

С 324  
П-147

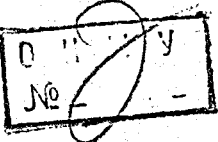


ЛЕКЦИИ  
ДЛЯ МОЛОДЫХ  
УЧЕНЫХ

М.Я.Пальчик, Е.С.Фрадкин

ВВЕДЕНИЕ  
В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНУЮ ТЕОРИЮ  
КВАНТОВЫХ ПОЛЕЙ

ДУБНА



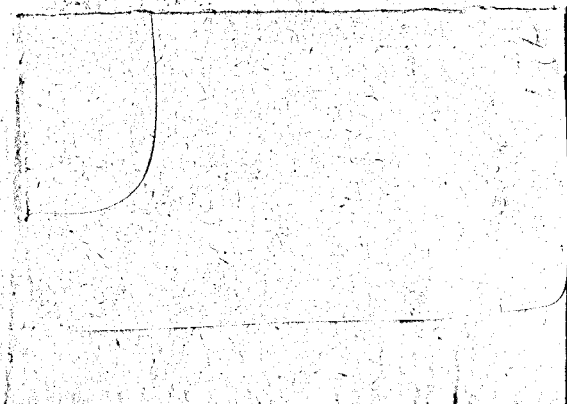
82  
ЗНАК. 102

**ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ**

Выпуск 4

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ**

- Д. В. Ширков - председатель
- А. Т. Филиппов - зам. председателя
- А. Н. Сисакян - ученый секретарь
- О. А. Займидорога
- А. А. Карлов
- В. А. Никитин
- Ю. П. Попов



© 1975 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

C 324  
П-147



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

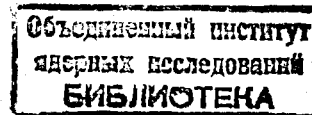
2 - 8874

М. Я. Пальчик, Е. С. Фрадкин

188801

**ВВЕДЕНИЕ  
В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНУЮ ТЕОРИЮ  
КВАНТОВЫХ ПОЛЕЙ**

Лекция, прочитанная Е. С. Фрадким для участников  
Международной школы-семинара молодых ученых по  
актуальным проблемам физики элементарных частиц.  
Сочи, 1974



Дубна 1975

## Содержание

	стр.
I. Введение	3
II. Конформные поля в пространстве Минковского	7
III. Функции Грина скалярных и тензорных полей	18
IV. Высшие функции Грина	26
V. Функции Грина спинорных полей	36
VI. Перенормированные уравнения и бутстрапная программа	46
VII. Система перенормированных уравнений в конформно-инвариантной теории	52
VIII. Решение системы уравнений	60
IX. Тожества Уорда	68
X. Тожества Уорда в случае скалярных полей	73
XI. Приложение	83

## Введение

Исследования последних лет показали, что существует целый класс лагранжевых теорий квантованных полей, для которых трудность "заряда нуль" для перенормированного взаимодействия отсутствует.

Это в первую очередь относится к калибровочным полям Янга-Миллса, взаимодействующих со спинорными полями, и к некоторым моделям единого взаимодействия, для которых подходящим подбором констант связей (и вида представления) удается, с одной стороны, обеспечить необходимое обрастание массой промежуточных векторных полей (за счет механизма Хиггса) и, с другой стороны, обеспечить асимптотическую свободу для всех входящих взаимодействий. Характерной особенностью таких теорий с асимптотической свободой является то, что эффективное взаимодействие на малых расстояниях уменьшается с уменьшением расстояния.

В настоящей лекции мы попытаемся показать, что в обычных перенормированных взаимодействиях (с безразмерной константой) не по теории возмущений может реализоваться другой режим (также математически непротиворечивый), при котором эффективное взаимодействие на малых расстояниях, как правило, увеличивается с уменьшением расстояний. При этом вблизи конуса реализуется конформно-инвариантное решение.

Идеи подобия и конформной симметрии взаимодействия на малых расстояниях основаны на представлении о бесструктурности частиц. Предполагается, что на расстояниях, много мень-

ших комптоновской длины волны частиц, отсутствуют какие-либо характерные размеры. Малые расстояния соответствуют области явлений, в которой велики не только квадраты внешних импульсов, но и все импульсные передачи, так что можно пренебречь массами покоя. Предполагается, что в этой области явлений теория инвариантна относительно масштабных преобразований

$$X_{\mu} \rightarrow \lambda X_{\mu} \quad (1.1)$$

и специальных конформных преобразований

$$X_{\mu} \rightarrow \frac{X_{\mu} + C_{\mu} X^2}{1 + 2CX + C^2 X^2}. \quad (1.2)$$

Вместе с преобразованиями группы Пуанкаре

$$X_{\mu} \rightarrow X_{\mu} + \alpha_{\mu}, \quad (1.3)$$

$$X_{\mu} \rightarrow \Lambda_{\mu\nu} X_{\nu}, \quad \Lambda_{\mu\nu} = -\Lambda_{\nu\mu}, \quad (1.4)$$

они образуют 15-параметрическую группу конформных преобразований. Вместо специальных конформных преобразований (1.2) обычно вводится преобразование инверсии ( $R$  - преобразование),

$$X_{\mu} \rightarrow R X_{\mu} = \frac{X_{\mu}}{X^2}. \quad (1.5)$$

С помощью (1.5) можно представить (1.2) в виде произведения трех преобразований:

$$X_{\mu} \rightarrow (R P C R) X_{\mu},$$

где  $P$  - оператор сдвига на вектор  $C_{\mu}$ . Из (1.5) имеем

$$R X^2 = \frac{1}{X^2}, \quad R(x-y)^2 = \frac{(x-y)^2}{X^2 Y^2}. \quad (1.6)$$

Заметим, что как растяжение, так и  $R$  - преобразование сохраняют углы между мировыми линиями:  $\frac{xy}{\sqrt{x^2 y^2}} = \text{inv}$ , но меняют

пространственно-временные интервалы. В этом смысле можно говорить об исчезновении метрических свойств пространства на малых расстояниях, что и соответствует предположению об отсутствии характерных размеров внутри частиц.

Существенно, что конформная симметрия является заведомо приближенной, т.к. нарушается наличием масс у частиц. Однако в качестве первого шага естественно рассмотреть теорию, обладающую точной симметрией. Такая теория описывает асимптотическое поведение функций Грина вблизи конуса. Следующая задача состоит в переходе к массовой оболочке. Здесь будет сделана попытка частично решить первую часть проблемы.

Конформная симметрия, как и всякая пространственно-временная симметрия, определяет кинематику теории. Будучи повышенной симметрией, она накладывает на теорию ряд нетривиальных ограничений. Достаточно указать, что в рамках конформной кинематики удастся определить с точностью до нескольких констант вид пропагаторов и трехточечных вершин до привлечения каких-либо динамических моделей. Столь жесткие ограничения дают основание надеяться на известную универсальность взаимодействия на малых расстояниях. Анализ перенормированных динамических уравнений показывает, что конформная симметрия реализуется лишь при определенных значениях констант связи. Ряд кинематических ограничений на высшие функции Грина будет рассмотрен в разделах II-У. Эти ограничения вытекают из аксиом теории после применительно к конформной кинематике.

В рамках динамических уравнений конформная симметрия возникает как следствие бесконечных перенормировок. Очень важно поэтому, чтобы все бесконечные перенормировки, а также

раскрытие неопределенностей  $0 \times \infty$  (перекрывающиеся расходимости), возникающих в пределе  $\chi_1 \rightarrow 0$ , были выполнены непосредственно в уравнениях. Такая программа для системы уравнений Швингера-Дайсона проведена одним из авторов в /1, 2/ (см. также /3/). Перенормированная система уравнений, полученная в /1, 2/, составляет основу развиваемого здесь подхода. Замечательным свойством этой системы является то, что предположение о конформной инвариантности решения позволяет диагонализировать динамические уравнения /4-7/ и, как мы покажем, построить их решение /6, 7/.

Перенормированные уравнения сами по себе не определяют функции Грина однозначно и должны быть дополнены различными требованиями аксиоматического характера (спектральность, положительность, локальность и т.д.), а также определенными граничными условиями на массовой поверхности. Последние не требуются в конформно-инвариантной теории, где известен явный вид двух- и трехточечных функций Грина. Построение решения может быть проведено в два этапа. Во-первых, необходимо найти общее решение перенормированных уравнений. Это будет сделано в разделе УП. Полученное решение содержит набор произвольных функций. Следующий шаг должен состоять в допределении этих функций с помощью аксиом теории поля, а также эффективного учета затравочного взаимодействия, часть информации о котором теряется в результате бесконечных перенормировок. Эта часть программы находится в стадии исследования и в настоящее время решена лишь частично.

## II. Конформные поля в пространстве Минковского

Кинематика конформных полей определяется их трансформационными свойствами относительно преобразований (I.1-4). Как и в обычной релятивистской теории, для выяснения вопросов классификации полей, а также основных свойств их состояний можно ограничиться рассмотрением инфинитезимальных преобразований.

Генераторы инфинитезимальных преобразований образуют алгебру конформной группы и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma}),$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\nu\rho} P_\mu - g_{\mu\rho} P_\nu),$$

$$[M_{\mu\nu}, K_\rho] = i(g_{\nu\rho} K_\mu - g_{\mu\rho} K_\nu), \quad (2.1)$$

$$[P_\mu, D] = -i P_\mu, \quad [K_\mu, D] = i K_\mu,$$

$$[P_\mu, K_\nu] = 2i(g_{\mu\nu} D + M_{\mu\nu}),$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [K_\mu, K_\nu] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, D] = 0.$$

Здесь  $M_{\mu\nu}$  и  $P_\nu$  - генераторы лоренцевых вращений и сдвигов (преобразования (I.3, 4));  $K_\mu$  - генераторы специальных конформных преобразований (I.2) и  $D$  - генератор масштабных преобразований. Неприводимые представления классифицируются по значениям трех операторов Казимира конформной группы

$$C_2 = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M_{\mu\nu} + K_{\mu} P_{\mu} - 4iD - D^2,$$

$$C_3 = \frac{1}{4} (W_{\mu} K_{\mu} + K_{\mu} W_{\mu}) - \frac{1}{8} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma},$$

$$\begin{aligned} 4C_3 = & K^2 P^2 - 4K_{\mu} M_{\mu\nu} M_{\nu\rho} P_{\rho} + \\ & + \frac{3}{4} (M_{\mu\nu} M_{\mu\nu})^2 - 4K_{\mu} M_{\mu\nu} P_{\nu} (D + 6i) + \\ & + \frac{1}{16} (\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma})^2 + M_{\mu\nu} M_{\mu\nu} (D^2 + 8iD - C_2 - 22) - \\ & - D^4 - 16iD^3 + 80D^2 + 128iD + 36C_2 - 16iC_2 D - \\ & - 2C_2 D^2, \end{aligned} \quad (2.1a)$$

где  $W_{\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P_{\nu} M_{\rho\sigma}$ .

Группа конформных преобразований изоморфна группе  $SO(4,2)$ . Вместо  $SO(4,2)$  удобно рассматривать ее накрывающую  $SU(2,2)$ , неприводимые представления которой изучены в [8,9]. Краткое описание представлений дано ниже.

Поскольку группа Пуанкаре является подгруппой конформной группы, можно определить операторы массы и спина (операторы Казимира группы Пуанкаре). Масса и спин, вообще говоря, не являются инвариантами группы  $SU(2,2)$ . Однако для всех физически интересных представлений можно говорить об определенном спине. Мы будем рассматривать только такие представления (дискретные серии), которые связаны с представлениями

$$(j_1, j_2) \oplus (j_2, j_1) \quad (2.2)$$

группы Лоренца. В этих представлениях спин принимает спектр значений в интервале

$$|j_1 - j_2| \leq S \leq j_1 + j_2.$$

Если одно из чисел  $j_{1,2}$  равно нулю, спин является инвариантом конформной группы.

Пусть  $|x_{\mu}\rangle$  - базисные векторы пространства неприводимого представления в координатной реализации. Генераторы конформной группы действуют на пространстве функций  $f(x) = \langle x_{\mu} | f \rangle$  и имеют вид

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= i(x_{\mu} \partial_{\nu} - x_{\nu} \partial_{\mu}) + i \Sigma_{\mu\nu}, \\ P_{\mu} &= i \partial_{\mu}, \\ D &= i(\ell + x_{\mu} \partial_{\mu}), \\ K_{\mu} &= -i(x^2 \partial_{\mu} - 2x_{\mu} x_{\nu} \partial_{\nu} - 2\ell x_{\mu}) - 2ix_{\nu} \Sigma_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\ell$  - масштабная размерность, а  $\Sigma$  - матрица конечномерного представления группы Лоренца, действующая на спиновые индексы функций  $f(x)$ . Например, в случае спина  $S = 1/2$  она равна

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma_{\mu} \gamma_{\nu}]. \quad \text{Для представлений (2.2) имеем [10]}$$

$$\Sigma_{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} = 4j_1(j_1+1) + 4j_2(j_2+1), \quad (2.3a)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Sigma_{\mu\nu} \Sigma_{\rho\sigma} = 8ij_1(j_1+1) - 8ij_2(j_2+1). \quad (2.3b)$$

Из (2.3) и (2.3a,б) находим, что операторы Казимира (2.1a) в этих представлениях выражаются через масштабную размерность  $\ell$  и квантовые числа группы Лоренца  $j_1, j_2$ :



$$\begin{aligned}
C_2 &= (\ell-2)^2 - 4 + 2j_1(j_1+1) + 2j_2(j_2+1), \\
C_3 &= -(\ell-2)[j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)], \\
C_4 &= \frac{1}{4}(\ell-2)^4 - (\ell-2)^2[j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 1] + \\
&\quad + 4j_1(j_1+1)j_2(j_2+1).
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

Значения операторов Казимира инвариантны относительно замены

$$\ell \rightarrow 4-\ell, \quad j_1 \rightleftharpoons j_2. \tag{2.5}$$

Отсюда следует, что представления

$$\sigma = (\ell, j_1, j_2) \oplus (\ell, j_2, j_1) \tag{2.6}$$

и

$$\tilde{\sigma} = (4-\ell, j_2, j_1) \oplus (4-\ell, j_1, j_2) \tag{2.7}$$

эквивалентны.

Базисные векторы пространства неприводимого представления обозначим как  $|\sigma, x\rangle$ . Спиновые индексы всюду опущены. Пусть

$$\Delta_\sigma(x-y) = \langle x, \sigma | \sigma, y \rangle \tag{2.8}$$

инвариантное скалярное произведение этих векторов. Оно может быть легко найдено из (2.3) и имеет вид однородной функции разности  $(x-y)$ . Например, в простейшем случае нулевого спина,  $\sigma = (\ell, 0, 0)$ , имеем  $\Delta_\sigma(x) \sim (x^2)^{-\ell}$ . Явный вид функций  $\Delta_\sigma(x)$  для различных тензорных представлений будет получен в следующем разделе. Из

инвариантности (2.8) относительно инфинитезимальных преобразований (2.3) вытекает также, что векторы  $|\sigma, x\rangle$ , принадлежащие разным представлениям, ортогональны (подробнее см. раздел III).

$$\langle x, \sigma | \sigma', y \rangle = 0, \quad \text{если } \sigma \neq \sigma' \tag{2.9}$$

Соотношение полноты для векторов  $|\sigma, x\rangle$  имеет вид

$$\int dx dy |\sigma, x\rangle \Delta_\sigma^{-1}(x-y) \langle y, \sigma | = I. \tag{2.8a}$$

Пусть  $\psi(x)$  - квантованное поле со спином  $S$ . Имеем

$$U(a, \Lambda) \psi(x) U^{-1}(a, \Lambda) = T(\Lambda^{-1}) \psi(\Lambda x + a), \tag{2.10a}$$

где  $T(\Lambda^{-1})$  - матрица конечномерного лоренцевского преобразования с генератором  $\Sigma_{\mu\nu}$ ,  $\Lambda$  и  $a$  - параметры преобразований (1.3, 4). Инфинитезимальная форма (2.10a) есть:

$$\begin{aligned}
[\psi(x) P_\mu] &= i \partial_\mu \psi(x), \\
[\psi(x) M_{\mu\nu}] &= i [x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu + \Sigma_{\mu\nu}] \psi(x).
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

В обычной релятивистской теории, где кинематической группой является группа Пуанкаре, трансформационные свойства полей исчерпываются формулами (2.10). Поля классифицируются по значениям массы и спина - операторов Казимира группы Пуанкаре. Легко видеть, что в случае конформных полей масса не является инвариантом, т.к.

$$e^{i\lambda D} p^2 e^{-i\lambda D} = e^{-2\lambda} p^2$$

Отсюда следует, что либо  $p^2 = 0$  для всех состояний, либо масса имеет непрерывный спектр. В первом случае мы имеем безмассовые по-

ля. Соответствующие представления конформной группы являются одновременно неприводимыми представлениями группы Пуанкаре с нулевой массой. Во втором случае каждое неприводимое представление конформной группы содержит бесконечный набор представлений группы Пуанкаре со всеми массами в интервале

$$0 < p^2 < \infty, \quad (2.11)$$

и состояния  $\psi^+(x|0)$  (они образуют неприводимое представление, см. ниже) могут иметь любые массы из этого интервала. Как вытекает из (2.4), такие поля классифицируются по значениям масштабной размерности  $d$  и спина. Будем говорить, что поле  $\psi(x)$  имеет размерность  $d$  (в единицах массы), если его трансформационный закон относительно масштабных преобразований (1.1) имеет вид

$$U(\lambda) \psi(x) U^{-1}(\lambda) = \lambda^d \psi(\lambda x), \quad (2.12)$$

или в инфинитезимальной форме:

$$[\psi(x) D] = -i(d + x_\mu \partial_\mu) \psi(x). \quad (2.13)$$

Безмассовые поля, для которых  $p^2 = 0$ , также удовлетворяют трансформационному закону (2.12), однако их размерность  $d$  принимает фиксированное значение  $d = d_k$ , определяемое спином

$$d_k = 1 + S. \quad (2.14)$$

Этот результат получается как из анализа безмассовых представлений конформной группы, так и из канонических перестановочных соотношений полей. В случае произвольных конформных полей со спектром масс (2.11) размерность может принимать любые значения в интервале

$$d > d_k. \quad (2.15)$$

Трансформационные свойства полей, удовлетворяющих (2.10) и (2.13), относительно инфинитезимальных преобразований (1.2) определяются соотношением

$$[\psi(x) K_\mu] = -i(2dx_\mu + 2x_\nu x_\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu + 2x_\nu \Sigma_{\mu\nu}) \psi(x). \quad (2.16)$$

Конечные преобразования (1.2) нарушают причинность, т.к. они связывают пространственно-временные точки, лежащие внутри и вне светового конуса. Исключение составляют безмассовые поля с канонической размерностью (2.14). Их коммутатор (или антикоммутатор) отличен от нуля только на световом конусе, который инвариантен относительно (1.2).

Один из способов обойти возникающую здесь трудность - воспользоваться евклидовой формулировкой квантовой теории поля /11/. Такой подход имеет еще и дополнительное преимущество, связанное с относительной простотой евклидовой конформной группы /5/ (группы  $SO(5,1)$ ) по сравнению с конформной группой пространства Минковского. Это проявляется, в частности, при анализе конформно-инвариантных разложений для высших функций Вайтмана и функций Грина, см. ниже. Другая возможность совместить конечные конформные преобразования с причинностью предложена в /12/, см. также /13/. Она основана на построении причинной упорядоченности в бесконечнолистном накрытии пространства Минковского, где действует бесконечнолистная универсальная накрывающая конформной группы /14,15/. Этот подход тесно связан с аксиомой спектральности и будет еще обсуждаться ниже. При конкретных вычислениях (разделы III-X) будет использована евклидова формулировка теории.



Пусть  $\Psi_d(x)$  - поле, преобразуемое по представлению  $\sigma_\psi = (d, s)$ , где  $s$  - спин, и удовлетворяющее (2.10, 13, 16). Рассмотрим состояния

$$\Psi_d^+(x)|0\rangle, \Psi_d^+(x_1)\Psi_d^+(x_2)|0\rangle \text{ и т.д.}, \quad (2.17)$$

где  $|0\rangle$  - конформно-инвариантный вакуум

$$M_{\mu\nu}|0\rangle = P_\mu|0\rangle = D|0\rangle = K_\mu|0\rangle = 0. \quad (2.18)$$

Инвариантные скалярные произведения состояний (2.12) образуют набор функций Вайтмана:

$$\langle 0|\Psi_d(x_1)\Psi_d^+(x_2)|0\rangle, \langle 0|\Psi_d(x_1)\Psi_d(x_2)\Psi_d^+(x_3)\Psi_d^+(x_4)|0\rangle, \dots \quad (2.19)$$

Нахождение этих инвариантных функций - задача динамики. Однако ряд общих свойств состояний (2.17) и функций (2.19) может быть выяснен в рамках кинематики. Заметим, прежде всего, что состояния

$\Psi_d^+(x)|0\rangle$  образуют пространство неприводимого представления.

Трансформационные свойства этих состояний определяются формулами (2.10, 13, 16) и (2.18) и совпадают с законом преобразования (2.3) базисных векторов  $|\sigma, x\rangle$ . Поэтому проекции

$$\langle 0|\Psi_d(x_1)|\sigma, x_2\rangle = 0, \text{ если } \sigma \neq \sigma_\psi.$$

В обычной релятивистской теории ситуация существенно иная: вектор  $\Psi^+(x)|0\rangle$  имеет проекции на состояния с различными значениями  $P^2$ , т.е. преобразуется по бесконечной прямой сумме неприводимых представлений группы Пуанкаре и, следовательно, определяется динамикой. В конформной теории эти состояния полностью определены в рамках кинематики.

В отличие от них состояния  $\Psi_d^+(x_1)\Psi_d^+(x_2)|0\rangle$  преобразуются по бесконечной прямой сумме представлений. Разложим эти состояния по векторам  $|\sigma, x\rangle$ . Соотношение полноты для векторов  $|\sigma, x\rangle$  в пространстве состояний  $\Psi_d^+(x_1)\Psi_d^+(x_2)|0\rangle$  имеет вид

$$\sum_{\sigma} |\sigma\rangle\langle\sigma| \equiv \sum_{\sigma} \int dx dy |\sigma, x\rangle \Delta_{\sigma}^{-1}(x-y) \langle y, \sigma| = I, \quad (2.20)$$

откуда

$$\Psi_d^+(x_1)\Psi_d^+(x_2)|0\rangle = \sum_{\sigma} \int dz dz' B^{\sigma}(z|x, x_2) \Delta_{\sigma}^{-1}(z-z') |\sigma, z'\rangle. \quad (2.21)$$

Здесь  $B^{\sigma}(z|x, x_2) = \langle z, \sigma | \Psi_d^+(x_1)\Psi_d^+(x_2) | 0 \rangle$  - инвариантные проекции состояний (2.21) на вектор  $|\sigma, z\rangle$ . Как будет показано в следующем разделе, инвариантные 3-точечные функции определяются конформной симметрией с точностью до констант [16, 17]. Пусть  $C^{\sigma}(z|x, x_2)$  - известная 3-точечная функция с фиксированной нормировкой. Проекция  $B^{\sigma}(z|x, x_2)$  может быть записана в виде

$$B^{\sigma}(z|x, x_2) = A(\sigma) C^{\sigma}(z|x, x_2), \quad (2.22)$$

где  $A(\sigma)$  определяется динамикой. Вычисляя скалярное произведение состояний (2.21), получим, учитывая (2.8) и (2.9),

$$\begin{aligned} & \langle 0|\Psi_d(x_1)\Psi_d(x_2)\Psi_d^+(x_3)\Psi_d^+(x_4)|0\rangle = \\ & = \sum_{\sigma} \rho(\sigma) \int dx dy [C^{\sigma}(x|x_1, x_2)]^+ \Delta_{\sigma}^{-1}(x-y) C^{\sigma}(y|x_3, x_4), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где  $\rho(\sigma) = A(\sigma) A^*(\sigma)$ .

