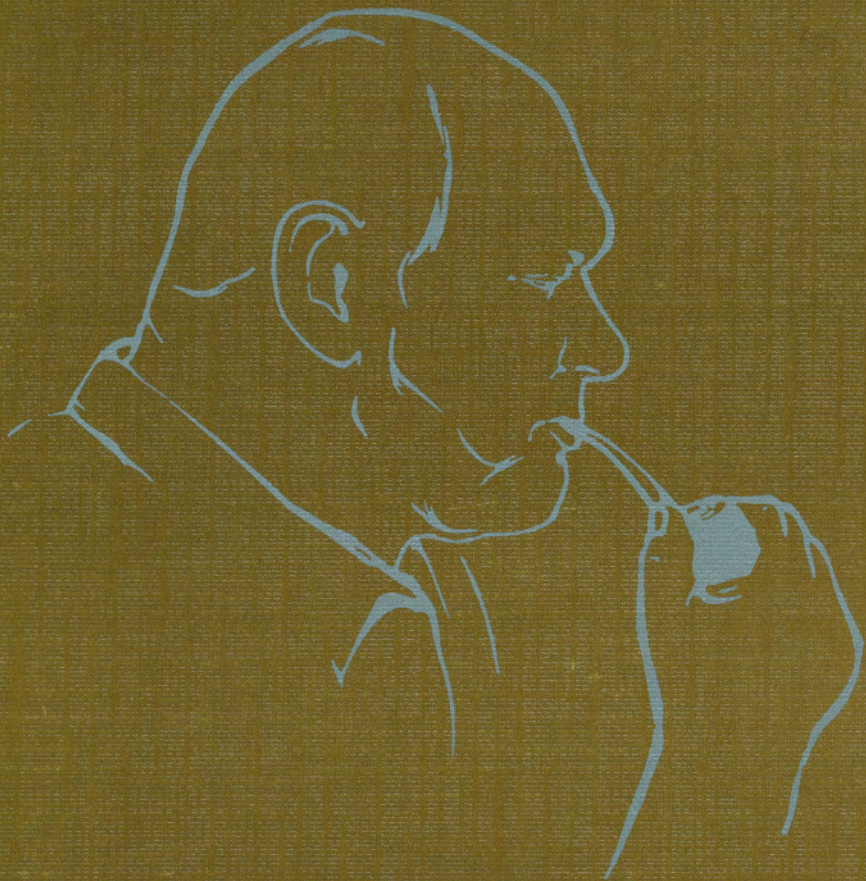
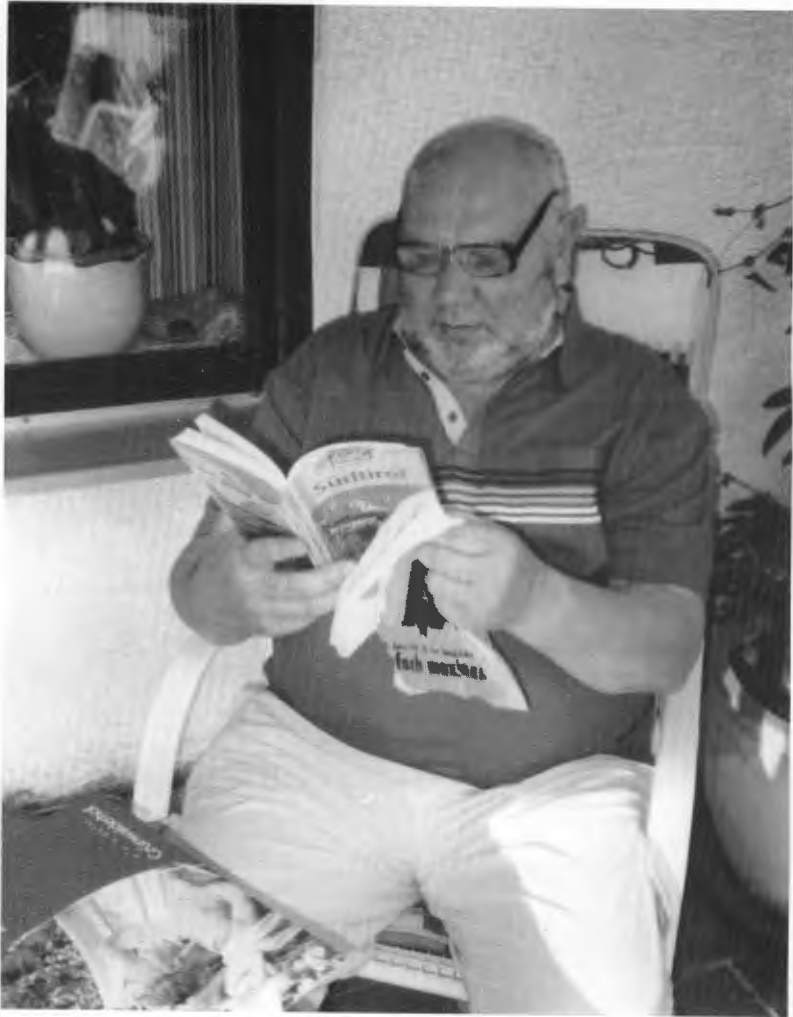


СЗГ
Т-191



А. Марсов





Объединенный институт ядерных исследований

СЗГ
Т-191

**АЛЕКСАНДР
ВАСИЛЬЕВИЧ
ТАРАСОВ**

К 70-летию со дня рождения

Объединенный институт
ядерных исследований
Дубна 2012
БИБЛИОТЕКА

120912

Составители

Л. Г. Афанасьев, О. О. Воскресенская, С. Р. Геворкян, Г. И. Лыкасов

Фотографии из семейного архива А. В. Тарасова

А46 Александр Васильевич Тарасов: К 70-летию со дня рождения / Сост. Л. Г. Афанасьев, О. О. Воскресенская, С. Р. Геворкян, Г. И. Лыкасов. — Дубна: ОИЯИ, 2012. — 314 с., 16 с. фото.

ISBN 978-5-9530-0335-3

Сборник посвящен известному физику-теоретику Александру Васильевичу Тарасову (1942–2011) и приурочен к 70-летию со дня его рождения. Значительную часть издания составляют научные работы ученого. Сборник содержит библиографический список его трудов. В книгу также вошли очерки о его жизни и научной деятельности.

От составителей

5 июня 2012 года исполняется 70 лет со дня рождения Александра Васильевича Тарасова, нашего коллеги, учителя и друга. Год назад он ушел от нас после тяжелой болезни. Всю свою жизнь Александр Васильевич посвятил физике, работая в Лаборатории ядерных проблем Объединенного института ядерных исследований, куда он пришел в 1964 году после окончания физико-технического факультета Харьковского университета и где проработал до последних дней своей жизни.

За 47 лет работы в ОИЯИ Александром Васильевичем был выполнен огромный объем теоретических исследований, результаты которых опубликованы в более чем 200 статьях в ведущих научных журналах мира и представлены на многочисленных международных конференциях. Вся научная деятельность выдающегося физика-теоретика А.В. Тарасова была тесно связана с экспериментами, проводимыми в ОИЯИ и других мировых физических центрах. Благодаря высокой научной квалификации и глубокому пониманию физики высоких энергий он был постоянным консультантом многих экспериментаторов ОИЯИ. А.В. Тарасов являлся одним из крупнейших экспертов по взаимодействиям частиц и ядер при высоких энергиях. Неоценим его огромный вклад в создание теоретической базы эксперимента DIRAC/PS212 и теоретической интерпретации эксперимента NA-48/2. Под руководством А.В. Тарасова защищено 12 кандидатских диссертаций, трое из его учеников стали докторами наук.

В этой книге собраны воспоминания учеников, коллег, родственников и друзей, а также наиболее интересные и значимые научные публикации А.В. Тарасова. Мы благодарны всем, кто поделился своими воспоминаниями. Мы выражаем свою благодарность Лаборатории ядерных проблем, инициировавшей создание сборника, посвященного Александру Васильевичу, а также Издательскому отделу ОИЯИ за неформальный и творческий подход к изданию этой книги. Надеемся, что данный сборник послужит сохранению доброй памяти об этом выдающемся во всех смыслах человеке.

ВОСПОМИНАНИЯ УЧЕНИКОВ И КОЛЛЕГ

Памяти Учителя

С.Р. Геворкян

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Иисус же сказал им: не бывает пророк без чести,
разве только в отечестве своем и в доме своем.

Евангелие от Матфея

В 1970 году, после года работы в Ереванском физическом институте, я приехал в ОИЯИ в качестве прикомандированного стажера. Мне надо было выбрать область исследований и найти себе научного руководителя. Несколько месяцев я проработал в ЛТФ, но меня всегда интересовали исследования, имеющие непосредственный выход на эксперименты, и мне посоветовали обратиться к А.В. Тарасову, который работал в теоретическом секторе ЛЯП, созданном и возглавляемом тогда Львом Иосифовичем Лапидусом. Саша Тарасов меня не экзаменовал. Он написал формулу для сечения, которую надо было запрограммировать, рассчитать на компьютере и сравнить с экспериментальными данными. Так началось наше многолетнее сотрудничество, переросшее в дальнейшем в дружбу.

К началу 1970-х годов глауберовская теория многократного рассеяния была обобщена на процессы рождения частиц на атомных ядрах, что позволило изучать взаимодействие нестабильных частиц, например векторных мезонов с нуклонами, а также проверять предсказания различных моделей сильного взаимодействия, как, например, популярной в то время модели векторной доминантности. Начав заниматься новой для себя областью физики (кандидатская диссертация, которую он защитил в 1968 году, была посвящена вопросам тормозного излучения), Александр Васильевич получил ряд важных и фундаментальных результатов в теории многократного рассеяния. В качестве первого шага он вывел формулы для амплитуд рождения частиц на ядрах при высоких энергиях, воспользовавшись теорией многократных соударений Ватсона. Затем, используя развитую им технику, он впервые в литературе показал, что в некогерентных процессах рождения частиц (с возбуждением или развалом ядер) необходимо учитывать интерференцию амплитуд рождения на разных нуклонах, вклад которой растет с ростом энергии. В дальнейшем наличие интерференции в некогерентных процессах было обнаружено в экспериментах DESY по электророждению векторных мезонов на ядрах. В 1973 году за цикл работ по взаимодействию частиц высоких энергий с атомными ядрами он был удостоен премии Ленинского комсомола Армении.

В середине 1970-х годов в экспериментах FNAL по рождению адронов с большими поперечными импульсами на ядрах было обнаружено, что с увеличением поперечного импульса регистрируемой частицы зависимость от атомного номера ядра A становится сильнее линейной (эффект Кронина). Для объяснения такого аномального поведения (обычное поглощение частицы в ядре приводит к уменьшению показателя в A -зависимости сечений) Александр Васильевич обобщил теорию некогерентного рождения частиц на ядрах на случай инклюзивного рождения частиц, что позволило ему впервые в литературе объяснить эффект Кронина как результат многократных неупругих соударений протонов в ядрах.

Развитые им методы учета спиновых эффектов в рождении частиц на ядерных мишенях позволили устранить ряд расхождений, наблюдаемых между экспериментом и теорией в эффекте Примакова. Итогом этих исследований явился написанный им для ЭЧАЯ обзор, приведенный в данном сборнике, который не устарел до настоящего времени и может служить примером блестящего и элегантного изложения достаточно сложных вопросов теории многократного рассеяния.

С ростом энергии сталкивающихся ядер сечение образования лептонных пар за счет их кулоновских полей растет как куб логарифма энергии, и при энергиях RHIC и LHC возникает необходимость учета многофотонных обменов между лептонной парой и сталкивающимися ядрами. Александру Васильевичу удалось элегантно и физически безупречно решить задачу учета многофотонных обменов любой кратности — проблему, которую теоретики не могли решить в течение многих десятилетий.

Его работы по теории классического эффекта Ландау–Померанчука для мишеней конечных размеров и КХД-аналога данного эффекта позволили оценить точность используемых в теории приближений, что важно, если учесть возможности современных экспериментов.

Особенно ярко его талант физика-теоретика проявился в работах последних лет, посвященных учету взаимодействия между пионами в распадах K -мезонов. В 2003–2004 годах коллаборация NA-48/2, в работе которой самое активное участие принимали физики ОИЯИ (рук. В.Д. Кекелидзе), в эксперименте на SPS CERN обнаружила в распределении вероятности распада $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \pi^0$ по инвариантной массе двух нейтральных пионов аномалию (CUSP), которая, согласно Н. Кабиббо, была результатом перезарядки в конечном состоянии заряженных пионов в нейтральные. Несмотря на то, что такими известными теоретиками, как Н. Кабиббо, Г. Исидори и Ю. Гассер, были предложены два разных теоретических подхода, позволяющих при сравнении предсказаний теории с экспериментом определять длины пион-пионного рассеяния, в рамках предложенных подходов не удавалось устранить расхождение между экспериментальными данными и теорией вблизи порога образования заряженных пионов. Было ясно, что такое расхождение является результатом неучета электромагнитных взаимодействий между заряженными пионами, которые должны приводить к связанным состояниям (атом пиония) ниже порога образования заряженных пионов. Однако учет электромагнитных взаимодействий в подпороговой области в рамках существующих теоретических подходов был принципиально невозможен.

Александру Васильевичу удалось в рамках нерелятивистской квантовой механики (которую он блестяще знал и понимал) получить, исходя из самых общих принципов, выражения для амплитуд распада с учетом сильных взаимодействий пионов любой кратности. Это позволило включить электромагнитное взаимодействие между пионами и учесть образование нестабильных атомов под порогом образования заряженных пионов. Развитый им аппарат был использован для фитирования экспериментальных данных, что позволило устранить расхождения между экспериментом и теорией. За исследования эффекта CUSP, совместно с группой физиков, Александр Васильевич был удостоен премии ОИЯИ за 2007 год.

Обладея удивительной физической интуицией и блестящей математической техникой, он всегда стремился к решению задач, которые можно было проверить экспериментально, что могло помочь продвинуться в нашем понимании природы. Если проблема его заинтересовывала и он считал, что она может быть полезной для практики, он брался за

задачу и, несмотря на уровень ее сложности, находил наиболее элегантный и физический путь ее решения.

Мне припоминается следующий характерный для его работы в науке случай. В начале 1970-х годов два моих товарища, вполне квалифицированные физики-теоретики, работающие в ЛТФ, в течение полугода выводили формулу для сечения взаимодействия атома позитрония с веществом, и один из них попросил Сашу прокомментировать полученный ими результат. Александр Васильевич отказался знакомиться с их выводом и результатом и предложил им прийти через пару часов. Когда он выписал на доске результат, совпадавший с результатом полугодовых вычислений двух квалифицированных теоретиков, мы были поражены. За пару часов он вывел требуемую формулу, пользуясь только ему известной техникой.

Он обладал очень редкой в наше время способностью говорить по существу проблемы и при этом редко ошибаться. Безусловно, та видимая легкость и красота мышления, с которой он решал возникающие проблемы, были результатом огромного и постоянного труда на протяжении всей его жизни. Талант, заложенный в нем от Бога, развился и воплотился в конкретные работы благодаря неустанной и тяжелой работе в физике, которую он любил и глубоко понимал, а она отвечала ему взаимностью.

Мне повезло, что в начале своего пути в науке я встретил Александра Васильевича, а в дальнейшем имел счастливую возможность до последних дней его жизни работать вместе с ним и дружить на протяжении многих лет. Он был не простой человек, со сложным характером и с собственными понятиями о добре и зле, но когда возникала необходимость, всегда брал на себя ответственность за решение проблем любой сложности, возникали ли они в быту или в науке.

Являясь выдающимся физиком-теоретиком, Александр Васильевич остался кандидатом наук, понимая, что всем нам отпущен короткий срок, который он жалел тратить на приобретение званий и регалий. Вместо этого он решал красивые физические задачи, которые были нужны людям и помогали им лучше понять окружающий мир. Александр Васильевич ушел рано, не решив многих научных проблем, над которыми работал, но то, что он сделал, останется в его работах и в памяти его многочисленных учеников, которым он оставил пример бескорыстного служения науке.

Об А.В. Тарасове

Г.И. Лыкасов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

С Александром Васильевичем Тарасовым я познакомился в 1969 году, когда готовил дипломную работу под руководством Льва Иосифовича Липидуса. После окончания университета и поступления в аспирантуру я стал по совету Л.И. Липидуса сотрудничать с А.В. Тарасовым. В дальнейшем Александр Васильевич стал вторым руководителем моей кандидатской диссертации.

В период с 1971 по 1973 год под руководством А.В. Тарасова я занимался исследованием поляризационных явлений при взаимодействии протонов средних и высоких энергий с легкими ядрами: дейтрон и гелий. Как раз в это время научный интерес Александра Васильевича сфокусировался на теоретическом анализе адрон-ядерных реакций. Фактически им первым был сформулирован новый теоретический подход, основанный на модели Глаубера, позволивший проанализировать поляризационные явления в столкновениях протонов с легкими ядрами при средних и высоких начальных энергиях. Это было особенно важно и привлекательно для Лаборатории ядерных проблем и Лаборатории высоких энергий ОИЯИ, где в тот период очень интенсивно проводились поляризационные эксперименты.

Совместные с А.В. Тарасовым публикации [1–3] посвящены теоретическому анализу спиновых явлений в упругих $p-d$, $p-He^3$ - и $p-He^4$ -рассеяниях при энергиях, достижимых в то время в ЛЯП и ЛВЭ ОИЯИ. В этих работах фактически впервые в те далекие времена были вычислены амплитуды этих процессов в рамках приближения Глаубера с учетом возможных упругих перерассеяний налетающих протонов на нуклонах ядер: дейтрона, гелия-3 и гелия-4. Были также вычислены поляризационные наблюдаемые в этих процессах, получено хорошее согласие с имеющимися на тот момент экспериментальными данными и были сделаны предсказания для новых экспериментов. В то время такие расчеты упругих амплитуд при начальных энергиях порядка 600 МэВ – 1 ГэВ и выше были очень хорошим прогрессом, потому что проводились эксперименты по упругому рассеянию протонов на легких ядрах как в ОИЯИ, ЛИЯФ (Гатчина), так и за рубежом. Основными целями этих экспериментов являлись исследование поляризационных явлений и выяснение вопроса, какова роль спиновых эффектов в таких реакциях при возрастании энергии начальных протонов. Существовавшее в те далекие времена научное предубеждение, что спиновые эффекты в $p-p$ и $p-A$ -столкновениях могут “вымирать” с ростом начальной энергии, было потом опровергнуто, и, в частности, наши совместные работы с Александром Васильевичем внесли лепту в разрешение этого вопроса.

Другая работа, сделанная совместно с Александром Васильевичем и двумя сотрудниками ЛЯП Б.М. Головиным и А.М. Розановой [4], касалась конкретного применения теории многократного рассеяния Глаубера–Ситенко к анализу реакции $pd \rightarrow ppn$ при энергиях циклотрона ЛЯП, где проводились в то время поляризационные эксперименты. Была вычислена амплитуда этой реакции с учетом перерассеяний начального протона на нуклонах дейтрона с использованием результатов фазового анализа упругих нуклон-нуклонных столкновений, который проводился в те времена в группе Ю.М. Казаринова (ЛЯП ОИЯИ). Вычислен также ряд поляризационных наблюдаемых, и сделаны предсказания для экспериментов, проводимых в то время в группе Б.М. Головина. Все наши теоретические предсказания успешно подтвердились в этих экспериментах.

Я очень благодарен судьбе и дальновидному совету Льва Иосифовича сотрудничать с Александром Васильевичем Тарасовым во время моей учебы в аспирантуре. Работая под руководством Александра Васильевича, я научился многому, в частности ставить физическую задачу, полезную и нужную и для эксперимента, и для теории, и главное: корректно ее решать по правилам, не противоречащим основным физическим законам. Как учитель, Александр Васильевич Тарасов был замечательным педагогом. Да, иногда он был резок и не стеснялся в выражении своих эмоций. Но по сути он был всегда прав в отстаивании своей точки зрения. В моей памяти Александр Васильевич запечатлен как выдающийся ученый, физик-теоретик, обладавший гениальной интуицией и практическим умением правильно решать задачи во многих областях теоретической физики.

Список литературы

1. Г.И. Лыкасов, А.В. Тарасов, ЯФ, 17 (1973) 301.
2. Г.И. Лыкасов, А.В. Тарасов, ЯФ, 19 (1973) 1209.
3. Г.И. Лыкасов, А.В. Тарасов, ЯФ, 20 (1974) 489.
4. Б.М. Головин, Г.И. Лыкасов, А.М. Розанова, А.В. Тарасов, ЯФ, 16 (1972) 1096.

Физик Божьей милостью

А.С. Пак

Институт физики высоких энергий АН РК, Алма-Ата

С А.В. Тарасовым я познакомился в 1969 году на свадьбе однокурсника, а наше с ним сотрудничество началось года через два. На тот момент ему не было еще 30 лет, но это был совершенно сложившийся самостоятельный научный работник со своей яркой индивидуальностью. У него был талант от Бога, что сочеталось со страстью к науке и огромной работоспособностью. Это позволило ему стать высококлассным профессионалом и, я бы сказал, большим мастером своего дела. Есть ученые, которые всю жизнь бурят в одном месте, есть такие, которые что-то изобретают или придумывают. Александр Васильевич не был ни тем, ни другим. Он был блестящим реализатором. Всякий раз, когда появлялась интересная задача, он мгновенно вникал в суть, включался на полную мощь и буквально раздраконивал ее. Одной из характерных особенностей его научного стиля было знание мельчайших деталей, в которых, как известно, черт и прячется.

Мне вспоминаются несколько характерных примеров. Как-то на семинаре обсуждались экспериментальные данные об аномальной A -зависимости спектров протонов в реакции $p+A \rightarrow p+X$. Аномальность состояла в том, что показатель A -зависимости $\alpha(p_t)$ с ростом поперечного импульса p_t становился больше единицы. Это казалось странным, и возникла оживленная дискуссия. В разгар обсуждения последовала реплика А. Тарасова: "Так и должно быть". Он пояснил, что с ростом p_t включаются и начинают доминировать некогерентные столкновения высокой кратности, вероятность которых с увеличением A растет быстрее линейной. Все встало на свои места.

Другой пример связан с проблемой слабой A -зависимости коэффициента неупругости в адрон-ядерных взаимодействиях. Для объяснения этого факта предлагались различные экзотические модели. А. Тарасов не занимался этими проблемами, но однажды, когда об этом зашла речь в его присутствии, он спросил, каким образом получены эти экспериментальные данные. В результате выяснилось, что данные получены методами калориметрии, причем установка не могла регистрировать события с большими потерями энергии. И опять его реплика: “Так и должно быть, потому что большие потери энергии реализуются через механизм многократных некогерентных столкновений, а они подавлены неэффективностью установки, что и дает слабую A -зависимость”. Детальные расчеты показали, что Александр Васильевич, как всегда, прав. Последующее изучение этих вопросов привело к описанию всех экспериментальных данных по спектрам протонов в процессах $p + A \rightarrow p + X$. В связи с подобными случаями он всегда говорил: “Надо не открытия делать, а разобраться”.

Здесь следует отметить еще одну особенность научного стиля Александра Тарасова. Будучи теоретиком, он прекрасно знал экспериментальные данные, причем не просто цифры и графики. Он хорошо знал экспериментальную технику, ее возможности, что и позволяло ему критически и творчески использовать и трактовать факты. Вообще иногда создавалось впечатление, что ему все известно и ясно. Была некая иллюзия легкости. Но в том-то и суть его таланта, а кажущаяся легкость была следствием огромной работы. Я, например, с удивлением обнаружил, что он, будучи блестящим технарем, непрерывно и ежедневно шлифует и совершенствует свое мастерство, что и позволяло ему в нужный момент успешно решать возникавшие задачи.

Здесь я хотел бы отметить еще одну, как сейчас говорит молодежь, фишку. Он часто повторял: “Я литературу не читаю”. На самом деле это, конечно, было не так. Он прекрасно знал все, и особенно хорошо те вопросы, которыми так или иначе занимался. Не раз были случаи, когда возникала проблема ссылки, и он говорил: “Посмотри там-то работу такого-то”. И таких ссылок в его “компьютере” хранились сотни. Просто его феноменальные способности позволяли ему лишь прочесть постановку задачи или проблемы, а остальное он воспроизводил сам. В результате он не просто знал ссылки, а знал нужные работы в мельчайших деталях.

Другой его особенностью был внешний бардак, который царил на рабочем столе (при том, что в голове был абсолютный порядок). Стол был всегда завален бумагами и грудой конвертов, присланных коллегами с их работами, но которые он никогда не вскрывал. Однажды по непонятной причине он решил навести у себя на столе порядок. При этом он обнаружил конверт, в котором был препринт И.В. Андреева, содержащий важный результат: в рамках теории Глаубера–Ситенко было получено выражение для фазовой функции ядро-ядерного рассеяния в так называемом древесном или беспетлевом приближении, т.е. основной вклад. Но это выражение представляло собой бесконечный двойной ряд и по этой причине было неприменимо для практических расчетов. А. Тарасов тут же засел за проблему. Вскоре ряд Андреева был просуммирован и был разработан формализм, удобный для проведения расчетов с известной точностью. При этом получено еще несколько приближенных расчетных схем, удобных для применения в конкретных случаях.

Вообще Александр Васильевич никогда не пользовался формулами и расчетными схемами, что называется, тупо. По его выражению, к проблеме надо подходить конкретно-исторически, а не абстрактно-демагогически. В его руках любая расчетная схема быстро

упрощалась. Так была разработана теоретическая база, в рамках которой Александр Тарасов со своими помощниками блестяще рассчитал данные по альфа-ядерному рассеянию.

Мне хотелось бы отметить здесь одну особенность А. Тарасова как научного работника, которую сам он долгое время недооценивал. Он был без преувеличения выдающимся мастером по части численных расчетов. При этом полученные им результаты отличались стопроцентной надежностью и достоверностью. У него было правило, которое он сформулировал мне: “Надо рассчитать одну и ту же величину десять раз подряд. Если в последних пяти случаях получится один и тот же результат, то ему можно верить”. При этом на разных этапах результаты проверялись с помощью разных тестов. Надо сказать, что при проведении подобного рода расчетов необходимо вести их, что называется, от и до. Нельзя прерываться где-то на середине, так как потом приходится начинать все сначала. Для проведения такой работы необходимо иметь так называемое “длинное дыхание”. Александр Васильевич в полной мере обладал этим редким качеством. При необходимости он мог напряженно трудиться часами, не вставая из-за стола до получения результата. И это при его-то таланте и бесподобном мастерстве.

Александр Васильевич работал в науке без малого на протяжении 50 лет. Если посмотреть все его работы, то можно обратить внимание на одно интересное обстоятельство. В них нет экзотических гипотез, модной терминологии, он не разрабатывал именных моделей. При этом он получал интересные и важные результаты. Примером может служить цикл работ по расчету спектров в реакциях $p+d \rightarrow p+X$, $d+d \rightarrow d+X$, $d+A \rightarrow d+X$ и т.д. Отправляясь от механизма многократных нуклон-нуклонных столкновений и простых кинематических соотношений, А. Тарасов предсказал нетривиальную структуру спектров. Например, в реакции $d+d \rightarrow d+X$ он предсказал трехпиковую структуру, которая была затем обнаружена в экспериментах группы Л.С. Ажгирея под руководством Михаила Григорьевича Мещерякова.

