gamma_{\nu}(\mathcal{P} - k, \mathcal{P}) +$$

$$/В.12/$$

$$+ i M_1 S_2^{-1}.$$

С помощью диаграмм Фейнмана уравнение /В.12/ можно изобразить в наглядном виде:

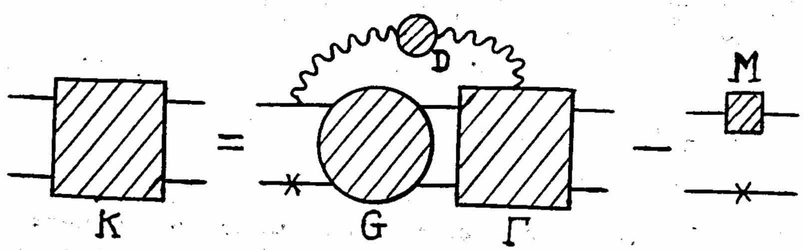

Рис. 6

Здесь знак —×— обозначает фактор S^{-1}. При взгляде на равенство /B.12/ и на *рис. 6* сразу бросается в глаза формальное сходство этого представления для ядра K с уравнением Дайсона для одночастичного массового оператора M:

$$M(p) = -ie\gamma_{\mu} \int d^4k\, D^{\mu\nu}(k)\, S(p-k)\, \Gamma_{0\nu}(p-k, p)\,, \qquad /B.13/$$

или на языке диаграмм:

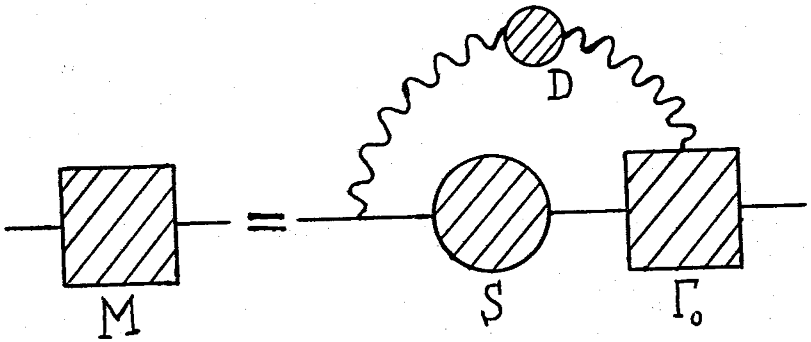

Рис. 7

При практическом использовании уравнения /B.12/ удобно представить величины G и Γ в следующем виде:

$$G = G_0 + G_0 T G_0\,, \qquad /B.14/$$

$$\Gamma = -\left.\frac{\delta G^{-1}}{\delta A^{ext}}\right|_{A^{ext}=0} = -i\Gamma_{01} S_2^{-1} - iS_1^{-1}\Gamma_{02} + \Lambda\,, \qquad /B.15/$$

$$\Lambda = \left.\frac{\delta K}{\delta A^{ext}}\right|_{A^{ext}=0}\,,$$

где T - амплитуда рассеяния вне массовой поверхности, а Γ_0 - одночастичная вершинная функция, соответствующая диаграмме *рис. 8*.

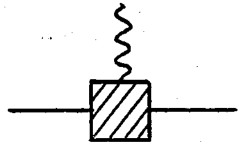

Рис. 8

Решая уравнение /B.12/ или /B.13/ итерациями по модифицированной теории возмущений, получим в качестве исходного приближения для ядра K диаграмму однофотонного обмена /*рис. 9*/.

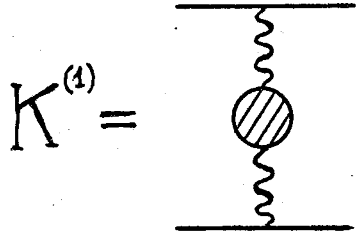

Рис. 9

Соответствующее приближение для функции Грина $G^{(1)}$ мы получим, решая уравнение /B.10/. Это приближение, очевидно, описывается суммой лестничных диаграмм *рис. 10*.

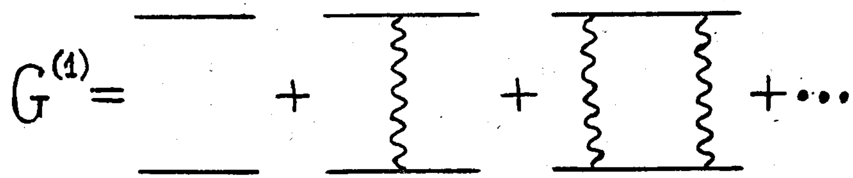

Рис. 10

Теперь мы в состоянии найти следующее приближение для ядра, используя совместно уравнение /В.12/ и представления /14/ и /15/. Подставляя туда $G^{(1)}$ вместо G, мы имеем совокупность членов, изображенных графически на *рис. 11*.