Здесь  $\Delta_{\sigma}(z)$  и  $C^{\sigma}(x|x_1, x_2)$  - известные функции, а  $\rho(\sigma)$  - произвольна. В ней содержится вся динамическая информация о функции Вайтмана (2.23).

Ряд общих ограничений на функцию  $\rho(\sigma)$  можно получить из аксиом квантовой теории поля. Эти ограничения относятся к спектру неприводимых представлений, дающих вклад в (2.23). Отбор представлений производится на основании двух требований:

- 1) спектральности,
- 2) положительности норм.

Условие спектральности означает, что в разложение (2.23) могут дать вклад только такие представления конформной группы, которые при редукции к группе Пуанкаре распадаются в прямую сумму представлений последней, удовлетворяющих (2.11). Положительность норм сводится к требованию унитарности представлений. Мы не будем приводить здесь полной классификации представлений конформной группы (см., например, /8, 9/). Отметим лишь, что очень незначительная часть представлений совместима с условием (2.11). Это так называемые дискретные серии представлений. В частности, значительная часть представлений конформной группы бесконечнокомпонентна по спине (неврожденные представления). Однако все они не удовлетворяют (2.11) и не дают вклада в (2.21) и (2.23), что значительно упрощает структуру разложения (2.23).

Другое важное следствие спектральности состоит в том /14, 15/, что в качестве истинной группы симметрии теории необходимо использовать бесконечнолистную универсальную накрывающую конформной группы. Ее представления являются многозначными или бесконечнозначными представлениями конформной группы. Если же ограничиться конформной группой, или локально-изоморфной ей группой  $SU(2, 2)$  (т.е. одно- и двузначными представлениями конформной группы), то

это ведет к неоправданному ограничению на масштабную размерность полей. Условие спектральности допускает в этом случае /18/, помимо канонических размерностей (2.14), только дискретные значения (для полей со спином  $S$ )  $d = 2 + S + n$ ,  $n$  - целое. В рамках универсальной накрывающей конформной группы размерность принимает любые действительные значения; а условие унитарности, т.е. положительности нормы, ограничивает их интервалом (2.15) /15, 19/. Как уже отмечалось, необходимость универсальной накрывающей вытекает также из требования причинности.

В случае тензорных представлений (2.2) размерность может принимать с учетом спектральности и положительности любые значения в интервале /19/:

$$l \geq 2 + j_1 + j_2. \quad (2.24)$$

Эти размерности также дают вклад в разложение (2.23).

Окончательный вариант разложения (2.23) с учетом спектральности и положительности есть /15/ (для простоты будем считать поля  $\Psi_d(x)$  скалярными, так что  $j_1 = j_2 = \frac{S}{2}$ )

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \Psi_d(x_1) \Psi_d(x_2) \Psi_d^+(x_3) \Psi_d^+(x_4) | 0 \rangle = \\ & = \sum_S \sum_{\ell_n} \rho(\ell_n, S) \int dx dy \left[ C_{\mu_1 \dots \mu_S}^{\ell_n, S}(x/x_1, x_2) \right]^+ \\ & \Delta_{\mu_1 \dots \mu_S, \nu_1 \dots \nu_S}^{-1}(x-y) C_{\nu_1 \dots \nu_S}^{\ell_n, S}(y/x_3, x_4), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  - тензорные индексы, а  $\sum_n$  включает сумму по дискретным размерностям или интеграл по непрерывному спектру (если он есть) с учетом (2.24) и (2.15) при  $S = 0$ .

Аналогичное разложение можно написать для высших функций

Вайтмана, прокладывая полный набор (2.20) между различными полями. Например,

$$\langle 0 | \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4 \psi_5 | 0 \rangle = \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \langle 0 | \psi_1 \psi_2 | \sigma_1 \rangle \langle \sigma_1 | \psi_3 | \sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | \psi_4 \psi_5 | 0 \rangle. \quad (2.26)$$

Как показано в [15], имеется дискретный набор размерностей, дающих вклад в (2.25), который фиксируется трансформационными свойствами полей относительно конечных преобразований специального вида из универсальной накрывающей конформной группы. Этот спектр есть

$$l_n = 2d + n, \quad \text{где } n \text{ — целые числа.} \quad (2.27)$$

Размерности (2.26) соответствуют представлениям универсальной накрывающей, дающим вклад в разложение прямого произведения двух представлений с размерностью  $d$  на неприводимые представления. Если ограничиться в (2.25) только размерностями (2.27), то мы получим обобщенные свободные поля, которые фактически рассмотрены в [15]. В случае взаимодействующих полей в разложении (2.25) имеется, помимо кинематического спектра (2.27), дополнительный спектр размерностей, определяемых из динамики.

### III. Функции Грина скалярных и тензорных полей

В этом разделе будут рассматриваться поля в евклидовом пространстве. Конформная группа евклидового пространства есть группа  $SO(5,1)$ . Как и в случае группы  $SO(4,2)$ , неприводимые представления классифицируются по значениям трех чисел:

$$\sigma = (l, j_1, j_2) \oplus (l, j_2, j_1), \quad \text{где } j_{1,2} \text{ — квантовые числа груп-}$$

пы  $SO(4)$  (евклидовой группы Лоренца), а  $l$  — размерность. Вычисления будут проведены для  $D$ -мерного евклидового пространства.

Пусть  $\varphi_{\delta_1}(x)$  и  $\varphi_{\delta_2}(x)$  — скалярные поля в евклидовом пространстве. Рассмотрим функцию Грина  $\langle 0 | \varphi_{\delta_1}(x_1) \varphi_{\delta_2}(x_2) | 0 \rangle$ . Как следствие пуанкаре-инвариантности, она должна быть функцией квадрата разности аргументов:  $\langle 0 | \varphi_{\delta_1}(x_1) \varphi_{\delta_2}(x_2) | 0 \rangle = f(z^2)$ , где  $z = x - y$ . Масштабная инвариантность дает

$$f(z^2) = \langle 0 | \varphi_{\delta_1}(x_1) \varphi_{\delta_2}(x_2) | 0 \rangle = \langle 0 | U(\lambda) \varphi_{\delta_1}(x_1) U(\lambda)^{-1} U(\lambda) \varphi_{\delta_2}(x_2) U(\lambda)^{-1} | 0 \rangle \\ = \lambda^{\delta_1} \lambda^{\delta_2} \langle 0 | \varphi_{\delta_1}(\lambda x_1) \varphi_{\delta_2}(\lambda x_2) | 0 \rangle = \lambda^{\delta_1 + \delta_2} f(\lambda^2 z^2),$$

откуда следует

$$\langle 0 | \varphi_{\delta_1}(x_1) \varphi_{\delta_2}(x_2) | 0 \rangle \sim (x_{12}^2)^{-\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}. \quad (3.1)$$

При выводе (3.1) использован закон преобразования полей (2.12).

Воспользуемся теперь инвариантностью относительно специальных конформных преобразований. Это можно сделать, рассмотрев инфинитезимальные преобразования. Из (2.18) имеем

$$0 = \langle 0 | [K_{\mu\nu}, \varphi_{\delta_1}(x_1) \varphi_{\delta_2}(x_2)] | 0 \rangle = \\ = \langle 0 | [K_{\mu\nu}, \varphi_{\delta_1}(x_1)] \varphi_{\delta_2}(x_2) | 0 \rangle + \langle 0 | \varphi_{\delta_1}(x_1) [K_{\mu\nu}, \varphi_{\delta_2}(x_2)] | 0 \rangle.$$

Подставляя сюда (2.16), получим дифференциальные уравнения для функции  $\langle 0 | \varphi_{\delta_1}(x_1) \varphi_{\delta_2}(x_2) | 0 \rangle$ .

Вместо этих уравнений удобнее рассмотреть  $R$ -преобразование полей. Оба способа эквивалентны, поскольку

$$K_{P_1} = R P_1 R.$$

Трансформационные свойства различных полей относительно  $R$ -преобразования рассмотрены в [13]. В частности, для скалярного поля имеем

$$U(R) \varphi_p(x) U^{-1}(R) = \frac{1}{(X^2)^{\delta}} \varphi_p(Rx). \quad (3.2)$$

Воспользовавшись инвариантностью вакуума и формулами (3.1, 2), получим

$$\frac{1}{(X_1^2)^{\delta_1}} \frac{1}{(X_2^2)^{\delta_2}} \frac{1}{[R(X_1, X_2)]^{\delta_1 + \delta_2}} = \frac{1}{(X_{12}^2)^{\delta_1 + \delta_2}},$$

или, учитывая (1.6),

$$\frac{(X_1^2)^{\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}} (X_2^2)^{\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}}{(X_1^2)^{\delta_1} (X_2^2)^{\delta_2}} = \left( \frac{X_1^2}{X_2^2} \right)^{\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}} = 1. \quad (3.3)$$

Последнее возможно только в случае, если  $\delta_1 = \delta_2$ , и

$$\langle 0 | \varphi_p(x_1) \varphi_p(x_2) | 0 \rangle = \begin{cases} \frac{A_p}{(X_{12}^2)^{\delta}}, & \text{если } \delta_1 = \delta_2 = \delta; \\ 0, & \text{если } \delta_1 \neq \delta_2; \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $A_p$  - нормировочная константа. Этот результат является общим и справедлив для полей любой тензорной структуры. Он имеет простой математический смысл: состояния  $\varphi_p^+(x) | 0 \rangle$  образуют пространство неприводимого представления, а векторы, принадлежащие разным представлениям, ортогональны, см. (2.9). Заметим, что каждому полю  $\varphi_p(x)$ , преобразующемуся по представлению (2.6), можно сопоставить поле  $\varphi_{\tilde{p}}(x)$ , преобразующееся по эквивалентному представлению (2.7). Для таких полей имеем

$$\varphi_{\tilde{p}}^+(x) | 0 \rangle = \int dy \Delta_{\sigma}^{-1}(y-x) \varphi_{\sigma}^+(y) | 0 \rangle, \quad (3.5)$$

где  $\Delta_{\sigma}(x-y)$  - скалярное произведение (2.8) в евклидовом пространстве. Из (3.5) следует

$$\langle 0 | \varphi_{\tilde{p}}(x_1) \varphi_{\sigma}^+(x_2) | 0 \rangle \sim \langle x_1, \tilde{\sigma} | \sigma, x_2 \rangle = \delta_{(x_1, x_2)}^{(\sigma)}. \quad (3.5a)$$

В частности, для скалярных полей имеем

$$\langle 0 | \varphi_p(x_1) \varphi_{4-\delta}(x_2) | 0 \rangle \sim \delta^{(\sigma)}(x_1, x_2). \quad (3.4a)$$

Это не противоречит (3.4), поскольку функция Грина (3.4a) отличается от нуля только при  $x_1 = x_2$ , а соотношение (3.3) в этой точке выполняется тождественно. Нормировку функций Грина

$$D_{\delta}(x_1, x_2) = \langle 0 | \varphi_p(x_1) \varphi_p(x_2) | 0 \rangle, \quad D_{4-\delta}(x_1, x_2) = \langle 0 | \varphi_{4-\delta}(x_1) \varphi_{4-\delta}(x_2) | 0 \rangle \quad (3.6)$$

выберем так, чтобы выполнялось равенство

$$D_{\delta}^{-1}(x) = D_{4-\delta}(x). \quad (3.7)$$

Нетрудно проверить, что этому условию удовлетворяет функция ( $D = 4$ ):

$$D_{\delta}(x) = \frac{4^{\delta}}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(2-\delta)} \frac{1}{(X^2)^{\delta}}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим тензорные поля. Пусть  $T_{\mu_1 \dots \mu_s}^{\ell}(x)$  - симметричный бесследный тензор с размерностью  $\ell$ . Его трансформационные свойства относительно  $R$ -преобразования определены соотношением [13]

$$U(R) T_{\mu_1 \dots \mu_s}^{\ell}(x) U^{-1}(R) = \frac{1}{(X^2)^{\ell}} g_{\mu_1 \nu_1}(x) \dots g_{\mu_s \nu_s}(x) T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\ell}(Rx), \quad (3.9)$$

где  $g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} - 2 \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}$ . (3.10)

Нормированные функции Грина имеют вид

$$\Delta_{\mu_1 \dots \mu_s, \nu_1 \dots \nu_s}^{\ell}(x_1, x_2) = \frac{4^{\ell}}{(4\pi)^h} n_s(\ell) (x_{12}^2)^{-\ell} \{ g_{\mu_1 \nu_1}(x_{12}) \dots g_{\mu_s \nu_s}(x_{12}) - \text{сфер. чл.} \}, \quad (3.11)$$

где  $n_s(\ell) = \frac{\Gamma(\ell+s)}{\Gamma(h-\ell)} \frac{\Gamma(D-\ell-1)}{\Gamma(D-\ell+s-1)}$ ,  $h = \frac{D}{2}$ .

Здесь подразумевается симметризация по индексам  $\mu_1, \dots, \mu_s$ .

Нормировка функций (3.11) вычислялась в [20].

Рассмотрим функции Грина трех полей. Пусть  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  и  $\varphi_3(x)$  — скалярные поля,

$$G_3^{\delta_1 \delta_2 \delta_3}(x_1, x_2, x_3) = \langle 0 | \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \varphi_3(x_3) | 0 \rangle. \quad (3.13)$$

Пуанкаре и масштабная инвариантность дает

$$G_3^{\delta_1 \delta_2 \delta_3}(x_1, x_2, x_3) \sim (x_{12}^2)^{-\Delta_3} (x_{13}^2)^{-\Delta_2} (x_{23}^2)^{-\Delta_1}. \quad (3.14)$$

Применяя к (3.13, 14)  $R$  — преобразование, получим, воспользовавшись (3.2) и (1.6),

$$\frac{1}{(x_1^2)^{\delta_1}} \frac{1}{(x_2^2)^{\delta_2}} \frac{1}{(x_3^2)^{\delta_3}} (x_1^2 x_2^2)^{\Delta_3} (x_2^2 x_3^2)^{\Delta_2} (x_1^2 x_3^2)^{\Delta_1} = 1,$$

откуда

$$\Delta_1 = \frac{\delta_2 + \delta_3 - \delta_1}{2}, \quad \Delta_2 = \frac{\delta_1 + \delta_3 - \delta_2}{2}, \quad \Delta_3 = \frac{\delta_1 + \delta_2 - \delta_3}{2}. \quad (3.15)$$

Введем вспомогательные функции

$$\tilde{\Delta}_{\delta}(x) = \frac{4^{\delta}}{(4\pi)^h} \Gamma(\delta) (x^2)^{-\delta}. \quad (3.16)$$

Они удовлетворяют соотношениям [21]

$$\int dx \tilde{\Delta}_{\delta_1}(x_1-x) \tilde{\Delta}_{\delta_2}(x_2-x) \tilde{\Delta}_{\delta_3}(x_3-x) = (4\pi)^h \tilde{\Delta}_{h-\delta_1}(x_{23}) \tilde{\Delta}_{h-\delta_2}(x_{13}) \tilde{\Delta}_{h-\delta_3}(x_{12}), \quad (3.17)$$

где  $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = D$ ,

$$\tilde{\Delta}_{\delta_1}(x) \tilde{\Delta}_{\delta_2}(x) = \frac{4^{\delta_1+\delta_2}}{(4\pi)^h} \frac{\Gamma(\delta_1) \Gamma(\delta_2)}{\Gamma(\delta_1+\delta_2)} \tilde{\Delta}_{\delta_1+\delta_2}(x), \quad (3.18)$$

$$\tilde{\Delta}_{D-\delta}(x) = \Gamma(h-\delta) \Gamma(\delta-h) \tilde{\Delta}_{\delta}^{-1}(x). \quad (3.19)$$

Формулы (3.16-19) приведены для  $D$ -мерного евклидова пространства,

$$h = \frac{D}{2}.$$

Нормированную функцию (3.14) удобно записать в форме

$$G_3^{\delta_1 \delta_2 \delta_3}(x_1, x_2, x_3) = g N_0(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \Gamma\left(\frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{2} - h\right). \quad (3.20)$$

$$\tilde{\Delta}_{\frac{\delta_1 + \delta_2 - \delta_3}{2}}(x_{12}) \tilde{\Delta}_{\frac{\delta_1 + \delta_3 - \delta_2}{2}}(x_{13}) \tilde{\Delta}_{\frac{\delta_2 + \delta_3 - \delta_1}{2}}(x_{23}),$$

где  $g$  — константа связи, а  $N_0(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  — нормировочный множитель, инвариантный относительно замены  $\delta_i \rightarrow D - \delta_i$ . Он будет определен ниже. В нормировке (3.20) имеем

$$\int dx' D_{\delta_1}^{-1}(x-x') G_3^{\delta_1 \delta_2 \delta_3}(x', x_2, x_3) = G_3^{D-\delta_1, \delta_2, \delta_3}(x, x_2, x_3), \quad (3.21)$$

и аналогично по аргументам  $x_2$  и  $x_3$ . При вычислениях используются формулы (3.17, 18). Преобразование (3.21) соответствует

переходу к полям  $\Psi_{D-S}(x)$ , преобразующимся по эквивалентным представлениям, см. (3.5).

Аналогично могут быть вычислены функции Грина с тензором ранга  $S$ . Они имеют вид

$$G_{\mu_1 \dots \mu_S}^{d_1 d_2 \ell}(x_1, x_2, x_3) = \langle 0 | \Psi_{d_1}^{d_1}(x_1) \Psi_{d_2}^{d_2}(x_2) T_{\mu_1 \dots \mu_S}^{\ell}(x_3) | 0 \rangle = \\ = \Gamma\left(\frac{d_1 + d_2 + \ell + S}{2} - h\right) \frac{\Gamma\left(\frac{d_1 - d_2 + \ell + S}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d_2 - d_1 + \ell + S}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d_1 - d_2 + \ell - S}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d_2 - d_1 + \ell - S}{2}\right)}, \quad (3.22)$$

$$N_S(d_1, d_2, \ell) \tilde{\Delta}_{\frac{d_1 + d_2 - \ell + S}{2}}(x_{12}) \tilde{\Delta}_{\frac{d_1 - d_2 + \ell - S}{2}}(x_{12}) \tilde{\Delta}_{\frac{d_2 - d_1 + \ell - S}{2}}(x_{23}) \cdot \\ \cdot \{ \lambda_{\mu_1}^{x_3}(x_1, x_2) \dots \lambda_{\mu_S}^{x_3}(x_1, x_2) - \text{следы} \},$$

$$\text{где } \lambda_{\mu}^{x_3}(x_1, x_2) = \frac{(x_{12})_{\mu}}{x_{13}^2} - \frac{(x_{23})_{\mu}}{x_{23}^2}, \quad (3.23)$$

$N_S(d_1, d_2, \ell)$  - множитель, инвариантный относительно замены  $d_{12} \rightarrow D - d_{12}$  и  $\ell \rightarrow D - \ell$ . При выводе (3.22) использовано соотношение (3.9) и

$$g_{\mu\nu}^{R_x}(x) \lambda_{\mu}^{R_x}(R x_1, R x_2) = x^2 \lambda_{\mu}^{R_x}(x_1, x_2). \quad (3.24)$$

Нормировка (3.22) выбрана так, чтобы выполнялись соотношения

$$\int dx'_1 D_{d_1} \Psi_{d_1}^{d_1}(x_1) G_{\mu_1 \dots \mu_S}^{d_1 d_2 \ell}(x_1, x_2, x_3) = G_{\mu_1 \dots \mu_S}^{D-d_1, d_2, \ell}(x_1, x_2, x_3), \quad (3.25)$$

и аналогично по аргументу  $x_2$ ,

$$\int dx'_3 \Delta_{\mu_1 \dots \mu_S}^{\ell}(x_3) G_{\nu_1 \dots \nu_S}^{d_1 d_2 \ell}(x_1, x_2, x_3) = G_{\mu_1 \dots \mu_S}^{d_1 d_2, D-\ell}(x_1, x_2, x_3). \quad (3.26)$$

При проверке (3.25, 26) используются формулы (см. приложение)

$$\int dx \tilde{\Delta}_{d_1}^{d_1}(x_1-x) \tilde{\Delta}_{d_2}^{d_2}(x_2-x) \tilde{\Delta}_{d_3}^{d_3}(x_3-x) \{ \lambda_{\mu_1}^{x_3}(x_1, x_2) \dots \lambda_{\mu_S}^{x_3}(x_1, x_2) - \text{следы} \} = \\ = (4\pi)^h \frac{\Gamma(h-d_3+S) \Gamma(d_1)}{\Gamma(h-d_3)} \tilde{\Delta}_{h-d_1}^{d_1}(x_{23}) \tilde{\Delta}_{h-d_2}^{d_2}(x_{13}) \tilde{\Delta}_{h-d_3}^{d_3}(x_{12}) \cdot \\ \cdot \{ \lambda_{\mu_1}^{x_3}(x_2, x_3) \dots \lambda_{\mu_S}^{x_3}(x_2, x_3) - \text{следы} \}, \quad (3.27)$$

где  $d_1 + d_2 + d_3 = D$ ,

и

$$\int dx \tilde{\Delta}_{d_1}^{d_1}(x_1-x) \tilde{\Delta}_{d_2}^{d_2}(x_2-x) \tilde{\Delta}_{d_3}^{d_3}(x_3-x) \cdot \\ \cdot \{ g_{\mu_1}^{x_3}(x_1, x_2, x_3) \dots g_{\mu_S}^{x_3}(x_1, x_2, x_3) - \text{следы} \} = \\ = (4\pi)^h \frac{\Gamma(D-d_1+S-1) \Gamma(h-d_2) \Gamma(h-d_3)}{\Gamma(D-d_1-1)} \frac{\Gamma(d_1) \Gamma(d_2) \Gamma(d_3)}{\Gamma(d_1+S) \Gamma(d_2+S) \Gamma(d_3+S)} \cdot \\ \cdot \tilde{\Delta}_{h-d_1}^{d_1}(x_{23}) \tilde{\Delta}_{h-d_2-S}^{d_2}(x_{13}) \tilde{\Delta}_{h-d_3-S}^{d_3}(x_{12}) \{ \lambda_{\mu_1}^{x_3}(x_2, x_3) \dots \lambda_{\mu_S}^{x_3}(x_2, x_3) - \text{следы} \}, \quad (3.27a)$$

$$\text{где } d_1 + d_2 + d_3 = D - S, \\ g_{\mu}^{x_3}(x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu}(x_1-x) \lambda_{\nu}^{x_3}(x_2, x_3).$$

Приведем в заключение еще две функции Грина, которые потребуются в дальнейшем:

$$\langle 0 | T_{\mu_1 \dots \mu_S}^d(x_1) \Psi_{d_2}^{d_2}(x_2) j_{\mu}^{d_3}(x_3) | 0 \rangle = \\ = \{ A_1 \lambda_{\mu_1}^{x_3}(x_1, x_2) [ \lambda_{\mu_2}^{x_3}(x_2, x_3) \dots \lambda_{\mu_S}^{x_3}(x_2, x_3) - \text{следы} ] + \\ + B_1 \frac{1}{x_{13}^2} [ \sum_{\kappa} g_{\mu_1 \mu_{\kappa}}(x_{13}) \lambda_{\mu_2}^{x_3}(x_2, x_3) \dots \lambda_{\mu_{\kappa}}^{x_3} \dots \lambda_{\mu_S}^{x_3}(x_2, x_3) - \text{следы} ] \} \cdot$$

$$\tilde{\Delta}_{\frac{d_1 + d_2 + d_3 - S - 1}{2}}(x_{13}) \tilde{\Delta}_{\frac{d_1 + d_2 - d_3 - S + 1}{2}}(x_{12}) \tilde{\Delta}_{\frac{d_2 + d_3 - d_1 + S - 1}{2}}(x_{23}),$$

где  $A_1$  и  $B_1$  - произвольные константы,  $\hat{\lambda}_{\mu}^{x_3}$  означает пропуск индекса.