Александр Васильевич был ведущим экспертом в вопросах теории ядерных реакций при высоких энергиях. Много из того, что он умел делать и делал в этой области, не мог и не делал больше никто. За исключением нескольких первоначальных работ, все его работы опубликованы в соавторстве. Я бы назвал его соавторов помощниками. Конечно, основной вклад вносил А. Тарасов, но если кто-то из соавторов вносил что-то существенное, он никогда не упускал случая отметить это обстоятельство. Таким помощником на протяжении 20 лет посчастливилось быть и мне. Из общения с ним я, собственно, понял и что такое наука, и что значит работать в науке. У него было чему поучиться. И каждый, кто ему помогал, мог взять то, на что был способен. Конечно, все его ученики стали кандидатами наук, а некоторые и докторами. Сам Александр Васильевич докторскую диссертацию защищать не стал. Мне кажется, он не хотел затеряться среди многих. Он говорил: “Я себе цену знаю...” И хочу еще раз повторить: цена эта была очень высока.

Помимо работы, мы общались с ним по всем вопросам бытия. У него не было каких-то увлечений типа рыбалки, охоты и т.д. Играть он любил только с интегральчиками, как он говорил. Я никогда не видел в его руках газет. Единственный раз видел его у ТВ: вместе со всеми он смотрел первый съезд нардепов в 1989 году. Однако Александр Васильевич всегда был в курсе событий в стране и в мире. Иногда высказывался. Его суждения, как и по работе, были абсолютно лишены какой-либо конъюнктуры, были объективны и продиктованы природным умом и здравым смыслом. Насколько я знаю, за 47 лет работы в ОИЯИ он не занимался никакой так называемой общественной

работой, кроме тех случаев, когда посылали в колхоз или на овощебазу. Все свое время он посвящал работе. Любил и ценил юмор. Интересовался литературными новинками и просил принести то, что вызывало его интерес. Это были и толстые журналы, а иногда и самиздат. Немало времени провели мы с близкими нам людьми за столом. Кстати, Александр Васильевич прекрасно готовил плов. У него был сложный характер, и жизнь накладывала свой отпечаток, так что всякое бывало. Но, оглядываясь назад, думаю, что даже в тех случаях, когда он перегибал по форме, по сути он был прав. Лично я бесконечно признателен Александру Васильевичу за все, что он для меня сделал. В моей памяти он навсегда сохранится как блестящий ученый и незаурядный человек.

А.В. Тарасов и физика релятивистских атомов

Л.Л. Неменов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

С работами Александра Васильевича я ознакомился впервые в 1982 году. К этому времени теоретически был предсказан эффект сверхпроницаемости ультрарелятивистских позитрониев и опубликовано первое теоретическое описание этого эффекта, выполненное с рядом упрощений. Эффект был обусловлен тем, что внутреннее микровремя, за которое волновая функция позитрония изменяется, оказывается много меньше макровремени прохождения атома через тонкую пленку, если позитроний является ультрарелятивистским.

Благодаря глубокой физической интуиции и совершенному владению техникой физических расчетов, Александр Васильевич смог дать точное решение этой сложнейшей задачи. При объяснении этой работы он широко использовал язык аналогий и упрощений, которые позволили понять суть этого сложного исследования. Уже тогда была видна его способность объяснять сложные физические явления используя упрощения и качественные рассуждения.

В середине 1980-х годов была теоретически обоснована возможность наблюдения пион-пионных, пион-каонных и каон-каонных атомов. Для измерения времени жизни таких атомов необходимо знать сечения возбуждения этих атомов при взаимодействии с атомами обычных веществ. Первые расчеты проводились с использованием методов теоретической физики, разработанных для описания взаимодействия обычных атомов. Существовавшая в атомной физике техника расчетов сечений учитывала только однофотонный обмен и имела недостаточную точность для анализа экспериментальных данных. Для точного вычисления сечений требовался учет обмена всеми фотонами. Эта проблема была решена Александром Васильевичем.

Он обратил внимание на особую динамику взаимодействия димезоатомов: после взаимодействия траектория движения возбужденного атома практически не меняется, что позволило описать процесс, используя технику Глаубера. Все необходимые формулы, учитывающие многофотонные обмены, были Александром Васильевичем получены. Эти формулы позволили вычислить сечения возбуждения атомов с необходимой точностью в один процент, дав теоретическую основу для измерения времени жизни пион-пионного атома в эксперименте.

Для измерения времени жизни димезоатома нужно не только знать сечения возбуждения атома, но и описать процесс прохождения через вещество. Данная задача была решена

в определенном приближении: после соударения вычислялись вероятности возбуждения атома в различные состояния. Эти вероятности использовались для описания процесса прохождения димезоатома через вещество. Такое приближение включало некоторую неточность, установленную Александром Васильевичем.

Для того чтобы исключить эту неточность, нужно было описать прохождение димезоатомов через вещество не на языке вероятностей, а на языке амплитуд. Сложнейшая задача была решена Александром Васильевичем с помощью формализма матрицы плотности. Численный анализ, основанный на этом формализме, показал, что разница между описаниями на языке вероятностей и точными вычислениями на языке амплитуд равна 0,5%.

Работы Александра Васильевича сформировали точную теорию взаимодействия димезоатомов с обычными атомами и их прохождения через вещество. Благодаря этим работам в экспериментах по измерению времени жизни пион-пионных, пион-каонных и любых других атомов теоретические неопределенности, связанные с взаимодействием димезоатомов с веществом, вносят незначительный вклад в величину ошибки времени.

Александр Васильевич обладал колоссальной работоспособностью, и мне казалось, что он прерывает свои занятия только на время еды и сна. Работа была его основным состоянием, и он сохранил страстное увлечение физикой до конца своей жизни.

Вместе с тем он готов был щедро тратить свое время на любого физика, который обращался к нему за научной помощью. Его научная щедрость помогла очень многим людям стать соавторами многих хороших работ. Я полагаю, что часть этих физиков не смогла бы самостоятельно получить те результаты, которые были представлены в их статьях с А.В. Тарасовым.

Он очень любил своих сыновей и дочь. Когда они болели, он делал все, чтобы помочь им, и очень сильно переживал, если заболевание было серьезным.

Александр Васильевич был безразличен к научной карьере. Я много раз просил его защитить докторскую диссертацию. Однажды свидетелем такого разговора был директор ЛТФ А.Т. Филиппов, который также рекомендовал не откладывать защиту и осуществить ее на Диссертационном совете ЛТФ. Александр Васильевич соглашался, но ничего не делал: он мог заниматься только тем, что его интересовало.

В последние годы А.В. Тарасов хотел уточнить теорию многократного рассеяния. Улучшение этой теории было бы важным научным достижением. К сожалению, болезнь помешала осуществлению этого замысла и, скорее всего, развитие этой теории не состоится в течение многих лет.

Все мы потеряли талантливого физика, получившего замечательные научные результаты, и очень доброго человека, который щедро помогал коллегам, не считаясь со временем.

Работа с Александром Васильевичем Тарасовым

Л.Г. Афанасьев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Мое знакомство с Александром Васильевичем состоялось в конце 1980-х годов, тогда мы работали на одном этаже. Наша группа начинала эксперимент по изучению водородо-подобных атомов, состоящих из заряженных пионов — пиониума. Для оптимизации эксперимента и получения основного результата по времени жизни пиониума было необходимо

описать его эволюцию как простейшей многоуровневой квантовой системы при движении в веществе. Казалось бы, что может быть более изученным, чем водород. Но выяснилось, что формфакторы водородоподобных атомов для произвольных начальных и конечных состояний — задача, не решенная в общем виде, точнее, в виде, приемлемом для каких-либо практических расчетов. Именно эта классическая задача квантовой механики была решена Александром Васильевичем Тарасовым в работах *“Elastic form factors of hydrogen-like atoms in nS -states”* и *“Passage of atoms formed by π^+ - and π^- -mesons through a matter”*. На основании этих результатов был разработан метод вычисления вероятности развала пиониума при движении в веществе. Это позволило получить результат по наблюдению пиониума в эксперименте на ускорителе У-70 в Протвино. Впоследствии этот метод был использован при планировании и получении физического результата эксперимента DIRAC по точному измерению времени жизни пиониума и других адронных атомов на ускорителе PS в ЦЕРН.

Требования эксперимента к точности этих расчетов возрастали, и Александр Васильевич внес существенный вклад в дальнейшее развитие теории взаимодействия релятивистских водородоподобных атомов с веществом. В 1999 году была опубликована работа *“Total interaction cross sections of relativistic $\pi^+\pi^-$ -atoms with ordinary atoms in the eikonal approach”*, в которой полные сечения взаимодействия пиониума с атомом были получены в глауберовском приближении, учитывающем многофотонные обмены.

В 2002 году опубликована работа *“Contribution of α^2 -terms to the total interaction cross sections of relativistic elementary atoms with atoms of matter”* по учету магнитной части взаимодействия пиониума с веществом. Показано, что этот вклад подавлен с коэффициентом α^2 по сравнению с электрическим взаимодействием, рассмотренным в предыдущих работах.

И, наконец, в 2004 году была выполнена еще одна “классическая” работа *“Dynamics of the pionium with the density matrix formalism”*. В ней процесс прохождения пиониума через вещество описан в формализме матрицы плотности. Это позволило учесть все возможные интерференционные процессы и сняло ограничение вероятного подхода, используемого ранее. Было показано, что эти подходы обеспечивают практически совпадающие результаты. И это обосновало точность расчетов зависимости вероятности развала пиониума от его времени жизни, которая используется в эксперименте DIRAC.

Все это позволило довести точность расчетов сечений до уровня лучше 0,5% и исключило возможный вклад теоретических неопределенностей в конечный результат эксперимента DIRAC.

Было еще много обсуждений различных аспектов эксперимента DIRAC, в которых Александр Васильевич помогал нам в понимании нюансов физических проблем. Жаль, что многие из этих обсуждений так и не были доведены до публикации. Всегда поражало невероятно глубокое понимание Александром Васильевичем всех тонкостей физики, квантовой механики и математической физики, его умение довести полученный результат до вида, удобного для конечных вычислений и нужного для эксперимента. Сейчас очень редко встречаются люди, настолько любящие и знающие физику. И при этом Александр Васильевич был удивительным человеком, с которым можно было общаться на любую тему и получать от этого удовольствие. Можно сказать, что мне посчастливилось работать с выдающимся физиком-теоретиком! Как он говорил о себе в шутку, имея в виду свою внешность, крупным и блестящим ученым!

Воспоминания о Саше

Б.З. Копелиович

Технический университет им. Федерико Санта-Марии, Вальпараисо, Чили

Наша дружба с Сашей началась сразу после того, как мы познакомились, в 1969 году. Я поступил в аспирантуру к Льву Иосифовичу Лапидусу, а Саша был его учеником и уже работал. Мы дружили семьями и проводили вместе много времени.

Интересно, что в то время и позже Саша и я увлеклись теорией взаимодействия с ядрами при высоких энергиях и многие годы работали параллельно над близкими проблемами не пересекаясь. Саша решал проблемы глауберовской модели, в которой он, безусловно, стал лидирующим мировым экспертом. Мы, отдавая дань моде, вместе со Львом Иосифовичем Лапидусом и Алешей Замолодчиковым предложили и развивали дипольный подход в КХД.

Наша первая совместная с Сашей работа появилась только четверть века спустя. К этому периоду нашей жизни я сразу и перейду. Саша приехал ко мне в Гейдельберг в 1997 году, и там началось наше тесное сотрудничество, которое продолжалось до конца его жизни.

К этому времени Саша разработал технику интегралов по путям для описания прохождения позитрониев через среду. Этот метод был именно тем звеном, который отсутствовал в дипольном подходе в КХД. Первая задача, которую нам удалось решить (вместе с нашим немецким студентом Йоргом Рауфайзенем), — квантово-механическое описание ядерной экранировки [1]. К тому времени были известны два подхода к этой проблеме. Традиционный способ вычисления грибовского неупругого экранирования годился только для самого легкого ядра — дейтрона. На более тяжелых ядрах возникали неупругие поправки высших порядков, которые не могли быть посчитаны известными способами. Тем не менее в этом подходе были известны фазовые сдвиги между амплитудами взаимодействия на разных ядерных нуклонах, поскольку массы неупругих промежуточных состояний явно присутствовали в расчетах.

Альтернативное описание ядерной экранировки, предложенное нами ранее в рамках дипольного подхода, позволяло эффективно просуммировать грибовские поправки во всех порядках, но это работало только при очень высоких энергиях (или малых бьеркеновских x), где размеры диполей “заморожены” лоренцовским растяжением времени. При более низких энергиях фазовые сдвиги неизвестны, поскольку диполи не обладают определенной массой.

Решение, позволяющее одновременно “сидеть на обоих стульях”, т.е. суммировать грибовские поправки не пренебрегая фазовыми сдвигами, было найдено в [1] в рамках интегралов по путям. После интегрирования по всем возможным (неклассическим) траекториям цветовых зарядов возникает уравнение Шредингера для функции Грина, описывающей распространение в среде с учетом поглощения и фазовых сдвигов. Этот результат до сих пор остается единственным известным строгим квантово-механическим решением проблемы ядерной экранировки.

Другое применение техника интегралов по путям нашла в проблеме излучения фотонов и глюонов цветовыми зарядами, проходящими через поглощающую среду [2]. Хотя в этом случае бесцветные диполи не присутствуют в буквальном смысле, амплитуда процесса, возведенная в квадрат, содержит цветовые заряды с разными прицельными параметрами, что приводит к появлению эффективных диполей. В случае излучения

фотонов или дрелл-яновских лептонных пар эти диполи состоят из кварка и антикварка. При излучении глюонов это — более сложные диполи, также включающие глюон.

Дипольное описание, как и в случае глубоко неупругого рассеяния, позволило строго квантово-механически, но весьма просто вычислить эффекты ядерной экранировки при излучении бесцветных и цветных квантов партонами, многократно взаимодействующими в среде. Потенциал на световом конусе, входящий в уравнение Шредингера для функции Грина, описывающей прохождение диполей через среду, содержит как мнимую часть, ответственную за поглощение, так и реальную, описывающую взаимодействие внутри диполя.

Это непертурбативный эффект, который, конечно, модельно зависим, но в работе [3] реальная часть потенциала не моделировалась, а подгонялась под данные. Процесс, чувствительный к этому параметру, — это дифракционная диссоциация в состоянии с большой инвариантной массой, сечение которой известно своей малостью. В реджевской феноменологии этот факт связывался с малостью трехпомеронной константы, что не имело динамического объяснения. В дипольном описании малость дифракционной диссоциации связана с сильным непертурбативным взаимодействием между излучаемым глюоном и источником. Анализ данных по дифракции, выполненный в [3], показал, что средний размер кварк-глюонных диполей весьма мал — 0,3 ферми. Это, в свою очередь, приводит к важным наблюдаемым эффектам, что чрезвычайно важно для понимания ядерных столкновений при энергиях ЛНС.

В частности, в [3] было предсказано очень слабое ядерное экранирование глюонов. Одним из проявлений малости глюонных диполей является слабость ядерных эффектов при рождении адронов с большими поперечными импульсами. Малая величина ядерного усиления (около 10%), известного под названием эффект Кронина, была предсказана в [4] при энергии RHIC. Предсказание было нетривиальным, поскольку в других моделях усиление было в несколько раз больше и при более низких энергиях FNAL (фиксированная мишень) эффект наблюдался на уровне 100%. Действительно, в эксперименте PHENIX в dA -соударениях 10%-й эффект был подтвержден.

Это только несколько примеров результатов нашего с Сашей сотрудничества, которое, я думаю, было очень успешным. Большинство наших совместных публикаций имеет высокий уровень цитируемости — около 100 и выше.

Скоро год, как Саша не стало, а я до сих пор не могу адаптироваться к тому, что должен работать один. Наши дискуссии, часто по телефону, были необходимы для работы. Теперь не с кем обсудить, посоветоваться...

Список литературы

1. B.Z. Kopeliovich, J. Raufeisen, and A.V. Tarasov, *Challenges of nuclear shadowing in DIS*, Phys. Lett. B440 (1998) 151.
2. B.Z. Kopeliovich, A.V. Tarasov, and A. Schafer, *Bremsstrahlung of a quark propagating through a nucleus*, Phys. Rev. C59 (1999) 1609.
3. B.Z. Kopeliovich, A.V. Tarasov, and A. Schafer, *Nonperturbative effects in gluon radiation and photoproduction of quark pairs*, Phys. Rev. D62 (2000) 054022.
4. B.Z. Kopeliovich, A.V. Tarasov, and A. Schafer, *Cronin effect in hadron production off nuclei*, Phys. Rev. Lett. 88 (2002) 232303.

Краткий очерк жизни и деятельности Александра Тарасова

О.О. Воскресенская

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Саша Тарасов родился 5 июня 1942 года в Ростовской области. Он рос в многодетной семье и был среди детей старшим. От отца Саша унаследовал недюжинные физические данные, от матери-учительницы — интеллект, великолепную память, предрасположенность к учебе и преподаванию и способность делать все исключительно хорошо. Быть отличником-медалистом он был почти обречен. И он был им на протяжении всех лет учебы в средней и высшей школе.

В школу Саша был отдан в 6 лет. Рано выявились его физико-математические способности. Он рассказывал, как по дороге к школе, вдали от нее, его всегда встречали друзья-одноклассники и он делился с ними своими решениями задач. Конечно же, Саша был удостоен медали. Легко поступил на физико-математический факультет Харьковского университета и помог поступить в харьковские вузы многим своим товарищам. Сдавая все досрочно и отлично, он был на курсе единственным, а за всю историю факультета третьим ленинским стипендиатом, по воспоминаниям его друга и сокурсника Георгия Бочака.

В студенческий период на Сашино развитие большое влияние оказал их староста, фронтовик и интеллигент Рафкат Ахмеров. Он ввел Сашу в мир классической музыки, в котором Саша продолжал жить до конца своих дней. Сашу всегда привлекал интеллект, влекло к прекрасному. Люди интеллигентные, незаурядные становились его друзьями и оказывали большое влияние на него. В разные периоды своей жизни он был разным: он не стоял на месте — он шел вперед. И в жизни, и в науке он брался за то, за что не брался никто, — и делал это!

Работал Саша везде и всегда. Не прикасаясь к бумаге, он мог проделывать в уме гигантские объемы вычислений, и, лишь получив результат, записывал его. При этом либо делались, либо нет наброски вывода. Решив задачу, он терял к ней интерес. Его увлекал процесс решения задачи. Публикации не интересовали его. И если бы не соавторы, большинство его работ, наверное, осталось бы неопубликованным. Часть же работ осталась опубликованной лишь в препринтах. К сожалению, своего Лифшица не было у него.

Однако при желании он мог писать, без преувеличения, научные поэмы, сочетавшие в себе высочайший научный профессионализм с достоинствами художественного произведения. Он обладал чувством формы и имел прекрасный художественный вкус. Вопреки “незнанию английского”, своими английскими выражениями он приводил в восторг носителей этого языка. А речь его была афористична, как у его любимого Игоря Губермана.

В своей области Саша был экспертом. Ему было достаточно бросить беглый взгляд на работу, чтобы выявить имеющиеся в ней недочеты. Однако феноменальный критический склад его ума не препятствовал проявлению его творческого начала и лишь способствовал корректности его собственных работ.

Используемым математическим аппаратом — техникой интегрирования, континуального интегрирования, спецфункций и др. — он владел виртуозно. Вспоминаю курьезный

случай из периода его работы в Институте ядерной физики им. Макса Планка. Один из сотрудников института несколько месяцев безуспешно бился над решением задачи. Не удалось провести какое-то сложное интегрирование с использованием мощных программ. Ему порекомендовали обратиться к Саше Тарасову. Он обратился. И каково же было его изумление, когда минут через 15 ему был предъявлен результат!

Саша мог бы одинаково успешно работать в любой области теоретической физики. Я являлась свидетелем того, как где-то за месяц с нуля он освоил совершенно незнакомую для себя область, связанную с интегрируемыми моделями, и сумел получить частное решение одной из “нерешаемых проблем”, а также ряд результатов, признанных очень интересными корифеями этой науки.

Однако позволить себе роскошь занятий вещами абстрактными он и не хотел и не мог. Его работы отвечали потребностям эксперимента. И диапазон этих работ широк. Не останавливаясь на первых 30 годах работы Саши в ОИЯИ, я попытаюсь сделать краткий обзор основных направлений его исследований за последние 15 лет (1996 – 2011 гг.) — период наших совместных работ — и коротко охарактеризую каждое из этих направлений.

I. Развитие теоретической базы описания процессов образования релятивистских элементарных атомов (EA) и их взаимодействия с веществом (DIRAC, CERN)

В 1995 году международной коллаборацией DIRAC, в состав которой был включен “главный теоретик ДИРАКа” Александр Васильевич Тарасов, был опубликован проект одноименного эксперимента на PS CERN, целью которого являлось определение с 10%-й точностью времени жизни τ_0 основного состояния атомов пиония $A_{2\pi}$. С этого момента началась интенсивная работа, связанная с теоретической поддержкой данного эксперимента.

Метод определения времени жизни релятивистских атомов $A_{2\pi}$ был основан на сопоставлении экспериментально измеряемых выходов $\pi^+\pi^-$ -пар, образующихся в результате ионизации $A_{2\pi}$ в кулоновском поле атомов мишени, с результатами теоретического расчета этих величин, содержащих τ_0 в качестве подгоночного параметра, и предполагал наличие детально разработанной теории образования димезоатомов (ДМА) в процессах множественного рождения частиц при высоких энергиях и их взаимодействия с веществом мишени.

Однако на тот момент многие проблемы этого нового раздела физики высоких энергий, получившего название *физики релятивистских элементарных атомов*, еще не нашли надлежащего разрешения, и при получении результатов, представляющих практический интерес, нередко использовались не вполне обоснованные упрощения и приближения. Это вносило погрешности в теоретические расчеты, которые, совместно с экспериментальными погрешностями, составляли результирующую ошибку, порой превышающую допустимую при определении времени жизни $A_{2\pi}$ вышеуказанным методом.

Александр Васильевич внес решающий вклад в решение этих проблем. Им было показано, что тогда как приближения, использовавшиеся при выводе наиболее существенных для проекта DIRAC соотношений теории образования ДМА, являются достаточно грубыми, сами соотношения справедливы с высокой степенью точности.

Так, удалось показать, что специфические особенности кулоновских волновых функций nS -состояний атомов $A_{2\pi}$ позволяют использовать приближение “нулевого” радиуса сильного взаимодействия для отношения сечений образования $A_{2\pi}$ в различных nS -состояниях даже в том случае, когда радиус сильного взаимодействия достигает 10 фм.

Также удалось прийти к выводу о том, что эффекты сильного и кулоновского взаимодействий в волновых функциях nS -состояний ДМА факторизуются с высокой степенью точности ($\sim 10^{-4}$), что позволяет в задаче об образовании ДМА включить эффекты сильного взаимодействия в конечном состоянии в “перенормировку” амплитуды образования свободных пар и свести задачу к рассмотрению образования этих атомов с чисто кулоновскими волновыми функциями [1].

Однако было установлено: использование борновского приближения для расчета сечений взаимодействия ЕА с атомами вещества не обеспечивает необходимой точности расчетов этих сечений, что стимулировало развитие технически более сложного глауберовского приближения [2,3], оцениваемая точность которого была близка к необходимой. Было исследовано влияние эффектов возбуждения и ионизации атомов мишени (ТА) на величины сечений их когерентного и некогерентного взаимодействия с ЕА в рамках оптической пертурбативной модели глауберовской теории. Кульминацией развития эйконольного подхода к описанию взаимодействия релятивистских ЕА с отдельными атомами вещества явилась формулировка непертурбативной полной глауберовской теории ЕА–ТА-взаимодействия, учитывающей возможность возбуждения и ионизации в промежуточном и конечном состояниях как элементарных атомов, так и атомов вещества [4].

И хотя удалось продемонстрировать [5], что точность вероятностного подхода к описанию внутренней динамики ЕА при их прохождении через вещество мишени достаточна для целей данного эксперимента, работа, посвященная выводу квантовых кинетических уравнений для элементов матрицы плотности многоуровневых атомных систем, которая позволила вне рамок борновского приближения описать эволюцию внутреннего состояния этих систем при их движении в веществе с учетом интерференционных квантовомеханических эффектов [6], является фундаментальным вкладом в разработку теории взаимодействия релятивистских ЕА с веществом мишени в целом.

В то же время необходимость учета эффектов многократного рассеяния при интерпретации данных эксперимента DIRAC привела Александра Васильевича к пересмотру неунитарной теории многократного рассеяния Мольера и ее усовершенствованию на базе восстановления соотношения унитарности и уточнения основных соотношений этой теории в рамках глауберовской аппроксимации [7].

Без преувеличения можно утверждать, что Александр Васильевич явился автором основополагающих работ в теории образования релятивистских элементарных атомов в процессах множественного рождения частиц при высоких энергиях и их взаимодействия с веществом.

II. Расчеты, связанные с прохождением тяжелых релятивистских ионов через вещество (JINR, CERN, GSI) и взаимодействием пучков тяжелых релятивистских ионов (RHIC, LHC)

Интересен цикл работ Александра Васильевича, связанный с прохождением тяжелых релятивистских ионов через вещество и взаимодействием пучков тяжелых релятивистских ионов. В связи с интенсивными экспериментальными исследованиями, проводившимися с пучками тяжелых ($Z\alpha \sim 1$) ионов (GSI, Дармштадт, и др.), стала актуальной задача адекватного описания процессов многократного рассеяния и потерь энергии тяжелыми ионами в веществе. Специфика проблемы состояла в том, что точность борновского приближения, традиционно использовавшегося при решении подобного рода задач для

пучков однозарядных частиц, оказывалась недостаточной, и было необходимо развитие новых подходов к ее решению.

В работах [9,10] в этом направлении был достигнут существенный прогресс. В частности, была полностью решена задача расчета средних потерь энергии ионами в веществе, а также расчета таких важных характеристик их энергетического распределения, как дисперсия, асимметрия и эксцесс во всех порядках по $Z\alpha$. При этом отличие от результатов борновского приближения для некоторых из этих величин достигало нескольких сотен процентов, что позволило объяснить результаты измерений, проведенных в GSI.

Был развит подход к решению наиболее общей проблемы исследования энергетических потерь тяжелыми ионами — расчету их энергетических распределений без ограничения на величину $Z\alpha$. Предпринят анализ проблемы многократного рассеяния тяжелых ионов в веществе, показавший неунитарность традиционно использовавшегося для решения этой задачи приближения Мольера и адекватность решаемой задаче приближения Глаубера.