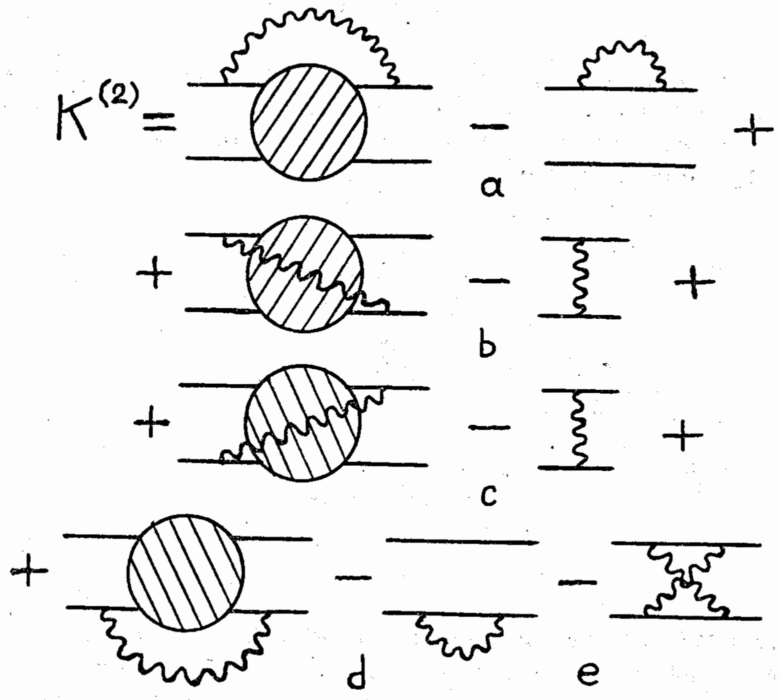

Рис. 11

Основным достоинством изложенной процедуры является возможность явного и прямого учета связанности в промежуточных виртуальных состояниях ядра взаимодействия. В самом деле, даже первое /лестничное/ приближение $G^{(1)}$ для функции Грина воспроизводит существующие связанные состояния. Для слабо связанных систем в квантовой электродинамике связанность важна только в промежуточных состояниях с низкочастотными фотонами. В этой области мы можем использовать нерелятивистское выражение для двухчастичной функции Грина. Область высоких частот может быть описана с помощью обычных борновских приближений. Сумма обоих вкладов дает полностью сходящийся в инфракрасной области результат для сдвигов уровней энергии связанных состояний.

Перенормировка уравнения /12/ для ядра K не представляет особых трудностей и может быть выполнена стандартным способом /ср. перенормировку уравнений Дайсона/. Она состоит в приписывании константы Z_1 - перенормировки вершины - к голой /точечной/ вершине в уравнении /12/ и введении таких перенормированных величин, как заряд, масса, пропагаторы и вершины.

Литература

1. *Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.*
2. J.M.Jauch, F.Rohrlich. The Theory of Protons and Electrons, Addison-Wesley. Inc. Cambridge (1955).
3. *Г.Бете, Э.Солпитер. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М., Физматгиз, 1960.*
4. G.W.Ericson, D.R.Yennie. Ann.Phys., (N.Y.), 35, 271 (1965).
5. H.Grotch, D.R.Yennie. Rev.Mod.Phys., 41, 350 (1969).
6. T.Fulton, P.C.Martin. Phys.Rev., 95, 811 (1954).
7. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
8. *Р.Н.Фаустов. ЭЧАЯ 3, 238 /1972/.*
9. R.N.Faustov. JINR preprint E3-6939, Dubna (1973).
10. *Р.Н.Фаустов. ТМФ 3, 240 /1970/.*
11. Nguyen Van-Hieu, R.N.Faustov. Nucl.Phys., 53, 337 (1964).
12. B.E.Lautrup, A.Peterman, E. de Rafael. Phys.Rep., 3C, 1963 (1972).
13. *Н.Е.Нюнько, Ю.Н.Тюхтяев, Р.Н.Фаустов. Сообщения ОИЯИ, Р2-7493, Р2-7530, Дубна, 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел 3 сентября 1974 года.