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | T_{\mu_1 \dots \mu_s}^{d_1}(x_1) \Psi_{d_2}(x_2) T_{\nu_1 \nu_2}^{d_3}(x_3) | 0 \rangle = \\
& = \left\{ A \left[ \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2, x_3) \dots \lambda_{\mu_s}^{x_s}(x_2, x_3) - \text{следы} \right] \cdot \left[ \lambda_{\nu_1}^{x_3}(x_1, x_2) \lambda_{\nu_2}^{x_3}(x_1, x_2) - \frac{1}{D} \delta_{\nu_1 \nu_2} \frac{x_{12}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2} \right] + \right. \\
& + \frac{1}{x_{13}^2} B \left[ \sum_{\kappa} \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2, x_3) \dots \lambda_{\mu_s}^{x_s}(x_2, x_3) \left( g_{\mu_1 \nu_1}(x_{13}) \lambda_{\nu_2}^{x_3}(x_1, x_2) + \right. \right. \\
& + g_{\mu_1 \nu_2}(x_{13}) \lambda_{\nu_1}^{x_3}(x_1, x_2) - \frac{2}{D} \delta_{\nu_1 \nu_2} g_{\mu_1 \nu}(x_{13}) \lambda_{\nu}^{x_3}(x_1, x_2) \left. \right) - \text{следы по } \nu \left. \right] + \\
& + \frac{1}{(x_{13}^2)^2} C \left[ \sum_{\kappa \neq \epsilon} \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2, x_3) \dots \lambda_{\mu_\kappa}^{x_\kappa} \dots \lambda_{\mu_\epsilon}^{x_\epsilon} \dots \lambda_{\mu_s}^{x_s}(x_2, x_3) \right. \\
& \left. \left( g_{\mu_\kappa \nu}(x_{13}) g_{\mu_\epsilon \nu}(x_{13}) - \frac{1}{D} \delta_{\nu \nu} \delta_{\mu_\kappa \mu_\epsilon} \right) - \text{следы по } \mu \right] \left. \right\} \\
& \tilde{\Delta}_{\frac{d_1+d_3-d_2-s-2}{2}}(x_{13}) \tilde{\Delta}_{\frac{d_2+d_3-d_1+s-2}{2}}(x_{23}) \tilde{\Delta}_{\frac{d_1+d_2-d_3-s+2}{2}}(x_{12}).
\end{aligned}$$

При выводе (3.28, 29) использовались формулы (3.9), (3.24) и

$$\begin{aligned}
g_{\mu_1 \nu_1}(x_1) g_{\nu_1 \nu_2}(x_2) g_{\mu_1 \nu_1}(R x_1 - R x_2) &= g_{\mu_1 \nu}(x_{12}), \\
g_{\mu \sigma}(x) g_{\sigma \nu}(x) &= \delta_{\mu \nu}.
\end{aligned}$$

#### IV. Высшие функции Грина

Рассмотрим функцию Грина нейтрального скалярного поля  $\Psi_D(x)$  в  $D$ -мерном евклидовом пространстве:

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle 0 | \Psi_D(x_1) \Psi_D(x_2) \Psi_D(x_3) \Psi_D(x_4) | 0 \rangle. \quad (4.1)$$

Ввиду пуанкаре-инвариантности она зависит от шести переменных  $x_{ik}^2$ . Из них можно составить две безразмерных величины, инвариантных относительно растяжения и  $R$ -преобразования

$$\xi_1 = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2}, \quad \xi_2 = \frac{x_{13}^2 x_{24}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2}. \quad (4.2)$$

Наиболее общий вид конформно-инвариантной 4-точечной функции есть

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_{12}^2 x_{34}^2)^{-d} F(\xi_1, \xi_2), \quad (4.3)$$

где  $F(\xi_1, \xi_2)$  - произвольная функция.

Для дальнейших целей удобно перейти к одночастично-неприводимой части функции (4.1). Введем графические обозначения:

$$\begin{array}{c} x_1 \\ \diagdown \\ \Gamma \\ \diagup \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ \diagup \\ \Gamma \\ \diagdown \\ x_4 \end{array} = \langle 0 | \Psi_D(x_1) \Psi_D(x_2) \Psi_D(x_3) | 0 \rangle, \quad (4.4)$$

$$\begin{array}{c} x_1 \\ \diagdown \\ \Gamma_{\text{сб}} \\ \diagup \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ \diagup \\ \Gamma_{\text{сб}} \\ \diagdown \\ x_4 \end{array} = G(x_1, x_2, x_3, x_4) - D_D(x_{12}) D_D(x_{34}) - \\ - D_D(x_{13}) D_D(x_{24}) - D_D(x_{14}) D_D(x_{23}), \quad (4.5)$$

где  $D_D(x)$  - функция Грина (3.8).

Одночастично-неприводимая вершина определяется как

$$\begin{array}{c} x_1 \\ \diagdown \\ \Gamma_{\text{сб}} \\ \diagup \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ \diagup \\ \Gamma_{\text{сб}} \\ \diagdown \\ x_4 \end{array} = \begin{array}{c} x_1 \\ \diagdown \\ \Gamma \\ \diagup \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ \diagup \\ \Gamma \\ \diagdown \\ x_4 \end{array} - \begin{array}{c} x_1 \\ \diagdown \\ \Gamma \\ \diagup \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ \diagup \\ \Gamma \\ \diagdown \\ x_4 \end{array} - \begin{array}{c} x_1 \\ \diagdown \\ \Gamma \\ \diagup \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ \diagup \\ \Gamma \\ \diagdown \\ x_4 \end{array} - \begin{array}{c} x_1 \\ \diagdown \\ \Gamma \\ \diagup \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ \diagup \\ \Gamma \\ \diagdown \\ x_4 \end{array}. \quad (4.6)$$

Внутренним линиям сопоставляется обратная функция Грина. Вершина (4.6) может быть записана в такой же форме, как (4.3). Представляя произвольную функцию от  $\xi_1$  и  $\xi_2$  в виде интеграла Меллина, имеем [13]

$$\begin{array}{c} x_1 \\ \diagdown \\ \Gamma_{\text{сб}} \\ \diagup \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ \diagup \\ \Gamma_{\text{сб}} \\ \diagdown \\ x_4 \end{array} = (x_{12}^2 x_{34}^2)^d \int d\alpha d\beta f(\alpha, \beta, \alpha + \beta - d) (x_{12}^2 x_{34}^2)^{-\alpha \beta} (x_{14}^2 x_{23}^2)^{\alpha} (x_{13}^2 x_{24}^2)^{\beta}. \quad (4.7)$$



Контур интегрирования по  $\alpha, \beta$  проходит вдоль мнимой оси. Локальность, т.е. симметрия функции (4.7) относительно перестановок координат

$$x_i \rightleftharpoons x_k, \quad (4.8)$$

приводит к требованию симметрии функции  $f(\alpha\beta\gamma)$ :

$$f(\alpha\beta\gamma) = f(\beta\alpha\gamma) = f(\alpha\gamma\beta). \quad (4.9)$$

Можно показать [13], что функция (4.7) с дополнительным ограничением (4.8) удовлетворяет всем аксиомам теории поля.

Рассмотрим другое представление вершины (4.6), близкое к представлению (2.25) для функций Вайтмана. Оно может быть получено непосредственно из (2.25), что будет обсуждаться ниже. Здесь мы приведем евклидовский вариант этого разложения [5, 20], см. также [4, 22]. Конформная группа евклидова пространства имеет более простую структуру. Это проявляется, например, в том, что все ее представления конечнокомпонентны по спину [5]. Напомним, что конформная группа в псевдоевклидовом пространстве имеет бесконечнокомпонентные по спину представления, которые не входят в (2.23) лишь благодаря аксиоме спектральности.

Введем инвариантные 2- и 3-точечные функции  $\Delta_\sigma(x)$  и  $C^{\delta\delta\sigma}(x_1, x_2, x_3)$ , нормированные условиями

$$\Delta_\sigma^{-1}(x) = \Delta_{\tilde{\sigma}}(x), \quad (4.10)$$

$$C^{\delta\delta\sigma}(x_1, x_2, x_3) = \int dx'_i \Delta_\sigma(x_i - x'_i) C^{\delta\delta\tilde{\sigma}}(x'_i, x_2, x_3), \quad (4.11)$$

$$C^{\delta\delta\sigma}(x_1, x_2, x_3) = \int dx'_3 \Delta_\sigma(x_3 - x'_3) C^{\delta\delta\tilde{\sigma}}(x_1, x_2, x'_3), \quad (4.12)$$

$$\text{где } \sigma = (l, \frac{s}{2}, \frac{s}{2}) \equiv (l, s), \quad \tilde{\sigma} = (4-l, \frac{s}{2}, \frac{s}{2}) \equiv (4-l, s). \quad (4.13)$$

Спиновые индексы в (4.10-12) и во всех дальнейших формулах опущены. Явный вид функций  $\Delta_\sigma$  и  $C^{\delta\delta\sigma}$  дается формулами (3.11) и (3.22), т.к. нормировка 2- и 3-точечных функций Грина выбрана в соответствии с (4.10-12). Введем графические обозначения

$$C^{\delta\delta\sigma}(x_1, x_2, x_3) = \begin{array}{c} x_1 \sigma \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} x_2 \delta \\ \text{---} x_3 \delta \end{array}, \quad C^{\delta\delta\tilde{\sigma}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{array}{c} x_1 \sigma \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} x_2 \delta \\ \text{---} x_3 \delta \end{array}. \quad (4.14)$$

Рассмотрим интеграл  $\int_{\delta_1}^{x_1 \sigma} \int_{\delta_2}^{x_2 \sigma_2}$ , где внутренним линиям сопоставляются функции  $\Delta_\sigma^{-1}(x)$ . Очевидно, что он пропорционален инвариантному скалярному произведению векторов  $\langle \sigma, x \rangle$ .

$$\int_{\delta_1}^{x_1 \sigma} \int_{\delta_2}^{x_2 \sigma_2} \sim \langle x_1 \sigma_1 | \sigma_2, x_2 \rangle.$$

Как показано в предыдущем разделе, векторы  $\langle \sigma, x \rangle$ , принадлежащие разным представлениям, ортогональны, см. (3.4, 5a):  $\langle x_1 \sigma_1 | \sigma_2, x_2 \rangle \neq 0$  только в случае, если  $\sigma_1 = \sigma_2$  или  $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_2$ . Таким образом, функции (4.14) удовлетворяют соотношению ортогональности, которое мы запишем в виде

$$\int_{\delta_1}^{x_1 \sigma_1} \int_{\delta_2}^{x_2 \sigma_2} = \frac{1}{2} \left\{ \delta_{\sigma_1 \tilde{\sigma}_2}^{(2)} \delta(x_1 - x_2) + \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \Delta_{\sigma_2}(x_1, x_2) \right\}. \quad (4.15)$$

Здесь  $\delta_{\sigma_1 \sigma_2}$  определена соотношением

$$\sum_{\sigma_2} \delta_{\sigma_1 \sigma_2} f(\sigma_2) = f(\sigma_1), \quad (4.16a)$$

где  $\sum_{\sigma} \equiv \frac{1}{2\pi i} \sum_s \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} dl \mu_s(l)$ , (4.16)

$\mu_s(l)$  - весовые функции. Соотношение ортогональности фиксирует нормировочный множитель  $N_s(d_1, d_2, l)$  вершин (4.14), см. (3.22). Вычисление  $\mu_s(l)$  и  $N_s(d_1, d_2, l)$  приведено в [20]. Если выбрать  $\mu_s(l)$  в виде

$$\begin{aligned} \mu_s(l) &= \frac{1}{4} 2^s (4\pi)^{3h} \frac{\Gamma(k+s)}{\Gamma(s)} n_s(l) n_s(D-l) = \\ &= \frac{1}{4} 2^s (4\pi)^{3h} \frac{\Gamma(k+s)}{\Gamma(s)} (l+s-1)(D-l+s-1) \frac{\Gamma(l)\Gamma(D-l)}{\Gamma(k-l)\Gamma(l-k)}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где  $n_s(l)$  дается формулой (3.12), то для  $N_s(d_1, d_2, l)$  получим

$$\begin{aligned} N_s(d_1, d_2, l) &= \left\{ \Gamma\left(\frac{d_1+d_2+l-s}{2}-h\right) \Gamma\left(\frac{d_1+d_2-l-s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d_1-d_2+l+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d_2-d_1+l+s}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. \Gamma\left(D-\frac{d_1+d_2+l-s}{2}\right) \Gamma\left(h-\frac{d_1+d_2-l-s}{2}\right) \Gamma\left(h-\frac{d_1-d_2+l-s}{2}\right) \Gamma\left(h-\frac{d_2-d_1+l-s}{2}\right) \right\}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Разложение вершины (4.6) имеет вид

$$\text{Diagram} = \sum_{\sigma} \rho(\sigma) \text{Diagram}_{\sigma}, \quad (4.19)$$

Здесь подразумевается интегрирование по координатам и суммирование по спиновым индексам волнистой линии, которой сопоставляется  $\Delta_{\sigma}^{-1}(x)$ ;  $\sum_{\sigma}$  дается формулой (4.16), суммирование идет только по четным  $S$  ввиду симметрии (4.8);  $\rho(\sigma)$  - спектральная функция. С учетом (4.15) она определяется, как

$$\text{Diagram} = \rho(\sigma) \text{Diagram}_{\sigma}. \quad (4.20)$$

Ее свойства зависят от нормировки функций  $C^{d\delta\sigma}(x, x_2, x_3)$ . В нормировке (4.10-12) имеем

$$\rho(\sigma) = \rho(\tilde{\sigma}), \quad (4.21)$$

т.е. вклад эквивалентных представлений  $\sigma$  и  $\tilde{\sigma}$  в (4.19) одинаков.

Соотношения (4.15, 20) строго обоснованы только на контуре интегрирования в (4.16, 19). При этом функции  $C^{d\delta\sigma}(x, x_2, x_3)$  имеют смысл коэффициентов Клебша-Гордана и образуют полный ортогональный набор. Они могут быть доопределены для любых комплексных значений  $l$  аналитическим продолжением с этого контура, если это допускает аналитические свойства  $\rho(\sigma)$ . В дальнейшем будет предполагаться, что все спектральные функции обладают требуемыми аналитическими свойствами.

Разложение, аналогичное (4.19), можно написать также для высших вершин. Например,

$$\text{Diagram} = \sum_{\sigma} \text{Diagram}_{\sigma}, \quad (4.22)$$

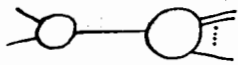
где

$$\text{Diagram}_{\sigma} = \text{Diagram}_{\sigma}. \quad (4.23)$$

Для сходимости разложений (4.22) необходима сходимость интеграла

$$\text{Diagram} = \text{Diagram}. \quad (4.24)$$

Обычно сходимость таких интегралов нарушается одночастично разре-  
заемыми графами, например,



Эти графы необходимо вычесть из вершины (4.22). По этой же причи-  
не мы рассматривали одночастично-неприводимую вершину (4.6) вмес-  
то функций Грина (4.5).

Для  $\mathcal{K}$  - точечных вершин, из которых вычтены все графы, раз-  
резаемые по одной линии, можно написать разложение по всем аргу-  
ментам. Например,

$$\text{Graph} = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} \rho(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \text{Graph}_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$$

Отметим, что в работах [15, 20] подробно исследованы разложе-  
ния (4.19) и (4.22) применительно к евклидовой теории поля. Может  
оказаться, что в (4.19) необходимо потребовать некоторых дополни-  
тельных ограничений на аналитические свойства функции  $\rho(\sigma)$  или  
на ее асимптотическое поведение, чтобы удовлетворить аксиомам тео-  
рии поля в пространстве Минковского. Такие ограничения возникают  
при попытке вывести разложение (4.19) непосредственно из разложе-  
ния для функций Вайтмана (2.25) и (2.26). Как было показано в раз-  
деле II, в это разложение дает вклад только действительные размер-  
ности (следствие спектральности). Предположим, что эти размернос-  
ти имеют дискретный спектр  $\ell = \ell_n$ . Тогда выражение, стоящее в  
(2.25) под знаком суммы по  $\ell$ , можно продолжить на всю комплекс-  
ную плоскость  $\ell$ , введя аналитическую функцию  $\rho(\ell, s) (C^{\ell, s})^\dagger \Delta_{\ell, s}^{-1} C^{\ell, s}$   
с полюсами в дискретных точках  $\ell_n$  так, чтобы

$$\text{res}_{\ell = \ell_n} \{ \rho(\ell, s) (C^{\ell, s})^\dagger \Delta_{\ell, s}^{-1} C^{\ell, s} \} = \rho(\ell_n, s) (C^{\ell_n, s})^\dagger \Delta_{\ell_n, s}^{-1} C^{\ell_n, s}, \quad (4.25)$$

а сумму по дискретным размерностям  $\ell_n$  представить в виде инте-  
грала по контуру, огибающему действительную ось. Если развернуть  
этот контур, то мы получим разложение, аналогичное (4.19). Часть  
полюсов (4.25) имеет кинематическое происхождение. Это полюсы в  
точках (2.27). Они должны быть включены в нормировку функций  $C^{\ell, s}$ ,  
продолженных на всю комплексную плоскость. Динамические размер-  
ности соответствуют полюсам функции  $\rho(\ell, s)$ . Если в сумме по  
 $\ell_n$  в (2.25) имеется непрерывный спектр, то он связан с ветвления-  
ми функции  $\rho(\ell, s)$ . В том случае, когда динамический спектр от-  
сутствует, т.е.  $\rho(\ell, s) = 1$ , поля  $\psi_q(x)$  в (2.25) являются обоб-  
щенными свободными полями, а разложение (2.25) переходит в соот-  
ношение полноты для нормированных коэффициентов Клебша-Гордана.

Подчеркнем, что в такой программе существенную роль играют  
аксиомы спектральности и положительности, а также кроссинг-сим-  
метрия. Последняя необходима при аналитическом продолжении функ-  
ций Вайтмана к евклидовым координатам. Последовательный вывод раз-  
ложения (4.19) требует уточнения некоторых технических деталей и  
будет рассмотрен в другой работе. Ясно, однако, что в таком подхо-  
де требуется достаточно быстрое убывание  $\rho(\sigma)$  в правой полуплос-  
кости по  $\ell$ . Это необходимо для перехода к контуру интегриро-  
вания в (4.16).

В дальнейшем будет предполагаться, что функции  $\rho(\sigma)$  не име-  
ют ветвлений. Как следствие спектральности, положение их полюсов  
ограничено условиями (2.15) и (2.24).

Представляет интерес установить связь между разложениями (4.7) и (4.19). Требование локальности (мы будем называть его кроссинг-симметрией), которое легко может быть сформулировано в виде условий (4.8), приводит в случае (4.19) к интегральным уравнениям на  $\rho(\sigma)$ . Для их вывода запишем разложение вершины (4.6) тремя способами:

$$\text{Diagram} = \sum_{\sigma} \rho(\sigma) \text{Diagram} = \sum_{\sigma} \rho(\sigma) \text{Diagram} = \sum_{\sigma} \rho(\sigma) \text{Diagram} \quad (4.26)$$

Ввиду симметрии (4.8) во всех трех разложениях стоит одна и та же функция  $\rho(\sigma)$ . Используя соотношение ортогональности, получим

$$\rho(\sigma) \text{Diagram} = \sum_{\sigma'} \text{Diagram} \rho(\sigma') \quad (4.27)$$

Общее решение этих уравнений можно получить, выразив спектральную функцию  $\rho(\sigma)$  через симметричную функцию  $f(\alpha\beta\delta)$ , входящую в (4.7).

В качестве иллюстрации применения (4.7) рассмотрим простейший пример вершины, в которую дает вклад только скалярные представления  $\sigma = (\ell, 0, 0)$ :

$$\rho(\sigma) = \begin{cases} \rho(\ell) & \text{при } s=0, \\ 0 & \text{при } s \neq 0. \end{cases}$$

Разложение (4.19) в этом случае имеет вид

$$\text{Diagram} = \int d\ell \rho'(\ell) \left[ (x_{12}^2)^{\ell_2 - \delta} (x_{34}^2)^{h - \ell_2 - \delta} \int dz \{ (x_1 - z)^2 (x_2 - z)^2 \}^{-\frac{\ell_2}{2}} \{ (x_3 - z)^2 (x_4 - z)^2 \}^{\frac{\ell_2 - h}{2}} \right] \quad (4.28)$$

Все нормировочные множители, зависящие от  $\ell$ , включены в  $\rho'(\ell)$ . Вычисляя интеграл по  $z$  с помощью соотношения  $|2I| (d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = D)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^4} \Gamma(d_1) \Gamma(d_2) \Gamma(d_3) \Gamma(d_4) \int d^4 x_5 (x_{15}^2)^{-d_1} (x_{25}^2)^{-d_2} (x_{35}^2)^{-d_3} (x_{45}^2)^{-d_4} = \\ & = \frac{1}{(2\pi i)^2} 2 (x_{12}^2)^{h - d_1 - d_2} (x_{34}^2)^{h - d_3 - d_4} (x_{23}^2)^{d_1 - h} (x_{14}^2)^{-d_4} \\ & \int d\alpha d\beta \Gamma(-\alpha) \Gamma(-\beta) \Gamma(\alpha + \beta + d_4) \Gamma(h - d_1 + \alpha + \beta) \Gamma(d_1 + d_2 - h - \beta) \\ & \Gamma(d_3 + d_4 - h - \alpha) \left( \frac{x_{13}^2 x_{24}^2}{x_{14}^2 x_{23}^2} \right)^\alpha \left( \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{14}^2 x_{23}^2} \right)^\beta, \end{aligned}$$

находим

$$(4.28) \sim (x_{12}^2 x_{34}^2)^{-d} \int d\alpha d\beta \left\{ \Gamma^2(-\alpha) \Gamma^2(-\beta) \int d\ell \rho'(\ell) \frac{\Gamma(\frac{\ell}{2} + \alpha + \beta) \Gamma(h - \frac{\ell}{2} + \alpha + \beta)}{\Gamma^2(\frac{\ell}{2}) \Gamma^2(h - \frac{\ell}{2})} \right\} (x_{12}^2 x_{34}^2)^{-\alpha - \beta} (x_{23}^2 x_{14}^2)^\alpha (x_{13}^2 x_{24}^2)^\beta$$

Это выражение имеет форму (4.7), где функция  $f(\alpha, \beta, -\alpha - \beta - d)$  состоит из членов, заключенных в фигурные скобки. Если теперь потребовать (4.10), то это зафиксирует функцию  $\rho'(\ell)$  так, чтобы

$$\int d\ell \rho'(\ell) \frac{\Gamma(\frac{\ell}{2} - \delta) \Gamma(h - \frac{\ell}{2} - \delta)}{\Gamma^2(\frac{\ell}{2}) \Gamma^2(h - \frac{\ell}{2})} = A \Gamma^2(-\delta),$$

где  $A$  - произвольная константа. Для функции  $f(\alpha\beta\delta)$  получим

$$f(\alpha\beta\delta) = A \Gamma^2(-\alpha) \Gamma^2(-\beta) \Gamma^2(-\delta),$$

т.е. в этом случае требование кроссинг-симметрии фиксирует вершину (4.28) с точностью до постоянного множителя.