Результаты анализа привели к неожиданному выводу о том, что сложившееся на основании расчетов в борновском приближении представление о доминирующем вкладе в многократное рассеяние процессов упругого рассеяния заряженных частиц атомами вещества не верно в случае рассеяния тяжелых ионов. В многократное рассеяние тяжелых ионов существенный вклад вносят процессы возбуждения и ионизации атомов вещества, что должно приводить к заметным корреляциям в совместном энергетически-угловом распределении пучка ионов, прошедших через слой вещества. К сожалению, эти результаты остались незавершенными и неопубликованными из-за смещения Сашиних интересов в область, связанную с экспериментом DIRAC.

III. Развитие теории образования лептонных пар в ядро-ядерных соударениях и столкновениях релятивистских ионов вне рамок борновского приближения

Существенен вклад работ Александра Васильевича в теорию образования лептонных пар при сверхвысоких энергиях. Им предложен новый подход к расчету амплитуды образования лептонных пар в ядро-ядерных соударениях на основе ватсоновского представления этой амплитуды и гипотезы ее инфракрасной стабильности, доказанной в низших порядках теории возмущений. В рамках этого подхода удалось провести эффективное суммирование ряда теории возмущений для амплитуды образования пар на основе теоремы Ватсона и гипотезы инфракрасной стабильности и представить амплитуду в виде быстросходящегося ряда инфракрасно-стабильных слагаемых, сконструированных из эйкональных S -матричных элементов лептон-ядерных рассеяний. Получено явное выражение для амплитуды, справедливое с точностью до величин девятого порядка по постоянной тонкой структуры. Уже двумя первыми слагаемыми этого ряда обеспечивается высокая точность вычисления амплитуды образования пар даже в случае столкновения тяжелых ядер [11,12]. Исследованы электромагнитные эффекты высшего порядка к сечениям образования лептонных пар в ядро-ядерных соударениях [13].

IV. Исследование процессов образования частиц с большими поперечными импульсами в ядро-ядерных соударениях при сверхвысоких энергиях

В 1998 году начался зарубежный период жизни и работы Александра Васильевича, один из самых счастливых в его жизни. Перед ним открылся новый мир. Сашу всегда

интересовало историческое и культурное наследие человечества. Теперь он имел возможность прикоснуться к сокровищам европейской культуры и жадно впитывал ее.

В этот период работы в МРІ ядерной физики и Институте теоретической физики Гейдельбергского университета (Германия) вместе с Борисом Копелиовичем им было опубликовано около трех десятков прекрасных работ, посвященных теоретическому описанию образования частиц с большими поперечными импульсами в ядро-ядерных соударениях. Я укажу лишь на некоторые из них [14–24].

Так, в частности, в [14–16] была проведена проверка применимости дипольного подхода светового конуса к описанию характеристик процессов образования пар кварков и глюонов в нуклон-нуклонных, нуклон-ядерных и ядро-ядерных соударениях; дан анализ эффектов многократного взаимодействия сталкивающихся частиц в рамках данного подхода [14–17]. Получено последовательное квантово-механическое описание ядерной экранировки на основе разработанной Александром Васильевичем техники континуального интегрирования [18,19]. Произведен расчет ядерных эффектов в процессах образования адронов с большими поперечными импульсами в нуклон-ядерных и ядро-ядерных соударениях при сверхвысоких энергиях [15,16,20]; рассчитаны сечения дифракционного рождения η_c -, J/ψ - и χ -мезонов в нуклон-нуклонных соударениях при энергиях тэватрона и RHIC [21].

Работы данного периода отличаются особенно высокой цитируемостью: [14] — 114; [15] — 106; [17] — 82; [22] — 72; [18] — 71 и т.д. О них подробнее расскажет сам Борис Зиновьевич. Я лишь обращаю внимание на работы [18,19], демонстрирующие мастерское владение Сашей тяжелой техникой континуального интегрирования, развитие которой привело к изящному выводу квантовых кинетических уравнений для матрицы плотности в системе отсчета, связанной с ЕА [10].

V. Обеспечение теоретической базы проектов NA – 48/2 и NA – 62 с целью извлечения из экспериментальных данных информации о длинах $\pi\pi$ - и πK -рассеяния

В 2005 году один из любимых учеников Александра Васильевича, его “первенец” Сергей Геворкян инициировал серию работ [25–30] по обеспечению теоретической базы еще одного эксперимента ЦЕРН, проводившегося коллаборацией NA-48/2.

В этой серии работ в рамках квантово-механического подхода было дано теоретическое описание пороговых аномалий, обнаруженных в эксперименте NA-48/2; обобщен результат Н. Кабиббо для амплитуды распада $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0$ с учетом всех электромагнитных эффектов, развит метод, позволивший просуммировать многопетлевые диаграммы, ответственные за взаимодействие пионов в конечном состоянии; предложено объяснение расхождения между предсказаниями теории и эксперимента вблизи порога образования двух заряженных пионов в распаде $K^+ \rightarrow 3\pi$ [25,26,29]. Сравнение предсказаний развитого подхода с экспериментальными данными позволило улучшить согласие теории и эксперимента, а также точность извлекаемых из эксперимента длин пион-пионного рассеяния. Эта серия работ была удостоена в 2007 году премии ОИЯИ.

Были получены результаты по учету электромагнитных эффектов в распаде K_{e4} [27]. Проведено обобщение теоремы Ферми–Ватсона на случай двух связанных каналов с неравными массами [28]. Дана оценка эффектов нарушения изотопической инвариантности в распадах заряженных каонов и их влияния на величины длин $\pi\pi$ -рассеяния, извлекаемые из эксперимента [28,29], а также эффекта образования элементарных $A_{\pi\mu}$

атомов в $K_{\mu 4}$ -распаде [30]. Эти работы оборвались в феврале 2011 года из-за тяжелой болезни Саши.

Саша любил живое дело и с удовольствием занимался теоретической поддержкой экспериментов (DIRAC, NA-48/2 и др.). И хотя постановка многих задач, которыми ему приходилось заниматься, мотивирована тем или иным экспериментом, решения этих задач, таких как вывод правил сумм для расчета полных сечений взаимодействия ЕА с атомами вещества [8], формулировка полной глауберовской теории атомного ЕА-ТА-рассеяния [4], вывод системы квантовых кинетических уравнений для элементов матрицы плотности многоуровневых атомных систем [6], пересмотр и улучшение теории Мольера в рамках глауберовской аппроксимации [7], обобщение теоремы Ферми-Ватсона на случай двухканальной задачи [28], обобщение двупетлевого результата Н. Кабиббо для амплитуды распада $K \rightarrow 3\pi$ на все порядки по сильному взаимодействию [25], много перекрывают потребности каждого отдельного эксперимента и имеют существенное значение для физики высоких энергий и атомной физики в целом.

Помимо практической ценности и теоретической значимости, результаты работ Александра Васильевича отличались красотой. Так, очень красив результат обобщения формулы Н. Кабиббо для амплитуды распада $K^+ \rightarrow 3\pi$ на все порядки по длинам рассеяния и дальнейшего ее обобщения с учетом всех электромагнитных эффектов, включая образование связанных состояний [25], впечатляет его техника континуального интегрирования при выводе формулы полного сечения фоторождения пар кварк-антикварк в процессах DIS на ядрах [18], а также выводе квантовых кинетических уравнений для матрицы плотности многоуровневых атомных систем [6] и др.

Согласно внешним отзывам, полученные Сашей результаты воспринимались как классические. Как и его отец, сожалеющий, что не родился веком раньше, Саша сожалел, что не родился в период становления квантовой теории. В этот период он, несомненно, сделался бы одним из ее создателей. По своему складу Саша был классиком науки.

В последнее время, пытаясь довести до публикабельного состояния некоторые не опубликованные им результаты [4,7], я лишний раз убедилась в том, что Саша работал как мэтр. Мы действительно ученики по сравнению с ним. Он же работал как Мастер.

Очень жаль, что в свое время он отказался защищать докторскую диссертацию. И хотя в последние годы под влиянием близких ему людей он все же набросал ее план: 1) когерентное рождение резонансов на ядрах; 2) некогерентные процессы в адронах; 3) ядро-ядерное рассеяние; 4) прохождение тяжелых ионов через вещество; 5) эффект Ландау-Померанчука; 6) образование ЕА и их взаимодействие с веществом; 7) электромагнитные эффекты в распадах $K_{3\pi}$, K_{e4} и $K_{\mu 4}$; 8) рождение лептонных пар в ядродерных соударениях — написать и защитить ее ему было уже не суждено.

Хотелось бы добавить несколько слов о Саше как человеке, поскольку он обладал исключительными человеческими качествами. Большинство людей занято своими проблемами, и их просто не хватает на других — разве что на своих близких. Они могут пройти мимо тех, кому нужна помощь, лишь выразив сожаление, что они ничем не могут помочь. Не таков был Саша. Он всегда останавливался и помогал — всем, кем бы ни был этот человек, — и делал все, что мог. Вопреки своим словам о том, что он мизантроп, к людям, которым была нужна помощь, он относился просто по-божески. И такое отношение было не только следствием его феноменальной силы, но и редких душевных качеств. Как настоящий русский богатырь, он был столь же добр, сколь силен.

Такое сочетание исключительных умственных, физических и душевных качеств делает Сашу совершенно неординарным явлением в нашей жизни и заставляет вспомнить слова: “Природа-мать, когда б таких людей ты иногда не посылала миру, заглохла б нива жизни!”

То, что произошло с ним в последний период его жизни, страшно. Но он мужественно держался и боролся до конца, вызывая глубокое уважение и восхищение окружающих. И даже ушел красиво. Он до конца был верен себе.

Такие люди не уходят из нашей жизни. Они продолжают жить в сердцах, делах и памяти своих близких, друзей, коллег, всего научного сообщества — всех, кому посчастливилось иметь с ними дело и кто им благодарен.

Список литературы

A. Элементы теории образования релятивистских элементарных атомов и их взаимодействия с веществом

1. The influence of strong interaction on the pionium wave functions at small distances. I. Amirkhanov, I. Puzynin, A. Tarasov, O. Voskresenskaya, and O. Zeinalova. Phys. Lett. B 452:155–158, 1999.
2. The total cross-sections for interaction of hydrogen-like atoms with the atoms of matter. O.O. Voskresenskaya, S.R. Gevorkian, and A.V. Tarasov. Phys. Atom. Nucl. 61:1517–1519, 1998.
3. The eikonal approach to calculation of the multiphoton exchange contributions to the total cross sections of $\pi^+\pi^-$ atom interaction with ordinary atoms. L. Afanasyev, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya. J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 25:B7–B10, 1999.
4. A full Glauber theory for elementary atom – target atom scattering and its approximations. A. Tarasov and O. Voskresenskaya. e-Print:1108.4151 [ArXiv:hep-ph], Aug 2011. 12 p.
5. Dynamics of the pionium with density matrix formalism. L. Afanasyev, C. Santamarina, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya. J. Phys. B 37:4749–4761, 2004.
6. A quantum-kinetic treatment for internal dynamics of multilevel atomic systems moving through a target matter. A. Tarasov and O. Voskresenskaya. e-Print: hep-ph/0301066, Mar 2003. 5 p.
7. An improvement of the Molière–Fano multiple scattering theory. A. Tarasov and O. Voskresenskaya. e-Print:1107.5018 [ArXiv:hep-ph], Jul 2011. 14 p.;
Molière multiple scattering theory revisited. A. Tarasov and O. Voskresenskaya e-Print: 1204.3675 [ArXiv:hep-ph], Apr 2012. 17 p.
8. Contribution of α^2 -terms to the total interaction cross sections of relativistic elementary atoms with atoms of matter. L. Afanasyev, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya. Phys. Rev. D 65:096001-1–096001-5, 2002.

В. Теория образования лептонных пар в столкновениях релятивистских ионов, прохождение тяжелых релятивистских ионов через вещество

9. Expression for the Mott corrections to the Bethe–Bloch formula in terms of the Mott partial amplitudes. O.O. Voskresenskaya, A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, and G.T. Torosian. JETP Lett. 64:648-651, 1996.
10. Дисперсия, асимметрия и эксцесс энергетического распределения тяжелых ионов в борновском и моттовском приближениях. О. Воскресенская, А. Сисакян, А. Тарасов, Г. Торосян. ОИЯИ, P2-96-436, август 1996. 6 с.
11. Watson representation for the amplitude of lepton–pair production in nucleus–nucleus collisions. O.O. Voskresenskaya, A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, and G.T. Torosian. Phys. Part. Nucl. Lett. 3:246–248, 2006.
12. The structure of the $Z_1 Z_2 \rightarrow l^+ l^- Z_1 Z_2$ amplitude process outside the Born approximation framework. O.O. Voskresenskaya, A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, and G.T. Torosian. Phys. Part. Nucl. Lett. 4:18–21 2007.
13. The $e^+ e^-$ -pair production in relativistic ions collision and its correspondence to electron-ion scattering. A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, H.T. Torosyan, and O.O. Voskresenskaya. JINR, E2-2004-192, Dec 2004. 5 p. [e-Prints: hep-ph/0412217, nucl-th/0408030].

С. Образование частиц с большими поперечными импульсами в ядро-ядерных соударениях при сверхвысоких энергиях и их прохождение через ядерное вещество

14. Bremsstrahlung of a quark propagating through a nucleus. B. Kopeliovich, A. Tarasov, and A. Schafer. Phys. Rev. C 59:1609–1619, 1999.
15. Nonperturbative effects in gluon radiation and photoproduction of quark pairs. B. Kopeliovich, A. Schafer, and A. Tarasov. Phys. Rev. D 62:054022, 2000.
16. Dipole description of inclusive particle production. B. Kopeliovich, I. Schmidt, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya. J. Phys. G 34:335, 2007.
17. Cronin effect in hadron production off nuclei. B. Kopeliovich, J. Nemchik, A. Schafer, and A. Tarasov. Phys. Rev. Lett. 88:232303, 2002.
18. Nuclear shadowing in DIS at moderately small $x(B)$. J. Raufeisen, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya. Eur. Phys. J. A 5:173–182, 1999.
19. Challenges of nuclear shadowing in DIS. B.Z. Kopeliovich, J. Raufeisen, and A.V. Tarasov. Phys. Lett. B 440:151–156, 1998.
20. Nuclear effects in the Drell–Yan process at very high energies. B. Kopeliovich, J. Raufeisen, A. Tarasov, and M. Johnson. Phys. Rev. C 67:014903, 2003.
21. Diffractive excitation of heavy flavors: Leading twist mechanisms. B.Z. Kopeliovich, I.K. Potashnikova, I. Schmidt, and A.V. Tarasov. 19 p. Phys. Rev. D 76:034019, 2007.

22. Coherence phenomena in charmonium production off nuclei at the energies of RHIC and LHC. B. Kopeliovich, A. Tarasov, and J. Hüfner. 50 p. Nucl. Phys. A 696:669–714, 2001.
23. Long range Coulomb forces in DIS: Missed radiative corrections? B.Z. Kopeliovich, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya. Eur. Phys. J. A 11:345–356, 2001.
24. Quantum-mechanical description of in-medium fragmentation. B. Kopeliovich, H. Pirner, I. Potashnikova, I. Schmidt, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya. Phys. Rev. C 78:055204, 2008.

D. Разработка теоретической базы проектов NA-48/2 и NA-62

25. Electromagnetic corrections to final state interactions in $K \rightarrow 3\pi$ decays. S. Gevorkian, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya. Phys. Lett. B 649:159–161, 2007.
26. Electromagnetic effects and scattering lengths extraction from experimental data on $K \rightarrow 3\pi$ decays. S.R. Gevorkyan, D.T. Madigozhin, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya. Phys. Part. Nucl. Lett. 5:85–87, 2008.
27. The electromagnetic effects in K_{e4} -decay. S.R. Gevorkyan, A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, H.T. Torosyan, and O.O. Voskresenskaya. Phys. Atom. Nucl. 73:937–940, 2010.
28. The isospin symmetry breaking effects in K_{e4} -decays. S.R. Gevorkyan, A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, H.T. Torosyan, and O.O. Voskresenskaya. Phys. Atom. Nucl. 73:961–964, 2010.
29. Final state interaction in kaons decays. S. Gevorkyan, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya. Eur. Phys. J. 67:143–147, 2010.
30. Formation of $\pi\mu$ -atoms in $K_{\mu 4}$ -decay. S. Gevorkyan, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya. Phys. Lett. B 688:192–194, 2010.

Саша Тарасов, ученик начальных классов
школы № 54, г. Лозовая



С сестрами
Валей и Леной, 1950-е гг.



Комсомолец А. Тарасов.
Лозовая, 1958 г.



Александр, выпускник
средней школы № 54, 1958 г.

Фотография с доски почета ХГУ:
А. Тарасов, отличник учебы,
член комсомольского
бюро факультета



Валя Тарасова, Саша Тарасов и Георгий Бочек. Харьков, декабрь 1963 г.



В первые годы работы в ОИЯИ



Знаменитые «шабашки» (второй слева — А. Тарасов, шестой — Б. Старченко)



С семьей и друзьями в горах Армении, 1970-е гг.



С дочерью Ириной



На регистрации бракосочетания сына Антона

ВОСПОМИНАНИЯ ДРУЗЕЙ И РОДНЫХ

Студенческий период

Г.Л. Бочек

Национальный научный центр “Харьковский физико-технический институт”, Харьков

Сашка Тарасов был самым молодым не только в нашей группе, но и на курсе. На 1 сентября 1958 года ему было 16 лет и три месяца.

Физико-математический факультет Харьковского университета в то время делился на две части: физическую и математическую. Физическая часть факультета состояла из трех отделений: ядерной физики, физического и астрономического. Математическая часть факультета также состояла из трех отделений: математического, механического и отделения вычислительной техники. В свою очередь, отделения физической части факультета делились на семь групп: 1-я и 2-я группы относились к отделению ядерной физики, 3–6-я группы — к физическому отделению, 7-я группа — к астрономическому.

Мы с Сашкой были в первой группе. Так получилось, что наша группа была первой на курсе не только по номеру, но и по существу. Во-первых, старостой группы у нас был Ахмеров Рафкат Вафович, бывший авиационный офицер, очень образованный, интеллигентный и очень приятный человек. Он был старше нас, 1928 года рождения, а многим из нас на тот момент еще не было и 18 лет. Влияние на нас он оказал очень большое, он был для нас как “отец родной”.

Другой причиной был Сашка. После второго курса он стал ленинским стипендиатом — единственным не только на курсе. Их всего-то было несколько человек во всем университете. Эта честь оказывалась только за особые заслуги — как по части учебы, так и за активную общественную работу. А Сашка в то время был очень активным комсомольским деятелем. У него были ценные качества: честность, прямота, принципиальность — и очень скоро он стал известным в масштабах всего факультета.

Таким образом, в группе оказалось два неформальных лидера: самый старший по возрасту и самый младший. Причем они прекрасно дополняли друг друга. У одного были жизненный опыт, такт и культура, у другого — знания и задор молодости. Сашка никогда не стремился к лидерству — это было лидерство снизу: лидером его делали мы.

Сессии Тарас всегда сдавал досрочно и на отлично. Правда, был у нас с ним все-таки один “прокол”. В конце второго курса мы попытались с ходу сдать досрочно историю КПСС. Не получилось, не хватило знаний. Пришлось подучиться и сдавать вместе с группой. В конце осеннего семестра 5-го курса произошло уникальное событие: Дубна (в то время Мекка всех физиков-ядерщиков) в первый и последний раз пригласила пятерых наших студентов на дипломную практику. Сашка, естественно, был в числе первых. Дипломную работу он выполнял в ЛЯП. Руководителем был Л.И. Лапидус.

После защиты дипломной работы (в середине декабря 1963 года) он получил назначение в Физико-технический институт — ФТИ АН УССР (впоследствии ХФТИ, г. Харьков). Однако благодаря помощи удивительного человека и ученого академика А.К. Вальтера примерно через полгода Сашка был переведен в ОИЯИ, где и трудился до последнего дня.

Был в его жизни и еще один эпизод. На втором курсе в начале весеннего семестра (мы тогда жили в общежитии при университете) в общежитии ввели самообслуживание. Уборщица убирала только умывальники и туалет, а коридор и кухню должны были убирать мы сами. Командовал этим староста этажа. На нашем этаже таковым оказался я. На третьем курсе нас, старост этажа, как тогда говорили, “кооптировали” в состав студенческого комитета (студкома). Однажды на одном из заседаний студкома я заметил новенькую: симпатичную девочку в очках. На выходе из комнаты мы оказались рядом и разговорились. Она оказалась нашей однокурсницей, с механико-математической части факультета (отделение вычислительной техники). Потом мы подошли к окну в торце коридора. Рядом была лестничная клетка. Через некоторое время показался Тарас. Когда он подошел к нам, я их познакомил. Когда они обменялись взглядами, я понял, что, не успев опомниться, тут же оказался “третьим лишним”. Этой девочкой была Валька Соловьева, в будущем Тарасова.

В конце 1962 года нас (студентов 5-го курса отделения ядерной физики) вдруг вызвали на военную кафедру. Нужно отметить, что военная подготовка нас не очень беспокоила. Если на других отделениях факультета военная подготовка проходила в течение двух лет, с выездами в лагеря и на учения, то на нашем отделении она длилась всего два семестра — второй и третий. Проходили мы общевоинскую подготовку без выезда в лагеря. Одной из причин, вероятно, был тот факт, что военно-учетная специальность (ВУС) в то время был закрытой, и мы сами толком не знали, в чем, в случае необходимости, будет состоять наша служба. Скорее всего, это радиационная разведка в случае применения ядерного оружия. В конце второго курса мы уже были младшими инженер-лейтенантами запаса.

Придя на кафедру, мы были “приятно” удивлены присутствием военно-морского офицера в чине капитана третьего ранга Черноморского флота, который популярно разъяснил нам, что Военно-морской флот Союза переходит на атомные подводные лодки, а они имеют ядерные реакторы, которые необходимо кому-то обслуживать. А так как таких специалистов у них дефицит, то есть решение использовать нас в этой роли, поскольку мы имеем достаточно знаний в области ядерной физики. А дальше — подготовка в Севастополе в специальном центре, звание лейтенанта, 200 рублей зарплаты плюс по 50% на жену и тещу; полное довольствие — и Северный флот.

Нас направили на медкомиссию. Из 36 человек до конца комиссии прошло нас пятеро и среди них, естественно, Тарас. Хирург (он был последним из врачей) меня забраковал сразу: рост у меня 193 см, а для подлодок он должен быть в пределах 150–180 см. У Тараса в карточке был записан рост 181,5 см. Врач засомневался и послал его перемерить рост. Выручила женщина, которая этот рост измеряла. На самом деле рост у Тараса был слегка меньше 181 см. Но то ли у Тараса был слегка жалобный вид, то ли женщина оказалась сердобольной (женщина была уже в возрасте), она подтвердила, что рост у Тараса все-таки 181,5 см. Таким образом получилось, что эти полтора сантиметра сыграли роковую роль в судьбе атомного подводного флота. Не окажись их или окажись женщина более принципиальной, и очень возможно, что атомным флотом России командовал бы адмирал Тарасов Александр Васильевич.

Было у Сашки и еще одно ценное качество — он был трудоголик. Мы все иногда позволяли себе слегка побездельничать. За ним же я такого никогда не замечал. Например, в те благословенные времена мы каждый год осенью ездили на месяц в колхоз. И вот в сырую дождливую погоду, когда мы вынуждены были сидеть дома и “резались” в карты, он, сидя рядом, спокойно штудировал “пространства Римана”.

Так получалось, что мы с ним постоянно оказывались на самых трудоемких и опасных работах. Однажды нам пришлось работать на силосовании кукурузы. Работа состояла в следующем. Нужно было, стоя в кузове самосвала ЗИЛ-130 с наращенными бортами, быстро разбрасывать равномерно по всему кузову дробленую кукурузу, которую туда забрасывал силосоуборочный комбайн. Автомобиль и комбайн при этом “плясали” одновременно в трех измерениях. Нужно было успевать и силос разбрасывать, и внимательно следить за “гусаком” комбайна. Однажды Сашка потерял бдительность, и “гусак” сбросил его на землю. Он упал на спину, и, возможно, это было одной из причин его последующих проблем со спиной. В другой раз мы вшестером по просьбе председателя колхоза перевозили с железнодорожной станции восьмиметровые бревна из свежесрубленной сосны. Сначала их нужно было по наклонным жердям закатить в кузов автомашины с прицепом. Работа было несколько опасной. Нужна была слаженная работа всей бригады. Стоило кому-то отвлечься, отстать — и бревно могло сорваться. И всем бы пришлось несладко. И однажды сработал “закон Мерфи”: бревно грозило ринуться вниз — и тут Тарас мгновенно подставил спину под бревно, пытаясь его удержать. С бревном мы справились, но я точно знаю, что Тарас при этом получил травму спины.

В те времена студенты были народом бедным. Стипендия у нас была 25 рублей (по официальному курсу примерно 25 долларов). А у Тараса, как ленинского стипендиата, она была аж 80 рублей — богач! Но вся эта стипендия шла, в основном, в общий котел. Нужно было где-то как-то подрабатывать. И Тарас нашел хорошую “шабашку”. Есть (был) в Харькове мылокомбинат. В процессе изготовления мыла использовалась канифоль. На территории комбината скопилось около 1200 тонн канифоли в деревянных бочках весом от 100 до 300 кг, сваленных в три огромных кучи. Фининспекция потребовала уложить все это добро в правильные параллелепипеды в три яруса, чтобы они могли сосчитать число бочек. Рабочие комбината от такой работы отказались. Нашлась было одна группа студентов, но через три дня они отказалась тоже. Этим воспользовался Тарас, быстро сколотил бригаду из ребят нашей группы, и работа закипела. 200-килограммовые бочки мы ставили “на попа” и закатывали на 2-й и 3-й ярусы сначала втроем, затем вдвоем, а под конец Тарас умудрялся делать это в одиночку. На эту работу у нас ушло примерно полтора месяца. Работали в будни после лекций и в выходные.

Насколько мне известно, будучи уже в Дубне, Тарас продолжал эту практику “шабашек”. Его хорошо помнят и Петропавловск-Камчатский, и грузовая станция Дубна-3. И там он себя не щадил и, как говорится, был всегда в первых рядах. Я остановился на этих событиях, потому что почти уверен, что, к сожалению, это все потом вышло ему “боком”. Когда речь заходит о Тарасе, я вспоминаю слова Белинского в адрес Добролюбова: “Он не гнушался никаким трудом. Он — трудолюбие, не белоручка!” Думаю, что и другие слова этого стихотворения также подходят к Тарасу. (Я иногда употребляю имя Тарас. Мне так привычной. Это — его студенческий псевдоним. Для нас всех Сашка остался Тарасом.)