Уравнения (4.27) рассматривались также в [16]. В этой работе,

помимо (4.26), использовано обобщенное условие унитарности. Вместе с разложениями (4.26) оно приводит к бесконечному набору уравнений для размерностей и констант связи операторов, соответствующих полюсам функции  $\rho(\sigma)$ , см. также раздел УШ.

#### У. Функции Грина спинорных полей

Закон преобразования спинорного поля  $\Psi_d(x)$  имеет вид

$$U(R) \Psi_d(x) U^{-1}(R) = \frac{\hat{x}}{(x^2)^{d+1/2}} \Psi_d(Rx). \quad (5.1)$$

Функция Грина двух спинорных полей равна

$$G_d(x_1, x_2) = \langle 0 | \Psi_d(x_1) \bar{\Psi}_d(x_2) | 0 \rangle = A_d \frac{\hat{x}}{(x^2)^{d+1/2}}, \quad (5.2)$$

где  $\hat{x} = x_\mu \gamma_\mu$ ,  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0$ ,  $A_d$  - нормировочная константа. Фиксируем ее условием

$$G_d^{-1}(x) = G_{4-d}(x). \quad (5.3)$$

В такой нормировке имеем

$$G_d(x) = -i \frac{4^d}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(d+1/2)}{\Gamma(5/2-d)} \frac{\hat{x}}{(x^2)^{d+1/2}} \equiv \frac{i}{\Gamma(5/2-d)} S_d(x). \quad (5.4)$$

Рассмотрим функцию Грина двух спинорных полей  $\Psi_d(x_1), \Psi_d(x_2)$  и скалярного (или псевдоскалярного) поля  $\varphi_p(x)$ :

$$\Gamma_{(x_1, x_2, x_3)}^{d, d_2, d} = \langle 0 | \Psi_d(x_1) \bar{\Psi}_{d_2}(x_2) \varphi_p(x_3) | 0 \rangle. \quad (5.5)$$

Наиболее общее выражение, совместимое с (5.1), есть

$$C_{(x_1, x_2, x_3)}^{d, d_2, d} = A \frac{\hat{x}_{13}}{(x_{13}^2)^{d+d_2+1}} \gamma_5 \frac{\hat{x}_{32}}{(x_{32}^2)^{d-d_2+1}} \cdot \frac{1}{(x_{12}^2)^{d+d_2-d}} + B \frac{\hat{x}_{12}}{(x_{12}^2)^{d+d_2-d+1}} \gamma_5 \frac{1}{(x_{13}^2)^{d-d_2-d}} \frac{1}{(x_{23}^2)^{d-d_2-d}}, \quad (5.6)$$

где  $A$  и  $B$  - константы. В дальнейшем мы будем считать поле  $\varphi(x)$  псевдоскалярным. Рассмотрим  $\gamma_5$  преобразование

$$\Psi(x) \rightarrow \gamma_5 \Psi(x), \quad \bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x) \gamma_5, \quad \varphi(x) \rightarrow -\varphi(x). \quad (5.7)$$

Нетрудно проверить, что первый член в (5.6) инвариантен относительно (5.7), а второй нет. В  $\gamma_5$  - инвариантной теории функция Грина (5.5) должна содержать только первый член.

Запишем инвариантную функцию (5.6) в форме

$$C_{(x_1, x_2, x_3)}^{d, d_2, d} = C_+^{d, d_2, d}(x_1, x_2, x_3) + C_-^{d, d_2, d}(x_1, x_2, x_3), \quad (5.8)$$

$$C_+^{d, d_2, d}(x_1, x_2, x_3) = N(d, d_2, d) \Gamma\left(\frac{d+d_2+d}{2} - 2\right)$$

$$S_{\frac{d_1-d_2+d}{2}}(x_{13}) \gamma_5 S_{\frac{d_2-d+d}{2}}(x_{32}) \tilde{\Delta}_{\frac{d+d_2-d}{2}}(x_{12}), \quad (5.9)$$

$$C_-^{d, d_2, d}(x_1, x_2, x_3) = i N(d, d_2, d) \Gamma\left(\frac{d+d_2+d}{2} - 3/2\right)$$

$$S_{\frac{d+d_2-d}{2}}(x_{12}) \gamma_5 \tilde{\Delta}_{\frac{d-d_2+d}{2}}(x_{13}) \tilde{\Delta}_{\frac{d_2-d+d}{2}}(x_{23}), \quad (5.10)$$

где  $N(d, d_2, d)$  - нормировочный множитель, определенный ниже, а

$$S_d(x) = -\frac{4^d}{(4\pi)^2} \Gamma(d+1/2) \frac{\hat{x}}{(x^2)^{d+1/2}}. \quad (5.11)$$

Функция  $S_d(x)$  удовлетворяет соотношениям <sup>[21]</sup> (см. также <sup>[13]</sup>)

$$\int dx S_d(x-x) S_{d_2}(x-x_2) \tilde{\Delta}_p(x_3-x) = (4\pi)^2 S_{2-d_2}(x_{13}) S_{2-d_1}(x_{32}) \tilde{\Delta}_{2-d}(x_{12}), \quad (5.12)$$

$$S_{4-d}(x) = -\Gamma(\frac{5}{2}-d)\Gamma(d-\frac{3}{2})S_d^{-1}(x), \quad (5.13)$$

$$S_{d_1}(x)S_{d_2}(x) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(d_1+\frac{1}{2})\Gamma(d_2+\frac{1}{2})}{\Gamma(d_1+d_2)} \tilde{\Delta}_{d_1+d_2}(x), \quad (5.14)$$

где  $\tilde{\Delta}_d(x)$ - функция (3.16) в 4-мерном пространстве,  $D=4$ ,  $h=2$ ,

$$S_d(x)\tilde{\Delta}_d(x) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(d)\Gamma(d+\frac{1}{2})}{\Gamma(d+d+\frac{1}{2})} S_{d+d}(x). \quad (5.15)$$

Используя (5.12-15), можно проверить, что для функций (5.9, 10) справедливы следующие соотношения:

$$\int dx'_i G_d^{-1}(x_i-x'_i) C_{\pm}^{d_1, d_2, d}(x'_i, x_2, x_3) = C_{\mp}^{4-d_1, d_2, d}(x_i, x_2, x_3), \quad (5.16)$$

$$\int dx D_d^{-1}(x_3-x) C_{\pm}^{d_1, d_2, d}(x, x_2, x) = C_{\pm}^{d_1, d_2, 4-d}(x, x_2, x_3), \quad (5.17)$$

где  $D_d(x)$ - функция Грина (3.8). Взяв эрмитово сопряжение от (5.16) получим

$$-\int dx'_2 C_{\pm}^{d_1, d_2, d}(x_1, x'_2, x_3) C_{\mp}^{-1}(x'_2, x_3) = C_{\mp}^{d_1, 4-d_2, d}(x_1, x_2, x_3). \quad (5.17a)$$

Здесь были использованы соотношения

$$[G_d(x)]^{\dagger} = \gamma_0 [G_d(x)] \gamma_0 = G_d(x), \quad [S_d(x)]^{\dagger} = S_d(x), \\ [C_{\pm}^{d_1, d_2, d}(x_1, x_2, x_3)]^{\dagger} = \pm C_{\pm}^{d_2, d_1, d}(x_2, x_1, x_3).$$

Для полной 3-точечной функции (5.8) имеем

$$\int dx G_d^{-1}(x_i-x) C_{\pm}^{d_1, d_2, d}(x, x_2, x_3) = C_{\pm}^{4-d_1, d_2, d}(x_i, x_2, x_3), \quad (5.18)$$

и аналогично по аргументу  $x_3$ .

Введем графическое обозначение:

$$C_{\pm}^{d_1, d_2, d}(x_1, x_2, x_3) = \begin{array}{c} x_1 d_1 \text{---} \\ \text{---} d_2 \\ \text{---} d_3 \end{array} \text{---} x_3 d \quad (5.19)$$

Используя обозначение (4.14) для ампутированной по одному аргументу функции  $C_{\pm}^{d_1, d_2, d}$ , получим из (5.16, 17)

$$C_{-}^{4-d_1, d_2, d}(x_1, x_2, x_3) = \begin{array}{c} d_1 \\ \text{---} d \\ \text{---} d_2 \end{array} \text{---} d, \quad C_{+}^{d_1, 4-d_2, d}(x_1, x_2, x_3) = \begin{array}{c} d \\ \text{---} d \\ \text{---} d_2 \end{array} \text{---} d \quad (5.20)$$

Нормировочный множитель  $N(d_1, d_2, d)$ , входящий в (5.9, 10), определяется из соотношения ортогональности для функции  $C_{\pm}$ .

$$\begin{array}{c} x_1 l_1 \\ \text{---} d \\ \text{---} d \end{array} \text{---} x_2 l_2 = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{l_1 l_2}^{(\frac{1}{2})} G_{\pm}^{(1)}(x_1-x_2), \quad (5.21)$$

$$\begin{array}{c} x_1 l_1 \\ \text{---} d_1 \\ \text{---} d_2 \end{array} \text{---} x_2 l_2 = \frac{1}{2} \left\{ \delta_{l_1 l_2}^{(\alpha)} D_{\pm}^{(\alpha)}(x_1, x_2) + \delta_{l_1, 4-l_2}^{(\alpha)} \delta_{l_2, x_2}^{(\beta)} \right\}. \quad (5.22)$$

Здесь  $\alpha, \beta$  - спинорные индексы,  $\delta_{l_1 l_2}^{(\frac{1}{2})}$  и  $\delta_{l_1 l_2}^{(\alpha)}$  определены соотношениями

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{2+i\infty} \mathcal{M}_{\frac{1}{2}}(l_2) dl_2 \delta_{l_1 l_2}^{(\frac{1}{2})} f(l_2) = f(l_1),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \mu_0(l_2) dl_2 \delta_{l_1 l_2}^{(0)} f(l_2) = f(l_1),$$

где  $\mu_0(l)$  и  $\mu_{1/2}(l)$  - весовые функции:

$$\mu_{1/2}(l) = \frac{1}{4} (4\pi)^6 \frac{\Gamma(l+1/2) \Gamma(9/2-l)}{\Gamma(5/2-l) \Gamma(l-7/2)}, \quad (5.23)$$

$$\mu_0(l) = \frac{1}{16} (4\pi)^6 \frac{\Gamma(l) \Gamma(4-l)}{\Gamma(2-l) \Gamma(l-2)}. \quad (5.24)$$

Нормировочный множитель  $N(d_1 d_2 \delta)$  равен

$$N(d_1 d_2 \delta) = \left\{ \Gamma\left(\frac{d_1+d_2+\delta}{2}-2\right) \Gamma\left(4-\frac{d_1+d_2+\delta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d_1+d_2+\delta}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5-d_1-d_2+\delta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d_1+d_2+\delta}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5-d_1-d_2+\delta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d_1+d_2+\delta}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{d_1+d_2+\delta}{2}\right) \right\}^{-1/2}. \quad (5.25)$$

При вычислении (5.23-25) используются формулы (5.12-15) и (3.17-19). Дополнительный множитель 1/4 в (5.24) появляется из-за взятия шпура по спинорным индексам. Второй член в (5.21) отсутствует, поскольку он связан с  $\chi_5$ -инвариантной частью  $C_{d_1 d_2 \delta}^{(0)}$ . Этот член появится, если записать соотношение ортогональности для полной 3-точечной функции (5.8). Учитывая (5.16, 17, 17a), можно переписать соотношения ортогональности (5.21, 22) в форме

$$x_1 l_1 \begin{array}{c} \circ \\ \leftarrow d \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \leftarrow d \\ \circ \end{array} x_2 l_2 = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{l_1 l_2}^{(1/2)} \delta^{(4)}(x_1-x_2), \quad (5.26)$$

$$x_1 l_1 \begin{array}{c} \circ \\ \leftarrow d \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \leftarrow d \\ \circ \end{array} x_2 l_2 = \frac{1}{2} \left\{ \delta_{l_1 l_2}^{(0)} \delta^{(4)}(x_1-x_2) + \delta_{l_1, 4-l_2}^{(0)} D_{l_1}(x_1-x_2) \right\}. \quad (5.27)$$

В (5.26) срабатывает второй член.

Введем для  $\chi_5$ -инвариантной функции Грина (5.5) обозначение

$$\Gamma_{(x_1 x_2 x_3)}^{d_1 d_2 \delta} = \begin{array}{c} \delta \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array} \begin{array}{c} d_1 \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array}$$

Константу связи определим соотношением:  $\Gamma_{(x_1 x_2 x_3)}^{d_1 d_2 \delta} = g C_{+}^{d_1 d_2 \delta}(x_1 x_2 x_3)$ , или, в графических обозначениях,

$$\begin{array}{c} \delta \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array} \begin{array}{c} d_1 \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array} = g \begin{array}{c} \delta \\ \swarrow \\ \circ \\ \searrow \\ d_2 \end{array} \begin{array}{c} d_1 \\ \swarrow \\ \circ \\ \searrow \\ d_2 \end{array}. \quad (5.29)$$

Для вершины  $\Gamma(x_1 x_2 x_3)$ , ампутированной по всем аргументам, найдем из (5.16, 17, 17a)

$$\int d x'_1 d x'_2 d x'_3 G_d^{-1}(x_1-x'_1) \Gamma_{(x'_1 x'_2 x'_3)}^{d_1 d_2 \delta} G_{d_2}^{-1}(x'_2-x_2) D_{\delta}^{-1}(x'_3-x_3) = - \Gamma_{(x_1 x_2 x_3)}^{4-d_1, 4-d_2, 4-\delta} \equiv \begin{array}{c} \delta \\ \swarrow \\ \circ \\ \searrow \\ d_2 \end{array}. \quad (5.30)$$

Рассмотрим 4-точечную функцию Грина с двумя спинорными полями:

$$G^{(0)}(x_1 x_2 x_3 x_4) = \langle 0 | \Psi_d(x_1) \bar{\Psi}_d(x_2) \Psi_{\delta}(x_3) \bar{\Psi}_{\delta}(x_4) | 0 \rangle. \quad (5.31)$$

Введем графическое обозначение для ее одночастично-неприводимой части:

$$\begin{array}{c} \delta \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array} \begin{array}{c} d_1 \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array} = \begin{array}{c} \delta \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array} \begin{array}{c} d_1 \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array} - \begin{array}{c} \delta \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array} \begin{array}{c} d_1 \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array} - \begin{array}{c} \delta \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array} \begin{array}{c} d_1 \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array}. \quad (5.32)$$

Вершина  $\Gamma_I$  может быть представлена в виде разложения аналогично (4.19). Имеем

$$\begin{array}{c} \delta \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array} \begin{array}{c} d_1 \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array} = \sum_{\sigma} \rho_I(\sigma) \begin{array}{c} \delta \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array} \begin{array}{c} d_1 \\ \swarrow \\ \Gamma \\ \searrow \\ d_2 \end{array}. \quad (5.33)$$



В отличие от (4.19) в разложение (5.33) дает вклад спин-тензорные представления, и  $\sum_{\sigma}$  определена как

$$\sum_{\sigma} = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \mu_j(\theta) d\theta, \quad (5.33a)$$

где  $j = (j_1, j_2) \oplus (j_2, j_1)$ .

Разложение (5.33), вообще говоря, неинвариантно относительно

$\gamma_5$ -преобразования, поскольку входящие в него 3-точечные функции могут содержать  $\gamma_5$ -неинвариантную часть. Если с самого начала использовать  $\gamma_5$ -инвариантную часть 3-точечных функций, то будет нарушено условие (4.21). Простейший способ сохранить это условие состоит в следующем. Запишем общее разложение (5.33), включающее  $\gamma_5$ -неинвариантные функции. Тогда

$$\rho_1(\sigma) = \rho_1(\tilde{\sigma}). \quad (5.34)$$

В частности, при  $j = (1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  это будут функции (5.8). Ввиду (5.18) условие (5.34) выполнено. Перейдем теперь к  $\gamma_5$ -инвариантной вершине  $\Gamma_1$ :

$$\Gamma_1 \rightarrow \frac{1}{2} (\Gamma_1 + \gamma_5 \Gamma_1 \gamma_5). \quad (5.35)$$

Поскольку

$$\gamma_5 C_{\pm}^{edd} \gamma_5 = \pm C_{\pm}^{edd},$$

в разложении (5.33) останутся только два члена,  $C_+^t G^t C_+$  и  $C_-^t G^t C_-$ . Перекрестные члены  $C_+^t G^t C_-$  и  $C_-^t G^t C_+$  исключаются при переходе к (5.35). Используя (5.16) и (5.17a) и сделав замену переменных  $\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}$  во втором члене, получим, с учетом (5.34), вместо двух членов один:  $2C_+^t G^t C_+$ . Дополнительный коэффициент 2 компенсируется соответствующим выбором соотношения ортогональности (множи-

тель 1/2 в правой части (5.21) и (5.26)). В результате для спектральной функции  $\rho_1(\sigma)$  имеем

$$\rho_1(\sigma) \text{ (diagram)} = \text{ (diagram)} \Gamma_1, \quad (5.36)$$

где  $\text{ (diagram)}$   $\gamma_5$ -инвариантные функции.

Все сказанное относится также и к разложению одночастично-неприводимой вершины с четырьмя спинорными концами

$$\text{ (diagram)} = \sum_{\sigma} \rho_0^{(1)}(\sigma) \text{ (diagram)}. \quad (5.37)$$

В отличие от (5.33a) сюда входят тензорные представления  $j_1 = j_2$  и  $|j_1 - j_2| = 1$  (симметричные бесследные тензоры и тензоры, антисимметричные по двум индексам и симметричные по остальным). Как и в случае (5.33), в это разложение войдут только  $\gamma_5$ -инвариантные функции  $C_{\pm}$ , но без коэффициента 2. Имеем, аналогично (5.35):

$$\Gamma_0^{(1)} \rightarrow \sum_{\sigma} \rho_0^{(1)}(\sigma) \frac{1}{2} \{ C_+^t \Delta^{-1} C_+ + \gamma_5 C_+^t \gamma_5 \Delta^{-1} \gamma_5 C_+ \gamma_5 \} = \sum_{\sigma} \rho_0^{(1)}(\sigma) \{ C_+^t \Delta^{-1} C_+ + C_-^t \Delta^{-1} C_- \}. \quad (5.37a)$$

Функции  $C_+$  и  $C_-$  ортогональны по скалярной линии

$$\text{ (diagram)} = 0 \quad (5.37b)$$

за счет шпура по спинорным индексам. В  $\gamma_5$ -инвариантной теории, где  $\Gamma = g C_+$ , второй член не дает вклада за счет (5.37b). Поэтому его можно опустить, а соотношение ортогональности записать в форме (5.22) или (5.27).

Спектральные функции разложений (5.33) и (5.37) должны удовлетворять однородным интегральным уравнениям, обеспечивающим кроссинг-симметрию вершин  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0^{(2)}$ . В частности, для вершины  $\Gamma_1$  имеем, помимо (5.33):

$$\text{Diagram } \Gamma_1 = \sum_{\sigma} \rho_1(\sigma) \text{Diagram } \Gamma_0^{(2)} = \sum_{\sigma} \rho_1(\sigma) \text{Diagram } \Gamma_1 \quad (5.38)$$

и

$$\text{Diagram } \Gamma_1 = \sum_{\sigma} \rho_1'(\sigma) \text{Diagram } \Gamma_1, \quad (5.39)$$

где  $\sum_{\sigma}$  содержит только целые значения  $j_1 = j_2 = j$ . В случае полуцелых  $j$  вершина  $\Gamma_1$  антисимметрична по аргументам  $X_1, X_2$ , см. (3.22). Спектральные функции в первом и во втором разложениях (5.38) одинаковы в силу симметрии вершины  $\Gamma_1$  по скалярным концам. Из (5.38) находим

$$\rho_1(\sigma) \text{Diagram } \Gamma_1 = \sum_{\sigma'} \rho_1(\sigma') \text{Diagram } \Gamma_1. \quad (5.40)$$

Кроме того, сравнивая (5.38) с (5.39), имеем

$$\rho_1(\sigma) \text{Diagram } \Gamma_1 = \sum_{\sigma'} \rho_1'(\sigma') \text{Diagram } \Gamma_1. \quad (5.40a)$$

Здесь  $\rho_1'(\sigma')$  - произвольная функция. Единственное ограничение, налагаемое кроссинг-симметрией, есть отсутствие в  $\sum_{\sigma'}$  членов с полуцелыми  $j$ . Это позволяет рассматривать (5.40a) как решение уравнений (5.40).

Рассмотрим разложение высших вершин. Пусть  $\Gamma_n^{(m)}$  - одночас -

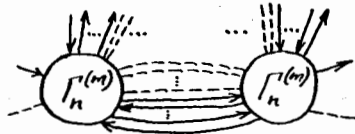
тично-неприводимая часть функции Грина, имеющей  $(n + 1)$  скалярных концов и  $2(m + 1)$  спинорных. Вершина  $\Gamma_n^{(m)}$  получается вычитанием всех одночастично-приводимых графов из связной функции Грина. Например, для  $\Gamma_2^{(2)} = \Gamma_2$  имеем

$$\text{Diagram } \Gamma_2^{(2)} = \text{Diagram } \Gamma_2 + \text{Diagram } \Gamma_1 - \Gamma_1 + \Gamma_1 + \dots + \text{Diagram } \Gamma_1 + \dots + \text{Diagram } \Gamma_1 + \dots + \text{Diagram } \Gamma_1 + \dots \quad (5.41)$$

где  $\Gamma_1$  - вершина (5.32), а точки обозначают симметризацию по мезонным линиям. Разложение таких вершин может быть записано в различных формах. Наиболее удобно для дальнейших целей записать его в виде

$$\text{Diagram } \Gamma_n^{(m)} = \sum_{\substack{\sigma_1 \dots \sigma_{n+m} \\ \tau_1 \dots \tau_m}} \rho_n^{(m)}(\sigma_1 \dots \sigma_{n+m}, \tau_1 \dots \tau_m) \text{Diagram } \Gamma_n^{(m)} \quad (5.42)$$

Спектральная функция  $\rho_n^{(m)}$  подчинена набору интегральных уравнений, аналогичных (4.27) и (5.40), обеспечивающих симметрию вершины по аргументам скалярных концов и антисимметрию по аргументам фермионных. Для обоснованности разложения (5.42) необходимо потребовать сходимость интегралов



(5.43)

с любым числом внутренних линий, так чтобы каждая из вершин имела не менее двух внешних концов. В скелетной теории (раздел IV) такие интегралы сходятся, поскольку вершины  $\Gamma_n^{(m)}$  не содержат графов, рассекаемых по одной линии в каком-либо направлении. В дальнейшем будет предполагаться, что интегралы (5.43) сходятся также и в случае точных вершин. Заметим, что аналогичные интегралы для функций Грина бесконечны за счет графов, рассекаемых по одной линии.

#### VI. Перенормированные уравнения и бутстрапная программа

Спектральные функции  $\rho_n^{(m)}$ , входящие в общее конформно-инвариантное представление высших вершин  $\Gamma_n^{(m)}$ , должны быть определены из конкретной динамической модели. Эти функции содержат всю динамическую информацию о вершинах. Ниже будет сделана попытка найти эти функции из лагранжевых уравнений поля.

Большинство физически интересных лагранжианов в пределе нулевой массы допускает конформную симметрию. Инвариантность относительно масштабных преобразований обладают все лагранжианы с безразмерной константой связи. Если к тому же отсутствуют связи с производными, то взаимодействие оказывается конформно-инвариантным. В этом случае конформная инвариантность взаимодействия есть следствие пуанкаре- и масштабной инвариантности<sup>/23/</sup>.

Мы будем рассматривать два типа взаимодействий:

$$\lambda \bar{\psi} \gamma_5 \psi \varphi, \quad (6.1)$$

где  $\psi$  - спинорное поле,  $\varphi$  - псевдоскалярное поле в 4-мерном пространстве, и

$$\lambda \varphi_1^+ \varphi_2 \chi, \quad (6.2)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \chi$  - скалярные поля в  $D$ -мерном пространстве. Взаимодействие (6.2) рассмотрено в разделе X.

При попытке построения конформно-инвариантного решения в рамках обычной теории возмущений возникает ряд трудностей. Они связаны с необходимостью регуляризации графов Фейнмана, что обычно ведет к нарушению не только конформной, но и масштабной симметрии. Можно ожидать, однако, что строгая симметрия реализуется для точного решения, т.е. суммы всего ряда, по крайней мере при определенных значениях константы связи. Принципиально такая возможность допустима, в частности, из анализа результатов ренормализационной группы<sup>/24, 25/</sup>. Построение такого решения требует развития новых методов, не связанных с теорией возмущений. Ниже будет сделана попытка такого построения на основе точной системы перенормированных уравнений.

Исходная система уравнений Швингера-Дайсона содержит не перенормированные вершины. Она не может быть использована для построения конформно-инвариантной теории, поскольку возникновение свойств конформной симметрии связано с бесконечностью перенормировок. Необходимо выполнить перенормировку исходной системы уравнений, перейти к пределу  $Z_i \rightarrow 0$  и раскрыть возникающие при этом неопределенности  $0 \times \infty$  (так называемые "перекрывающиеся" расходимости). Эта программа проведена одним из авторов для раз-

личных взаимодействий в /1,2/, см. также /3/. Для взаимодействия (6.1) система получена в /2/ и имеет вид:

$$\rightarrow \Gamma = \chi_1 \rightarrow + \rightarrow \Gamma R_1, \quad (6.3)$$

$$\rightarrow \Gamma_n \rightarrow \}^n = \rightarrow \Gamma \rightarrow R_n \rightarrow \}^n, \quad (6.4)$$

$$\rightarrow R_n \rightarrow = \rightarrow M_n \rightarrow - \rightarrow R_1 \rightarrow M_n \rightarrow, \quad (6.5)$$

$$\rightarrow M_n \rightarrow = \rightarrow \Gamma_n \rightarrow + \sum \rightarrow \Gamma_{k_1} \rightarrow \Gamma_{k_2} \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_{k_s} \rightarrow \Gamma_{l_1} \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_{l_t} \rightarrow, \quad (6.6)$$

Знак  $\sum$  в последнем уравнении обозначает суммирование по всем возможным разбиениям концов на группы  $k_1 \dots k_s$  и  $l_1 \dots l_t$  и симметризацию по ним.  $\Gamma_n$  и  $\tilde{\Gamma}_n$  - одночастично неприводимые вершины. Они получаются из соответствующих функций Грина вычитанием всех графов, разрезаемых по одной линии в каком-либо направлении, см., например, (4.6), (5.32) и (5.41). Поскольку поле  $\psi(x)$  - псевдоскалярное, вершины  $\tilde{\Gamma}_n$ , входящие в последнее уравнение, могут

x) Исключение составляет размерная регуляризация (рассмотрение интегралов в пространстве нецелой размерности  $D$ , в которой фейнмановские интегралы конечны); к сожалению, однако, эта методика пока не разработана применительно к системе уравнений для функций Грина в целом.

иметь только четное число концов. Мы ограничились пока уравнениями для вершин с двумя фермионными концами. Полная система уравнений, включающая вершины с любым числом фермионных линий, приведена в разделе УП.

Смысл вершин  $M_n$  и  $R_n$  в теории возмущений легко выяснить, применяя к системе (6.3-6) стандартную итерационную процедуру:  $M_n$  - сумма графов, не разрезаемых по одной линии в поперечном направлении,  $R_n$  - сумма графов, не разрезаемых по двум линиям в поперечном направлении. В частности, для  $M_2$  и  $R_2$  имеем

$$\rightarrow M_2 \rightarrow = \rightarrow \Gamma \rightarrow + \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma \rightarrow + \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma \rightarrow + \dots, \quad (6.7)$$

$$\rightarrow R_2 \rightarrow = \rightarrow \Gamma \rightarrow + \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma \rightarrow + \dots, \quad (6.8)$$

где  $\Gamma$  - полная вершина, а линиям сопоставляются полные функции Грина. Вершина  $\Gamma_n$  есть сумма графов, не рассекаемых по одной линии в любом направлении. Например,

$$\rightarrow \Gamma_2 \rightarrow = \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma \rightarrow + \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma \rightarrow + \dots, \quad (6.9)$$

Полагая в перенормированной системе  $\chi_1 = 0$ , мы получим систему бутстрапных уравнений, которая изучалась многими авторами в последние годы /16, 26-29/. В пределе  $\chi_1 = 0$  эта система допускает конформно-инвариантное решение. Оно может быть реализовано

в виде скелетных разложений типа (6.7-9) для всех высших вершин  $\Gamma_n$ ,  $n \geq 1$ . Далее постулируется, что вершина  $\Gamma$  и функции Грина  $G_\Gamma$  и  $D_\Gamma$ , сопоставляемые внутренним линиям, даются конформно-инвариантными представлениями (3.8), (5.4) и (5.29, 9). При этом уравнение (6.3) для вершины  $\Gamma$  в пределе  $\lambda_1 = 0$  оборачивается условием самосогласованности теории /26, 27/. В частности, в трехгаммном приближении имеем

$$(6.10)$$

Подставляя сюда конформно-инвариантные выражения (3.8), (5.4) и (5.29, 9), мы получим одно уравнение<sup>x)</sup> на константу связи  $g$  и

<sup>x)</sup> К сожалению, даже в скелетном (трехгаммном) приближении бутстрапная программа фактически не реализована в /26-29/. Дело в том, что не удавалось получить указанную систему алгебраических уравнений (особую трудность составляло уравнение 6.10), определяющих размерность полей и константу взаимодействия. По этой причине и не был решен вопрос - реализуется ли в этом приближении конформно-инвариантное решение для данной модели взаимодействия (для чего решения для определяемых констант должны быть действительными и удовлетворять условию 6.11). Анализ продвижения в решении этой задачи и значение констант для ряда моделей будет опубликован в работе одного из авторов (Е.С.) и В.Зайкина.

размерности  $d$  и  $\delta$  фундаментальных полей. Еще два соотношения на  $g$ ,  $d$  и  $\delta$  (в этом же приближении) дают уравнения для собственной энергии.

В качестве уравнений на константы  $g$ ,  $d$  и  $\delta$  могут быть использованы также уравнения для тока и тензора энергии-импульса, удовлетворяющих обобщенным тождествам Уорда /30, 32/, и обобщенное условие унитарности /31/ (вне массовой поверхности). Как показано в /29/, в рамках скелетной теории эти уравнения эквивалентны уравнениям для мезонного и нуклонного пропагаторов.

Для внутренней согласованности описанной выше схемы существенно, что отдельные графы в (5.7-9) не содержат расходящихся интегралов. Как было показано в /28/, все графы в (6.7-9), а также (6.10) свободны от ультрафиолетовых и инфракрасных расходимостей, если размерности  $d$  и  $\delta$  нуклонного и мезонного полей  $\psi$  и  $\varphi$  лежат в интервале

$$\frac{3}{2} < d < \frac{5}{2}, \quad 1 < \delta < 3. \quad (6.11)$$

Все уравнения, в том числе и условие самосогласованности (5.10), инвариантны относительно замены

$$d \rightarrow 4-d, \quad \delta \rightarrow 4-\delta, \quad (6.12)$$

соответствующей переходу к эквивалентным представлениям. Это означает, что если какие-то значения  $d$  и  $\delta$  являются решением бутстрапных уравнений, то значения  $4-d$  и  $4-\delta$  также будут решением. Нормировка функций (3.8), (5.4) и (5.9) выбрана так, чтобы инвариантность (6.12) была явной. Заметим, что интервал (6.11) для допустимых значений размерностей также инвариантен относитель-

но (6.12). Согласно (5.3), (5.30) и (3.7) замена (6.12) соответствует двум способам формулировки теории: в терминах функции Грина  $\Gamma(x_1, x_2, x_3)$ , либо в терминах ампутированных вершин  $\Gamma(x_1, x_2, x_3)$ . В первом случае внутренним линиям в (6.3-10) сопоставляются обратные функции Грина  $G_d^{-1}(x) = G_{4-d}(x)$  и  $D_d^{-1}(x) = D_{4-d}(x)$ , во втором - функции Грина  $G_d(x)$  и  $D_d(x)$ . Везде, за исключением разделов IX, X, будет использован первый способ.

В следующем разделе мы покажем, что система (6.3-6) допускает точное решение. Предположение о конформной инвариантности теории позволяет исключить из системы вспомогательные вершины  $R_n$  и  $M_n$ , и в окончательном варианте (см. (7.15) и (7.27, 28)) система (6.3-6) состоит из уравнений, связывающих только вершины  $\Gamma_n$  с различным числом концов. При выводе этих уравнений существенно, что в (6.3-6) входят одночастично-неприводимые вершины  $\Gamma_n$ , а не функции Грина. Если вместо (6.3-6) воспользоваться аналогичной системой для функций Грина <sup>13/</sup>, то указанная выше программа неосуществима по той причине, что в отличие от  $\Gamma_n$  функции Грина содержат графы, разрезаемые по одной линии.

Окончательная система диагонализуеться разложением типа (5.42), которое также применимо к вершинам  $\Gamma_n$  (но не к функциям Грина!). В результате она сводится к алгебраическим уравнениям на спектральные функции  $\rho_n$ , которые могут быть легко решены. Мы ограничимся случаем  $m = 0$  вершин с двумя фермионными концами.

УП. Система перенормированных уравнений в конформно-инвариантной теории

Проиллюстрируем изложенную выше программу. Для этого возьмем

простейшие уравнения системы <sup>12/</sup>. Полагая в (6.3)  $Z_1 = 0$ , имеем

$$\Gamma = \Gamma \circ R_1, \quad (7.1)$$

$$R_1 = M_1 - R_1 \circ M_1, \quad (7.2)$$

$$M_1 = \Gamma_1 + \Gamma. \quad (7.3)$$

Рассмотрим величину  $\Gamma \circ R_1$ . Ввиду конформной инвариантности она пропорциональна вершине  $\Gamma \circ R_1$  определенной в разделе У:

$$\Gamma \circ R_1 = g f(\ell) \Gamma, \quad (7.4)$$

где  $f(\ell)$  - нормировочная функция, размерность  $\ell$  - произвольна.

Из (7.1) следует, что

$$f(d) = 1. \quad (7.5)$$

Умножая уравнение (7.2) слева на  $\Gamma \circ R_1$  и используя (7.4, 5), получим известный результат <sup>14/</sup>: величина

$$\Gamma \circ M_1$$

рассматриваемая как функция размерности  $\ell$ , имеет полюс в точке  $\ell = d$ . Это позволяет переписать уравнение (7.1) в виде

$$\Gamma = \Lambda \operatorname{res}_{\ell=d} \Gamma \circ M_1, \quad (7.6)$$

где

$$\Lambda = -g \frac{df(\ell)}{d\ell} \Big|_{\ell=d}. \quad (7.7)$$

Подставим (7.3) в (7.6). При произвольном  $\ell$  имеем

$$\begin{array}{c} \ell \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} M_1 \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} = \begin{array}{c} \ell \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma_1 \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} + \frac{1}{g} \begin{array}{c} \ell \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} M_1 \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} \quad (7.8)$$

Второй член в пределе  $\ell \rightarrow d$  конечен ввиду (6.12) и не дает вклада в (7.6). Отсюда следует, что первый член имеет при  $\ell=d$  полюс с тем же значением вычета, что и левая часть. Окончательно система (7.1-3) записывается в виде одного уравнения, связывающего непосредственно вершины  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$ :

$$\begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} = \Lambda \operatorname{res}_{\ell=d} \begin{array}{c} \ell \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma_1 \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array}. \quad (7.9)$$

Представим в такой же форме остальные уравнения системы (6.3-6). Из (7.1, 4, 5, 7) имеем при  $\ell \rightarrow d$

$$\begin{array}{c} \ell \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} R_1 \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} \approx \Lambda (\ell-d) \begin{array}{c} \ell \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array}. \quad (7.10)$$

Учитывая это, из уравнений

$$\begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} R_n \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} = \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} M_n \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} - \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} R_1 \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} M_n \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array}$$

Находим

$$\begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} R_n \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} = \Lambda \operatorname{res}_{\ell=d} \begin{array}{c} \ell \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} M_n \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array}. \quad (7.11)$$

Наличие полюса в точке  $\ell=d$  у величины, стоящей в правой части, вытекает из уравнений (6.4), которые можно теперь переписать аналогично (7.6) в виде

$$\begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma_{n-1} \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} = \Lambda \operatorname{res}_{\ell=d} \begin{array}{c} \ell \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} M_n \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array}. \quad (7.12)$$

Следующий этап состоит в исключении вершин  $M_n$ , определяемых уравнениями (6.6). Из (6.6) имеем

$$\begin{array}{c} \ell \\ \circ \\ \delta \end{array} M_n \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} = \begin{array}{c} \ell \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma_n \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} + \begin{array}{c} \ell \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} C_n \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array}, \quad (7.13)$$

где  $C_n$  - совокупность графов, стоящих под знаком  $\Sigma$  в (6.6). Согласно (7.12) левая часть равенства (7.13) имеет полюс в точке  $\ell=d$ . Правая часть состоит из двух членов, первый из которых имеет такой же полюс. Второй член, как и в (7.8), регулярен, поскольку интегралы

$$\begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} C_n \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} = \Sigma \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma_{k_1} \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma_{k_2} \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma_{k_3} \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma_{k_4} \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \Gamma_{k_5} \begin{array}{c} \delta \\ \circ \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circ \\ \delta \end{array} \quad (7.14)$$

сходятся. Регулярность этого члена может быть легко обоснована в скелетной теории, где интегралы (7.14) сходятся в интервале размерностей (6.12). В нашем подходе сходимость этих интегралов обеспечивается также предположением о сходимости конформных разложений для вершин  $\Gamma_n$  и  $M_n$ , см. (5.42) и (7.16). Существенно, что любой граф, входящий в (7.14), можно расщепить по двум линиям так, что каждый из двух полученных подграфов имеет такую же структуру, как и графы, стоящие под знаком  $\Sigma$  в (6.6). Следовательно, ин-



тегралы (7.14) сходятся, если выполнено (5.43) и (7.17).

Регулярность второго члена в (7.13) позволяет переписать уравнения (7.12) в такой же форме, как и (7.9).

Имеем

$$\text{res}_{l=d} \circlearrowleft \rightarrow \text{M}_n \circlearrowright = \text{res}_{l=d} \circlearrowleft \rightarrow \text{G}_n \circlearrowright .$$

Подставляя это в (7.12), получим

$$\circlearrowleft \rightarrow \text{G}_n \circlearrowright = \Lambda \text{res}_{l=d} \circlearrowleft \rightarrow \text{G}_{n+1} \circlearrowright . \quad (7.15)$$

Константа  $\Lambda$  будет найдена ниже из уравнений для собственной энергии. Эта система является окончательным результатом: она не содержит вспомогательных вершин  $R_n$  и  $M_n$ .

Уравнения (7.12) и (7.15) можно представить в другой форме, используя разложение типа (4.22) для вершин  $\text{G}_n$  и  $\text{M}_n$ . Для вершины  $\text{M}_n$  имеем

$$\text{M}_n = \sum_{\sigma} \text{O} \circlearrowleft \rightarrow \text{M}_n \circlearrowright , \quad (7.16)$$

и аналогично для  $\text{G}_n$ . Мы можем требовать сходимости этого разложения, т.к.  $\text{M}_n$  не содержит графов, разрезаемых по одной линии в поперечном направлении, и интегралы

$$\text{M}_n \text{---} \text{M}_n \quad (7.17)$$

конечны в скелетной теории. Используя (7.16) и соотношение ортогональности, получим

$$\circlearrowleft \rightarrow \text{G}_{n-1} \circlearrowright = \Lambda \text{res}_{\sigma=\sigma_{\psi}} \text{M}_n \circlearrowright = \Lambda \text{res}_{\sigma=\sigma_{\psi}} \text{G}_n \circlearrowright , \quad (7.18)$$

где  $\sigma_{\psi}$  - квантовые числа спинорного поля. Аналогичные уравнения для функций Грина были получены в [5] (для теории  $\lambda\psi^3$ )

$$\circlearrowleft \rightarrow \text{G}_{cl}^{(n)} \circlearrowright \} n = \Lambda_{\psi} \text{res}_{\sigma=\sigma_{\psi}} \text{M} \circlearrowright \} n , \quad (7.19)$$

где в правой части стоит образ  $(n+2)$ -точечной вершины

$$\text{M} \circlearrowright = \text{G}_{cl}^{(n)} \circlearrowright - \text{G} \circlearrowright \text{G}_{cl}^{(n)} \circlearrowright \} n , \quad (7.20)$$

определяемый согласно (4.23).

Удобнее, однако, рассматривать не функции Грина, а вершины  $\text{G}_n$ , поскольку в этом случае удается полностью исключить дополнительные вершины  $R_n$  и  $M_n$ , в то время как уравнение (7.19) содержит дополнительную вершину (7.20).

Рассмотрим общую систему уравнений для вершин  $\text{G}_n^{(m)}$  с любым числом фермионных концов. Она имеет вид [2]

$$\circlearrowleft \rightarrow \text{G}_{n-1}^{(m)} \circlearrowright \} n = \circlearrowleft \rightarrow \text{G} \circlearrowright \text{R}_n^{(m)} \circlearrowright \} n , \quad (7.21)$$

$$\text{R}_n^{(m)} \circlearrowright \} n = \text{M}_n^{(m)} \circlearrowright - \text{R}_1^{(m)} \circlearrowright \text{M}_n^{(m)} \circlearrowright , \quad (7.22)$$

$$\left. \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} \right\} 2m \\ \left. \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} \right\} n = \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---} \left. \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} \right\} 2m \\ \left. \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} \right\} n, \quad (7.23)$$

$$\left. \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} \right\} n = \left. \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} \right\} n - \left. \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} \right\} n, \quad (7.24)$$

где  $\Gamma_n^{(0)} \equiv \Gamma_n$ ,  $R_n^{(0)} \equiv R_n$ ,  $M_n^{(0)} \equiv M_n$ .  
 В скелетной теории вершины  $M_n^{(m)}$ ,  $\tilde{M}_n^{(m)}$  и  $R_n^{(m)}$ ,  $\tilde{R}_n^{(m)}$  определяются аналогично (6.7) и (6.8):  $R_n^{(m)}$  (или  $\tilde{R}_n^{(m)}$ ) есть сумма диаграмм, не разрезаемых по одной фермионной и одной бозонной (или по двум фермионным) линиям в поперечном направлении; вершины  $M_n^{(m)}$  и  $\tilde{M}_n^{(m)}$  есть суммы диаграмм, не разрезаемых по одной линии в поперечном направлении.

Систему (7.21-24) необходимо дополнить уравнениями для собственной энергии, которые для наших целей удобно представить в форме [2]

$$-(G^{-1})_{\mathcal{M}} = \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---} \left. \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} \right\} n, \quad (7.25)$$

$$(D^{-1})_{\mathcal{M}} = \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---} \left. \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} \right\} n, \quad (7.26)$$

где  $G$  и  $D$  - функции Грина (5.4) и (3.8), точки означают ампутацию по соответствующему концу, индекс  $\mathcal{M}$  означает производную по импульсу внешнего конца.

Динамическими уравнениями являются уравнения (7.21, 23, 25, 26), а (7.22, 24) служат определением вершин  $R_n^{(m)}$  и  $\tilde{R}_n^{(m)}$ . Уравнения (7.21, 22, 25) определяют фермионное поле. Они сохраняют

число фермионных концов и распадаются на независимые группы, характеризуемые определенным значением  $m$ . Уравнения (7.23, 24, 26) определяют бозонное поле и связывают группы уравнений с разными  $m$ .