А.В. Тарасов: несколько эпизодов промелькнувшей жизни

Л.Г. Ткачев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Познакомился я с Александром Васильевичем Тарасовым давно, году в 1965 или 1966. В моих бумагах нашелся отзыв, подписанный Л.И. Лапидусом и Сашей в 1967 году, на мои первые 9 работ, в котором они рекомендовали присвоить мне звание м.н.с. Тогда мы оба были молодые, здоровые, и все у нас было впереди. Мы дружили семьями, лет 10 ходили друг к другу в гости или на природу вместе с растущими детьми. В то время у меня была яхта и мы не раз выходили под парусами на Волгу или Московское море. Контакт по науке было у нас немного, в 1970 году вышла всего лишь одна совместная работа о влиянии электромагнитной структуры адронов на величину их сечений.

Запомнилось несколько эпизодов, которые дают некоторое представление о том, чем Саша занимался в свободное от работы время и что его привлекало. Зарплаты у нас в те годы были низкие, чтобы содержать семьи, но было здоровье. Чтобы подзаработать, мы не раз в небольшой компании холодными зимними ночами разгружали на Большой Волге вагоны с цементом или удобрениями. После таких забав разгрузка летом вагонов с овощами на базе ОРС казалась курортом.

Страна у нас большая, где народ тогда только не шабашил, не то что в нынешнее время. Летом 1972 года мы оказались вместе со стройотрядом (более 50 человек во главе с комсомольским вождем В. Бутцевым и комиссаром В. Калининковым) в Петропавловске-Камчатском — строили дороги и разнообразные производственные помещения. Саша был крепким мужиком, и я как сейчас помню его с лопатой у кучи бетона. Обычно дело было так: к концу рабочего дня бетон на нормальных стройках переставали принимать, и весь бетон, несколько самосвалов, шел к нам, шабашникам, на бетонирование дороги. Чтобы бетон не успел окаменеть, весь наличный состав бросался на дорогу, но редко удавалось закончить раньше часа-двух ночи. То были настоящие мужские забавы. Однажды нас с Тарасовым чуть не убило. Мы работали на перекрытии потолка высоченного склада. Моросил мелкий дождь, надо было поднять железный кожух со сварочного аппарата, который потребовалось перенести на другое место. Аппарат оказался под напряжением, и когда кожух случайно коснулся его открытых контактов, то ударом тока нас отбросило на несколько метров, но не убило, и мы не упали вниз с высоты более 20 метров.

Бывали у нас на Камчатке и дни отдыха. В один из них человек 20 из отряда, мы в том числе, решили подняться на один из ближайших к нам Каряжский вулкан. Несколько часов шли в кирзовых сапогах вверх по глубокому мокрому снегу освещенного солнцем крутого склона. До вершины оставалось 200–300 метров, когда солнце спряталось за отрог, подул холодный ветер, снег задубел. Дальше в сапогах ходу нет, опасно. Вниз спустились за 15–20 минут: садишься на штормовку, привязанную вокруг пояса за рукава, и вперед. У каждого были большие крепкие палки, альпештоки, которыми мы притормаживали и при бешеном движении вниз управляли ими как рулем, чтобы не выскочить на торчащие из снега большие камни. Отделались ссадинами и порванными о камни штормовками.

После того как я забросил яхту, летние шабашки у меня перемежались с летними походами в горы. Первый раз к нашему походу на Алтай присоединился Саша с сыновьями Сережей и Антоном в 1978 году. Прилетели в Барнаул, несколько дней автобусами

и грузовыми машинами добирались по Чуйскому тракту до реки Катунь — до сих пор вспоминаю ее стремительный поток. Переправились на другой берег. Весь следующий день занял переход со всем грузом 3-недельного похода до Кучерлинского озера. В нашей компании было более 20 человек, в том числе 7 детей от 9 до 12 лет. Крутые горнопроходцы во главе с Николаем Фроловым ушли наверх, но через несколько дней вернулись, так как настолько основательно испортилась погода, что из-за шквалистого ветра было невозможно вчетвером установить на леднике палатку.

Тем временем Саша с Игорем Дреминым повели детей и женщин более простым маршрутом, но тоже натерпелись из-за разлившихся речек. Потом погода установилась, и дети с примкнувшими взрослыми пошли на несколько дней в соседнее ущелье, в котором находится Аккемское озеро и из которого видна высочайшая вершина Алтая — гора Белуха. И детям, и взрослым запомнился обратный путь в базовый лагерь. Поднялись на разделяющий ущелья хребет и некоторое время шли траверсом поверху. Пора спускаться, а безопасного пути вниз нет и нет. Скоро стемнеет и надо спускаться по пути, который есть, — по крутому обледенелому склону. Но все обошлось, и дети и взрослые почувствовали облегчение после благополучного спуска вниз в долину.

У алтайского похода было своеобразное продолжение в Дубне при самом непосредственном участии А.В. Тарасова. Еще в горах нам знающий народ посоветовал собрать золотого корня, растущего высоко на сопках на уровне альпийских лугов. Нам рассказали, как выглядит это растение, по-научному родиола розовая. Словом, мы нашли и насобирали. Во время длинной обратной дороги по Чуйскому тракту с нами в автобусе ехали ленинградские медики-профессора, которые везли молочные бидоны, наполненные этим золотым корнем, и которые просветили наших женщин, какое это серьезное снадобье, как его на спирте настаивать и по сколько капель в день принимать. Моя жена все это тщательно проделала и готовилась пройти курс самолечения золотым корнем. На несчастье, она как-то уехала в Москву, а в Дубну приехал в командировку один из участников похода — Валерий Жигунов. Встретились с ним, вместе с Сашей, на работе и пошли к нам домой отметить встречу. Нашли чем закусить. А что выпить? Только бутылка с красно-коричневым настоем золотого корня. Налили по одной, по второй и т.д. Отличный напиток. Через час входит жена и видит довольных жизнью троих мужиков и пустую секретную бутылку на столе. Можете представить ее состояние и реакцию на такое варварство.

На следующий год был запланирован поход на Кавказ, подобралась большая компания взрослых и детей — всего более 30 человек. В любом походе, особенно в горах, дети естественным образом убеждаются, зачем нужен папа и что он может. В домашней обстановке вряд ли возникают такие условия и такой воспитательный эффект. Запомнилась финишная часть того похода — переход всем табором через Главный кавказский хребет в Грузию.

Ночью перед перевалом Твибер свирепый ветер рвал палатки, не все были здоровы, и от этого был дополнительный напряг. Утром ветер стих, и солнце осветило заснеженный перевальный взлет. Не теряя времени, быстро собираемся и выходим. Часть взрослых идут первыми, топчут ступени, потом женщины и дети, далее замыкающая группа. Идем серпантинном, растянувшись в цепочку метров на 100–150. На перевал поднялись к полудню, высота 3700 метров, для многих это личный рекорд. Гарий Ефимов, ко всеобщему изумлению, достает из своего рюкзака большую дыню, которую он втайне от всех носил весь поход. Вкус необыкновенный.

На перевале долго не задерживаемся, кладем в тур записку и готовимся к спуску по обледенелому крутому кулуару. Навешиваем веревку и по очереди всех спускаем со страховкой на ледник. Спустить вниз более 30 человек — дело не быстрое и заняло около трех часов. Внизу ледник практически без трещин, и передовая группа сразу ушла вперед искать на леднике место для стоянки, не дожидаясь спуска всех участников. Нашли довольно ровное место. Есть вода, так как рядом течет по леднику ручей. Поставили палатки, дежурные готовят последний высокогорный ужин. Взрослым выдали по три командирских ложки спирта.

На следующее утро обнаруживаем, что нет указанного на карте моста через бурный поток, вырывающийся из-под языка ледника. От моста остались висящие над ревущей водой толстые тросы. Решили переправляться по тросу, это долго, но другого, более безопасного пути нет. Зацепившись двумя карабинами за трос, на другой берег переправлась со страховкой группа 3–4 крепких мужиков во главе с Тарасовым. Остальных переправляли по одному таким же образом. Конечно, было страшно висеть на тросе над бешеным потоком, но безопасно. Потратили на переправу полдня и дальше пошли по тропе до травы, до заброшенных малинников и первых грузинских поселков.

После трех недель в горах предполагалось неделю провести на берегу моря в районе Агудзеры — городка под Сухуми, где находился тесно связанный с ОИЯИ Институт ядерной физики под руководством Реваза Салуквадзе, которого некоторые из нас хорошо знали и с которым плотно общались на недавно прошедшей большой международной (Рочестерской) конференции в Тбилиси. Фраза “Договорились с Ревазом” позволяла решить все проблемы с местными начальниками, в том числе нам позволили поставить палатки в заброшенном парке у моря. Однажды возник конфликт у наших детей с местной шпаной детского возраста. И тут, откуда ни возьмись, возник страшный, лысый, с черной бородой Карабас-Барабас — наш Саша Тарасов, одного появления которого оказалось достаточно, чтобы местная ребятня присмирела и, в конце концов, сдружилась с нашими пришельцами.

Прошли годы, в 1993 году мы уехали на несколько лет в ЦЕРН, где я работал в дубненской группе эксперимента DELPHI. Но и там случай свел нас с Сашей Тарасовым, когда он в 1995 или 1996 году прилетел с коротким визитом в ЦЕРН по эксперименту DIRAC, в котором он долгое время участвовал. Случилось так, что в то время был какой-то праздник российского землячества в Женеве и нашим женщинам полагалось приготовить традиционные русские блюда. Саша их здорово выручил: сам стал к плите и мастерски напек сотню или две блинов.

Течет время, дети выросли, изменилась наша страна, уже много лет, как прекратились наши летние и зимние походы в дальние края. Нет Саши, нет его сына Сережи, нет Валеры Жигунова, нет Чебур Гены — так прозвали в алтайском походе сына Льва Булаевского — и еще некоторых нет. Осталась память о них, о незабываемых горах и наших походах, о товарищах, с которыми не страшно пойти в разведку. С ними уже встретимся в лучшем из миров.

Друг и напарник

Б.М. Старченко

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Начало 1970-х. Самолет Москва–Улан-Уде. Время летних “шабашек” в нашей прежней стране. Рядом здоровый, бородатый, лысый мужик, у которого болит спина. Встает, медленно ходит, садится, наваливаясь на меня. Он из нашей “бригады”, обижаться не приходится, да и ручищи у него. . .

Терплю, думаю, что мне не повезло. А лететь до самого Байкала. После тяжелой штормовой высадки с рыболовецкого судна на берег полуострова Святой Нос он подошел, мы познакомились — и больше с Сашей Тарасовым не расставались.

Он хорошо работал во многих ипостасях, но часто брался именно за ломовую физическую работу. Это, видимо, не мешало ему, теоретику, “ворочать мозгами”, а нам смеяться, когда его “совсем зашкаливало” и надо было “приводить” его в чувство.

Обижаться не приходилось. На любой работе с хорошим напарником шутка, анекдот и смех — лучшие помощники. Тарасов это понимал, рассказывал байки, подначивал, растворялся в метком русском выражении. Он обладал хорошим “чувством локтя”. Отзывчивость и участие были одними из лучших его качеств.

Среди друзей у Тарасова было много физиков. Некоторых я знал по застольным компаниям, с другими общался при каких-то обстоятельствах. Все они относились к Саше с уважением. Ценили его знания, умение разобраться в сложном научном вопросе, юмор и легкость в общении. Прежде всего, это Борис Копелиович, Николай Фадеев, Саша Пак, Михаил Исаакович Подгорецкий и многие другие. Но именно с этими мне повезло встречаться больше.

Мы одно время общались семьями — семьи одинаковые по составу и со схожими заботами. Ходили друг к другу в гости, угощали чем-то домашним, выпивали. Мои ребята донашивали кой-какие вещи его сыновей. Когда мои дети стали постарше, Тарасик консультировал их по математике и физике.

Все было хорошо — не хватало денег. Вот тут-то мы снова вспомнили, что мы напарники, и начали разгружать вагоны с сельхозудобрениями на станции Большая Волга. За 7–8 часов разгружали 65-тонный вагон, получали по 25 рублей и возвращались по ночной дороге в Дубну. Так продолжалось года четыре. Последней нашей совместной “шабашкой” был Магадан.

Никогда бы не подумал, что Сашка — “натура увлекающаяся” и имеет успех у женщин. Как это у него получалось? Замечательный рассказчик, стихоплет и эрудит, он, видимо, умел “запудрить” дамам мозги. Его позитивная реакция на просьбы подкупала, женская слабость и лестное слово ему imponировали — он забывался, влюблялся и делал необдуманные шаги. Такая вот жизнь. . .

За последние годы он резко сдал. Общаться почти не удавалось. Живем мы все вместе: работаем, отдыхаем, выпиваем. . . А умираем в одиночку.

Простая истина, но память о тех, кого любил, уважал, остается с нами навсегда.

Памяти друга

Е.С. Кузьмин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Мы познакомились с Александром Васильевичем на Байкале летом 1975 года. Бригада сотрудников ОИЯИ очищала берега озера от стволов деревьев, потерянных при транспортировке леса к местам переработки. Он к тому времени был уже матерым шабашником. Разговаривал резко, частенько покрикивал на неумелых новичков. Меня он сразу окрестил именем Джерри и так продолжал называть меня всю жизнь, не обращая внимания на стандартные правила перевода имен.

Тяжелая работа и суровые условия быта сплачивают людей, и многие из участников этой экспедиции поддерживали дружеские отношения на протяжении многих лет. Значительную роль в этом сыграла и магия Байкала, красота которого настолько привораживает людей, что хочется возвращаться туда снова и снова.

Наша совместная работа началась с того, что я пришел к нему за консультацией. Проблема была чисто практической: нужно было рассчитать угловое распределение черенковского излучения с учетом потерь энергии и многократного рассеяния частицы в толстом радиаторе. Теория Тамма–Франка описывает черенковское излучение частицы, движущейся прямолинейно и равномерно. При этом пренебрегают эффектами взаимодействия частицы с веществом радиатора, приводящим как к искривлению ее траектории (многократное рассеяние), так и к систематическому уменьшению скорости. Разрешение реальных черенковских спектрометров, где регистрируются многозарядные частицы, критически зависит от учета такого рода эффектов.

К моему удивлению, Сашу проблема заинтересовала, и около двух лет мы потратили на изучение вопроса. В этот период я имел удовольствие наблюдать Тарасова в процессе работы, его впечатляющую способность сосредотачиваться и поразительную скорость мышления. В результате удалось найти очень изящное и эффективное решение, описывающее угловое распределение излучения с учетом всех эффектов взаимодействия. В дальнейшем эти результаты получили подтверждение в эксперименте на ускорителе тяжелых ионов в Дармштадте (Германия).

Для людей, которые плохо знали Сашу, общение с ним представляло определенные трудности, однако удивительно, что вместе с тем он обладал недюжинным педагогическим талантом. Достаточно вспомнить его многочисленных аспирантов и даже школьников, подготовленных к поступлению в институты.

Говорят, что талантливый человек талантлив во всем, и это полностью справедливо по отношению к Александру Васильевичу. Пустоту, которая образовалась в жизни с его уходом, наверное, восполнить уже не удастся.

“Большой человек” — рыцарь науки

С.С. Шиманский

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Сейчас теоретики и экспериментаторы сильно разошлись в своей специализации и подчас с трудом понимают друг друга. И какое огромное счастье для экспериментатора — общаться с теоретиком, который может не только понять твои проблемы, но и подсказать какие-то новые направления для поиска решений. Таким теоретиком был Александр Васильевич Тарасов. С ним меня познакомил в середине 1980-х годов мой знакомый по алма-атинскому Институту физики высоких энергий, а как потом выяснилось, и ученик Александра Васильевича, Саша Пак. Его интересы в физике были близки к моим, и поэтому обсуждения своих задач с ним позволяли посмотреть более глубоко на всю проблему, увидеть те подводные камни, которые всплыли бы позже. Эти обсуждения проходили случайно, в тех местах, где мы встречались, — на семинарах, совещаниях и просто при случайных встречах. И Александр Васильевич никогда не отмахивался, ссылаясь на занятость, и не говорил, что он “не в теме”, как часто делают другие теоретики, а сразу проявлял интерес к моим проблемам.

Каноническое представление об облике теоретика — тщедушный очкарик. Александр Васильевич никак этому каноническому образу не соответствовал. Он соответствовал скорее образу русского богатыря, но так как таковых в те времена не водилось, то первое описание Тарасова, которое я получил от знакомого, рисовало облик грузчика или молотобойца, т.е. совсем не былинный образ, но человека недюжинной силы. И конечно, кто его видел в первый раз, сразу чувствовали не только его нерядовую физическую силу, но и огромную жизненную энергию. Облик дополняли расстегнутые ворота рубаш и распахнутые, даже в морозы, плащи и куртки. Ну и обязательное дополнение — кожаный портфель. В самом облике и манерах Вы ощущали, что этот человек — душа нараспашку. Энергия была и в речи, и в жестах. Мне всегда было трудно представить, как можно обуздать эту мощь, которая так и рвется наружу, чтобы сидеть за столом и, вооружившись ручкой и бумагой, корпеть над формулами и делать долгие и трудоемкие теоретические расчеты.

В начале этих заметок я говорил, что богатырей в нашем настоящем нет — они остались в былинах. Но рыцари науки есть. И мне хотелось бы вспомнить один эпизод, который связан с А.В. Тарасовым и отстаиванием научных ценностей. К сожалению, сейчас очень много появилось людей, девальвирующих само понятие научного работника и научной работы, подменяя их совсем другими принципами и моралью. Эти события связаны с проводившимися в 1980-х годах очень интенсивными исследованиями кумулятивных процессов. Природа этих явлений не выяснена до сих пор, но сами эффекты говорят о существовании в структуре обычных ядер многоуклонных (многокварковых) конфигураций, свойства которых могут оказаться определяющими для понимания внутренней структуры массивных звезд и их эволюции. И вот одной из групп теоретиков была предложена модель, которая блестяще описывала все экспериментальные данные. Теоретические кривые шли точно по экспериментальным данным. Можно сказать, что соответствие было слишком хорошим. Другие теоретики не могли воспроизвести эти расчеты, так как не были опубликованы значения неких весовых коэффициентов. После того как величины этих коэффициентов были опубликованы, А. Пак, А. Тарасов и А. Титов повторили вычисления и обнаружили, что указанная группа не совсем точно представляет свои

модельные расчеты. Мягко говоря, теоретические расчеты подвергались чистке, когда части кривых, отклоняющиеся от экспериментальных данных, просто убирались.

Вся наука держится на полном доверии и принципе, что научный работник не может написать неправду или подтасовать результаты. Часто очень трудно проверить результаты, так как это требует много времени и досконального изучения другой работы и повторения громоздких вычислений. Конечно, тогда был большой скандал, который имел и административные последствия. Меня же больше всего поразили Тарасов и его коллеги, которые взвалили на себя сей весьма неблагодарный труд по отстаиванию чистоты науки и ее принципов. Для меня, тогда молодого человека, который слышал о том, как такие псевдоученые организовали разгром генетики в 1940-х, это было примером того, что и в наше время чистоту науки нужно отстаивать и защищать. Сейчас нравы стали куда циничней, часто явная псевдонаучность и фальсификации просто не замечаются или игнорируются научным сообществом, а носители этих антинаучных принципов вполне успешно существуют и даже занимают немалые научно-административные и административные посты. И приходится только сожалеть, что таких “рыцарей науки”, каким был Александр Васильевич, становится меньше.

Александр Васильевич Тарасов

Э.А. Кураев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Вспоминая Александра Васильевича, представляю себе его коренастую фигуру, крепкое рукопожатие, неспешную привычку говорить. Всегда по делу, кратко и точно.

Он находил чудесные взаимосвязи в семействе гипергеометрических функций, знал, как применить их в сложных задачах физики. И добивался успеха аналитически, вручную, там, где многие сбрасывали задачи на “плечи компьютеров”. Богатырь в жизни, он был богатырем и в науке.

Коллегам, приезжавшим в “голодные командировки” (даже без оплаты жилья), он находил диван и тулуп укрыться. Угощал кашей собственного приготовления.

Будучи сам без степени доктора, скольких он поднял, вывел в кандидаты и доктора, исправляя огрехи воспитания и образования своих учеников с “периферии”!

Умел обыграть компьютер в шахматы и наизусть читал Пушкина, Лермонтова, Баркова, Есенина и Губермана. Саша был разносторонне одаренным человеком.

Ходили легенды о том, как он сумел вывезти свой отряд (они чистили реки, впадающие в Байкал) домой при забитых пассажирами аэропортах и железнодорожных вокзалах. Как он фактически в одиночку разгружал вагоны со смоляными бочками и складировал их.

Его идеи, возникшие в результате значительных усилий при решении задач прохождения излучения через вещество, и сейчас актуальны и внедряются в современных экспериментах его коллегами в Германии и Чили, Ереване и Харькове, в ведущих центрах Европы и Америки.

Память об Александре Васильевиче Тарасове всегда будет жива в наших сердцах. Царство ему небесное.

Памяти Александра

В.А. Теперин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Как часто в суете жизненных проблем и современных социальных потрясений вдруг понимаешь, осознав мгновенно, что никогда не сможешь говорить, общаться с ним, не услышишь его обращенных к тебе суждений. Ты чувствуешь, осознаешь, преодолевая боль, щемящую сердце мысль — его нет среди нас. Сердце противится трезвому рассудку, воссоздавая в памяти вновь и вновь неповторимое обаяние личности Александра.

Долгая память рисует нам его облик. Крупный физически, несуетлив, захватывает внимание окружающих неординарностью внешнего вида, но не подавляет. Услышав имя его, человек, знакомый с ним, скажет: “Я знаю его — красивый мужчина с бородой”.

Прошел уже год, как не стало этого замечательного человека. Боль утраты стихает, мелкие детали стираются — крупные, значительные со временем выделяются резче. Субъективным взглядом невозможно охватить всего, что составляло это явление русской науки — приход такого неординарного человека, талантливейшего специалиста, физика от Бога.

На протяжении долгого времени я имел возможность наблюдать этого человека как бы со стороны, работая рядом, являясь его товарищем и собеседником, временами вместе трудясь и подрабатывая на пропитание семей, получая незначительные суммы за тяжелый физический труд — бригадные подряды в колхозах и совхозах, очистку от снега крыш производственных сооружений, работы по очистке озера Байкал.

Везде, по собственной инициативе, он был на самых тяжелых и рискованных направлениях коллективного труда, вызывая уважение окружающих, являя собой пример мужественности и стойкости. Волевой, неунывающий, цельный, он относился уважительно и творчески к физическому труду.

Моя благодарная память хранит мне его лицо. Оно никогда не имело рассеянного или бессмысленного выражения, в любую минуту являясь отражением внутренней работы мысли. Можно лишь догадываться о том мощном мыслительном процессе, который постоянно происходил в его уме.

Его любили в нашем окружении. Мягок в общении, уважителен к собеседнику, проникновенен, изумительно нестандартен в суждениях, он вызывал всеобщее уважение, оставаясь памятен многим. Каждая встреча с ним являлась событием, которое было невозможно забыть. Он был открыт, но не доступен до конца.

Его зрелый ум не допускал поспешных или поверхностных суждений в национальном вопросе. Его научное окружение было многонациональным, как и наука вообще. В нем присутствовали русские, армяне, евреи, корейцы, таджики, монголы, вместе трудившиеся над решением общих научных проблем.

Цельный, тактичный, вежливый человек, он не допускал пошлостей в разговоре, вольностей. Тонко чувствующий форму, цвет, гармонию, он являлся большим знатоком русской и зарубежной классической музыки. Мне доводилось видеть его лицо во время прослушивания классических произведений. Как нам в наше непростое время недостает общения с классикой — одной из основ гармоничности личности! Он знал и был поклонником классической художественной литературы.

Александр щедро делился своими научными идеями. Открытый, жизнелюбивый, он активно помогал решению научных и житейских проблем других людей. Чуждый зависти, он не замарал себя низменной интригой.

Встречи с ним во время вынужденного досуга, порой с бокалом хорошего вина, задушевная беседа, доверительное общение являлись для нас целительным источником. Хорошая улыбка, умные глаза, трубка душистого табака; доска, сплошь исписанная бесконечными формулами, такие же записи на листах бумаги на столе с экспромтами его мысли, тихий голос, обращенный к собеседнику. . . Как ценен миг такого краткого досуга!

В профессиональной деятельности, с его критическим складом ума, он стремился к познанию истины, невзирая на авторитеты, и достигал ярких и эффектных результатов. С живостью исследователя воспринимал точку зрения собеседника, стараясь дать адекватную формулировку проблеме. Обладая умом аналитика и душевной широтой, щедро раздаривал идеи для научного поиска. Его творческая деятельность оборвалась в расцвете его таланта.

Пытаясь понять жизненный путь этого удивительного человека, задаешься вопросом: как формируется такой характер, такие качества индивида; в каких условиях, под воздействием каких людей, факторов — социальных, природных, общественных — формируется такая личность; где он рос, кем воспитывался, какова его счастливая наследственность? Могу лишь отметить, с какой почтительностью он отзывался о своих учителях и близких друзьях, а также тот неоспоримый факт, что семена, посеянные его студенческим наставником Рафкатом Ахмеровым, пали на благодатную почву.

Память об Александре мы сохраним в своих сердцах. Упокой, Господи, душу усопшего раба Твоего Александра.

Мой дедушка

Вера Тарасова

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва

Не каждый может похвастаться таким дедушкой. Он всегда напоминал мне старого доброго гнома: с бородой, палочкой, курительной трубкой во рту и миллионом сказок в голове. На любую ситуацию у деда Саши всегда находилась строчка из стихотворения или цитата. А сколько строк он мог прочесть наизусть, сколько сказок рассказать!

Его любовь к чтению передалась и его детям, и внукам, и нет слов, которыми можно было бы выразить благодарность за это.

И всегда ему удавалось чем-нибудь меня удивить! Однажды зимой, когда лес в районе пика Тяпкина еще казался мне беспредельно большим, дедушка повел меня на болото искать клюкву. И, с одной стороны, я вроде бы понимала, что в условиях полуметрового снега мы вряд ли найдем клюкву в лесу, но не верить деду было невозможно, поэтому послушно пробираюсь за ним через кусты, искала в снегу желанные красные ягодки.

Повзрослевшего ребенка было труднее удивить клюквой в лесу, поэтому дедушка каждый раз привозил что-нибудь новое из своих заграничных командировок. Эти подарки пользовались огромной популярностью у внучки, особенно в непростые годы студенчества.

Самым обидным для меня является факт моих столь небольших знаний о дедушкиных достижениях в науке. Он никогда не рассказывал о своей работе, а я почему-то много не спрашивала. Сейчас приходится узнавать все от других людей, а ведь сколько интересных разговоров с ним могло быть!

О Саше

Ю.П. Иванов

Технический университет им. Федерико Санта-Марии, Вальпараисо, Чили

Где-то в начале июня 2011 года получил письмо от Ольги Воскресенской с просьбой написать о Саше (хоть полстранички!) для сборника воспоминаний о нем. Согласился сразу: книга о Саше — дело святое! Но с ходу сесть и написать ну никак не получалось: суета текущих дел заела! Впрочем, по словам Оли, не я один такой. И если к сентябрю что-то напишется — то и замечательно! В общем, время пошло, лето в Дубне набирало жаркие градусы, а суета дел никак меня не отпускала. Однако подспудно работа шла: в поезде, самолете, даже в очереди в магазине нет-нет, а всплывали мысли о Саше. Много вспоминалось. И наверняка люди, знавшие Сашу больше, напишут о нем и выразительнее, и лучше. Мне же захотелось передать свои ощущения от общения с ним. Иногда даже короткая встреча придавала жизни глубину, а выражение им своих мыслей было очень емко и порой просто афористично, даже где-то служило уроком. За точность фраз не поручусь — не зря говорят: “Врет, как очевидец”. Но дух и смысл постарался передать верно.

О науке

Было это в прошлом веке, в начале 80-х. Вадим (В.А. Бедняков, сейчас зам. директора ЛЯП ОИЯИ) и я были еще стажерами. И, как водится, считали, что если и не с ходу, но уж точно вскорости решим все в физике! Но вот только компьютер нужен. А тогда, страшно сказать, компьютер был хоть и большой (по размеру), но один. И не на группу, не на лабораторию, а на весь Институт! Надо было прийти в комнату, где стоял терминал, и заранее записаться на определенное время: днем — не более получаса, а после часа ночи — аж целый час можно было стучать по клавишам и пялиться в зеленый экран.

В общем, картина такая. Час ночи. Мы с Вадимом пришли на свое время. Днем же всякие доктора с кандидатами работают, а ночь — это уже стажер да студент на смену заступают! За терминалом сидит небритая личность (ну прям вылитый Корнеев у Стругацких) и задумчиво смотрит на маленький экран Tectronix. (Вот в ЛТФ был большой экран, и все им завидовали!) Причем видно, что уже давно смотрит. Вдумчиво. Без того, чтобы клавишу какую тронуть. Видно, мысль пришла. А по клавише стукнешь — спугнешь! Ну, мы минуту стоим, потом уж пять проходит. Я как-то с недосыпу (по ночам работаешь, днем пытаешься как-то прикорнуть на семинаре, — стажер же “на табеле”): днем на работе должен быть! Короче, недосып хронический!) в некое оцепенение впал, а Вадим, не выдержав, сдержанно так выдает в пространство: мол, наше время уже наступило. В ответ — ничего. Ловля мысли продолжается. Потом, где-то через полминуты, скрипит кресло и “небритая личность” обращает на нас свой взор. Видно, что мысль ушла неуловимой. А раз так, то и с досадной помехой можно разобраться. Далее следует короткая, но емкая и образная речь, смысл которой “шли бы вы, ребята ...”. И был указан конкретный адрес. Далек, иными словами. “Тут люди наукой занимаются!”

И ведь так и ушли мы с Вадимом. Зато познакомились с “самим Тарасовым”. И, как нам на следующий день сказали, еще легко отделались! Вот кому шуточки, а порой откинешься, посмотришь на свои занятия и “отнормируешься” по Сашиному методу — наука это или пора уже идти куда подальше...

О “любви”

Летело время. Вот уж и Союз распался, и 1990-е просвистели. Впрочем, не мне те времена описывать. Но вот что интересно: как-то так получилось, что в Дубне поработать вместе с Сашей у меня не сложилось. И лишь оказавшись в Германии, мне представился такой случай. Саша тогда попеременно приезжал то в Институт теоретической физики, то в Институт ядерной физики Общества Макса Планка. Оба в Гейдельберге. Как обычно, Саша работал с Борисом Копелиовичем. Но, поскольку я тоже там был, иногда привлекали и меня для всяких расчетов. Впрочем, я сейчас не “о науке”, а “о любви”.

Жили мы с Сашей в одном подъезде и, более того, на одном этаже дома, в котором снимали квартиры “гости Макса Планка”. А дом этот, надо сказать, находился прямо у леса, за которым в 10 минутах неспешной прогулки вверх по склону холма и находился Институт ядерной физики. Прогулка по лесу перед и после работы — что может быть лучше! Но это кому как: по весне в лесу появлялась всякая мелкая “живность”, и если одному всё это — природа, то для другого уже — проблема. И дело даже не в комарах, да мухах — это дело понятное, да и не было их там в “дубненских” объемах. А вот клещи Саше докучали преизрядно. И вот в очередной раз “словив” клеща, Саша просит меня “по-соседски” облегчить его страдания. Мол, впились “эта собака” ну в совершенно недостижимое человеком место, и без моей помощи ну никак не обойтись. Я, само собой, тут же готовлю “инструмент к операции” — достаю иголку потолще и протираю ее “спиртом”. После чего приступаю к извлечению “захватчика”. В этот раз “вторжение” было действительно глубоким. Я вожусь уже несколько минут, и сам уже даже вспотел. Саша мужественно терпит мою “операцию”. По ходу дела мы обмениваемся комментариями как по поводу клещей, так и “за жизнь”. Наконец “диверсант” извлечен, и я выдаю уже “печатное” выражение: “Эх, и любят же тебя клещи!” На что получаю мгновенный ответ: “Любовь она, понимаешь, разная бывает: что одному — страсть, другому — одни страдания...” И ведь прав, не возразишь!

Эх, многое было, многое прошло. И эти клещи — далеко не последнее испытание, выпавшее на его долю... Многое Саше пришлось вынести. И все-же он до последних своих дней ценил улыбку. Уж простите, если кому-то мои “байки” покажутся легковесными, — смею надеяться, Саша вспоминал бы об этом тоже с улыбкой.

Замечательная дружба

Герхард и Ирмтрауд Веферинг

Эпельхайм, Германия

6 лет назад администрация Института теоретической физики Гейдельбергского университета обратилась к нам с вопросом, не согласимся ли мы сдать внаем квартиру в нашем собственном доме Александру Тарасову и его жене Ольге Воскресенской, приехавшим из России для работы над совместным с институтом проектом. Мы охотно согласились, так как всегда рады знакомству с новыми людьми и новой для нас культурой другой страны.

Когда эта семья переехала к нам, мы тотчас же прониклись к ней симпатией и стали вместе проводить многие вечера. Мы отмечали вместе дни рождения, проводили время

в беседах на нашей веранде, вместе участвовали в городских празднествах, приглашали друг друга в гости познакомиться с чисто немецкой или же чисто русской кухней.

Языковых барьеров не существовало: мы могли общаться как на английском, так и на немецком языках. За 5 лет знакомства с этой семьей у нас возникла замечательная дружба, которая продолжается и теперь.

Мы глубоко скорбим, что Александр так рано ушел из жизни. Его неизменная доброжелательность, смех, его любимые выражения, трубка, которую он постоянно курил, сидя на балконе в нашем саду, о чем-то все время размышляя, — наши любимые воспоминания о нем. Он навсегда останется в нашей памяти.

2011 год

Остывающая Вселенная

Д.В. Антонов

Институт теоретической физики Гейдельбергского университета, Гейдельберг

Не укладывалось в сознании, что Саши больше нет среди нас, когда пришло сообщение о его безвременной кончине. Таким абсолютно живым человеком он навечно остался в нашей памяти.

Он покинул нас слишком быстро и неожиданно для многих, включая меня и мою семью. Кажется, что вот еще только вчера Саша снова веселил моего сынишку, рассказывая ему какую-то детскую поэму. Нам с женой всегда подсознательно думалось при этом, что в общем-то больше мы и не встречали людей с такой феноменальной памятью и таким редким чувством русского языка.

Саша запомнился нам удивительно ярким и обаятельным человеком, с которым всегда хотелось побыть подольше. Помимо уникальных человеческих качеств, притягивавших к нему людей, Саша обладал поистине неисчерпаемыми знаниями не только в физике, но, например, во всемирной истории и географии. Не говоря уже о его вечно юношеском задоре и бесчисленном множестве шуток, анекдотов и четверостиший, которые каким-то удивительно естественным образом вспоминались Сашей в подходящий для этого момент.

Другое запомнившееся Сашино качество — его поразительная скромность — выглядело органичной частью накопленной им огромной жизненной мудрости.

Когда такие неординарные личности, как Саша, уходят, то понимаешь, что Вселенная действительно остывает, но излученный ими свет еще долго будет озарять своим сиянием и теплотой тех, кому посчастливилось с ними соприкоснуться. Вечная память Саше.

2011 год

Недолгая дружба

М.Н. Мнатцаканова, Ю.С. Вернов

Институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына, Москва

Институт ядерных исследований Российской академии наук, Москва

Тяжко писать о безвременно ушедшем светлом человеке, ставшем нам близким в последние годы.

Разумеется, те, кто работал с Александром Васильевичем и знал его долгие годы, смогут рассказать о нем гораздо больше. О работах Александра Васильевича расскажут его соавторы и ученики. Нам лишь хочется отметить, что, находясь у нас дома (уже очень больным), он почти все время работал. Уже после ухода Александра Васильевича мы с большим интересом слушали на конференции в Ереване доклад Сергея Рубеновича Геворкяна о совместной работе с Александром Васильевичем и Ольгой Олеговной. Сергей Рубенович отметил решающий вклад Александра Васильевича в получение положенных результатов. Из доклада было видно, как тесно переплелись в творчестве Александра Васильевича математика и физика.

Однако, возможно, эти короткие воспоминания добавят некоторые черточки к характеру очень яркого, широко мыслящего, очень нетривиального человека, каким был Александр Васильевич и каким он останется в нашей памяти.

Знакомство с этой замечательной семьей у нас началось с Ольги Олеговны Воскресенской при радостных для нас обстоятельствах — вместе с сотрудниками отдела, в котором работает наш сын, праздновали его женитьбу. К тому времени мы уже знали, какую важную роль сыграли Ольга Олеговна и Александр Васильевич в судьбе жены нашего сына Екатерины, для которой они сделали очень много, опекая и наставляя ее в науке и в жизни задолго до того, как с ней познакомился наш сын. После празднования Ольга Олеговна, естественно, осталась у нас, мы очень долго беседовали, сразу проникнувшись к ней глубокой симпатией. Было это осенью 2008 года, так что наша дружба пришлось на самое тяжелое время в жизни этой семьи.

С Александром Васильевичем мы познакомились несколько позже — супруги приехали в клинику на консультацию. Первое впечатление было таким: в дом вошел русский богатырь — и это удивительно, так как в это время Александр Васильевич уже не мог передвигаться без помощи палок. Но никакие палки не могли повлиять на то ощущение мощи, которое исходило от него. Впрочем, буквально сразу мы были покорены его интеллектом, остроумием, цитированием к месту стихов, особенно любимого им Губермана. Кажется, Юрию Сергеевичу удалось вспомнить лишь одно стихотворение Губермана, неизвестное Александру Васильевичу.

Следующая наша встреча произошла в Дубне, где наша невестка защищала кандидатскую диссертацию. По приезде в Дубну мы были обласканы в доме Ольги Олеговны и Александра Васильевича, а затем на защите эта замечательная супружеская пара поделила с нами волнение и радость при оглашении результатов голосования. Хочется повторить, что этой радостью вся наша семья во многом обязана именно Ольге Олеговне и Александру Васильевичу.

А дальше все стало грустно. Ольга Олеговна и Александр Васильевич стали часто бывать в нашем доме из-за болезни Александра Васильевича. Тяжко вспоминать все этапы его болезни. Несколько раз нам казалось, что худшее позади, но болезнь демонстрировала свое коварство. Хочется сказать, что только человек очень большого мужества мог вести

себя в таких тяжелых обстоятельствах так, как Александр Васильевич. Казалось, будто никакого груза сомнений, никакого страха нет в его душе. И, будучи в таком состоянии, он не переставал трогательно заботиться об Ольге Олеговне и волноваться, если она задерживалась.

Большую радость принес Александру Васильевичу переезд на новую квартиру. Нам удалось побывать в этой квартире при его жизни. 14 октября 2010 года в ОИЯИ вспоминали Алексея Норайровича Сисакяна. Мы, связанные с Алексеем Норайровичем долгими годами дружбы, приехали в Дубну и, конечно, поехали к Ольге Олеговне и Александру Васильевичу. Александр Васильевич был, как нам казалось, полон сил (или нам хотелось, чтобы это было так), как всегда, ярок и остроумен. Невозможно было представить, что меньше чем через полгода его не станет. В то, что конец близок, не верилось и после второй операции. Мелита Николаевна была у него в онкоцентре, говорить он еще не мог, но принес тетрадь и написал два четверостишия Губермана, которые так горько теперь перечитывать и которые хочется здесь привести:

Мой разум верно сердцу служит,
Всегда шепча, что повезло,
Что все могло быть много хуже,
Еще хреновей быть могло.

На свете жить с азартом так опасно,
Любые так рискованны пути,
Что понял я однажды очень ясно,
Живым из этой жизни не уйти.

На прощанье он крепко обнял Мелиту Николаевну, и подумалось с надеждой, что все будет хорошо, если человек сохранил столько сил.

Вот и все. Радостно, что жизнь свела нас с таким замечательно ярким человеком, как Александр Васильевич, но очень грустно, что дружба наша была столь краткой.

Последняя ученица

К.О. Поздеева

Институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына, Москва

Александр Васильевич Тарасов являлся фактическим руководителем моей диссертационной работы и помог мне сделать эту работу диссертабельной. Я постоянно ездила в Дубну и жила неделями в доме у Ольги Олеговны и Александра Васильевича. В то время они жили в институтской квартире на Курчатова, 4. Каждое утро у нас был “морской” подъем: нас будил громкий звук гонга, доносившийся с кухни, и мощный голос на всю квартиру возвещал: “Подъем!” К этому моменту на кухне, как правило, нас уже ждали замечательные творожники со сметаной и вареньем. Такие чудесные творожники умел готовить только Александр Васильевич! Он считал, что определенный тип диеты увеличивает умственную активность. Утром полагалось есть творог, вечером — рыбу (желательно селедку).

Однажды, приехав в Дубну, в квартире Ольги Олеговны и Александра Васильевича я увидела молодую симпатичную девушку. Мне стало интересно: кто она? Первым предположением было то, что в гости приехала внучка. Оказалось, что ночью Александр Васильевич с Ольгой Олеговной возвращались в Дубну электричкой, где к ним с вопросом обратилась девушка, явно обеспокоенная складывавшейся ситуацией. После разговора выяснилось, что она едет в Дубну к своим соотечественникам из Молдавии, пригласившим ее работать вместе с ними на стройке. Их адреса ей были не известны, их мобильник не отвечал. И ее никто не встречал... Девушка оставалась в ночи одна в незнакомом городе. Немного посоветовавшись, Александр Васильевич и Ольга Олеговна пригласили ее к себе. За время ее пребывания у них с помощью друзей, посещавших их дом, они помогли девушке сделать дубненскую регистрацию и получить разрешение на работу. Ситуация разрешилась.

Помню Александра Васильевича постоянно сидящим на кухне за огромными “листингами”, книгами, статьями, курящим трубку и постоянно о чем-то думающим, пишушим. Вечером в дом приходили люди — соавторы, ученики, дети, внуки, друзья и просто знакомые. Некоторым легко одетым знакомым Александр Васильевич находил и насовсем отдавал теплую одежду, что совсем нетривиально при зарплате научного сотрудника ОИЯИ. Когда приходили ученики, вино, как правило, лилось рекой (мне тоже немножко доставалось — в основном в виде глинтвейна). Иногда в доме были праздники, для которых Александр Васильевич готовил свои фирменные плов, манты или пиццу. Какая это была пицца!..

Крупная фигура и щетина на лице, на мой взгляд, не соответствовали внутреннему содержанию этого человека. Думаю, что в душе Александр Васильевич был ребенком необыкновенного ума и доброты, понимал детей, умел утешить и развеселить плачущих. Он мог читать длинные стихи и сказки на память, слушал красивую классическую музыку, читал интересные художественные книги. Его лицо принимало необыкновенное выражение, когда по телевизору он видел горы. Горы — это была его страсть.

Перед моим внутренним взором рисуется фантастическая картина. Александр Васильевич легкой поступью движется по зеленому свежему лугу вместе с белым пушистым котом в солнечную не жаркую погоду. Постепенно луг превращается в зеленую гору, кот — в белого медведя. Вместе они набирают высоту и вот уже близки к облакам. Теперь в медведе проступают черты огромного светлого голубоглазого мужчины с крупной головой — и они оба уходят за облака... И только лучи света, пробиваясь сквозь высокие облака, льются на зеленую гору...

2011 год

О Саше Тарасове

Т.В. Ведерникова

Томский государственный университет, Томск

Хочу сказать несколько слов о Саше. Да-да, именно — о САШЕ. Потому что именно так его жена, а моя одноклассница и подруга Оля Воскресенская познакомила меня с ним.

Когда впервые на пороге нашей квартиры в Томске появилась солидная фигура Саши, я подумала: “Ой! Как же правильно с ним общаться?” Но уже после нескольких фраз,

которыми мы обменялись с ним, как в пинг-понге, мне казалось, что я знакома с ним давным-давно, и не надо делать “книксенов”, выдумывать и подбирать особо деликатных обращений! Просто надо быть собой.

Саша тонко чувствовал и любил ЖИЗНЬ. Любил и ценил юмор. А как же! Ведь человек, слишком серьезно относящийся к жизни, не умеющий посмеяться над ситуацией, в которой оказался, достоин сожаления.

В общем, Саша — замечательный собеседник! (Даже не хочется добавлять — был.) А сколько он знал стихов! Я бережно храню целый свиток рукописных, на память им записанных, стихов любимого Губермана.

Стихи, которые мы любим, могут много рассказать о нас. Они так созвучны Сашиному мироощущению:

Благодарю Тебя, Всевышний,
За все, к чему я привязался,
За то, что я ни разу лишним
В кругу друзей не оказался.

< ... >

И одному Тебе спасибо,
Что держишь меру тьмы и света,
Что в мире дьявольски красиво,
И мне доступно видеть это.

Именно в этих четверостишиях, которые всегда были с ним, открывается тонкая и чуткая Душа большого человека:

И спросит Бог: никем не ставший,
Зачем ты жил? Что смех твой значит?
— Я утешал рабов уставших, — отвечу я.
И Бог заплачет.

Мне, Господь, неудобно просить,
Но, коль ясен Тебе человек,
Помоги мне понять и простить
Моих близких, друзей и коллег.

А вот это — как будто он сам про себя написал, с присущими ему чувством юмора и мужеством сильного человека:

С азартом жить на свете так опасно,
Любые так рискованны пути,
Что понял я однажды очень ясно:
Живым из этой жизни — не уйти.

Финал кино: стоит кольцом
Десяток близких над мужчиной,
А я меж них лежу с лицом,
Чуть опечаленным кончиной.

Я совсем не была знакома с Тарасовым Александром Васильевичем — выдающимся физиком-теоретиком, работа которого была тесно связана с экспериментами, проводимыми в мировых физических центрах. В 2010 году во время его визита в Томск он выполнял какие-то расчеты для совместного проекта с учеными из Чили. Оля попросила меня переслать “сканы” листов с расчетами по электронной почте в Чили. На листах были какие-то красивые формулы с забавными значками-“сикарашками”. В ответ мы получили: “It’s wonderful!” Такова была оценка его труда зарубежными коллегами. В этом нет сомнений.

Грустно, что люди, которые еще много могли дать миру, уходят. Но и здесь можно было бы закончить мою краткую заметку о Саше строфами из Губермана:

Уточняется плоть, испаряется пыл.
Годы вышли на медленный ужин.
И приятно подумать, что все-таки был
И кому-то бывал я нужен.

Мы после смерти – верю в это –
Опять становимся нетленной
Частицей мыслящего света,
Который льется по Вселенной.

5 июня 2012 года ему исполнилось бы 70 лет. Светлая память Саше Тарасову.



Не перевелись богатыри на русской земле



С женой Ольгой



В научных командировках, 1999–2001 гг.



Любимые горы. В Швейцарских Альпах, 2001 г.



С Борисом Копелиовичем в Институте ядерной физики им. Макса Планка,
Гейдельберг, 1998–2002 гг.



Доклад на международном совещании «Hadronic Atoms and Positronium
in the Standard Model», 1998 г.



Решение научной проблемы, Гейдельберг



За работой. Институт ядерной физики им. Макса Планка



У немецких друзей Ирмтрауд и Герхарда Веферинг. Эппельхайм, Германия



С дочерью в Гейдельберге



С теоретиками Лаборатории теоретической физики,
Дубна, декабрь 2008 г.





Теоретическая мысль, Вальпараисо (Чили), март 2006 г.



Творчество, 1982 г.



Самый живой

ИЗБРАННЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

УДК 539.172.5

КОГЕРЕНТНОЕ И НЕКОГЕРЕНТНОЕ РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ НА АТОМНЫХ ЯДРАХ В ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЙНИЯ*

А. В. Тарасов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Представлены основные результаты теории многократного рассеяния относительно реакций когерентного и некогерентного рождения частиц (и резонансов) на атомных ядрах. В частности, подробно обсуждаются эффекты, связанные со спином рождающихся частиц.

The main results of the multiple scattering theory of coherent and incoherent particle and resonance production off nuclei are presented.

In particular, the spin effects of the produced particles are discussed in detail.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы разными экспериментальными группами довольно интенсивно исследуются процессы рождения нестабильных частиц (резонансов) на атомных ядрах [1—20]. Основная цель этих исследований — получение информации о характеристиках взаимодействия нестабильных частиц с нуклонами, постепенных изучению в экспериментах с водородными мишенями, или измерение радиационных ширин распада резонансов. Теоретическим аппаратом, используемым при анализе экспериментальных данных, является теория многократного рассеяния (ТМР), развитая первоначально в работах Глаубера [21—24] применительно к описанию процессов упругого и квазиупругого рассеяния частиц высоких энергий ядрами, а затем обобщенная в работах нескольких групп авторов [25—54] с целью описания процессов рождения частиц на ядерных мишенях.

Настоящий обзор представляет собой попытку систематизированного изложения наиболее существенных результатов теории когерентного и некогерентного рождения частиц в адрон-ядерных столкновениях, полученных в так называемом приближении Глаубера. Приближение Глаубера эквивалентно следующему простому

*Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1976, том 7, вып. 3, с. 771.

предположению о физической картине взаимодействия быстрых частиц с ядрами. Время прохождения быстрых частиц через ядро намного меньше характерных времен, в течение которых нуклоны ядра могут заметно сместиться из того положения, в котором они находились в момент столкновения частицы с ядром. Поэтому взаимодействие происходит как бы с системой неподвижных центров (нуклонов), вероятность той или иной конфигурации которых определяется волновыми функциями начального и конечного состояния ядра-мишени.

Специфическая черта динамики сильных взаимодействий при высоких энергиях — коллимирование продуктов распада в узком угловом конусе вокруг направления движения налетающей частицы обеспечивает практически прямолинейное распространение быстрых частиц через ядро, что позволяет использовать для их описания эйкональное приближение и соответствующую ему технику прицельных параметров. Если бы радиус сильного взаимодействия при высоких энергиях r_h был намного меньше средних межнуклонных расстояний в ядре, то прямолинейность распространения обеспечивала бы не более одного столкновения быстрой частицы с каким-либо нуклоном ядра, причем сами эти столкновения описывались бы амплитудами на массовой поверхности. Однако до сих пор неясно, какой из параметров с размерностью длины в теории сильных взаимодействий следует отождествить с величиной r_h . И если в качестве оценки ее квадрата взять параметр наклона дифференциального сечения упругого адрон-адронного рассеяния $B = 8 \div 10 \text{ Гэв}^{-2} = 0,3 \div 0,4 \text{ ферми}^2$, то окажется, что он того же порядка, что и средний квадрат расстояния между нуклонами ядра. Поэтому пренебрежение немассовыми эффектами в амплитудах внутриядерных столкновений является неоправданным и возникает задача корректного учета этих эффектов. В этой связи в литературе даже обсуждался вопрос о возможности использования ядерных мишеней для изучения неасимптотических (виртуальных) состояний частиц (или систем частиц) с нуклонами. Однако до сих пор завершенной теоретической схемы, корректно учитывающей немассовые эффекты и являющейся основой для анализа экспериментальных данных в духе высказанных идей, не существует. Поэтому пока с необходимостью используется глауберовская схема описания взаимодействия частиц с ядрами. Два обстоятельства могут служить этому некоторым оправданием. Во-первых, в теории потенциального рассеяния в эйкональном приближении происходит полная (точная) компенсация немассовых эффектов [25] и тех эффектов кратных столкновений внутри ядра, в которых какой-либо нуклон участвует более одного раза (такие столкновения возможны, если, например, два нуклона находятся на расстоянии, меньшем радиуса взаимодействия частицы с нуклонами). Во-вторых, теория Глаубера,

построенная в предположении, что подобная компенсация имеет место и в общем случае (непотенциальное рассеяние), описывает всю совокупность экспериментальных данных об упругом и квазиупругом рассеянии частиц высоких энергий ($T > 1$ Гэв) атомными ядрами [26]. Пока не доказано обратное, естественно предположить, что построенная в подобных приближениях теория процессов рождения частиц в адрон-ядерных столкновениях правильно описывает эти процессы.

1. ОБЩАЯ СТРУКТУРА АМПЛИТУД И СЕЧЕНИЙ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ НА ЯДРАХ В ТЕОРИИ ГЛАУБЕРА

Обсудим структуру амплитуд рассматриваемых ниже реакций вида

$$a + A_i \rightarrow b + A_f, \quad (1)$$

где a (b) — налетающая на ядро (родившаяся) частица; A_i (A_f) — ядро-мишень в начальном (конечном) состоянии. Ясно, что в описанной выше схеме теории основными составляющими элементами должны быть S -матричные элементы последовательных столкновений быстрой частицы с нуклонами ядра, из которых результирующий S -матричный элемент реакции (1) в представлении прицельного параметра b строится мультипликативно.

При обсуждении столкновений быстрых частиц с нуклонами ядра ограничимся рассмотрением только бинарных реакций вида

$$x + N \rightarrow y + N, \quad (2)$$

где x (y) — частицы или резонансы, поскольку в процессах рождения частиц b конечной массы $m_b^2 \ll S$ (S — квадрат полной энергии в системе центра масс сталкивающихся частиц) именно такие столкновения играют основную роль.

Пусть f_{xy} — амплитуда процесса (2) на покоящемся в начале координат нуклоне, нормированная условием

$$d\sigma/d\Omega = |f_{xy}|^2.$$

В качестве независимых кинематических переменных реакций (2) удобно выбирать импульс \bar{k} налетающей частицы a и поперечный, т. е. лежащий в плоскости, ортогональной импульсу k , переданный нуклону импульс q_T , причем $q_T \approx k\theta$, где θ — угол рассеяния.

Изменение импульса k быстрых частиц при столкновениях обычно ничтожно мало по сравнению с самой величиной k и им можно пренебречь, так что k является общей энергетической характеристикой всех последовательных столкновений, и поэтому зависимость амплитуды f_{xy} от k всюду будет опускаться.