Исключая из (7.21-24) дополнительные вершины  $M_n^{(m)}$ ,  $\tilde{M}_n^{(m)}$  и  $R_n^{(m)}$ ,  $\tilde{R}_n^{(m)}$  так же, как и при выводе (7.15), получим

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---} = \Lambda \text{res}_{\ell=d}^{\ell} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---}, \quad (7.27)$$

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---} = \tilde{\Lambda} \text{res}_{\ell=d}^{\ell} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---}, \quad (7.28)$$

где  $\tilde{\Lambda} = -g \frac{d\tilde{f}}{d\ell} \Big|_{\ell=d}$ , а функция  $\tilde{f}(\ell)$  определена подобно  $f(\ell)$ :

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---} = g \tilde{f}(\ell) \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---}.$$

Осталось найти константы  $\Lambda$  и  $\tilde{\Lambda}$ . Они вычисляются из уравнений для собственной энергии. Эти уравнения в форме (7.25, 26) определяют конечные левые части в виде разности двух бесконечностей в правых частях. Для раскрытия этой неопределенности воспользуемся способом, предложенным в [31]: будем рассматривать правую часть (7.25) (и аналогично (7.26)) как предел выражения

$$\lim_{\ell \rightarrow d} \left\{ \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---} - \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---} \right\}. \quad (7.29)$$

Используя (7.10), находим

$$\begin{aligned} -(G^{-1})_{\mathcal{M}} &= \Lambda \lim_{\ell \rightarrow d} (\ell-d) \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---} = \\ &= \Lambda \text{res}_{\ell=d}^{\ell} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Интеграл в правой части вычисляется с помощью формул (5.12-15) и соотношения

$$\int dy (x_1 - y)_\mu \tilde{\Delta}_{\delta_1}(x_1 - y) \tilde{\Delta}_{\delta_2}(y - x_2) = \frac{\Gamma(3 - \delta_1) \Gamma(2 - \delta_2)}{\Gamma(5 - \delta_1 - \delta_2)} (x_1 - x_2)_\mu \tilde{\Delta}_{\delta_1 + \delta_2 - 2}(x_1, x_2)$$

и равен

$$\frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \{\mu_{1/2}(d)\}^{-1} (x_1 - x_2)_\mu G^{-1}(x_1, x_2).$$

Переходя в (7.30) к пределу, окончательно получим

$$g\Lambda = -2\mu_{1/2}(d), \quad (7.31)$$

где  $\mu_{1/2}(d)$  - весовая функция (5.23).

Аналогично вычисляется константа  $\tilde{\Lambda}$ . Раскрывая неопределенность в правой части уравнения (7.26), получим

$$\tilde{\Lambda} \operatorname{res}_{\ell=\delta} \frac{\ell}{\ell} \circlearrowleft \circlearrowright \delta = (D^{-1})_\mu,$$

откуда следует

$$g\tilde{\Lambda} = 2\mu_0(\delta), \quad (7.32)$$

где  $\mu_0(\delta)$  - весовая функция (5.24).

#### Уш. Решение системы уравнений

Полная система уравнений (7.27, 28) диагонализуется разложением (5.42). Покажем это на примере системы (7.15) для вершин с двумя фермионными линиями. Система (7.27, 28) может быть решена аналогично. Общее разложение (5.42) в случае вершин  $\Gamma_n$  имеет вид

$$\Gamma_n = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \rho_n(\sigma_1 \dots \sigma_n) \circlearrowleft \sigma_1 \circlearrowright \sigma_2 \dots \sigma_n \circlearrowleft \sigma_n \circlearrowright. \quad (8.1)$$

Спектральная функция  $\rho_n(\sigma_1 \dots \sigma_n)$  определена для размерностей  $\ell_1 \dots \ell_n$ , лежащих на контуре интегрирования в (5.33а). Предполагается, что она может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость по каждой переменной, как в разделе IV. Поэтому соотношение "эрмитовости"

$$\rho_n^*(\sigma_1 \dots \sigma_n) = \rho_n(\sigma_n^* \dots \sigma_1^*), \quad (8.2)$$

легко доказываемое на контуре интегрирования, имеет место для любых комплексных размерностей.

Подставим разложение (8.1) в (7.15). Учитывая аналитичность  $\rho_n$  и используя соотношение ортогональности, находим для  $n \geq 1$

$$\rho_n(\sigma_1 \dots \sigma_n) = \Lambda \operatorname{res}_{\sigma=\sigma_\psi} \rho_{n+1}(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad (8.3)$$

где  $\sigma_\psi$  - квантовые числа спинорного поля

$$\sigma_\psi = (d, 1/2, 0) \oplus (d, 0, 1/2). \quad (8.4)$$

Используя (8.2), можно переписать уравнения (8.3) в другой форме:

$$\rho_n(\sigma_1 \dots \sigma_n) = \Lambda \operatorname{res}_{\sigma=\sigma_\psi} \rho_{n+1}(\sigma_1 \dots \sigma_n \sigma). \quad (8.5)$$

Здесь вычет взят по последнему аргументу. Система (8.3, 5) должна быть дополнена нормировочным условием, вытекающим из (7.9),

$$\operatorname{res}_{\sigma=\sigma_\psi} \rho_1(\sigma) = g\Lambda^{-1}. \quad (8.6)$$

Уравнения (8.3, 5) представляют собой бесконечную систему алгебраических уравнений, которая может быть легко решена. Ее решение содержит значительный произвол (обсуждаемый ниже), поскольку в уравнения входят не только функции  $\rho_n$ , но и их вычеты.

Введем нормированную функцию

$$\bar{\rho}_1(\sigma) = g^{-1} \Lambda \rho_1(\sigma).$$

Представим  $\rho_2(\sigma_1 \sigma_2)$  в виде  $\rho_2(\sigma_1 \sigma_2) = \bar{\rho}_2(\sigma_1) f_2(\sigma_1) \bar{\rho}_2(\sigma_2)$ , где  $f_2(\sigma_1)$  - произвольна. Подставляя ее в уравнения (5.1) при  $n=1$  и учитывая (5.2), находим:

$$f_2(\sigma_1 \sigma_2) = f_2(\sigma_2 \sigma_1) = g \Lambda^{-2}.$$

Это единственное ограничение на  $f_2(\sigma_1 \sigma_2)$ , накладываемое уравнениями (5.3, 5). Введем нормированную функцию

$$\bar{\rho}_2(\sigma_1 \sigma_2) = g^{-1} \Lambda^2 f_2(\sigma_1 \sigma_2).$$

Окончательно имеем

$$\rho_2(\sigma_1 \sigma_2) = g \Lambda^{-2} \bar{\rho}_1(\sigma_1) \bar{\rho}_2(\sigma_1 \sigma_2) \bar{\rho}_1(\sigma_2). \quad (8.7a)$$

Представляя в аналогичной форме каждую из функций  $\rho_n(\sigma_1 \dots \sigma_n)$  и вводя каждый раз новую произвольную функцию  $\bar{\rho}_n(\sigma_1 \dots \sigma_n)$ , можно получить общее решение системы. Оно имеет вид [6, 7]

$$\rho_n(\sigma_1 \dots \sigma_n) = g \Lambda^{-n} \left\{ \prod_{i=1}^n \bar{\rho}_1(\sigma_i) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \bar{\rho}_2(\sigma_i \sigma_{i+1}) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n-2} \bar{\rho}_3(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+2}) \right\} \dots \bar{\rho}_n(\sigma_1 \dots \sigma_n), \quad (8.7)$$

где  $\bar{\rho}_k(\sigma_1 \dots \sigma_k)$  - произвольные функции, удовлетворяющие условиям

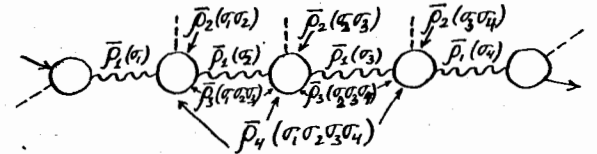
$$\lim_{\sigma_i \rightarrow \sigma_j} \bar{\rho}_1(\sigma) = 1; \quad \bar{\rho}_k(\sigma_1 \dots \sigma_k) \Big|_{\sigma_i = \sigma_j} = \bar{\rho}_k(\sigma_1 \dots \sigma_k) \Big|_{\sigma_k = \sigma_j} = 1, \quad k \geq 2. \quad (8.8)$$

Кроме того,  $\bar{\rho}_1(\sigma)$  должна достаточно быстро убывать при  $\ell \rightarrow \infty$  и  $j_{1,2} \rightarrow \infty$  для сходимости (8.1), и каждая из функций  $\bar{\rho}_k(\sigma_1 \dots \sigma_k)$  удовлетворяет соотношению (8.2).

Рассмотрим подробнее структуру решения. Из (8.7) следует, что каждой вершине  $\Gamma_n$  сопоставляются первые  $n$  функций из бесконечного набора

$$\bar{\rho}_1(\sigma_1), \bar{\rho}_2(\sigma_1 \sigma_2), \dots, \bar{\rho}_n(\sigma_1 \dots \sigma_n), \dots \quad (8.9)$$

по следующему правилу: каждой внутренней линии в разложении (8.1) соответствует функция  $\bar{\rho}_1(\sigma)$ , каждой внутренней вершине -  $\bar{\rho}_2(\sigma_1 \sigma_2)$ , каждой паре вершин -  $\bar{\rho}_3(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$  и т.д. Например,



Такая структура функций  $\rho_n$  тесно связана с требованием кроссинг-симметрии. Если положить какую-либо функцию  $\bar{\rho}_k(\sigma_1 \dots \sigma_k) = 1$ , то это нарушит кроссинг-симметрию, см. ниже. Предположим, что мы с самого начала, до подстановки в уравнения, записали бы разложение (8.1) в форме (8.7) и каждой вершине  $\Gamma_n$  сопоставили бы свой набор функций  $\bar{\rho}_1^{(n)}(\sigma_1), \bar{\rho}_2^{(n)}(\sigma_1 \sigma_2), \dots, \bar{\rho}_n^{(n)}(\sigma_1 \dots \sigma_n)$ . Тогда, решив уравнения, мы нашли бы, что функции  $\bar{\rho}_k^{(n)}$ , соответствующие разным вершинам  $\Gamma_n$ , совпадают:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1^{(1)}(\sigma) &= \bar{\rho}_1^{(2)}(\sigma) = \bar{\rho}_1^{(3)}(\sigma) = \bar{\rho}_1^{(4)}(\sigma) = \dots \\ \bar{\rho}_2^{(1)}(\sigma_2) &= \bar{\rho}_2^{(2)}(\sigma_2) = \bar{\rho}_2^{(3)}(\sigma_2) = \dots \\ \bar{\rho}_3^{(1)}(\sigma_2\sigma_3) &= \bar{\rho}_3^{(2)}(\sigma_2\sigma_3) = \dots \end{aligned}$$

т.е. вся информация, содержащаяся в динамических уравнениях, исчерпывается равенством функций, стоящих в одной строке.

Нормировочный множитель вершины  $\Gamma_n$  удобно связать с вычетом функции  $\rho_n(\sigma_1 \dots \sigma_n)$  по всем аргументам в полюсах  $\sigma_i = \sigma_\mu$ , соответствующих фундаментальному спинорному полю. Из (8.7, 8) имеем

$$g_n \equiv \int_{\sigma_1 = \sigma_\mu} \int_{\sigma_2 = \sigma_\mu} \dots \int_{\sigma_n = \sigma_\mu} \rho_n(\sigma_1 \dots \sigma_n) = g \Lambda^{-n}$$

В обычной релятивистской теории аналогом коэффициентов  $g_n$  являются значения вершин  $\Gamma_n$  на массовой поверхности: переход к спектральной функции  $\rho_n(\sigma_1 \dots \sigma_n)$  аналогичен фурье-преобразованию, а значение  $\sigma = \sigma_\mu$  - аналог массовой поверхности  $\rho^2 = m^2$ .

Формулы (8.1) и (8.7, 8) задают общее конформно-инвариантное решение перенормированных уравнений Швингера-Дайсона. Максимальный произвол, допускаемый уравнениями, состоит в возможности произвольно задать бесконечный набор функций (8.9), ограниченных уравнениями (8.8). Этот произвол связан с тем, что мы решали бесконечную систему зацепляющихся уравнений, в которых вся информация о нижней вершине полностью содержится в любой из высших. Для того, чтобы получить однозначное решение, необходимо указать спо-

соб замыкания системы. Естественно ожидать, что замыкание системы возникает при эффективном учете затравочного члена. Примером тому являются уравнения для собственной энергии (для их вывода использовано уравнение  $z, \gamma = \Gamma - \Gamma R$ ; при  $z_i \rightarrow 0$  возникает неопределенность  $0 \cdot \infty$ ), а также тождества Уорда, см. раздел IX. В обоих случаях мы получаем нетривиальные ограничения на спектральную функцию. Хотя ток и тензор энергии-импульса играют в теории особую роль, как сохраняющиеся величины, можно ожидать, что рассмотрение других тензорных полей (несохраняющихся) также позволит извлечь дополнительную информацию о затравочном члене. Такие тензорные или спин-тензорные поля связаны с полюсами функций  $\rho_n$  по переменным  $l_1 \dots l_n$ . Например,

$$O_\alpha \left( \Gamma_n^\alpha \right) = \Lambda_\alpha \int_{\sigma = \sigma_\alpha} \rho_n(\sigma) \left( \Gamma_n^\alpha \right), \quad (8.10)$$

где  $\sigma_\alpha = (l_\alpha, j_1^{(\alpha)}, j_2^{(\alpha)}) \oplus (l_\alpha, j_2^{(\alpha)}, j_1^{(\alpha)})$  - квантовые числа полей  $O_\alpha$ . Необходимо поэтому более тщательно исследовать их связь с фундаментальными полями, что является сложной задачей и находится в стадии исследования. Некоторые ограничения на размерности  $l_\alpha$  полей  $O_\alpha$  вытекают из аксиоматических требований. Полюсы функций  $\rho_n$  соответствуют размерностям  $l$ , дающим вклад в разложение типа (2.25) для функций Вайтмана (см. конец раздела IV). Как показано в разделе II, аксиомы спектральности и положительности ограничивают размерности  $l_\alpha$  условиями

$$l_\alpha \geq 2 + j_1^{(\alpha)} + j_2^{(\alpha)}, \quad (8.12)$$

или

$$l_\alpha > 1 + j_1^{(\infty)}, \text{ если } j_2 = 0,$$

где  $l_\alpha$  и  $j_{1,2}^{(\infty)}$  - квантовые числа (8.11).

Заметим, что константы  $\Lambda_\alpha$  могут быть найдены из уравнений для собственной энергии подобно  $\Lambda$  и  $\tilde{\Lambda}$ . Можно показать (см. также [51]), что

$$g_\alpha \Lambda_\alpha = -2 \mu(\sigma_\alpha), \quad (8.13)$$

где  $\mu(\sigma)$  - весовая функция, входящая в (5.33а), а  $g_\alpha$  - константа связи поля  $\phi_\alpha$  с фундаментальными полями. Она определяется аналогично (5.29):

$$\text{Res}_{\sigma=\sigma_\alpha} \text{circ}(\sigma_\alpha) = g_\alpha \text{circ}(\sigma_\alpha). \quad (8.14)$$

Из (8.10) при  $n=1$  имеем

$$\text{Res}_{\sigma=\sigma_\alpha} \bar{\rho}_1(\sigma) = g^{-1} \Lambda \text{Res}_{\sigma=\sigma_\alpha} \rho_1(\sigma) = \frac{g_\alpha \Lambda}{g \Lambda_\alpha},$$

или, с учетом (8.13) и (7.31),

$$\text{Res}_{\sigma=\sigma_\alpha} \bar{\rho}_1(\sigma) = \frac{g_\alpha^2}{g^2} \frac{\mu(\sigma_\alpha)}{\mu(\sigma_\alpha)}, \quad (8.15)$$

где обозначено  $\mu(\sigma_\alpha) = \mu_{1/2}(d)$ . Таким образом, задача о нахождении функции  $\rho_1(\sigma)$ , т.е. ее полюсов и вычетов в них, сводится к задаче о нахождении размерностей  $l_\alpha$ , удовлетворяющих (8.12), и констант связи  $g_\alpha$  полей  $\phi_\alpha$ .

Наиболее сильным из всех аксиоматических требований является кроссинг-симметрия. Последовательный учет кроссинг-симметрии требует развития вычислительной техники, связанной с использова-

нием разложений типа (4.7). Мы ограничимся здесь доказательством того, что кроссинг-симметрия не противоречит общему решению (8.7, 8). Рассмотрим, например, вершину  $\Gamma_2$ .

$$\Gamma_2(x_1, x_2 | x_3, x_4, x_5) = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \rho_2(\sigma_1, \sigma_2) \text{circ}(\sigma_1, \sigma_2). \quad (8.16)$$

Симметрия относительно перестановки

$$x_3 \rightleftharpoons x_4$$

дает

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} \rho_2(\sigma_1, \sigma_2) \text{circ}(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \rho_2(\sigma_2, \sigma_1) \text{circ}(\sigma_2, \sigma_1). \quad (8.17)$$

Используя соотношение ортогональности, получим из (8.17)

$$\rho_2(\sigma_1, \sigma_2) \text{circ}(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{\sigma} \rho_2(\sigma, \sigma_2) \text{circ}(\sigma, \sigma_2). \quad (8.18)$$

Подставляя сюда выражение (8.7а) для  $\rho_2(\sigma_1, \sigma_2)$  и сокращая на  $\bar{\rho}_1(\sigma_2)$ , получим уравнение для произведения  $\bar{\rho}_1(\sigma_1) \bar{\rho}_2(\sigma_2)$ , где функция  $\bar{\rho}_1(\sigma_1)$  удовлетворяет соотношению (5.40), выражающему кроссинг-симметрию вершины  $\Gamma_1$ :

$$\bar{\rho}_1(\sigma_1) \text{circ}(\sigma_1) = \sum_{\sigma} \bar{\rho}_1(\sigma) \text{circ}(\sigma, \sigma). \quad (5.40)$$

Если положить теперь в уравнении (8.18)  $\sigma_2 = \sigma_\psi$  (сократив предварительно на  $\bar{\rho}_1(\sigma_2)$ ), то вернемся к уравнению (5.40). При этом надо учесть (8.8):  $\bar{\rho}_2(\sigma, \sigma_\psi) = 1$ . Таким образом, кроссинг-

симметрия согласуется с общим выражением (8.7, 8).

### IX. Тожества Уорда

Рассмотрим операторы тока  $j_\mu$  и тензора энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$ . Их квантовые числа фиксируются законами сохранения:

$$\sigma_j = (D-1, 1/2, 1/2) \equiv (D-1, 1), \quad (9.1)$$

$$\sigma_T = (D, 1, 1) \equiv (D, 2). \quad (9.2)$$

Как и любой локальный оператор, они определяются интегральными уравнениями, аналогичными (8.10). В частности, для тока имеем

$$j_\mu^{(k)} \circ \Gamma_{n,m}^j = \Lambda_j \text{res}_{\sigma=\sigma_j} \circ \Gamma_n^{\sigma_j}, \quad (9.3)$$

где  $\sigma_j$  - квантовые числа тока (9.1). Уравнения для тензора энергии-импульса аналогичны (9.3) с той лишь разницей, что в них необходимо учесть вклад как нуклонного, так и мезонного поля.

В рассматриваемом здесь подходе операторы  $j_\mu$  и  $T_{\mu\nu}$  имеют особое значение: функции Грина, содержащие эти операторы, удовлетворяют обобщенным тождествам Уорда [30], [32], гарантирующим сохранение заряда и энергии импульса.

В перенормированной теории тождества Уорда получаются как следствие динамических уравнений при условии, что поля удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям. С другой стороны, канонические перестановочные соотношения можно рассматривать как условие согласованности теории [33], если независимо потребовать выполнения лагранжевых и гамильтоновых уравнений. В этом случае перестановочные соотношения не содержат сами по себе

каких-либо дополнительных ограничений на функции Грина. До перенормировки полей оба подхода эквивалентны.

В конформно-инвариантной теории ситуация существенно меняется. Конформная симметрия возникает в результате бесконечных перенормировок, полностью уничтожающих затравочный член. Как следствие перенормировок, теряется вся информация, имеющаяся в канонических перестановочных соотношениях. Последнее проявляется в том, что тождества Уорда не могут быть выведены из перенормированных уравнений Швингера-Дайсона и, следовательно, должны постулироваться независимо от них.

Уравнения (9.3) не содержат никакой информации, помимо того, что соответствующие спектральные функции имеют полюсы с квантовыми числами тока. Используя эти уравнения, являющиеся определением тока, а также динамические уравнения (7.27) и (7.28), получим уравнения, связывающие только вершины с током

$$\Gamma_{n,m}^j = \Lambda \text{res}_{\sigma=\sigma_j} \circ \Gamma_n^{\sigma_j}, \quad (9.4)$$

$$\tilde{\Gamma}_{n,m}^j = \tilde{\Lambda} \text{res}_{\sigma=\sigma_j} \circ \Gamma_n^{\sigma_j}. \quad (9.5)$$

Кроме того, вершины  $\Gamma_{n,m}^j$  удовлетворяют обобщенным тождествам Уорда, которые мы запишем в форме [30]

$$\partial_\mu^x \tilde{\Gamma}_{n,m}^j(x/y_1 \dots y_n, x_1 \dots x_{2m}) = - \sum_{i=1}^{2m} e_i \delta(x-x_i) \tilde{\Gamma}_n^{\sigma_j}(y_1 \dots y_n, x_1 \dots x_{2m}), \quad (9.6)$$

где  $y_1 \dots y_n$  - аргументы мезонных линий;  $x_1 \dots x_{2m}$  - аргументы нуклонных линий;  $\tilde{\Gamma}_{n,m}^j$  - вершина с током, ампутированная по



всем аргументам, кроме  $x$ ;  $\tilde{\Gamma}_n^{(m)}$  - вершина, ампутированная по всем аргументам;  $e_i$  - заряд, входящий в линию  $X_i$ .

Вершины с тензором энергии-импульса удовлетворяют уравнениям, аналогичным (9.4, 5). Тожества Уорда для этих вершин будут приведены ниже.

Рассмотрим совместное решение уравнений (9.4-6). Мы ограничимся случаем вершин  $\Gamma^d(x|x_1, x_2)$  и  $\Gamma_1^d(x|x_1, x_2)$ . Все вычисления будут приведены для 4-мерного пространства,  $D=4$ . Имеем

$$\Gamma_\mu^d(x|x_1, x_2) = \begin{array}{c} x_1 d \\ \circlearrowleft \Gamma^d \\ \circlearrowright x_2 d \end{array} j_\mu^{(x)} = \langle 0 | \psi_d(x) \bar{\psi}_d(x_2) j_\mu(x) | 0 \rangle = \\ = \int \left\{ \frac{1}{2} (B+1) S_{\frac{3}{2}}(x-x_1) \gamma_\mu S_{\frac{3}{2}}(x-x_2) \tilde{\Delta}_{d-\frac{3}{2}}(x, x_2) + \right. \\ \left. + (d-\frac{3}{2})^{-1} (B-1) S_{d-1}(x-x_2) \tilde{\Delta}_1(x-x) \tilde{\Delta}_1(x_2-x) \lambda_\mu^x(x, x_2) \right\} \quad (9.7)$$

где  $S_d(x)$ ,  $\tilde{\Delta}_1(x)$  и  $\lambda_\mu^x(x, x_2)$  определены формулами (5.11) и (3.16, 23);  $B$  - произвольная константа. Константа  $A$  определяется из тождества Уорда

$$\partial_\mu^x \Gamma_\mu^d(x|x_1, x_2) = -ie [\delta(x-x_1) - \delta(x_2-x)] G_d^d(x-x_2)$$

и равна

$$A = (4\pi)^2 e \Gamma(d+1/2) \left\{ \Gamma(d-\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{3}{2}-d) \right\}^{-1} \quad (9.8)$$

Вершину  $\Gamma_1^d$  запишем в виде

$$\Gamma_{j_\mu}^d(x, x_2, x_3|x) = \begin{array}{c} \tilde{d}, \tilde{d}, \tilde{d} \\ \circlearrowleft \Gamma_1^d \\ \circlearrowright x_3 \tilde{d} \end{array} j_\mu^{(x)} = \sum_\sigma \rho_j(\sigma) \begin{array}{c} x_1 \sigma \\ \circlearrowleft \text{min} \\ \circlearrowright x_2 \sigma \end{array} \begin{array}{c} d \\ \circlearrowleft \Gamma^d \\ \circlearrowright d \end{array} \quad (9.9)$$

где  $\sigma_j$  - квантовые числа тока;  $d_2$  и  $d$  - размерности спинорных полей  $\psi_{d_2}(x)$  и  $\psi_d(x)$ ; знак  $\tilde{d}$  обозначает ампутацию

по соответствующему аргументу, см. (5.20, 30). Вершина  $\Gamma_{j_\mu}^{d_2 d d}$  удовлетворяет обобщенному тождеству Уорда

$$\partial_\mu^x \Gamma_{j_\mu}^{d_2 \tilde{d} \tilde{d}}(x, x_2, x_3|x) = -ie [\delta(x-x_1) - \delta(x_2-x)] \Gamma(x, x_2, x_3) \quad (9.10)$$

и динамическому уравнению

$$d \begin{array}{c} \circlearrowleft \Gamma_j^d \\ \circlearrowright d \end{array} j_\mu^{(x)} = \Lambda(d) \underset{e=d}{\text{res}} \begin{array}{c} e \\ \circlearrowleft \Gamma_1^d \\ \circlearrowright d \end{array} j_\mu^{(x)} \quad (9.11)$$

которое получается из (9.4) при  $m=1$ ,  $n=0$ . Подставим (9.9) в (9.10). Используя соотношение ортогональности и учитывая (5.29) и (5.20), получим

$$\rho_j(\sigma) \partial_\mu^x \left\{ \begin{array}{c} x_1 \sigma \\ \circlearrowleft \text{min} \\ \circlearrowright x_2 d \end{array} \right\} = -ie g \begin{array}{c} x d_1 \\ \circlearrowleft \delta \\ \circlearrowright x_2 d \end{array} \begin{array}{c} x d_1 \\ \circlearrowleft \delta \\ \circlearrowright x_2 d \end{array} \quad (9.12)$$

Второй член в правой части (9.10) не дает вклада в (9.12), поскольку функция  $\rho_j(\sigma)$  для действительных  $\ell$  определена аналитическим продолжением с контура интегрирования в (5.33а), где он равен нулю в силу соотношения ортогональности. Уравнение (9.12) полностью определяет спектральную функцию  $\rho_j(\sigma)$ , если производная в левой части не равна нулю. Последнее не всегда верно. Рассмотрим, например, спинорный вклад в (9.9):

$$\sigma = (\ell, 1/2, 0) \oplus (\ell, 0, 1/2). \quad (9.13)$$

Ненормированные коэффициенты Клебша-Гордана в этом случае можно представить в виде

$$C_{\mu}^{ed\sigma_j}(x_1, x_2, x) = x_1^l \begin{array}{c} \nearrow x_1^{\sigma_j} \\ \circ \\ \searrow x_2^d \end{array} =$$

$$= N_j(\ell, d) \left\{ \frac{1}{2} [F(\ell, d) + 1] \cdot S_{\frac{3}{2}, \frac{\ell-d}{2}}(x_1, x) \delta_{\mu}^{\sigma_j} - S_{\frac{3}{2}, \frac{\ell-d}{2}}(x_1, x) \tilde{\Delta}_{\frac{\ell+d-3}{2}}(x_1, x_2) + \right.$$

$$\left. + 2 \left[ 1 - \left( \frac{\ell-d}{2} \right)^2 \right] (\ell+d-3)^{-1} [F(\ell, d) - 1] S_{\frac{3}{2}, \frac{\ell-d}{2}}(x_1, x) \tilde{\Delta}_{\frac{\ell+d-1}{2}}(x_1, x) \tilde{\Delta}_{\frac{\ell-d}{2}}(x_2, x) \right\}_{\mu}^{\sigma_j} \quad (9.14)$$

где  $N_j(\ell, d)$  - нормировочный коэффициент, а  $F(\ell, d)$  - произвольная функция. Из (9.14) имеем

$$\partial_{\mu}^{\sigma_j} C_{\mu}^{ed\sigma_j}(x_1, x_2, x) = -\frac{1}{2}(\ell-d) N_j(\ell, d) S_{\frac{3}{2}, \frac{\ell-d}{2}}(x_1, x) \tilde{\Delta}_{\frac{\ell+d-2}{2}}(x_1, x) \tilde{\Delta}_{\frac{\ell-d}{2}}(x_2, x) \quad (9.15)$$

Функция  $F(\ell, d)$  не дает вклада в (9.15), а следовательно, и в тождество Уорда (9.10) и (9.12). Таким образом, тождество Уорда определяет вершину  $\Gamma_1^d$  с точностью до произвольной функции  $F(\ell, d)$  в (9.14). Можно представить этот произвол иначе: положить в (9.14)  $F(\ell, d) = 0$  и одновременно добавить к правой части (9.9) член

$$\sum_{\sigma} \beta_j^{\sigma} \text{Divergence}, \quad \text{где } \partial_{\mu}^{\sigma} \left\{ \begin{array}{c} x_1^{\sigma} \\ \circ \\ \searrow x_2^d \end{array} \right\} = 0, \quad (9.16)$$

а  $\beta_j^{\sigma} \sim F(\ell, d)$ . В этом случае в разложении возникает два независимых набора коэффициентов Клебша-Гордана и две спектральных функции  $\beta_j^{\sigma}$  и  $\beta_j^{\sigma}$ . Тождество Уорда определяет только функцию  $\beta_j^{\sigma}$ .

Найдем эту функцию для спинорного вклада (7.13). Подставляя (9.15) в (9.12) и вычисляя интеграл в правой части с помощью формул (5.12-15), получим

$$N_j(\ell, d) \beta_j^{\sigma}(\ell, j_{\nu}) = -\frac{2}{(4\pi)^{\nu}} e g N(\ell, d, d) \Gamma\left(\nu + \frac{d+d+d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d+d-d}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\ell-d} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2} - \frac{d-d+d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-d+d}{2} + \frac{1}{2}\right) N(\ell, d, d)}{\Gamma\left(\frac{\ell+d+d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{\ell+d-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-\ell+d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2} - \frac{\ell-d+d}{2}\right)}, \quad (9.17)$$

где  $N(\ell, d, d)$  дается формулой (5.25),  $j_{\nu} = (\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ .

Рассмотрим теперь динамическое уравнение (9.11). Подставляя в него (9.9), найдем

$$d \rightarrow \begin{array}{c} j_{\mu}^{\sigma} \\ \circ \\ \rightarrow d \end{array} = \Lambda(d) \text{res}_{\ell=d} \left\{ \beta_j^{\sigma}(\ell, j_{\nu}) \begin{array}{c} \nearrow \sigma \\ \circ \\ \searrow d \end{array} \right\}. \quad (9.18)$$

Используя (9.7) и (9.14), получим

$$\Lambda(d) \text{res}_{\ell=d} \left\{ N_j(\ell, d) \beta_j^{\sigma}(\ell, j_{\nu}) \right\} = A(d), \quad (9.19a)$$

$$F(d, d) = B. \quad (9.19b)$$

Соотношение (9.19a) получается взятием производной  $\partial_{\mu}^{\sigma}$  от (9.18) (при этом выпадают члены, содержащие  $F(\ell, d)$  и  $B$ ), после чего уравнение (9.18) сводится к (9.19b).

Существенно, что равенство (9.19a) выполняется тождественно при любых значениях размерностей фундаментальных полей. В этом легко убедиться, подставив в (9.19) выражения (7.31), (9.7) и (9.17). Таким образом, единственное следствие динамических уравнений есть равенство (9.19b).

Х. Тождества Уорда в случае скалярных полей

Пусть  $\varphi_d$ ,  $\varphi_j$  - заряженные скалярные поля и  $\chi_j$  - нейтральное

поле в  $D$ -мерном пространстве. Динамические уравнения в графических обозначениях совпадают с уравнениями, описывающими мезон-нуклонное взаимодействие. Так же, как в разделе IX, мы рассмотрим совместное решение системы (9.4, 6) для одночастично-неприводимой вершины

$$d_1 \xrightarrow{\Gamma_j^{ck}} d_2 = \sum_{\sigma} \rho_j^{ck}(\sigma) d_1 \xrightarrow{\sigma} d_2 \quad (10.1)$$

Здесь сплошным линиям сопоставляются заряженные поля  $\psi_d$  и  $\psi_{d_2}$ , пунктирной линии - поле  $\chi_d$ ;  $\sum_{\sigma}$  дается формулой (4.16);  $\sigma = (l, s)$ , где  $s$  - спин. Инвариантные 3-точечные функции  $C_{(x_1, x_2, x_3)}^{d, \sigma}$  дается формулами (3.22) и (4.18). Вершина  $\Gamma_j^{ck}$ , нормированная тождеством Уорда, равна

$$x_1 d \xrightarrow{\Gamma_j^{ck}} x_2 d \rightarrow x_3 d = \langle 0 | \psi_d(x_1) \psi_d^+(x_2) j_{\mu}(x_3) | 0 \rangle =$$

$$= \frac{1}{4} e \frac{4^{d+h}}{(4\pi)^d} \frac{\Gamma(h-1) \Gamma(d)}{\Gamma(h-d)} (x_{12})^{h-d-1} \frac{1}{(x_{23})^{h-1}} \frac{1}{\Gamma(x_{13})^{h-1}} \left\{ \dots \right\} =$$

$$= 2 e (4\pi)^h \left\{ \Gamma(h) \Gamma(h-d) \Gamma(d-h+1) \right\}^{-1} N_{j,0}^{-1}(d,d) d \rightarrow d, \quad (10.2)$$

где  $h = \frac{D}{2}$ ,  $N_j$  - нормировочный множитель, определяемый из соотношения ортогональности для функции  $e \rightarrow d$ .

Общее выражение для вершин

$$C_{\mu_1 \dots \mu_s; \mu}^{\sigma d \sigma_j} (x_1, x_2, x_3) = \chi_{i, \sigma} = (l, s) \rightarrow x_2 d, \quad (10.3)$$

входящих в (10.1), получается из (3.27) подстановкой  $d_2 = D-1$ . Вводя вместо  $A_i$  и  $B_i$  в (3.27) новые нормировочные коэффициенты  $N_j(l, d)$  и  $F_S^{ck}(l, d)$ , имеем

$$C_{\mu_1 \dots \mu_s; \mu}^{\sigma d \sigma_j} (x_1, x_2, x_3) = N_j(l, d) \frac{\Gamma(h - \frac{d-l-s}{2})}{\Gamma(\frac{l-d-s}{2})} \frac{\Gamma(\frac{l-d+s}{2}) \Gamma(\frac{l+d+s}{2})}{\Gamma(\frac{l-d-s+2}{2}) \Gamma(\frac{l+d-s-2}{2})}$$

$$\left\{ (D - \frac{l+d-s+2}{2}) [1 + F_S^{ck}(l, d)] \lambda_{\mu_1}^{x_3}(x_1, x_2) \lambda_{\mu_2}^{x_1}(x_2, x_3) \dots \lambda_{\mu_s}^{x_1}(x_2, x_3) - \text{следы} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{D-l-d}{S} F_S^{ck}(l, d) \right] \left[ \sum_{\kappa} \frac{1}{x_{13}} j_{\mu \kappa}(x_1) \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2, x_3) \dots \lambda_{\mu_s}^{x_1}(x_2, x_3) - \text{следы} \right] \tilde{\Delta}_{\frac{l+d-s-2}{2}}(x_{13}) \tilde{\Delta}_{D - \frac{l+d-s+2}{2}}(x_{23}) \tilde{\Delta}_{\frac{l-d-s+2}{2}}(x_{12}). \quad (10.3)$$

Вычисляя производную  $\partial_{\mu}^{x_3}$  от (10.3), получим

$$\partial_{\mu}^{x_3} C_{\mu_1 \dots \mu_s; \mu}^{\sigma d \sigma_j} (x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8} N_j(l, d) (D-l-d+s)(l-d+s) \frac{\Gamma(h - \frac{d-l-s}{2})}{\Gamma(\frac{l-d-s}{2})} \frac{\Gamma(\frac{l-d+s}{2}) \Gamma(\frac{l+d+s}{2})}{\Gamma(\frac{l-d-s}{2}) \Gamma(\frac{l+d-s}{2})}$$

$$\tilde{\Delta}_{\frac{l+d-s}{2}}(x_{13}) \tilde{\Delta}_{D - \frac{l+d-s}{2}}(x_{23}) \tilde{\Delta}_{\frac{l-d-s}{2}}(x_{12})$$

$$\left\{ \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2, x_3) \dots \lambda_{\mu_s}^{x_1}(x_2, x_3) - \text{следы} \right\}. \quad (10.4)$$

Функция  $F_S^{ck}(l, d)$  не дает вклада в (10.4), а следовательно, и в тождество Уорда, которое мы перепишем аналогично (9.12) в виде

$$\rho_j^{ck}(\sigma) \partial_{\mu}^{x_3} \left\{ \dots \right\} = -e g \dots \quad (10.5)$$

В отличие от (9.12) здесь отсутствует множитель  $i$  в правой части (это связано с различным выбором нормировки в случае спинорных и скалярных полей). Кроме того, в (10.5) входят вершины, ампутированные по аргументу  $x_2$ . Обе формы записи, (9.12) и (10.5), эквивалентны.

Как и в случае спинорных полей, функция  $F_S^{ck}(l, d)$  не определяет-

ся из тождеств Уорда. Однако теперь она входит в функции  $C^{\sigma d \sigma_j}$  только при  $s \geq 1$ . При  $s=0$  величина  $C^{\sigma d \sigma_j}$  полностью определяется конформной симметрией и равна

$$C^{\sigma \sigma_j d} (x_1, x_2, x_3) \Big|_{\sigma=(\epsilon, 0)} = - C^{\sigma \epsilon d} (x_3, x_1, x_2) \Big|_{\sigma=\sigma_j}, \quad (10.6)$$

где  $C^{\sigma \epsilon d} (x_1, x_2, x_3)$  дается формулой (3.22).

Найдем спектральную функцию  $\rho_j^{ck}(\sigma)$ . Интеграл в правой части (10.5) вычисляется с помощью соотношения (3.27); получим

$$\int dy C^{\sigma d, \delta} (x_1, x_3, y) C^{\tilde{d}, \tilde{d}, \tilde{\delta}} (x_3, x_2, y) = \frac{N_0(d, d, \delta)}{(4\pi)^{2h}}$$

$$\left\{ \Gamma\left(D - \frac{d_1+d+\delta}{2}\right) \Gamma\left(h - \frac{d_1-d+\delta}{2}\right) \Gamma\left(h - \frac{d_1+d-\delta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-d_1+\delta}{2}\right) \right\}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\ell-d+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell-d-s}{2}\right)} \frac{N_s(\ell d, \delta)}{\Gamma\left(h - \frac{\ell-d-s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell+d-s}{2}\right) \Gamma\left(D - \frac{\ell+d-s}{2}\right)} \quad (10.7)$$

$$\left\{ \Gamma\left(\frac{\ell+d+\delta+s-h}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d_1+\delta-\ell+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d_1-d+\ell+s}{2}\right) \Gamma\left(h - \frac{d-d_1+\ell+s}{2}\right) \right\}$$

$$\tilde{\Delta}_{\frac{\ell+d-s}{2}}(x_{13}) \tilde{\Delta}_{D - \frac{\ell+d-s}{2}}(x_{23}) \tilde{\Delta}_{\frac{\ell-d-s}{2}}(x_{12}) \left\{ \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2, x_3) \dots \lambda_{\mu_s}^{x_s}(x_2, x_3) - \text{сочетания} \right\},$$

где  $N_s(\ell d, \delta)$  дается формулой (4.18).

Подставляя (10.4) и (10.7) в (10.5), найдем  $|\rho_j^{ck}(\sigma)|$ :

$$N_{j_s}(\ell d) \rho_j^{ck}(\sigma) = -g e^{-\frac{8N_0(d, d, \delta)}{(4\pi)^{2h}} \frac{1}{(\ell-d+s)(D-\ell-d+s)}}$$

$$\left\{ \Gamma\left(D - \frac{d_1+d+\delta}{2}\right) \Gamma\left(h - \frac{d_1-d+\delta}{2}\right) \Gamma\left(h - \frac{d_1+d-\delta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-d_1+\delta}{2}\right) \right\}$$

$$\left\{ \Gamma\left(h - \frac{\ell-d-s}{2}\right) \Gamma\left(h - \frac{\ell-s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell+d+s}{2}\right) \Gamma\left(D - \frac{\ell+d-s}{2}\right) \right\}^{-1}$$

$$N_s(\ell d, \delta) \left\{ \Gamma\left(\frac{\ell+d+\delta+s-h}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d_1+\delta-\ell+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d_1-d+\ell+s}{2}\right) \Gamma\left(h - \frac{d-d_1+\ell+s}{2}\right) \right\} \quad (10.8)$$

Динамическое уравнение для вершин  $\Gamma_j^{ck}$  и  $\Gamma_{j,j}^{ck}$  есть

$$d \rightarrow \Gamma_j^{ck} \xrightarrow{d} \Gamma_j^{ck} = \Lambda(d_2) \text{res}_{\ell=d_2} \xrightarrow{\ell} \Gamma_{j,j}^{ck} \xrightarrow{d} \Gamma_j^{ck}, \quad (10.9)$$

где  $\Lambda(d) = -2g^{-1} \mu_0^2(d)$ ,  $\mu_0^2(d)$  дается формулой (4.17). С учетом (10.6) и (10.2) уравнение (10.9) дает

$$\Lambda(d) \text{res}_{\ell=d} \rho_j^{ck}(\ell, s=0) =$$

$$= 2e(4\pi)^h \left\{ N_{j_0}(d, d) \Gamma(h) \Gamma(h-d+1) \Gamma(d-h) \right\}^{-1} \quad (10.10)$$

Вычисляя  $\text{res}_{\ell=d} \rho_j^{ck}(\ell, s=0)$  из (10.8), находим, что (10.10) выполняется тождественно при любых значениях размерностей  $d, d$  и  $\delta$ .

Рассмотрим уравнения (9.4) и (9.6) при  $m=0$  и произвольном  $n$ . Тождества Уорда (9.6) диагонализуются разложениями

$$\Gamma_{h+1}^{ck} = \sum_{\sigma, \tau} \rho_{j,n}(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_{n-1})$$

$$\text{Diagram with vertices and lines}, \quad (10.11)$$

$$\Gamma_h^{ck} = \sum_{\sigma, \tau} \rho'_n(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_{n-1})$$

$$\text{Diagram with vertices and lines}, \quad (10.12)$$

Функция  $\rho'_n(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_{n-1})$  связана с  $\rho_n(\sigma, \dots, \tau_n)$  соотношениями типа (5.40а). Подставляя (10.11) и (10.12) в (9.6), находим

$$\begin{aligned}
 & \rho_{j,n}(\sigma_2; \tau_1 \dots \tau_{n-1}) \mathcal{D}_{\mu}^{x_3} \left\{ \text{Diagram} \right\} = \\
 & = -e \rho_n'(\sigma_2; \tau_1 \dots \tau_{n-1}) \text{Diagram} + \\
 & + e \rho_n'(\sigma_1; \tau_1 \dots \tau_{n-1}) \text{Diagram} .
 \end{aligned} \tag{10.13}$$

Вычисляя интегралы в правой части равенства, можно выразить  $\rho_{j,n}(\sigma_2; \tau_1 \dots \tau_{n-1})$  через  $\rho_n(\sigma; \tau_1 \dots \tau_{n-1})$ .

Покажем, что вершины (10.11), вычисленные из (10.13), удовлетворяют уравнениям (9.4). Для этого удобно рассмотреть, помимо (10.11, 12), еще два разложения,

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram} = \sum_{\sigma, \tau} \rho_{j,n-1}'(\sigma, \tau_1 \dots \tau_{n-1}) \\
 & \text{Diagram} ,
 \end{aligned} \tag{10.14}$$

$$\text{Diagram} = \sum_{\tau} \rho_{n-1}''(\tau_1 \dots \tau_{n-1}) \text{Diagram} , \tag{10.15}$$

которые также диагонализуют тождества Уорда:

$$\begin{aligned}
 & \rho_{j,n-1}'(\sigma; \tau_1 \dots \tau_{n-1}) \mathcal{D}_{\mu}^{x_3} \left\{ \text{Diagram} \right\} = \\
 & = e \rho_{n-1}''(\tau_1 \dots \tau_{n-1}) \text{Diagram} .
 \end{aligned} \tag{10.16}$$

Подставляя (10.15) и (10.12) в динамические уравнения (7.15), находим

$$\Lambda(d) \operatorname{res}_{\sigma=\sigma_0} \rho_n'(\sigma; \tau_1 \dots \tau_{n-1}) = \rho_{n-1}''(\tau_1 \dots \tau_{n-1}). \tag{10.17}$$

С другой стороны, спектральная форма уравнений (9.4) при  $m=0$  есть

$$\Lambda(d) \operatorname{res}_{\sigma=\sigma_0} \rho_{j,n}(\sigma; \tau_1 \dots \tau_{n-1}) = \rho_{j,n-1}'(\sigma; \tau_1 \dots \tau_{n-1}), \tag{10.18}$$

где  $\rho_{j,n}'(\sigma)$  - функция, входящая в (10.14). Она получается подстановкой (10.14) в левую часть (9.4), и (10.11) - в правую часть. Нетрудно проверить теперь, что уравнения (10.18) (или (9.4)) выполняются при любых значениях размерностей полей. Для этого достаточно взять вычет в точке  $\sigma = (d, 0)$  в правой и левой части равенства (10.13) и сравнить результат с (10.17) и (10.16).

Рассмотрим в заключение тождество Уорда для тензора энергии-импульса. Пусть  $G_{ab}^{\Gamma} = \langle 0 | T_{\mu\nu}(x) \phi_{d_1}(x_1) \phi_{d_2}^+(x_2) \chi_{d_3}(x_3) | 0 \rangle$ . Тождество Уорда для ампутированной одночастично-неприводимой вершины

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram} = \text{Diagram} - \text{Diagram} - \text{Diagram} \\
 & \text{Diagram} - \text{Diagram} - \text{Diagram}
 \end{aligned} \tag{10.19}$$

имеет вид /29/

$$\begin{aligned}
 -\partial_\mu^x \left\{ \text{diagram} \right\} &= [\delta^{\mu\nu}(x-x_1)\partial_\nu^{x_1} + \delta^{\mu\nu}(x-x_2)\partial_\nu^{x_2} + \delta^{\mu\nu}(x-y)\partial_\nu^y] \text{diagram} + \\
 &+ \left[ \frac{\delta-D}{D} \partial_\nu^x \delta(x-y) + \frac{d_1-D}{D} \partial_\nu^x \delta(x-x_1) + \right. \\
 &\left. + \frac{d_2-D}{D} \partial_\nu^x \delta(x-x_2) \right] \text{diagram}.
 \end{aligned}
 \tag{10.20}$$

Представим вершину  $\Gamma_1^{\sigma_r}$  в виде разложения

$$\text{diagram} = \sum_\sigma \rho_r(\sigma) \text{diagram}_\sigma,
 \tag{10.21}$$

где  $\sigma_r$  - квантовые числа тензора энергии-импульса. Подставляя (10.21) в (10.20), находим

$$\begin{aligned}
 -\rho_r(\sigma) \partial_\mu^x \left\{ \text{diagram} \right\} &= \int dy C^{\sigma d_1 d_2}(x, y) \partial_\nu^x C^{\tilde{d}_1 \tilde{d}_2 d_2}(y, x) + \\
 &+ \int dy C^{\sigma d_1 d_2}(x, y) \partial_\nu^x C^{\tilde{d}_1 \tilde{d}_2 d_2}(y, x) + \frac{d_1-D}{D} \partial_\nu^x \int dy C^{\sigma d_1 d_2}(x, y) C^{\tilde{d}_1 \tilde{d}_2 d_2}(y, x) \\
 &+ \frac{d_2-D}{D} \partial_\nu^x \int dy C^{\sigma d_1 d_2}(x, y) C^{\tilde{d}_1 \tilde{d}_2 d_2}(y, x),
 \end{aligned}
 \tag{10.22}$$

где  $\tilde{d}_1 = D - d_1$ ,  $\tilde{d}_2 = D - d_2$ .