S -матричный элемент реакции (2) на нуклоне, находящемся в точке с радиус-вектором \mathbf{r} , связан с амплитудой f_{xy} этой реакции соотношением

$$S_{xy}(q) = [2ik\delta^{(2)}(q_T) + if_{xy}(q_T)] \exp(iq\mathbf{r}), \quad (3)$$

где \mathbf{q} — трехмерный вектор импульса, переданного нуклону в реакции (2), причем его продольная составляющая при малых углах рассеяния θ может считаться независимой от этого угла и определяется в основном разностью масс частиц x и y

$$q_L \approx (m_y^2 - m_x^2)/2k. \quad (4)$$

Фазовый множитель $\exp(iq\mathbf{r})$ в (3) есть результат действия оператора сдвига.

Переход от представления переданного импульса (\mathbf{q}) к представлению прицельного параметра (\mathbf{b}) осуществляется с помощью фурье-преобразования

$$S(\mathbf{b}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi k} \int S(q_T, \mathbf{r}) \exp(-iq_T \mathbf{b}) d^2 q_T. \quad (5)$$

Вводя профилирующий оператор обычным соотношением

$$\gamma(\mathbf{b}) = \frac{1}{2\pi ik} \int f(q_T) \exp(-iq_T \mathbf{b}) d^2 q_T, \quad (6)$$

получаем

$$S_{xy}(\mathbf{b}, \mathbf{r}) = \exp[i(q_L)_{xy} z] [\delta_{xy} - \gamma_{xy}(\mathbf{b} - \mathbf{s})], \quad (7)$$

где z и s — соответственно продольная (вдоль импульса k) и поперечная составляющие радиус-вектора \mathbf{r} .

Вместо индекса xy в (7) удобно использовать порядковый (в хронологической последовательности) номер n столкновения, в результате которого на одном из нуклонов ядра протекает реакция (2).

Учитывая упомянутую выше мультипликативность S -матричных элементов последовательных столкновений и принцип суперпозиции квантовой механики, нетрудно видеть, что в теории Глаубера результирующий S -матричный элемент реакции (1) дается выражением

$$S_{ab}^{if} = \frac{k}{2\pi} \int u_f^*(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) \sum_T \prod_{n=1}^A S_n(\mathbf{b}, \mathbf{r}_{k_n}) \times \left. \begin{array}{l} \\ \\ \times u_i(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) \exp(iq_T \mathbf{b}) d^2 b \prod_{k=1}^A d^3 r_k. \end{array} \right\} \quad (8)$$

Здесь $u_{i(f)}$ — волновые функции начального (конечного) состояния ядра; k_n — номер нуклона, испытавшего n -е соударение; A — атомный номер. Символ T означает хронологическое упорядочение величин S_n под знаком произведения, поскольку в общем

случае они не коммутируют между собой. Наконец, суммирование (8) осуществляется как по всем возможным комбинациям промежуточных возбуждений быстрых частиц, так и по всем перестановкам нуклонов на временной оси, совпадающей с осью z -направления движения быстрых частиц.

Хотя при столкновениях быстрых частиц с нуклонами ядра последние могут также возбуждаться (превращаться в нуклонные изобары), такие события здесь не будем рассматривать, поскольку это намного расширило бы класс обсуждаемых реакций. Будем исходить из того, что при достаточно хорошем энергетическом разрешении эксперимента реакции с возбуждением нуклонов ядра можно отделить от реакций без их возбуждения, и только их будем обсуждать далее.

Специфические для неупругих реакций ($x \neq y$) осциллирующие множители $\exp [i (q_L)_{xy} z_{k_n}]$ в (7) при конечных энергиях подавляют вклады промежуточных столкновений с большим изменением массы быстрой частицы, что позволяет учитывать лишь ограниченное число видов промежуточных реакций (2).

Обычно энергетическое разрешение экспериментальных установок в большинстве опытов по изучению процессов рождения частиц на ядерных мишенях не позволяет выделить реакции (1) с переходом ядра в определенное конечное состояние u_f . Измеряемые в эксперименте величины представляют сумму сечений многих возбуждений ядра

$$d\sigma/d\Omega = \sum_f |F_{ab}^{if}|^2; \quad iF_{ab}^{if} = S_{ab}^{if} - 2\pi k \delta_{ab} \delta^{if} \delta(q_T). \quad (9)$$

Число таких возбуждений зависит от энергетического разрешения аппаратуры, и если это разрешение не лучше $50 \div 100$ Мэв, то возбужденные состояния ядра с хорошей точностью насыщают условие полноты

$$\sum_f u_f u_f = I. \quad (10)$$

Это позволяет исключить волновые функции конечного состояния ядра из выражений для измеряемых сечений (9). В пренебрежении эффектами, связанными с тождественностью нуклонов, которые несколько подробнее будут обсуждаться ниже, для величин (9) получим следующее представление:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int u_i^* S(b, r_1 \dots r_A \dots) S^*(b', r_1 \dots r_A) u_i \times \\ \times \exp(iq_T(b - b')) db db' \prod_{i=1}^A dr_i. \end{aligned} \quad (11)$$

На первый взгляд недостаточно точное знание таких величин, как волновые функции u_i основного состояния ядра, делает результаты теоретических расчетов сечений (11) модельно зависимыми. На самом же деле оказывается, что только неопределенности в знании одночастичных плотностей распределения нуклонов в ядре

$$\rho(r) = A \int |u_i(r, r_2 \dots r_A)|^2 dr_2 \dots dr_A \quad (12)$$

могут заметно сказаться на результатах таких расчетов. Чувствительность сечений (11) к более сложным характеристикам структуры ядра, таким, как корреляционные функции разных рангов, настолько низка, что при практических расчетах в процессе обработки экспериментальных данных существование корреляций можно или вообще игнорировать, или в лучшем случае учитывать в какой-то достаточно простой модели [27].

Что же касается величин (12), то они достаточно хорошо изучены в экспериментах по упругому рассеянию электронов на ядрах. Пренебрежение корреляциями нуклонов в ядре обычно выражается в использовании соотношения факторизации:

$$|u_i(r_1 \dots r_A)|^2 = \prod_{i=1}^A \rho(r_i)/A. \quad (13)$$

При необходимости учета спиновой (по спину нуклона) структуры амплитуд реакций (2) и спиновой зависимости волновых функций, а также эффектов тождественности нуклонов ядра, соотношение (13) должно быть заменено более общим

$$u_i(r_1 \dots r_A, \sigma) u_i^\dagger(r'_1 \dots r'_A, \sigma) = \prod_{i=1}^A \hat{\rho}(r_i, r'_i, \sigma_i), \quad (14)$$

где $\hat{\rho}(r_i, r'_i, \sigma_i)$ — одночастичная матрица плотности нуклонов ядра, нормированная условием

$$\int \text{Sp } \rho(r, r, \sigma) dr/2 = A. \quad (15)$$

В выражение для сечения (11), не учитывающее эффектов тождественности, входят величины $\hat{\rho}(r, r, \sigma)$, диагональные по пространственным переменным. Из общих соображений очевидно, что структура их следующая:

$$\rho(r, r, \sigma) = [I\rho(r) + i\sigma \langle s \rangle / A] \mu(r)/2, \quad (16)$$

причем $\int \rho(r) dr = \int \mu(r) dr = A$. Здесь $\langle s \rangle$ среднее значение спина ядра в данном состоянии; A — его атомный номер.

Поскольку удельный спин нуклонов в ядре s/A ничтожно мал практически для всех ядерных мишеней, обычно используемых в экспериментах, второе слагаемое можно опустить.

Таким образом, основными структурными элементами в выражении для сечений (11) оказываются величины

$$-iV_{xy}(b) = \text{Sp} \int \gamma_{xy}(b-s, \sigma) \rho(s, z) d^2s/2 \quad (17)$$

и

$$U_{xy, uv}(b, b', z) = \text{Sp} \int \gamma_{xy}(b'-s, \sigma) \gamma_{uv}^+(b-s, \sigma) \rho(s, z) d^2s/2. \quad (18)$$

2. ОПТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Сначала рассмотрим более подробно структуру величин (17), называемых оптическими потенциалами процессов (2). Прежде всего видно, что они конструируются из амплитуд таких процессов, усредненных по спину нуклона, т. е. эффективно из амплитуд рождения или рассеяния частиц на бесспиновых нуклонах. Зависимостью этих амплитуд от спиновых характеристик быстрых частиц пренебрегать нельзя, поскольку спин большинства частиц (особенно резонансов) отличен от нуля. При учете этой зависимости удобно пользоваться представлением спиральности в лабораторной системе координат. Законом сохранения полного момента определяется поведение спиральных амплитуд процессов (2) под малыми углами, усредненных по спину нуклонов:

$$f_{\lambda_x \lambda_y}(q) = i^n c_{i_k \dots l} q_{i_1} q_{k_1} \dots q_{l_1} \varphi(q), \quad \varphi(0) = 1, \quad (19)$$

где $c_{i_k \dots l}$ — симметрический тензор ранга $n = |\lambda_x - \lambda_y|$, свертка которого по любой паре индексов равна нулю; λ_x, λ_y — спиральности частиц x и y .

Представим оптический потенциал (17) в следующем виде:

$$V_{xy}(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int f_{xy}(q) S(q_T, z) d^2q_T \exp(iq_T b), \quad (20)$$

где

$$S(q_T, z) = \int \rho(r) \exp(iq_T b) d^2b.$$

Форм-фактор $S(q_T, z)$ ограничивает существенную область интегрирования значениями $q_T \sim R^{-1}$, где R — радиус ядра. Учитывая, что скорость изменения скалярных функций $\varphi(q)$ определяется радиусом элементарного взаимодействия $r_h = \sqrt{B}$, много меньшим радиуса ядра, можно в первом приближении пренебречь q — зависимостью величин $\varphi(q)$. Это приближение эквивалентно использованию профилирующих операторов вида:

$$\gamma_{\lambda_x \lambda_y}(b-s) = c_{i_k \dots l} \nabla_i \nabla_k \dots \nabla_l \delta^{(2)}(b-s), \quad (21)$$

где $\nabla_i = (\partial/\partial^2 b)_i$. При этом оптический потенциал оказывается пропорционален производным от ядерной плотности

$$V_{xy}(\mathbf{r}) = c_{ih\dots l} (\partial/\partial b_i \dots \partial/\partial b_l) \rho(b, z). \quad (22)$$

Учет конечности радиуса элементарного взаимодействия приводит к некоторой эффективной перенормировке параметров, характеризующих распределение нуклонов в ядре. Из анализа экспериментальных данных по упругому рассеянию электронов на ядрах следует, что нуклоны в ядре распределены в основном равномерно внутри сферы радиуса R с некоторой размазкой вблизи границы этой сферы. Обычно это обстоятельство учитывается использованием феноменологической плотности следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \rho(r) &= \rho_0 \{1 + \exp[(r-R)/a]\}; \\ R &= r_0 A^{1/3}; r_0 = 1,06 \div 1,12 \text{ ферми}; a = 0,545 \text{ ферми}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Однако весьма близкие результаты получаются при использовании плотности вида

$$\left. \begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \int \rho_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \rho_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'; \\ \int \rho_1(r) dr &= A; \int \rho(r) dr = 1, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где $\rho_1(r) = \theta(R^2 - r^2) [3A/4\pi R^3]$; $\rho_2(r)$ — некоторая быстроубывающая гладкая функция, роль которой сводится к размазыванию однородного распределения вблизи границы ядра.

При обработке некоторых экспериментальных данных по eA -рассеянию $\rho_2(r)$ бралась в гауссовой форме

$$\rho_2(r) \sim \exp(-r^2/2g^2); g \approx 0,9 \div 1 \text{ ферми}. \quad (25)$$

При этом удавалось описать экспериментальные данные с такой же точностью, как и при использовании Ферми-распределения (23).

Ясно, что параметр g в (25) пропорционален толщине поверхностного слоя ядра $\tau = 4a \ln 3$. Если при малых q аппроксимировать $\varphi(q)$, как обычно, выражением вида

$$\varphi(q) \sim \exp(-Bq^2/2), B = 8 \div 10 \text{ Гэв}^{-2} = 0,32 \div 0,4 \text{ ферми}^2,$$

а $\rho(r)$ выбрать в виде (24), (25), то в соотношении (17), определяющем оптический потенциал, это эквивалентно использованию функций профиля нулевого радиуса (21) и эффективной функции размазки $\rho_2(r)$ с перенормированными значениями параметров:

$$\rho_2(r)_{\text{eff}} \sim \exp\{-b/[2(g^2 + B)] - z^2/2g^2\}. \quad (26)$$

Учитывая далее, что феноменологически плотности вида (24) содержат в себе эффекты электромагнитной структуры нуклона, аппроксимируя при малых q электрический форм-фактор протона гаус-

совой формой

$$G(q) = \exp(-\langle r_{e.m.}^2 \rangle q^2/6), \quad r_{e.m.}^2 \approx 0,64 \text{ ферми}^2$$

и вычитая эти эффекты из оптических потенциалов (17) адрон-ядерных взаимодействий, получаем, что параметры размазывания g в эффективных плотностях, описывающих адрон-ядерные и электрон-ядерные столкновения, связаны следующим соотношением:

$$g_h^2 = g_{e.m.}^2 + B - \langle r_{e.m.}^2 \rangle / 3, \quad (27)$$

где $g_{e.m.} = g$. Подставляя численные значения g , B , $r_{e.m.}$, получаем, что g_h всего на 7—10% больше $g_{e.m.} = g$.

Соответственно $\tau_h \approx \tau_{e.m.} [1 + (0,07 \pm 0,1)]$. Разумеется, строго говоря, эффект конечности радиуса элементарного взаимодействия r_h не сводится к такой простой перенормировке эффективных параметров ядерной плотности. Однако другие детали сглаживаются при вычислении сечений процессов, которые даются интегралами от выражений, содержащих оптические потенциалы (см. ниже).

Отметим, что с вычислительной точки зрения наиболее удобно использовать плотности вида (24) с функцией размазки

$$\rho_2(r) \sim 1/(r^2 + c^2)^n, \quad n \geq 3. \quad (28)$$

При этом интегралы вида $\int_{z_1}^{z_2} \rho(b, z') dz' \exp(iq_L z')$, являющиеся основным составным элементом в формуле для сечения (11), вычисляются в указанных моделях в явном виде, что сокращает кратность интегралов и упрощает численные расчеты при обработке экспериментальных данных или при проведении теоретических расчетов. Надлежащим выбором параметров c , R и показателя n плотности (24) с функцией размазки (28) можно сколь угодно точно приблизить к фермиевской (23) в области значений r , где обе плотности существенно отличны от нуля.

Возвращаясь к оптическим потенциалам, обсудим более подробно те из них, которые отвечают упругому рассеянию частиц, не сопровождающемуся изменением их спиральности. Легко видеть, что они даются выражением

$$V_{\lambda_x \lambda_x}(r) = i\sigma'_{xN}(\lambda_x) \rho(r)/2, \quad (29)$$

где $\sigma'_{xN}(\lambda_x) = \sigma_{xN}^{\text{tot}}(\lambda_x) (1 - i \operatorname{Re} f_{xN}(0) / \operatorname{Im} f_{xN}(0))$; $\sigma_{xN}^{\text{tot}}(\lambda_x)$ — полное сечение взаимодействия с неполяризованными нуклонами частиц (резонансов) x , находящихся в состоянии с проекцией спина λ_x на направление движения. В силу сохранения P -четности в сильных взаимодействиях $\sigma'(\lambda_x) = \sigma'(-\lambda_x)$ и число независимых спиральных составляющих полных сечений $x(N)$ взаимодействия (N — неполяризованный нуклон) оказывается равным $[s_x + 1]$, где s_x — спин частицы x . Таким образом, при $s_x \geq 1$ для харак-

теристики $x(N)$ -взаимодействия недостаточно введения одного параметра σ_{xN}^{tot} , как это часто полагается. Например, при обсуждении взаимодействия векторных (псевдовекторных) частиц с нуклонами следует различать полные сечения взаимодействия продольно-поляризованных ($\lambda = 0$) и поперечно-поляризованных ($\lambda = \pm 1$) частиц с неполяризованными нуклонами. Описание взаимодействия частиц спина 2 (например, $A_{2,3}$ -мезонов) с неполяризованными нуклонами требует введения трех «полных сечений», соответствующих состояниям с различным значением спиральности, и т. д.

Коротко обсудим структуру величин (18), билинейных по амплитуде. В дальнейшем в явном виде они будут встречаться лишь при обсуждении эффектов многократных некогерентных перерассеяний в процессах перезарядки $\pi(K)$ -мезонов на ядрах. Поэтому опустим здесь все усложнения, связанные со спиральной структурой амплитуд. Кроме того, рассмотрим случай, когда оба профилирующих оператора $\gamma(b-s, \sigma)$ и $\gamma^+(b-s, \sigma)$ в (18) относятся к одному и тому же процессу (2). Переписывая выражение (18) в виде

$$\text{Sp} \int \frac{d^2q d^2q'}{k^2 (2\pi)^2} f_{xy}(q - q'/2, \sigma) f_{xy}^+(q + q'/2, \sigma) S(q', z) \times \\ \times \exp[iq(b-b') + iq'((b+b')/2)]/2 \quad (30)$$

и с учетом разной скорости изменения амплитуд f_{xy} и форм-фактора $S(q, z)$, проведем приближенное интегрирование по d^2q' в (30), вынося амплитуды из-под знака интеграла в точке $q' = 0$. В результате получаем

$$\left. \begin{aligned} \text{Sp} \int \frac{d^2q d^2q'}{k^2 (2\pi)^2} f_{xy}(q - q'/2, \sigma) f_{xy}^+(q + q'/2, \sigma) S(q', z) \times \\ \times \exp[iq(b-b') + iq'((b+b')/2)]/2 \approx \\ \approx \omega_{xy}(b-b') \rho((b+b')/2); \\ \omega_{xy}(\beta) = \int \frac{d^2q}{k^2} \exp(iq\beta) \frac{d\sigma_{xy}(q)}{d\Omega} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Заметим, что в определение величины $\omega(\beta)$ входят также и составляющие амплитуд $f(q, \sigma)$, зависящие от спина нуклона.

3. АМПЛИТУДЫ ПРОЦЕССОВ КОГЕРЕНТНОГО РОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ В ОПТИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ

Если зарядовые характеристики (заряд, странность, барионный заряд) частиц a и b совпадают, то возможны процессы

$$a + A \rightarrow b + A \quad (32)$$

без возбуждения ядра-мишени, называемые когерентными.

При значениях переданного импульса q_T , близких к нулю, вклад когерентных процессов в измеряемое сечение (9) доминирует. Однако он довольно быстро убывает с ростом переданного импульса, так что при $q_T \gg R^{-1}$ основным является вклад от процессов с возбуждением и развалом ядра, называемых некогерентными.

Таким образом, измеряемое на опыте сечение рождения частиц в реакциях (1) с теми же зарядовыми характеристиками, что и у частиц пучка, состоит из двух компонент: быстроменяющейся (примерно как квадрат ядерного форм-фактора) — когерентной и медленноменяющейся (как сечение рождения частиц на свободных нуклонах) — некогерентной. На возможности разделения этих компонент и основан метод экспериментального изучения процессов когерентного рождения (32).

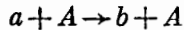
Сечения таких процессов даются квадратом модуля амплитуды (8), в которой следует положить $U_f = U_i$. В пренебрежении корреляциями нуклонов в ядре амплитуды и, следовательно, сечения этих процессов выражаются только через оптические потенциалы (17).

На первый взгляд выражения для амплитуд довольно сложны, поскольку включают эффекты возможных промежуточных возбуждений быстрых частиц, могущих связывать их начальные a и конечные b состояния.

Однако упоминавшееся выше подавление промежуточных возбуждений большой массы и малость парциальных сечений процессов рождения частиц конечной массы, по сравнению с сечениями упругого адрон-нуклонного рассеяния, позволяет рассматривать процессы неупругих взаимодействий частиц внутри ядра как возмущение и учитывать их в низших порядках. В большинстве случаев оказывается достаточным учесть только неупругое столкновение



приводящее сразу к превращению частицы a в частицу (резонанс) b и всевозможные упругие перерассеяния частиц a (b) до (после) процесса рождения. В этом случае говорят об одноступенчатом механизме реакции рождения. Если реакция



протекает по схеме



плюс всевозможные упругие перерассеяния частиц a , b , c на остальных нуклонах, то процесс называется двухступенчатым

и т. д. Необходимость в учете более сложных механизмов до сих пор не возникала.

Процессы упругого рассеяния с переворотом спина быстрой частицы (изменение спиральности) удобно трактовать также как неупругие, по причине их малой интенсивности (по крайней мере при малых переданных импульсах, характерных для когерентных процессов), и потому, что они переводят частицу в другое спиральное состояние, в котором упругое рассеяние (без переворота спина) ее нуклоном, в соответствии со сказанным выше, может быть иным.

Тогда, например, такой процесс, в котором переход $a \rightarrow b$ происходит по схеме (34), но затем частица b в результате спин-флипного перерассеяния меняет свое спиральное состояние, а следовательно, может изменить и характеристики своего взаимодействия с нуклонами, эффективно является двухступенчатым. В этом случае c и b в (34) — не разные частицы, а разные спиральные состояния одной и той же частицы.

Из общего представления (8) нетрудно получить выражение для амплитуд одно- и двухступенчатых когерентных переходов, поскольку задача сводится к использованию обычной комбинаторики:

$$F^I = F_{a \rightarrow b} = \frac{k}{2\pi} \int V_{ab}(\mathbf{b}, z) \exp[iq_T \mathbf{b} + i(q_L)_{ab} z] \times \\ \times \exp_{A,1} \left(i \int_{-\infty}^z V_{aa}(\mathbf{b}, z') dz' + i \int_z^{\infty} V_{bb}(\mathbf{b}, z') dz' \right) dz d^2 \mathbf{b}; \quad (35)$$

$$F^{II} = F_{a \rightarrow c \rightarrow b} = \frac{ik}{2\pi} \cdot \frac{A-1}{A} \int V_{ac}(\mathbf{b}, z_1) V_{cb}(\mathbf{b}, z_2) \times \\ \times \exp[iq_T \mathbf{b} + i(q_L)_{ac} z_1 + i(q_L)_{cb} z_2] \times \\ \times \exp_{A,2} \left(i \int_{-\infty}^{z_1} V_{aa}(\mathbf{b}, z') dz' + i \int_{z_1}^{z_2} V_{cc}(\mathbf{b}, z') dz' + \right. \\ \left. + i \int_{z_2}^{\infty} V_{bb}(\mathbf{b}, z') dz' \right) \theta(z_2 - z_1) dz_1 dz_2 d^2 \mathbf{b}, \quad (36)$$

где

$$\exp_{A,h} x = (1 + x/A)^{A-h} = \exp(x) + O(1/A).$$

С точностью до исчезающих в оптическом пределе ($A \rightarrow \infty$) величин выражение для амплитуды одноступенчатого перехода можно представить в виде:

$$F^I = F_{a \rightarrow b} = \frac{k}{2\pi} \int \psi_b^{+*}(\mathbf{r}) V_{ab}(\mathbf{r}) \psi_a^-(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (37)$$

где ψ_a^* (ψ_a) представляют сходящиеся (расходящиеся) искаженные волны частиц b (a), распространяющихся в среде, взаимодействии с которой описывается эффективными (оптическими) потенциалами V_{bb} и V_{aa} , а переходы $a \rightarrow b$ — потенциалом V_{ab} . Аналогичную, хотя несколько более сложную, интерпретацию допускает и выражение для амплитуд двухступенчатых процессов. Переход к оптическому пределу в (35), (36) можно осуществить уже начиная с $A \gtrsim 10$ с погрешностью порядка $2 \div 3\%$.

4. СТРУКТУРА СПИРАЛЬНЫХ АМПЛИТУД ПРОЦЕССОВ КОГЕРЕНТНОГО РОЖДЕНИЯ В ОДНОСТУПЕНЧАТОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим структуру спиральных амплитуд реакций когерентного рождения в одноступенчатом приближении. Учитывая связь оптических потенциалов с плотностью и выполняя интегрирование по углу φ между направлениями поперечного переданного импульса и прицельного параметра, получаем, пренебрегая q -зависимостью скалярных функций $f(q)$, следующие соотношения:

$$F_{\lambda_a \lambda_b} = f_{\lambda_a \lambda_b}(q) S^{(n)}(q_T, q_L, \sigma'_{aN}(\lambda_a), \sigma'_{bN}(\lambda_b)); \quad (38)$$

$$S^{(n)} = \int \frac{J_n(qb)}{q^n} b^{n+1} \left(-\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial b} \right)^n \rho(b, z) \exp \left[-\frac{\sigma'_1}{2} T_-(b, z) - \frac{\sigma'_2}{2} T_+(b, z) + iq_L z \right] db dz, \quad (39)$$

где

$$n = |\lambda_a - \lambda_b|; \quad T_-(b, z) = \int_{-\infty}^z \rho(b, z') dz'; \quad T_+(b, z) = \int_z^{\infty} \rho(b, z') dz'.$$

Величину $S^{(n)}$ будем называть обобщенным ядерным форм-фактором n -го порядка.

В борновском приближении ($\sigma_a = \sigma_b = 0$) все они равны между собой и совпадают с форм-фактором ядра $S(q)$, который определяется как Фурье-преобразование ядерной плотности

$$S(q) = \int \rho(r) \exp(iqr) dr.$$

Взаимодействие частиц a и b в начальном и конечном состояниях с ядерным веществом при высоких энергиях ($\text{Re } f(0)/\text{Im } f(0) \rightarrow 0$), сводящееся практически только к поглощению, приводит к различию форм-факторов $S^{(n)}$. Одной из причин этого различия является возможное неравенство сечений bN -взаимодействия в разных спиральных состояниях. Другая причина — различия в самой структуре величин $S^{(n)}$. Поскольку стабильные частицы a , пучками которых облучаются ядра, имеют спин или 0, или $1/2$,

то $\sigma_{aN}(\lambda_a) = \text{const}(\lambda_a)$ (с точностью до несущественных эффектов слабых взаимодействий, нарушающих сохранение P -четности) и в дальнейшем в целях упрощения формул индекс λ_a у величин σ_{aN} будет опускаться.

В идеале программа исследования реакций когерентного рождения должна состоять в измерении всех различных для данного процесса форм-факторов $S^{(n)}$ и в определении (в основном подгонкой A -зависимости величин $S^{(n)}$) всех спиральных компонент $\sigma_{bN}(\lambda_b)$ полных сечений bN -взаимодействия. Измерение же всех форм-факторов $S^{(n)}$ предполагает, наряду с измерением сечения процесса (32), проведение также поляризационных измерений, т. е. измерение элементов матрицы плотности частицы b , определяемых соотношением:

$$\rho^{\lambda_b \lambda_b'} = \sum_{\lambda_a} F_{\lambda_a \lambda_b} F_{\lambda_a \lambda_b'}^* / \sum_{\lambda_a \lambda_b} |F_{\lambda_a \lambda_b}|^2. \quad (40)$$

Последние же, как известно, определяются из анализа угловых распределений продуктов распада исследуемого резонанса.