Члены  $\delta(x-x_2)\partial_\nu^{x_2}$  и  $\frac{d_2-D}{D}\partial_\nu^x \delta(x-x_2)$  не дают вклада в (10.22), как и в случае (9.12) и (10.5).

Рассмотрим скалярный вклад в (10.21). Величина  $\text{diagram}$  определяется формулой (3.22), если положить в ней  $\sigma = \sigma_r$ . В отличие от (9.14) она определена однозначно, и, следовательно, скаляр-

ный вклад в (10.22) не содержит членов типа (9.16). Это же относится и к векторному вкладу  $\sigma = (\ell, 1)$ , см. ниже. Вычисляя интегралы в (10.22), имеем [7]

$$\begin{aligned}
 \rho_r(\ell, s=0) &= \frac{8-D}{D-1} \frac{g}{(4\pi)^{2k}} \frac{N_0(\ell d_1 d_2) N(d_1 d_2 d)}{N_2(\ell d_2 D)} \frac{1}{(\ell-d_2)(D-\ell-d_2)} \\
 &\left\{ \Gamma\left(\frac{\ell+d_2+1}{2}\right) \Gamma\left(D-\frac{\ell+d_2+1}{2}\right) \Gamma\left(k+\frac{\ell-d_2+1}{2}\right) \Gamma\left(k-\frac{\ell-d_2+1}{2}\right) \right\}^{-1} \\
 &\left\{ \Gamma\left(\frac{\ell+d_1+d_2}{2}-k\right) \Gamma\left(\frac{d_1+d_2-\ell}{2}\right) \Gamma\left(k-\frac{d_1-d_2+d_2}{2}\right) \Gamma\left(D-\frac{d_1+d_2+d_2}{2}\right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{10.23}$$

где  $f_1 = \Gamma\left(\frac{\ell+d_1-d_2}{2}\right) \Gamma\left(k-\frac{\ell-d_1+d_2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d_2-d_1+d_2}{2}\right) \Gamma\left(k-\frac{d_1-d_2+d_2}{2}\right)$ , а  $f_2$  получается из  $f_1$  заменой  $d_1 \rightarrow \delta$ . В соответствии с (4.12) имеем  $\rho_r(\ell, 0) = \rho_r(D-\ell, 0)$ .

Нетрудно проверить, что спектральная функция (10.23) удовлетворяет динамическому уравнению. В теории  $\lambda \psi_1 \psi_2 \psi_3$  в  $D$ -мерном пространстве имеем

$$\text{diagram} = \Lambda(d_2) \text{diagram} + \text{diagram},
 \tag{10.24}$$

где  $\Lambda(d) = -2g^{-1} \mu_0^D(d)$ ,  $\mu_0^D(d) = \frac{1}{4} (4\pi)^{2k} \frac{\Gamma(k) \Gamma(D-\ell)}{\Gamma(k-\ell) \Gamma(\ell-k)}$ , а функция Грина в левой части равна

$$\text{diagram} = \frac{4}{D-1} \frac{(4\pi)^k}{N_2(d d D)} \left\{ \Gamma(k-d+1) \Gamma(d-k) \Gamma(k+1) \right\}^{-1} \text{diagram}.$$

Вычисляя  $\text{diagram}$  из (10.23), находим, что уравнение (10.24) выполняется тождественно для любых значений размерностей  $d_1, d_2, \delta$ .

Рассмотрим уравнение (10.22) для произвольного спина. Трех-точечная функция  $C_{(x, x_2, x_3)}^{\sigma_2 \sigma_3}$ , включающая бесследный симметричный тензор  $\sigma_2 = (\ell, s)$  ранга  $s$ , скаляр  $\sigma_3 = (d_3, 0)$  и бесследный симметричный тензор второго ранга  $\sigma_3 = (d_3, 2)$ , дается формулой (3.29). Полагая в (3.29)  $\sigma_3 = \sigma_T$  (т.е.  $d_3 = D$ ), получим вершину, входящую в левую часть (10.22). Вычисляя производную  $\partial_{x_1}^{x_3}$ , находим

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^{x_3} \left\{ \overset{x_3 \sigma_T}{\underset{x_2 d_2}{\text{---}}} \right\} &= \partial_{x_1}^{x_3} C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\sigma d_2 \sigma_T}(x, x_2, x_3) = \\ &= \frac{x_{12}^2}{x_{13}^2 x_{23}^2} \tilde{\Delta}_{h - \frac{d_2 - \ell + s + 2}{2}}(x_{13}) \tilde{\Delta}_{h - \frac{\ell - d_2 - s + 2}{2}}(x_{23}) \tilde{\Delta}_{\ell + \frac{d_2 - s + 2}{2} - h}^{(x_{12})} \\ &\left\{ \tilde{A} \lambda_{x_2}^{x_3}(x_1, x_2) \left[ \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2, x_3) \dots \lambda_{\mu_s}^{x_1}(x_2, x_3) - \text{следы} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{1}{x_{13}^2} \tilde{B} \left[ \sum_{\kappa} g_{\mu_{\kappa} \nu_2}(x_{13}) \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2, x_3) \dots \lambda_{\mu_{\kappa}}^{x_1}(x_2, x_3) - \text{следы по } \mu \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10.25)$$

где  $\tilde{A} = \left[ \frac{D-1}{D} (d_2 - \ell) - \frac{s}{D} \right] A + 2s \frac{D-2}{D} \left( h - \frac{\ell - d_2 - s}{2} \right) B$ ,  
 $\tilde{B} = \frac{1}{D} A + (d_2 - \ell + \frac{2}{D} s) B + 2(s-1) \left( h - \frac{\ell - d_2 - s + 2}{2} \right) C$ ,  
 $A, B$  и  $C$  - константы, входящие в (3.29). При  $s \geq 2$  подходящим выбором коэффициентов  $A, B$  и  $C$  можно обратить (10.25) в ноль. Это означает, что в (10.21) при  $s \geq 2$  присутствуют члены типа (9.16). Мы не будем приводить окончательных вычислений для  $\rho_T(\ell, s)$  при любом  $s$ , т.к. это ведет к весьма громоздким выражениям.

Приложение

Вычисление интегралов (3.27) и (3.27a)

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{x_1}(x_2, x_3; x_1) &= \int dx \tilde{\Delta}_{d_1}(x_1 - x) \tilde{\Delta}_{d_2}(x_2 - x) \tilde{\Delta}_{d_3}(x_3 - x) \\ &\left\{ \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x, x_3) \dots \lambda_{\mu_n}^{x_1}(x, x_3) - \text{следы} \right\}, \end{aligned} \quad (П.1)$$

где  $d_1 + d_2 + d_3 = D$ .

При  $n = 0$  имеем

$$\tilde{J}^0(x_2, x_3; x_1) = (4\pi)^k \tilde{\Delta}_{k-d_1}(x_2 - x_3) \tilde{\Delta}_{k-d_2}(x_1 - x_3) \tilde{\Delta}_{k-d_3}(x_1 - x_2), \quad (П.3)$$

Интеграл (П.1) вычисляется с помощью рекуррентных формул, связывающих тензоры  $\tilde{J}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{x_1}$  различного ранга. Для вывода этих формул рассмотрим выражение

$$\tilde{J}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{x_1} = \int dx \tilde{\Delta}_{d_1}(x_1 - x) \tilde{\Delta}_{d_2}(x_2 - x) \tilde{\Delta}_{d_3}(x_3 - x) \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x, x_3) \dots \lambda_{\mu_n}^{x_1}(x, x_3), \quad (П.4)$$

Учитывая, что  $\partial_{\mu_1}^{x_1} \tilde{\Delta}_{d_1}(x_1 - x) = 2d_1 \frac{(x-x_1)^{\mu_1}}{(x-x_1)^2} \tilde{\Delta}_{d_1}(x_1 - x)$ , получим

$$\begin{aligned} n \tilde{J}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{x_1} &= \sum_{\kappa=1}^n \frac{1}{2d_1} \partial_{\mu_{\kappa}}^{x_1} \tilde{J}_{\mu_1 \dots \mu_{\kappa-1} \mu_{\kappa+1} \dots \mu_n}^{x_1} - \sum_{\kappa=1}^n \frac{(x_{31})_{\mu_{\kappa}}}{x_{13}^2} \tilde{J}_{\mu_1 \dots \mu_{\kappa-1} \mu_{\kappa+1} \dots \mu_n}^{x_1} - \\ &- \frac{1}{2d_1} \int dx \tilde{\Delta}_{d_1}(x_1 - x) \tilde{\Delta}_{d_2}(x_2 - x) \tilde{\Delta}_{d_3}(x_3 - x) \partial_{\mu_{\kappa}}^{x_1} \left\{ \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x, x_3) \dots \lambda_{\mu_{\kappa-1}}^{x_1}(x, x_3) \lambda_{\mu_{\kappa+1}}^{x_1}(x, x_3) \dots \lambda_{\mu_n}^{x_1}(x, x_3) \right\}, \end{aligned}$$

где  $\hat{\mu}_{\kappa}$  означает пропуск индекса. Используя формулу

$$\begin{aligned} \partial_{\mu_k}^{x_i} \{ \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2 x_3) \dots \lambda_{\mu_k}^{x_i} \dots \lambda_{\mu_n}^{x_n}(x_2 x_3) \} &= 2(n-1) \{ \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2 x_3) \dots \lambda_{\mu_n}^{x_n}(x_2 x_3) \} + \\ &+ 2(n-1) \frac{(x_{31})_{\mu_k}}{x_{31}^2} \{ \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2 x_3) \dots \lambda_{\mu_k}^{x_i} \dots \lambda_{\mu_n}^{x_n}(x_2 x_3) \} + \\ &+ 2 \lambda_{\mu_k}^{x_i} \sum_{s=1}^n \frac{(x_{31})_{\mu_s}}{x_{31}^2} \{ \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2 x_3) \dots \lambda_{\mu_s}^{x_i} \dots \lambda_{\mu_k}^{x_i} \dots \lambda_{\mu_n}^{x_n}(x_2 x_3) \} + \\ &+ \sum_{s=1}^n \delta_{\mu_k \mu_s} \{ \lambda_{\mu_1}^{x_1} \dots \lambda_{\mu_s}^{x_i} \dots \lambda_{\mu_k}^{x_i} \dots \lambda_{\mu_n}^{x_n} \} \left[ \frac{1}{(x_3^2 x_i)^2} - \frac{1}{(x_i x)^2} \right], \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} n \frac{\delta_{i+n-1}}{\delta_i} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{x_i} &= \frac{1}{2\delta_i} \sum_{k=1}^n \partial_{\mu_k}^{x_i} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_n}^{x_i} - \frac{\delta_{i+2(n-1)}}{\delta_i} \sum_{k=1}^n \frac{(x_{31})_{\mu_k}}{x_{31}^2} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_n}^{x_i} - \\ &- \frac{1}{\delta_i} \sum_{k \leq s} \delta_{\mu_k \mu_s} \left[ \frac{1}{x_{13}^2} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_s \dots \mu_n}^{x_i} - \int dx \tilde{\Delta}_{\delta_1}(x-x) \tilde{\Delta}_{\delta_2}(x_2-x) \tilde{\Delta}_{\delta_3}(x_3-x) \right] \quad (\text{П.5}) \\ &\dots \left\{ \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2 x_3) \dots \lambda_{\mu_k}^{x_i} \dots \lambda_{\mu_s}^{x_i} \dots \lambda_{\mu_n}^{x_n}(x_2 x_3) \right\}. \end{aligned}$$

Вычитая из (П.5) все следы, получим искомые рекуррентные формулы для бесследных тензоров (П.1):

$$\begin{aligned} n \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{x_i} &= \frac{1}{2(\delta_i+n-1)} \sum_{k=1}^n \partial_{\mu_k}^{x_i} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_n}^{x_i} - \frac{\delta_{i+2(n-1)}}{\delta_i+n-1} \sum_{k=1}^n \frac{(x_{31})_{\mu_k}}{x_{31}^2} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_n}^{x_i} - \\ &- \frac{2}{D+2(n-2)} \sum_{k \leq s} \delta_{\mu_k \mu_s} \left\{ \frac{1}{2(\delta_i+n-1)} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_s \dots \mu_n}^{x_i} - \frac{\delta_{i+2(n-1)}}{\delta_i+n-1} \frac{(x_{31})_{\mu_s}}{x_{31}^2} \right\} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_s \dots \mu_n}^{x_i} \quad (\text{П.6}) \end{aligned}$$

Покажем, что этим соотношениям удовлетворяет выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{x_i}(x_2 x_3; x_1) &= \frac{\Gamma(h-\delta_3+n)}{\Gamma(h-\delta_3)} \frac{\Gamma(\delta_i)}{\Gamma(\delta_i+n)} \mathcal{J}^0(x_2 x_3; x_1) \\ &\{ \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2 x_3) \dots \lambda_{\mu_n}^{x_n}(x_2 x_3) - \text{следы} \}, \quad (\text{П.7}) \end{aligned}$$

где  $\mathcal{J}^0(x_2 x_3; x_1)$  дается формулой (П.3).

Для проверки (П.7) рассмотрим тензор

$$\mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{x_i} = \frac{\Gamma(h-\delta_3+n)}{\Gamma(h-\delta_3)} \frac{\Gamma(\delta_i)}{\Gamma(\delta_i+n)} \mathcal{J}^0(x_2 x_3; x_1) \{ \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2 x_3) \dots \lambda_{\mu_n}^{x_n}(x_2 x_3) \}. \quad (\text{П.8})$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_i+n-1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \partial_{\mu_k}^{x_i} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_n}^{x_i} - [\delta_{i+2(n-1)}] \sum_{k=1}^n \frac{(x_{31})_{\mu_k}}{x_{31}^2} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_n}^{x_i} \right\} &= \\ &= \frac{h-\delta_3+n-1}{\delta_i+n-1} \sum_{k=1}^n \lambda_{\mu_k}^{x_i}(x_2 x_3) \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_n}^{x_i} + \\ &+ \frac{1}{\delta_i+n-1} \sum \delta_{\mu_k \mu_s} \left[ \frac{1}{x_{13}^2} - \frac{1}{x_{12}^2} \right] \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_s \dots \mu_n}^{x_i} = (\text{П.9}) \\ &= n \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{x_i} + \frac{1}{\delta_i+n-1} \sum \delta_{\mu_k \mu_s} \left[ \frac{1}{x_{13}^2} - \frac{1}{x_{12}^2} \right] \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_s \dots \mu_n}^{x_i}. \end{aligned}$$

При выводе (П.9) использовано (П.2). Вычитая из (П.9) следы и подставляя в (П.6), получим, что (П.6) удовлетворяется тождественно.

Аналогичным способом можно получить формулу (3.27а). Обозначим

чим

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\delta_1 \delta_2 \delta_3} &= \int dx \tilde{\Delta}_{\delta_1}(x-x) \tilde{\Delta}_{\delta_2}(x_2-x) \tilde{\Delta}_{\delta_3}(x_3-x) \\ &\{ g_{\mu_1}^x(x_1 | x_2 x_3) \dots g_{\mu_n}^x(x_1 | x_2 x_3) - \text{следы} \}, \quad (\text{П.10}) \end{aligned}$$

где  $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = D-n$ , (П.11)

$$g_{\mu}^x(x_1 | x_2 x_3) = g_{\mu\nu}(x_1-x) \lambda_{\nu}^x(x_2 x_3). \quad (\text{П.12})$$

Рекуррентные формулы имеют вид



$$\begin{aligned}
4n \int_{\mu_1 \dots \mu_n} \delta_1 \delta_2 \delta_3^2 &= \frac{\chi_{13}^2}{\delta_3} \sum_{\kappa} \left[ \frac{(\chi_{13})_{\mu_{\kappa}}}{\chi_{13}^2} + \frac{1}{2(\delta_1+n-1)} \partial_{\mu_{\kappa}}^{x_1} \right] \int_{\mu_1 \dots \mu_{\kappa} \dots \mu_n}^{\delta_1, \delta_2, \delta_3+1} - \\
&- \frac{\chi_{12}^2}{\delta_2} \sum_{\kappa} \left[ \frac{(\chi_{12})_{\mu_{\kappa}}}{\chi_{12}^2} + \frac{1}{2(\delta_1+n-1)} \partial_{\mu_{\kappa}}^{x_1} \right] \int_{\mu_1 \dots \mu_{\kappa} \dots \mu_n}^{\delta_1, \delta_2+1, \delta_3} - \quad (\text{П.13}) \\
&- \frac{2}{D+2(n-2)} \frac{\chi_{13}^2}{\delta_3} \sum_{\kappa < \lambda} \delta_{\mu_{\kappa} \mu_{\lambda}}^{\delta_1} \left[ \frac{(\chi_{13})_{\mu_{\kappa}}}{\chi_{13}^2} + \frac{1}{2(\delta_1+n-1)} \partial_{\mu_{\kappa}}^{x_1} \right] \int_{\mu_1 \dots \mu_{\kappa} \mu_{\lambda} \dots \mu_n}^{\delta_1, \delta_2, \delta_3+1} + \\
&+ \frac{2}{D+2(n-2)} \frac{\chi_{12}^2}{\delta_2} \sum_{\kappa < \lambda} \delta_{\mu_{\kappa} \mu_{\lambda}}^{\delta_1} \left[ \frac{(\chi_{12})_{\mu_{\kappa}}}{\chi_{12}^2} + \frac{1}{2(\delta_1+n-1)} \partial_{\mu_{\kappa}}^{x_1} \right] \int_{\mu_1 \dots \mu_{\kappa} \mu_{\lambda} \dots \mu_n}^{\delta_1, \delta_2+1, \delta_3}
\end{aligned}$$

Для вывода (П.13) используются соотношения

$$g_{\mu, \nu}(x, x) g_{\nu, \mu_2}(x, x_2) = g_{\mu_1, \mu_2}(x, x_2) - 2\chi_{12}^2 \lambda_{\mu_1}^{x_1}(x_2, x) \lambda_{\mu_2}^{x_2}(x, x)$$

и

$$g_{\mu}^x(x_1, x_2, x_3) = \frac{\chi_{12}^2}{(x-x_2)^2} \lambda_{\mu}^{x_1}(x_2, x) - \frac{\chi_{13}^2}{(x-x_3)^2} \lambda_{\mu}^{x_1}(x_3, x).$$

Можно проверить, что (3.27a) является решением уравнений (П.13).

#### Литература

1. Е.С.Фрадкин, *ЖЭТФ* **26**, 751, 1954; **29**, 121, 1955.
2. Е.С.Фрадкин, Диссертация (1960), опубликована в Труды ФИАН, том 29, Наука, 1965, Москва.
3. K.Symanzik, Lectures in high-energy Physics, ed. B. Jaksic, Zagreb, 1961.
4. A.A.Migdal, preprint, Landau Institute, Chernogolovka, 1972.
5. G.Mack, preprint Universitat Bern, 1973.
6. М.Я.Пальчик, Е.С.Фрадкин, ФИАН, Краткие сообщения по физике, № 4, Москва, 1974.
7. E.S.Fradkin, M.Ya.Palchik, P.N.Lebedev Phys. Inst., preprint N 115, Moscow, 1974.
8. Tsu Yao, J.Math. Phys., **8**, 1931, 1967; **9**, 1615, 1968; **12**, 315, 1971.
9. А.Н.Лезнов, И.А.Федосеев, *ТМФ*, **5**, 181, 1970.
10. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, Москва, 1963.
11. J.Schwinger. Phys. Rev. **115**, 728, 1959; Е.С.Фрадкин. ДАН СССР, **125**, 311, 1959; Диссертация (1960), стр.96, опубликовано (см. /2/).
12. I.Segal, Bull. Am. Math. Soc. **77**, 958, 1971.
13. I.T.Todorov, preprint TH.1697-CERN, 1973.
14. Б.Г.Копопельченко, М.Я.Пальчик, *ЯФ*, **19**, 1, 203, 1974.
15. М.Я.Пальчик, препринт № 11, Институт автоматизации и электрометрии СОАН СССР, Новосибирск, 1973.

16. А.М.Поляков, *ЖЭТФ*, 12, 538, 1970.
17. А.А.Migdal, *Phys.Lett.* 37B, 98, 1971;  
E.Schreier, *Phys. Rev.* D3, 980, 1971.
18. Б.Г.Копопельченко, М.Я.Пальчик, *ДАН*, 214, № 5, 1052, 1974.
19. W.Kuhl, *Comm. Math.Phys.* 30, 287, 1973;  
Б.Г.Копопельченко, М.Я.Пальчик, препринт 98-73, ИЯФ СОАН СССР, Новосибирск, 1973.
20. V.Dobrev, G.Mack, V.Petkova, S.Petrova, I.Todorov, *JINR*, E2-7977, Dubna, 1973.
21. К.Суманзик, *Lett. Nuovo Cim.* 3, 734, 1972.
22. А.М.Поляков, *ЖЭТФ*, 66, 23, 1974.
23. D.J.Gross, J.Wess, *Phys. Rev.* D7, 2414, 1973.
24. M.Gell-Mann, F.E.Low, *Phys. Rev.* 95, 1300, 1954.
25. С.Г.Галлен, *Phys. Rev.* D2, 1541, 1970;  
К.Суманзик, *Comm. Math. Phys.* 18, 227, 1970.
26. А.А.Migdal, *Phys. Lett.* 37B, 386, 1971.
27. G.Parisi, L.Pelity, *Lett. Nuovo Cim.* 2, 627, 1970.
28. G.Mack, I.T.Todorov, *Phys. Rev.* D5, 1764, 1973.
29. G.Mack, К.Суманзик, *Comm. Math. Phys.* 27, 247, 1972.
30. V.Glaser, H.Lehmann, W.Zimmermann, *Nuovo Cim.* 6, 1122, 1957. M.Veltman, *Physica* 29, 186, 1963.
31. G.Parisi, *Lett. Nuovo Cim.* 4, 15, 777, 1972.
32. Е.С.Фрадкин, *ЖЭТФ* 29, 258, 1955;  
Y.Takahashi *Nuovo Cim.* 6, 370, 1957.
33. Д.Швингер, *Теория квантованных полей*, ИЛ., М., 1956.

Рукопись поступила в издательский отдел  
13 мая 1975 г.