Основная трудность на пути осуществления этой программы состоит в малости спин-флиповых амплитуд $F_{\lambda_a \lambda_b}(\lambda_a \neq \lambda_b)$ в области передач импульса, где сечение процессов когерентного рождения заметно отлично от нуля:

$$F_{\lambda_a \lambda_b} / F_{\lambda_a \lambda_a} \sim (q/m)^{|\lambda_a - \lambda_b|}, \quad m \approx 1 \text{ Гэв}, \quad q \sim 2R^{-1} \sim 0,1 \div 0,2 \text{ Гэв}. \quad (41)$$

Таким образом, лишь наблюдаемые величины, билинейные по амплитудам переходов без изменения спиральности ($\Delta\lambda = 0$) и линейные по этим величинам и амплитудам переходов с $\Delta\lambda = 1$, можно реально измерить с достаточно хорошей точностью. Другими словами, это означает, что можно надеяться на измерение только форм-факторов $S^{(0)}$ и $S^{(1)}$.

5. СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ЯДЕРНЫХ ФОРМ-ФАКТОРОВ

Для простоты рассмотрим $S^{(0)}$ и $S^{(1)}$ в высокоэнергетическом пределе $k \rightarrow \infty$, $q_L \rightarrow 0$. В этом случае интегрирование по dz в (39) для $S^{(0)}$ и $S^{(1)}$ можно выполнить явно. Используя затем соотношение

$$xJ_0(x) = \frac{d}{dx}(xJ_1(x)) \quad (42)$$

и интегрируя по db по частям, можно представить $S^{(0)}$ в виде линейной комбинации величин $S^{(1)}$:

$$S^{(0)}(q, 0, \sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_2 - \sigma_1)^{-1} [\sigma_2 S^{(1)}(q_T, 0, \sigma_1, \sigma_2) - \sigma_1 S^{(1)}(q_T, 0, \sigma_1, \sigma)]. \quad (43)$$

Рассмотрим q -зависимость величин

$$S^{(1)} = -2\pi \int \frac{J_1(qb)}{qb} b^2 \frac{dT(b)}{db} \exp\left(-\frac{\sigma}{2} T(b)\right) db, \quad (44)$$

где

$$T(b) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(b, z) dz.$$

На рис. 1 представлена величина $-b^2 \frac{dT}{db} \exp\left[-\frac{\sigma}{2} T(b)\right]$, вычисленная для ядер с $A = 64, 125, 216$ и $\sigma = 30$ мбарн с плотностью (23). Видно, что она заметно отлична от нуля лишь при значениях b , близких к R . Поэтому при $qR \sim 1$ величину $J_1(qb)/(qb)$ с достаточной степенью точности можно вынести из-под знака интеграла в точке $b = R$. В результате такого приближенного интегрирования получаем

$$S^{(1)}(q_T, 0, \sigma, \sigma) \approx 2J_1(q_T R) \times S^{(1)}(0, 0, \sigma, \sigma)/(q_T R). \quad (45)$$

Учитывая (43), имеем с той же точностью

$$S^{(0)}(q_T, 0, \sigma_1, \sigma_2) = 2J_1(q_T R) \times S^{(0)}(0, 0, \sigma_1, \sigma_2)/(q_T R). \quad (46)$$

Наконец, очевидно, что и

$$S^{(1)}(q_T, 0, \sigma_1, \sigma_2) \approx 2J_1(q_T R) \times S^{(1)}(0, 0, \sigma_1, \sigma_2)/(q_T R). \quad (47)$$

Таким образом, при не очень больших передачах q_T -зависимость ядерных форм-факторов $S^{(0)}$ и $S^{(1)}$ такая же, как у амплитуд рассеяния адронов на абсолютно черном ядре, что вполне естественно ввиду общей дифракционной природы всех процессов адрон-ядерного взаимодействия.

Учитывая, что основной вклад в сечение процессов когерентного рождения вносят переходы без изменения спиральности (в том случае, конечно, если они не запрещены правилами отбора

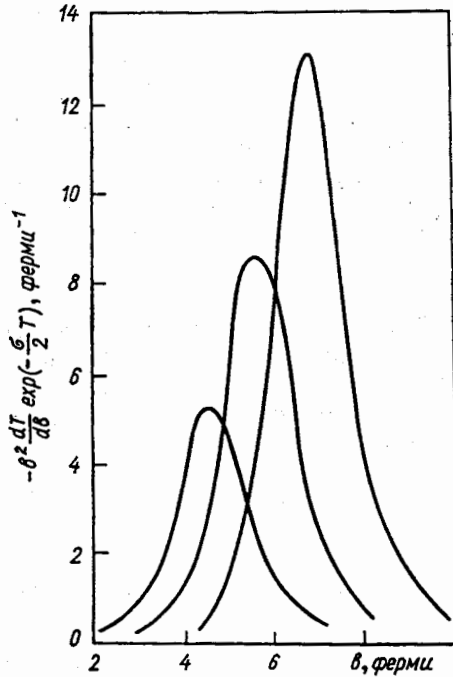


Рис. 1. Зависимость величин $-b^2 \frac{dT}{db} \exp\left[-\frac{\sigma}{2} T(b)\right]$ от прицельного параметра, рассчитанная с ядерной плотностью (23) для значений $\sigma = 30$ мбарн и $A = 64, 125, 216$

по спин-четности, см. ниже), и используя (46), можно оценить долю η событий когерентного рождения в интервале передач до первого дифракционного минимума $q_1 \approx x_1/R$, где x_1 — первый неисчезающий корень функции $J_1(x)$.

Для η легко получить

$$\eta = \int_0^{x_1 R^{-1}} \left| \frac{J_1(qR)}{qR} \right|^2 q dq / \int_0^\infty \left| \frac{J_1(qR)}{qR} \right|^2 q dq = 1 - J_0^2(x_1) = 0,85. \quad (48)$$

Видно, что в этом интервале передач импульса, где вклад процессов когерентного рождения еще доминирует над некогерентным «фоном», в самом деле сконцентрировано подавляющее большинство событий когерентного рождения. Среднее в этом интервале значение переданного импульса q , которому пропорциональны доступные измерению интерференционные характеристики $F_{\lambda_a \lambda_a}(q) \cdot F_{\lambda_a \lambda_a \pm 1}(q)$, примерно равно $2R^{-1}$.

Важной характеристикой обобщенных форм-факторов $S^{(n)}$ является их A -зависимость, которая согласно (45) — (47) определяется A -зависимостью их значений при $q = 0$. Как уже отмечалось, в борновском приближении ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$)

$$S^{(n)}(q=0) = A. \quad (49)$$

Поглощение частиц a и b ядерным веществом нарушает как сам линейный закон изменения форм-факторов с изменением атомного номера A (49), так и равенство их между собой. Это легко видеть на примере частного случая $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. В этом случае имеем:

$$\left. \begin{aligned} S^{(0)}(0, \sigma, \sigma) &= N_1(\sigma/2) = \int T(b) \exp[-\sigma/2T(b)] d^2b = \\ &= N(\sigma/2, \sigma/2); \\ S^{(1)}(0, \sigma, \sigma) &= N(0, \sigma/2) = 2 \int \{1 - \exp[-\sigma/2T(b)]\} d^2b/\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где

$$N(\sigma_1, \sigma_2) = \int d^2b \frac{\exp[-\sigma_1 T(b)] - \exp[-\sigma_2 T(b)]}{\sigma_2 - \sigma_1} \quad (51)$$

— так называемые эффективные числа нуклонов, определенные в работе [31].

На рис. 2 представлена A -зависимость величин $N(0, \sigma/2)$ и $N(\sigma/2, \sigma/2)$. Видно, что поглощением частиц в веществе интенсивность переходов без изменения спиральности ($\Delta\lambda = |\lambda_a - \lambda_b| = 0$) подавляется больше, чем интенсивность спин-флиповых переходов с $\Delta\lambda = 1$. Это связано с тем, что оптический потенциал, соответствующий спин-флиповым переходам, пропорционален производной от ядерной плотности $dp(r)/dr$, которая в случае почти

однородного распределения ядерного вещества заметно отлична от нуля лишь вблизи границы ядра $r = R$, где сама плотность уже мала и, следовательно, мало поглощение. Отсюда следует, что и чувствительность форм-факторов $S^{(1)}$ к величинам σ_{bN} ($\lambda_b = \lambda_a \pm 1$) должна быть ниже, чем чувствительность форм-факторов $S^{(0)}$ к величинам σ_{bN} ($\lambda_a = \lambda_b$).

Рассмотрим этот вопрос более подробно. В общем случае $\sigma_a \neq \sigma_b$: $S^{(0)}(0, \sigma_a, \sigma_b) = N(\sigma_a/2, \sigma_b/2)$; (52)

$$S^{(1)}(0, \sigma_a, \sigma_b) \approx [N(0, \sigma_a/2) + N(0, \sigma_b/2)]/2. \quad (53)$$

Соотношение (53) является точным в случае однородного распределения $\rho \sim \theta(R - r)$. В общем случае оно выполняется с точностью до величин порядка $(l_x^{-1} - l_b^{-1})^2 \tau^2$, где $l_x = (\rho_0 \sigma_x)^{-1}$ — длина свободного пробега частицы x в ядре; τ — толщина его поверхностного слоя.

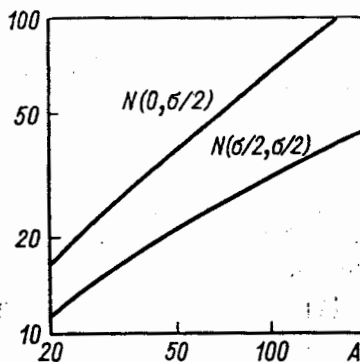


Рис. 2. Сравнительная A -зависимость значений форм-факторов $S^{(1)}$ ($a = 0$, $\sigma_a = \sigma_b = \sigma$) = $N(0, \sigma/2)$ и $S^{(0)}$ ($q = 0$, $\sigma_a = \sigma_b = \sigma$) = $N(\sigma/2, \sigma/2)$ для $\sigma = 25$ мбарн

6. РЕАЛЬНО ИЗМЕРИМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРОЦЕССОВ КОГЕРЕНТНОГО РОЖДЕНИЯ И ИХ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ К ИНТЕНСИВНОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ РОЖДАЕМЫХ ЧАСТИЦ

Используем (52) и (53) для оценки чувствительности измеряемых в эксперименте величин

$$d\sigma/d\Omega = |f_{ab}^{\Delta\lambda=0}|^2 |S^{(0)}(q, \sigma_a, \sigma_b(\lambda_a))|^2 + 0(q^2/m^2); \quad (54)$$

$$\rho^{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{f_{ab}^{\Delta\lambda=1}}{f_{ab}^{\Delta\lambda=0}} \frac{S^{(1)}(q, \sigma_a, \sigma_b(\lambda_a \pm 1))}{S^{(0)}(q, \sigma_a, \sigma_b(\lambda_a))} + 0\left(\frac{q^3}{m^3}\right) \quad (55)$$

к значениям подлежащих определению спиральных компонент полных сечений bN -взаимодействия.

Поскольку величины f_{ab} в соотношениях (54) и (55) являются не зависящими от спина нуклона частями амплитуд процесса $aN \rightarrow bN$, их нельзя найти из анализа экспериментальных данных о реакциях на водородной (дейтериевой) мишени без сложных поляризационных измерений, и, таким образом, они будут дополнительными параметрами, подлежащими определению. Для исключения их при анализе данных о когерентном рождении частиц на ядрах с целью получения сечений σ_{bN} приходится брать отношения величин (54) и (55) для разных мишеней. Таким образом,

величины σ_{bN} ($\lambda_a = \lambda_b$) определяются из анализа A -зависимости отношений

$$\eta_1 = \left| \frac{S^{(0)}(q, \sigma_a, \sigma_b, A)}{S^{(0)}(q, \sigma_a, \sigma_b, A_1)} \right|^2, \quad (56)$$

а величины σ_{bN} ($\lambda_b = \lambda_a \pm 1$) — из анализа A -зависимости отношений

$$\eta_2 = \frac{S^{(1)}(q, \sigma_a, \sigma_b, A)}{S^{(1)}(q, \sigma_a, \sigma_b, A_1)}, \quad (57)$$

где A_1 — атомный номер одного из ядер (обычно самого легкого), используемых в эксперименте в качестве мишени. Для демонстрации чувствительности величин $\eta_{1,2}$ к значениям сечений σ_{bN} на рис. 3 и 4 представлена A -зависимость отношений

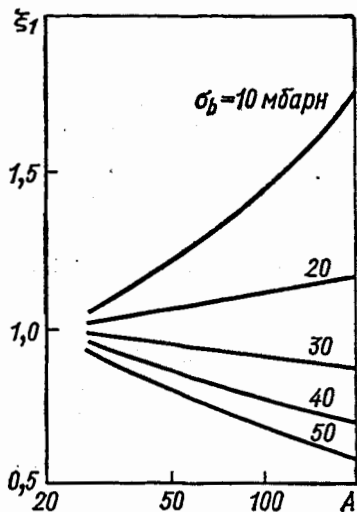


Рис. 3. Зависимость $\xi_1(\sigma_a, \sigma_b, A_1, A)$ от атомного номера A для $\sigma_a = 25$ мбарн, $A_1 = 20$ различных значений σ_b

$$\xi_1 = \frac{\eta_1(\sigma_a, \sigma_b)}{\eta_1(\sigma_a, \sigma_b = \sigma_a)}; \quad \xi_2 = \frac{\eta_2(\sigma_a, \sigma_b)}{\eta_2(\sigma_a, \sigma_b = \sigma_a)}$$

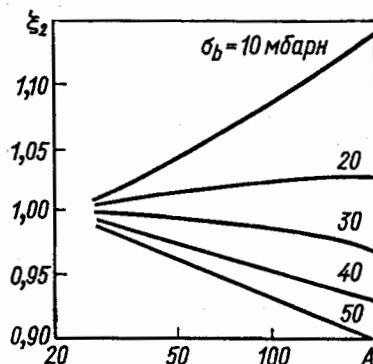


Рис. 4. Зависимость $\xi_2(\sigma_a, \sigma_b, A_1, A)$ от атомного номера A для $\sigma_a = 25$ мбарн, $A_1 = 20$ различных σ_b

для $\sigma_a = 25$ мбарн, $A_1 = 20$ и различных значений σ_b . Видно, что величина ξ_1 довольно заметно меняет свою A -зависимость при изменении параметра σ_b , чего нельзя сказать о величине ξ_2 . Изменение параметра σ_b более, чем в два раза, приводит в лучшем случае к 10%-му изменению величины ξ_2 . Такая низкая чувствительность поляризационных характеристик к значению величин σ_{bN} , усугубляемая обсуждавшейся выше малостью недиагональных элементов матрицы плотности $\rho^{\lambda_b \lambda_b}$, делает практически невозможным определение величин σ_{bN} ($\Delta\lambda = 1$) из анализа поляризационных характеристик процессов когерентного рождения.

Реально же из анализа данных о когерентном рождении частиц в реакциях (32) можно определить лишь величину $\sigma_{bN} (\Delta\lambda = 0)$, при условии, конечно, что переходы с $\Delta\lambda = 0$ разрешены правилами отбора по спину-четности. На самом деле существует целый класс реакций (32), в которых такие переходы запрещены. Это относится к реакциям рождения мезонными и фотонными пучками частиц, для которых не выполняется соотношение $P_b = P_a (-1)^{|s_b - s_a|}$. Например, процессы $\gamma A \rightarrow \pi^0 (\eta^0) A$, $\pi^\pm (K^\pm) A \rightarrow \rho^\pm (K^{*\pm}) A$, $\pi^- A \rightarrow A_2 A$ и т. д. идут исключительно за счет спин-флипового взаимодействия. Сечения этих процессов, которые называют недифракционными в отличие от обычных (дифракционных), пропорциональны квадрату модуля фактора $S^{(1)}$ и соответственно чувствительность их к полным сечениям bN -взаимодействия вдвое выше, чем у поляризационных характеристик дифракционных процессов, но значительно ниже чувствительности сечений дифракционных процессов. Поэтому для определения, например, полных сечений взаимодействия поперечно-поляризованных K^* (ρ)-мезонов с нуклонами из анализа A -зависимости сечений реакций когерентного рождения $\pi (K) A \rightarrow \rho (K^*) A$ с той же точностью, с какой определены сечения взаимодействия продольно-поляризованных A_1 -мезонов из анализа данных о сечении процесса дифракционной диссоциации $\pi A \rightarrow A_1 A$ потребуется набор гораздо большей статистики.

7. РОЛЬ ДВУХСТУПЕНЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

До сих пор обсуждался вклад лишь одноступенчатого механизма в амплитуду реакции (32). В некоторых случаях вклад двухступенчатого механизма в амплитуду рассматриваемого процесса может оказаться сравнимым со вкладом одноступенчатого. Обсудим два наиболее интересных примера подобного рода процессов.

Во-первых, это процессы фоторождения мезонов M на ядрах при высоких энергиях $\gamma A \rightarrow MA$. В этом случае наряду с механизмом прямого фоторождения $\gamma N \rightarrow MN$ важен учет также вклада двухступенчатого механизма $\gamma N_1 \rightarrow V^0 N_1$, $V^0 N_2 \rightarrow MN_2$ (N_1, N_2 — нуклоны ядра), где V^0 (ρ^0, ω, ϕ) — нейтральные векторные мезоны. Доминируют при этом обычно переходы $\gamma \rightarrow \rho^0 \rightarrow M$, а вклады с промежуточными ω и ϕ малы.

Во-вторых, это обсуждавшиеся выше в одноступенчатом приближении спин-флиповые переходы в дифракционных процессах $aA \rightarrow bA$. Наряду с прямым спин-флиповым переходом $aN \rightarrow bN$ при этом может оказаться важным вклад следующего механизма изменения спиральности: в самом акте рождения спиральность быстрой частицы не меняется, а ее изменение происходит в процессе упругого спин-флипового bN -перерассеяния. Этот механизм

является эффективно двухступенчатым, поскольку никакие другие частицы помимо a и b не появляются в промежуточных состояниях.

В обоих упомянутых случаях первый переход $aN \rightarrow cN$ является переходом без изменения спиральности (в случае реакции $\gamma N \rightarrow \rho^0 N$ это обеспечивается специфическим правилом отбора — сохранением s -канальной спиральности, практически совпадающей при высоких энергиях со спиральностью в лабораторной системе). Поэтому соответствующий оптический потенциал пропорционален просто ядерной плотности

$$V_{ac}(r) = 2\pi f_{ac}(0) \rho(r)/k. \quad (58)$$

Если ограничиться рассмотрением реакции когерентного фоторождения только нейтральных псевдоскалярных мезонов (π^0, η, χ^0) на ядрах в первом случае и спин-флиповых переходов с $\Delta\lambda = 1$ во втором, то в обоих случаях оптический потенциал второй ступени пропорционален градиенту от ядерной плотности

$$V_{cb}(r) = \bar{c} \bar{\nabla}_b \rho(b, z), \quad \bar{c} = \text{const}. \quad (59)$$

Тогда с учетом (36) для вклада двухступенчатого механизма в амплитуду рассматриваемых процессов легко получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} F^{\text{II}}(q) &= f_{cb}(q) \frac{2\pi}{k} f_{ac}(0) \int \theta(z_2 - z_1) \times \\ &\times \frac{\partial \rho(b, z_2)}{\partial b} \rho(b, z_1) \exp \left[-\frac{\sigma'_a}{2} T_-(b, z_1) - \right. \\ &- \left. \frac{\sigma'_c}{2} (T_-(b, z_1) - T_-(b, z_2)) - \frac{\sigma'_b}{2} T_+(b, z_2) \right] \times \\ &\times \frac{J_1(qb)}{q} \exp(iq_L^{ac} z_1 + iq_L^{cb} z_2) b db dz_1 dz_2. \end{aligned} \quad (60)$$

В пределе высоких энергий $k \rightarrow \infty$, $q_L^{ac}, q_L^{cb} \rightarrow 0$ формула (60) упрощается

$$F^{\text{II}}(q) = f_{cb}(q) \frac{f_{ac}(0)}{f_{cc}(0) - f_{aa}(0)} \{S^{(1)}(q, 0, \sigma_a, \sigma_b) - S^{(1)}(q, 0, \sigma_c, \sigma_b)\}, \quad (61)$$

а сумма вкладов одноступенчатого и двухступенчатого механизмов дается выражением

$$\begin{aligned} F &= F^{\text{I}} + F^{\text{II}} = f_{ab}(q) [(1 - W) S^{(1)}(q, 0, \sigma_a, \sigma_b) + \\ &+ W S^{(1)}(q, 0, \sigma_c, \sigma_b)], \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$W = f_{cb}(q) f_{ac}(0) / \{f_{ab}(q) [f_{cc}(0) - f_{aa}(0)]\}. \quad (63)$$

В модели векторной доминантности $W = 1$ для процессов фоторождения. В этом случае картина взаимодействия при высоких

энергиях такого, как если бы процесс фоторождения был одноступенчатым, но фотон поглощался бы ядерным веществом, как ρ -мезон. При не очень высоких энергиях ($qE^{\nu\rho}l_0 \gg 1$, $l = (\rho_0\sigma_{\rho N})^{-1}$) вклад двухступенчатого механизма в реакции фоторождения подавлен и доминируют одноступенчатые переходы, в которых фотоны не поглощаются ядерным веществом.

В случае спин-флиповых переходов в дифракционных процессах величина W является характеристикой интенсивности упругого bN -перерассеяния с изменением спина. Ввиду отмеченной выше низкой чувствительности форм-факторов $S^{(1)}$ к значениям полного сечения bN -взаимодействия можно зафиксировать величину $\sigma_{bN} \cdot (\lambda_b = \lambda_a \pm 1)$ каким-либо разумным значением и определить из анализа поляризационных явлений в реакциях когерентного дифракционного рождения частиц величину W . Далее амплитуда упругого bN -рассеяния с переворотом спина $f_{bN \rightarrow bN}^{\Delta\lambda=1}$ связывается с другими амплитудами следующим соотношением

$$f_{bN \rightarrow bN}^{\Delta\lambda=1}(q) = \frac{ik}{4\pi} \frac{f_{aN \rightarrow bN}^{\Delta\lambda=1}(q) [\sigma_{aN} - \sigma_{bN}(\lambda = \lambda_a)]}{f_{aN \rightarrow bN}^{\Delta\lambda=0}(0)}. \quad (64)$$

Определение (64) также, как и полных сечений bN -взаимодействия представляет интерес с точки зрения изучения динамики взаимодействия нестабильных частиц с нуклонами.

В литературе рассматривались и другие примеры двухступенчатых процессов, таких, как $\pi N_1 \rightarrow A_1 N_1$, $A_1 N_2 \rightarrow A_3 N_2$ в реакциях когерентной диссоциации $\pi A \rightarrow A_3 A$ [31], из анализа которых, в принципе, можно извлекать информацию об интенсивности $A_1 \rightarrow A_3$ -переходов. В этом случае в обеих ступенях доминируют переходы с $\Delta\lambda = 0$ и результирующая амплитуда (в пределе высоких энергий $k \rightarrow \infty$) является линейной суперпозицией величин, пропорциональных форм-факторам $S^{(0)}$.

8. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СЕЧЕНИЙ КОГЕРЕНТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Коротко обсудим энергетическую зависимость амплитуд когерентного рождения. Она определяется следующими факторами: энергетической зависимостью амплитуд реакций $aN \rightarrow bN$ и энергетической зависимостью форм-факторов $S^{(m)}(q_T, q_L, \sigma_a, \sigma_b)$. Последняя в свою очередь определяется зависимостью от энергии сечений aN - и bN -взаимодействия и зависимостью форм-фактора от минимального переданного импульса $q_L = (m_b^2 - m_a^2)/2k$. В области энергий в несколько гигаэлектронвольт и выше, где обычно изучаются реакции рождения частиц на ядрах, энергетической зависимостью полных сечений σ_{aN} и σ_{bN} практически можно пре-

небрежь, и форм-факторы оказываются зависящими от энергии лишь через q_L -зависимость. Для качественного выяснения этой зависимости можно использовать модель однородного распределения ядерного вещества. Ограничимся для простоты анализом q_L -зависимости форм-факторов $S^{(0)}(0, q_L, \sigma, \sigma)$ и $S^{(1)}(0, q_L, \sigma, \sigma)$. С точностью до величин порядка $\exp(-R/l)$, где R — радиус ядра, $l = (\rho_0 \sigma)^{-1}$ — длина свободного пробега частицы в ядре, имеем:

$$\left. \begin{aligned} S^0(q_T, q_L, \sigma, \sigma) &= S^0(q_T, 0, \sigma, \sigma) (1 + q_L^2 l^2)^{-2}; \\ S^{(1)}(q_T, q_L, \sigma, \sigma) &= S^{(1)}(q_T, 0, \sigma, \sigma) [(1 + q_L^2 l^2)^{-1} + 0(l^2/R^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Таким образом, энергетическая зависимость форм-факторов $S^{(0)}$ и $S^{(1)}$ оказывается различной (более слабой у $S^{(1)}$), а характерным энергетическим параметром, определяющим эту зависимость, оказывается величина $k_0 = (m_b^2 - m_a^2) l/2$. При $k \gg k_0$ форм-факторы достигают своих асимптотических значений, более подробно рассмотренных выше.

Сильная энергетическая зависимость форм-факторов $S^{(0)}$ является главным фактором, определяющим зависимость от энергии сечений реакций когерентного рождения частиц на ядрах в дифракционных процессах, поскольку k -зависимость амплитуд $f_{aN \rightarrow bN}$ в этом случае гораздо слабее, ввиду доминирования в таких реакциях вклада, соответствующего обмену помероном.

В недифракционных процессах типа $\pi A \rightarrow \rho A$ одинаково существенны как энергетическая зависимость амплитуд реакции на нуклоне $\pi N \rightarrow \rho N$, в которой доминирует вклад, соответствующий обмену ω -мезоном, так и q_L -зависимость форм-фактора $S^{(1)}$.

9. О НЕОБХОДИМОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОГЕРЕНТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Как следует из проведенного выше обсуждения, исследование процессов когерентного рождения частиц на ядрах позволяет определить из нескольких (в общем случае) компонент $\sigma_{bN}(\lambda_b)$ полных сечений bN -взаимодействия практически только одну.

Так, в классических экспериментах по исследованию когерентного фоторождения нейтральных векторных мезонов на ядрах [1—3] определялись полные сечения взаимодействия поперечно-поляризованных V_0 -мезонов с неполяризованными нуклонами $\sigma_{VN}^T = \sigma_{V_0N}(\lambda = 1)$. Из анализа же данных о когерентной дифракционной диссоциации [4, 5] π -мезонов $\pi A \rightarrow A_1 A$ извлекались данные о взаимодействии продольно-поляризованных A_1 -мезонов с нуклонами $\sigma_{A_1N}^L = \sigma_{A_1N}(\lambda = 0)$. Несомненный интерес представляет определение других компонент полных сечений V^0N - и A_1N -взаимодействия, а именно $\sigma_{V_0N}^L = \sigma_{V_0N}(\lambda = 0)$ и $\sigma_{A_1N}^T =$

$= \sigma_{A_1 N}(\lambda = 1)$. Это важно для дискриминации предсказаний различных динамических моделей, используемых для описания сильных взаимодействий. Так, в модели алгебры токов с s -числовыми швингеровскими членами сечение взаимодействия продольно-поляризованных V^0 -мезонов с нуклонами равно тождественно нулю [32], в то время как в кварковых моделях в импульсном приближении величины $\sigma_{V^0 N}^L$ и $\sigma_{V^0 N}^T$ совпадают. Это отнюдь не означает, что кварковая модель неверна. Скорее всего не оправдано применение импульсного приближения к рассмотрению таких сильно-связанных систем, как элементарные частицы. То, что поправки к импульсному приближению (например, эффекты двукратного перерасеяния) могут привести к различию величин σ^T и σ^L , видно на примере мезон-дейтонного Md -взаимодействия. Глауберовская поправка к полным сечениям Md -взаимодействия зависит от выстроенности дейтона, если мезон-нуклонное взаимодействие зависит от спина нуклона [61]. В этой аналогии Md - и $V^0 N$ -взаимодействий роль дейтона, состоящего из нуклонов, играет $V(A_1)$ -мезон, состоящий из кварков, а роль мезона — «бесспиновый» нуклон ядра $\langle N \rangle$. Таким образом, различие величин $\sigma_{V(A_1)N}^L$ и $\sigma_{V(A_1)N}^T$ может характеризовать как роль более сложных перерасеяний на кварковых системах (если верить в модель кварков), так и интенсивность взаимодействия, зависящего от спина кварков.

Измерение величин $\sigma_{\rho N}^L$ и $\sigma_{A_1 N}^T$ представляет интерес и с другой точки зрения. Известный пик в распределении по массам 3π -системы (при $m_{3\pi} = 1,1 \text{ Гэв}$), образующейся в реакциях дифракционной диссоциации $\pi N \rightarrow 3\pi N$ может иметь не только резонансное происхождение $\pi N \rightarrow A_1(1,1 \text{ Гэв}) N$, но может также быть обусловлен кинематическим эффектом (Deck-effect) в реакциях образования $\rho\pi$ -системы вблизи порога $\pi N \rightarrow (\rho\pi) N$. В пользу нерезонансной природы этого пика вроде бы свидетельствуют результаты парциально-волнового анализа реакций $\pi N \rightarrow 3\pi N$, проведенного Асколи и др. [63, 64]: Для различения этих двух возможностей в свое время было предложено изучить поглощение образующейся 3π -системы ядерной материей, исследуя реакцию когерентной дифракционной ассоциации на ядрах $\pi A \rightarrow 3\pi A$ [4]. Основная идея заключалась в том, что сечение взаимодействия с нуклонами A_1 -мезона — резонанса из общих соображений должно быть близко к пион-нуклонному полному сечению. Если же A_1 -мезон — некогерентная $\rho\pi$ -система, то соответственно приближенно должно выполняться условие аддитивности сечений

$$\sigma_{(\rho\pi)N} = \sigma_{\rho N} + \sigma_{\pi N} - \Delta\sigma. \quad (66)$$

Поправка $\Delta\sigma$ на взаимное экранирование в том случае, когда среднее расстояние между ρ и π намного меньше размеров ядра

дается следующим выражением

$$\Delta\sigma = \sigma_{\rho N} \sigma_{\pi N} / (8\pi B), \quad (67)$$

где B — параметр наклона дифференциального сечения ρN (πN)-рассеяния. В соотношении (66) следует еще расставить спиральные индексы (учесть спин ρ -системы и ρ -мезона). Поскольку ρ -система рассматривается в S -состоянии вблизи порога, то величина и направление спина ρ -системы совпадают с величиной и направлением спина ρ -мезона. Используя экспериментальное значение $\sigma_{\rho N}^T \approx \approx \sigma_{\pi N} = 27$ мбарн [1–3] и соотношение (66), полагая при этом $B = 10$ ($\text{Гэв}/c$)⁻², можно получить оценку:

$$\sigma_{A_1 N}^T \approx 1,70 \sigma_{\pi N}. \quad (68)$$

К сожалению, эту величину пока не с чем сравнивать. Оценить же значение $\sigma_{A_1 N}^L = \sigma_{(\rho, \pi)N}$ невозможно, поскольку нет прямой экспериментальной информации о $\sigma_{\rho N}^L$ -полном сечении взаимодействия с нуклонами продольно поляризованных ρ -мезонов.

Можно идти обратным путем: отождествляя $\sigma_{A_1 N}^L$ с $\sigma_{(\rho, \pi)N}$, получить, что $\sigma_{\rho N}^L$ близко к нулю или, по крайней мере, намного меньше $\sigma_{\rho N}^T$, что находится в согласии с косвенными заключениями о $\sigma_{\rho N}^L$, полученными на основании модельного (в рамках VDM -модели) анализа данных о глубоконеупругом ep -рассеянии [37]. Таким образом, до тех пор, пока не получена непосредственная информация о $\sigma_{\rho N}^L$, можно считать, что данные о поглощении A_1 -системы с массой $m_{3\pi} \approx 1,1$ Гэв в состоянии $J^P = 1^-$ ядерным веществом не противоречат ни одной из обсуждавшихся точек зрения: A_1 -мезон — резонанс или A_1 -мезон — Deck-effect. Часто $\sigma_{A_1 N}^L$ и $\sigma_{A_1 N}^T$ из-за неучета спиновой структуры полных сечений $A_1 N$ - и ρN -взаимодействия ошибочно отождествляются. Далее на основании заключения авторов работ [63, 64] о том, что A_1 -мезон не является резонансом, а также несовпадения рассчитанного в рамках глауберовской теории величины $\sigma_{A_1 N}^T$ с измеренным экспериментально значением $\sigma_{A_1 N}^L$ делается вывод, что глауберовская схема описания процессов рождения нестабильных частиц или систем, игнорирующая немассовые эффекты, неверна. Такая точка зрения априори не лишена смысла и даже представляется очень естественной, если учесть соотношение между характерным внутриядерным расстоянием между нуклонами и так называемой «длиной регенерации», на которой виртуальная система превращается в реальную, или, иначе, радиусом элементарного взаимодействия. Однако, она не объясняет ряд фактов.

Во-первых, глауберовская теория рассеяния прекрасно описывает данные о полных сечениях адрон-ядерных столкновений

и 'упругом адрон-ядерном рассеянии вплоть до энергии налетающих адронов 70 Гэв . Если бы виртуальные адроны, каковыми они являются внутри ядра, взаимодействовали иначе, чем реальные, такого совпадения теории с экспериментом не было бы. Далее, фоторождение заряженных пионов на ядерных мишенях при $E_\gamma = 2; 3; 8; 16 \text{ Гэв}$ [9, 10] также хорошо описывается теорией многократного рассеяния без внесения в нее поправок на немассовые эффекты. Наконец, результаты парциально-волнового анализа данных о реакции $\pi A \rightarrow 3\pi A$ [8] приводят к значению для сечения взаимодействия 3π -системы в состоянии $J^P = 0^-$ с нуклонами, равному примерно 50 мбарн , которое близко к значению

$$\sigma_{(3\pi)N} \approx 3\sigma_{\pi N} - 3\sigma_{\pi N}\sigma_{\pi N}/(8\pi B) \approx 2\sigma_{\pi N}. \quad (69)$$

Трудно придумать логическое объяснение тому, что в одних случаях немассовые эффекты сказываются так сильно, в то время как в других они совершенно не проявляются. Возможное объяснение, как следует из сказанного выше, может заключаться в малости величины $\sigma_{\rho N}^L$ при сохранении глауберовской схемы. Таким образом, определение $\sigma_{\rho N}^L$ и $\sigma_{A_1 N}^T$ важно для изучения деталей динамики сильных взаимодействий и для проверки самосогласованности глауберовской теории адрон-ядерных столкновений.

Очевидно, что для достаточно точного определения упомянутых величин желательно изучать такие процессы рождения ρ - и A_1 -мезонов на ядерных нуклонах, в которых продольно-поляризованные ρ -мезоны и поперечно-поляризованные A_1 -мезоны рождаются достаточно интенсивно. Что касается A_1 -мезонов, то почти сохранение t -канальной спиральности в реакциях дифракционной диссоциации $\pi N \rightarrow A_1 N$ обеспечивает значительную долю образования (порядка $30 \div 40\%$) поперечно-поляризованных в лабораторной системе координат A_1 -мезонов при значениях переданного импульса $0,1 \div 0,3 (\text{Гэв}/c)^2$, т. е. в существенно некогерентной для ядерных реакций области. Это легко видеть из того факта, что координатные оси лабораторной системы спиральности (L -система), в которой ось квантования z в системе покоя родившейся частицы ориентирована против направления импульса отдачи нуклона мишени в этой системе, развернуты на угол $\theta = \text{arctg}(q/m)$ ($m = (m_b^2 - m_a^2)/2m_b$) вокруг нормали к плоскости рождения по отношению к координатным осям системы t -канальной спиральности, так называемая «система Готтфрида — Джексона», и при высоких энергиях ($k \rightarrow \infty$) практически совпадает (с точностью до поворота на угол $\theta \sim q/\sqrt{S}$) с осями координат системы s -канальной спиральности. Необходимость работать в L -системе, а не иной, например, t -канальной или s -канальной, обусловлена тем обстоятельством, что только в этом представлении амплитуда bN -рассеяния

на нулевой угол диагональна по спиральным индексам

$$f^{\lambda_b \lambda'_b}(0) = ik \delta_{\lambda_b \lambda'_b} \sigma_{bN}^{\text{tot}}(\lambda_b) (1 - i\alpha(\lambda_b)/4\pi) \quad (70)$$

и соответственно только состояния частицы, отвечающие определенному значению L -спиральности, имеют определенную интенсивность поглощения ядерным веществом.

Продольно-поляризованные ρ -мезоны с большой интенсивностью рождаются в реакциях

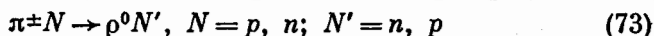


под малыми углами, где доминирует механизм одноопионного обмена. Однако в амплитуде когерентного процесса



вклады одноопионных амплитуд реакций (71) на разных нуклонах ядра сокращаются и в реакции (72) рождаются только поперечно-поляризованные ρ -мезоны (см. выше).

Таким образом, в пион-ядерных столкновениях рождение продольно-поляризованных ρ -мезонов возможно только в некогерентных реакциях. При этом с экспериментальной точки зрения более удобным является исследование процессов с перезарядкой



на ядерных нуклонах.

Среди процессов рождения ρ -мезонов в электромагнитных взаимодействиях только в реакции



может образоваться значительная доля ρ_L -мезонов, ввиду сохранения s -канальной спиральности в процессах реального и виртуального фоторождения. Однако экспериментально исследование процессов электророждения ρ -мезонов на ядрах сопряжено со значительно большими трудностями, чем исследование реакций (73).

Из всего сказанного следует, что, по крайней мере, с точки зрения интенсивности образования поперечно-поляризованных A_1 -мезонов и продольно-поляризованных ρ -мезонов некогерентные процессы предпочтительнее, чем когерентные.

Другим важным аспектом определения $\sigma_{\rho N}^L$ и $\sigma_{A_1 N}^T$ является чувствительность сечений (или других измеряемых величин) к интенсивности поглощения рождающихся частиц. Снова в отличие от когерентных реакций, в которых спин-флиповые переходы даже в борновском приближении происходят на поверхности ядра в силу специфической структуры соответствующих оптических потенциалов (см. выше) и структуры самого ядра (почти однородное распределение вещества в ядре), в связи с чем поглощение частиц в веществе не так сказывается на интенсивности спин-

флипových переходов, в некогерентных реакциях процессы с изменением спиральности и процессы без изменения спиральности идут равномерно по всему объему ядра и при равной интенсивности поглощения частиц в разных спиновых состояниях ослабляются также примерно одинаково. В этом заключается одно из преимуществ исследования процессов некогерентного рождения частиц с целью изучения взаимодействия их с нуклонами перед исследованием процессов когерентного рождения.

Следует также отметить, что многие известные резонансы (например, Δ -изобары) не могут рождаться в когерентных реакциях пучками стабильных частиц.

10. СТРУКТУРА СЕЧЕНИЙ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ С ПЕРЕЗАРЯДКОЙ

Выражение для некогерентной части сечения реакции

$$a + A \rightarrow b + A'$$

получается вычитанием из (11) вклада, соответствующего сечению когерентного процесса $a + A \rightarrow b + A$, если последний не запрещен законами сохранения заряда, странности и т. д. Для реакций с перезарядкой быстрых частиц ($z_a \neq z_b$) когерентная составляющая в выражении (11) отсутствует, а некогерентная часть имеет сравнительно простую структуру ввиду того, что слагаемые в амплитуде (8), соответствующие рождению частиц на разных нуклонах не интерферируют между собой, если пренебречь эффектами тождественности нуклонов ядра. Учет последних приводит к поправкам к сечениям (и другим измеряемым величинам) некогерентных процессов, существенным при относительно малых значениях переданных импульсов $q \sim k_F$, где k_F — фермиевский импульс нуклонов ядра. Обсуждение этих поправок будет дано несколько ниже. Пока же при выяснении основных деталей структуры сечений процессов рождения частиц с перезарядкой на ядрах нуклоны ядра будем считать нетождественными. Кроме того, чтобы избежать излишних усложнений временно частицы a и b будем считать бесспиновыми. Тогда точное выражение для сечений обсуждаемых реакций на протонах (нейтронах) ядра имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \frac{1}{4\pi} \frac{Z}{A} \left(\frac{N}{A} \right) \int U_{ab, ab}(b, b', z) \exp[iq(b - b')] \times \\ & \times \exp_{A, 1} \left\{ - \int_{-\infty}^z [U_{aa, aa}(b, b', z') - iV_{aa}(b, z') + \right. \\ & \left. + iV_{aa}^*(b', z')] dz' + \int_z^{\infty} [U_{bb, bb}(b, b', z') - \right. \\ & \left. - iV_{bb}(b, z') + iV_{bb}^*(b', z')] dz' \right\} db db' dz', \end{aligned} \quad (75)$$

где V и U были определены ранее [см. (17) и (18)], Z ($N = A - Z$) — число протонов (нейтронов) в ядре.

Используя приближения (29) и (31) для V и U , переходя к оптическому пределу ($A \rightarrow \infty$) и вводя новые переменные интегрирования $B = (b + b')/2$ и $\beta = b - b'$, представим выражение (75) для сечения в несколько ином виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} = & \frac{1}{4\pi} \frac{Z}{A} \left(\frac{N}{A} \right) \int \left\{ \omega_{ab}(\beta) \rho(B, z) \exp(iq\beta) \times \right. \\ & \times \exp \left[-\frac{\sigma'_a}{2} T_-(B + \beta/2, z) - \frac{\sigma'^*_a}{2} T_-(B - \beta/2, z) + \right. \\ & \left. + \omega_{aa}(\beta) T_-(B, z) - \frac{\sigma'_b}{2} T_+(B + \beta/2, z) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sigma'^*_b}{2} T_+(B + \beta/2, z) + \omega_{bb}(\beta) T_+(B, z) \right] \times d^2\beta d^2B dz \right\}. \quad (76) \end{aligned}$$

Формулы (75) и (76) помимо самого акта некогерентного (с большой передачей импульса нуклону $q \sim (B)^{-1/2}$) рождения учитывают сопутствующие ему процессы многократных когерентных (на углы порядка $\theta \sim (kR)^{-1}$) и некогерентных (углы $\theta \sim \sim (k\sqrt{B})^{-1}$) перерасеяний частиц a и b . Это приводит к некоторому размазыванию угловых распределений частиц, родившихся на ядерной мишени, по сравнению с угловыми распределениями в реакциях на нуклонах.

11. ВЛИЯНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ ПЕРЕРАСЕЯНИЙ НА УГЛОВУЮ ЗАВИСИМОСТЬ СЕЧЕНИЙ ПРОЦЕССОВ НЕКОГЕРЕНТНОГО РОЖДЕНИЯ

Рассмотрим сначала эффекты когерентных перерасеяний, для чего опустим в показателе экспоненты в выражении (76) величины $U_{xx, xx}$ ($x = a, b$), описывающие некогерентные перерасеяния. В этом приближении выражение для дифференциального сечения некогерентного процесса можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \frac{Z}{A} \left(\frac{N}{A} \right) \int \rho(s, z) |\varphi(q, s, z)|^2 ds dz; \\ & \varphi(q, s, z) = \exp(iqs) [f_{ab}(q) - \\ & - \int \exp(-iq's) f(q - q') F(q', z) dq' / 2\pi ik; \quad (77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & F(q', z) = \frac{ik}{2\pi} \int ab \exp(iqb) \times \\ & \times \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\sigma'_a}{2} T_+(b, z) - \frac{\sigma'_b}{2} T_-(b, z) \right] \right\}. \quad (78) \end{aligned}$$

При $\sigma_a = \sigma_b = \sigma$ величина $F(q', z) = F(q')$ совпадает с амплитудой упругого a (b) A -рассеяния и, следовательно, существенно отлична от нуля лишь при $q' \sim R^{-1}$. То же самое можно сказать и о $F(q', z)$. Поэтому под знаком интеграла в выражении (77) амплитуду $f(q - q')$, которая меняется гораздо медленнее, чем амплитуда $F(q', z)$, можно разложить в ряд по q'

$$f(q - q') = f(q) - q' \nabla_{q'} f(q). \quad (79)$$

Выполняя интегрирование по dq' , получаем в этом приближении:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z}{A} \left(\frac{N}{A} \right) \{ |f(q)|^2 N(\sigma_a, \sigma_b) + |\nabla f(q)|^2 L(\sigma_a, \sigma_b) \}, \quad (80)$$

где
$$N(\sigma_a, \sigma_b) = \int \rho(s, z) |E(\sigma_a, \sigma_b, s, z)|^2 ds dz;$$

$$L(\sigma_a, \sigma_b) = \frac{1}{2} \int \rho(s, z) \left| \frac{\partial}{\partial s} E(\sigma_a, \sigma_b, s, z) \right|^2 ds dz;$$

$$E(s, z) = \exp[-\sigma'_a T_-(s, z)/2 - \sigma'_b T_+(s, z)/2]. \quad (81)$$

Первое слагаемое в (80) пропорционально сечению перезарядки на нуклоне

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 = |f(q)|^2. \quad (82)$$

Коэффициент пропорциональности $(Z/A)(N/A)N(\sigma_a, \sigma_b)$ представляет собой эффективное число протонов (нейтронов) ядра, участвующих в реакции и отличающееся от $Z(N)$ — числа протонов (нейтронов) в ядре из-за взаимодействия частиц в начальном и конечном состояниях.

Для оценки роли поправочного слагаемого, пропорционального $|\nabla f(q)|^2$ в (80), перепишем его в виде:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z}{A} \left(\frac{N}{A} \right) N(\sigma_a, \sigma_b) \left[\frac{d\sigma_0}{d\Omega} + |\nabla f(q)|^2 Q^2(\sigma_a, \sigma_b) \right], \quad (83)$$

где $Q^2 = L(\sigma_a, \sigma_b)/N(\sigma_a, \sigma_b)$.

На рис. 5 представлена величина Q^2 как функция атомного номера A , рассчитанная в модели Ферми при $\sigma_a = \sigma_b = 25$ мбарн.

Учитывая скорость изменения амплитуды элементарного процесса

$$f_{ab}(q) \sim \exp(-Bq^2/2), \quad B = 8 \div 10 \text{ (Гэв/с)}^{-2},$$

легко видеть, что даже в реакциях на тяжелых ядрах изменение угловой зависимости сечения (80), обусловленное когерентным перерассеянием, незначительно.

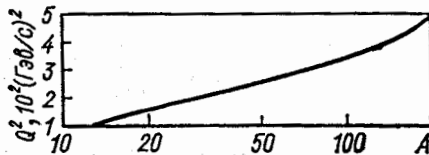


Рис. 5. Средний квадрат импульса, передаваемого в результате когерентных перерассеяний в некогерентных процессах, Q^2 ($\sigma_a = \sigma_b = 25$ мбарн)

12. РОЛЬ МНОГОКРАТНЫХ НЕКОГЕРЕНТНЫХ ПЕРЕРАССЕЙНИЙ

Рассмотрим теперь эффекты некогерентных перерассеяний, пренебрегая изменением направления движения быстрых частиц, обусловленным когерентным перерассеянием, что соответствует замене $T_{\pm}(B \pm \beta/2, z) \rightarrow T_{\pm}(B, z)$ в (76). В этом приближении интегрирование по dz выполняется в явном виде и выражение для сечения некогерентного процесса, учитывающее всевозможные некогерентные перерассеяния, представляется в сравнительно простом виде:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{Z}{A} \left(\frac{N}{A} \right) \int \omega_{ab, ab}(\beta) N(\tilde{\sigma}_a(\beta), \tilde{\sigma}_b(\beta)) J_0(q\beta) \beta d\beta, \quad (84)$$

где $\tilde{\sigma}_x(\beta) = \sigma_x - \omega_{xx}(\beta)$, $x = a, b$.

Формула (84) удобна для проведения численных расчетов. Физический же смысл более очевиден из представления выражения для сечения (84) в виде разложения в ряд по степеням кратности некогерентных столкновений с соблюдением их хронологической последовательности:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} = & \sum_{m, n=0}^{\infty} \int \left\{ \prod_{i=1}^m \frac{d\sigma_{aa}(q_i) d\sigma_{ab}(q')}{dt dt} \prod_{k=1}^n \frac{d\sigma_{bb}(q_k)}{dt} \times \right. \\ & \times \delta^{(2)} \left(\mathbf{q} - \mathbf{q}' - \sum_{i=1}^m \mathbf{q}_i - \sum_{k=1}^n \mathbf{q}_k \right) \frac{d\mathbf{q}'}{\pi} \prod_{i=1}^m \frac{d\mathbf{q}_i}{\pi} \prod_{k=1}^n \frac{d\mathbf{q}_k}{\pi} \left. \right\} \times \\ & \times \left\{ \int \prod_{i=1}^m \rho(b, z_i) \cdot \rho(b, z') \prod_{k=1}^n \rho(b, z_k) E(\sigma'_a, \sigma'_b, z') \times \right. \\ & \left. \times T \prod_{i=1}^m dz_i dz' T \prod_{k=1}^n dz_k \right\}. \quad (85) \end{aligned}$$

Символы $T \prod dz_i$, $T \prod dz_k$ означают, что при интегрировании по «временной» переменной z некогерентных столкновений должна соблюдаться их хронологическая последовательность.

Оценим роль некогерентных столкновений, положив для простоты

$$\begin{aligned} \sigma_a = \sigma_b = \sigma; \quad \omega_{aa} = \omega_{bb} = \sigma_{ee} \exp(-\beta^2/4B), \\ \omega_{ab} = \sigma_0 \exp(-\beta^2/4B), \end{aligned} \quad (86)$$

что соответствует обычной параметризации q -зависимости амплитуд элементарных процессов

$$f(q) = f(0) \exp(-Bq^2/2). \quad (87)$$

Величины σ_{ee} и σ_0 представляют собой соответственно полное сечение упругого $a(b)N$ -рассеяния и процесса $aN \rightarrow bN$. Вводя эффективно числа $N_k(\sigma)$ соотношением

$$N_k(\sigma) = \frac{1}{k! \sigma} \int (\sigma T(B))^k \exp(-\sigma T(B)) dB, \quad (88)$$

получаем представление для сечения (84) в виде ряда по степеням кратности некогерентных столкновений:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} N_{n+1}(\sigma) \varepsilon^n \exp[-Bq^2/(n+1)], \quad (89)$$

где $\varepsilon = \sigma_{el}/\sigma_{tot} = \sigma_{tot}^{el}/16\pi B$.

A -зависимость величин $N_k(\sigma)$, рассчитанная в модели Ферми для $\sigma = 25$ мбарн, $k = 1, 2, \dots, 5$ представлена на рис. 6. Видно, что эффекты кратных некогерентных перерассеяний делают q -зависимость сечений некогерентных процессов на ядрах более пологой, чем соответствующая зависимость реакций на свободных нуклонах и весьма существенны при больших значениях переданного импульса $q^2 \gg B^{-1}$ в реакциях на тяжелых ядрах. Иногда для оценки эффектов кратных некогерентных столкновений вместо (89) используют выражение

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_{n+1}(\sigma)}{n+1} \varepsilon^n \times \exp[-Bq^2/(n+1)], \quad (90)$$

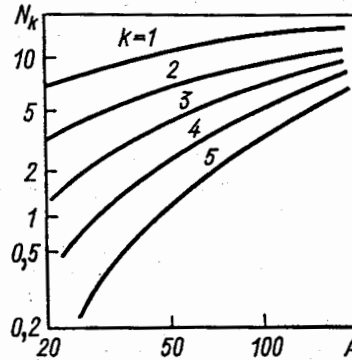


Рис. 6. Зависимость эффективных чисел k -кратных столкновений $N_k(\sigma)$ от атомного номера для $\sigma = 25$ мбарн и различных $k = 1, 2, 3, 4, 5$

полученное в теории Глаубера для процессов квазиупругого рассеяния частиц на ядрах, что приводит к заниженным оценкам этих эффектов.

В пользу правильности формул (75), (76) и (84) свидетельствует соотношение между полными сечениями реакций на ядре и на нуклоне

$$\sigma = \frac{Z}{A} \left(\frac{N}{A} \right) \sigma_0 N(\bar{\sigma}_a, \bar{\sigma}_b), \quad (91)$$

где $\bar{\sigma}_a = \sigma_{aN}^{tot} - \sigma_{aN}^{el} = \sigma_{aN}^{abs}$, полученное интегрированием обеих частей равенств (75), (76) и (84) по $d\Omega = dq/(\pi k^2)$, из которого следует, что уменьшение полного выхода частиц из реакции $aA \rightarrow bA'$ обусловлено только неупругими процессами, как и должно быть.

13. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ С ПЕРЕЗАРЯДКОЙ И ИХ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ К ИНТЕНСИВНОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ РОЖДЕННЫХ ЧАСТИЦ В РАЗНЫХ СПИРАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЯХ

Перейдем к обсуждению реакций некогерентного рождения частиц со спином, причем будем опять рассматривать процессы с перезарядкой, т. е. $z_a \neq z_b$. Для простоты ограничимся рассмотрением процессов, индуцированных бесспиновыми частицами (π , K -мезоны). Если также ограничиться областью не очень больших значений передач импульса $q^2 B \ll 1$, то с хорошей точностью можно пренебречь влиянием кратных перерасеяний на угловую зависимость наблюдаемых величин. В этом приближении связь между измеряемыми величинами — дифференциальными сечениями и элементами матрицы плотности родившейся частицы — реакций на ядре и на нуклоне оказывается очень простой:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'} = \frac{Z}{A} \left(\frac{N}{A} \right) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'} \right)_0 N \left(\sigma_a, \frac{\sigma_b^{\lambda}(\lambda) + \sigma_b^{*\lambda'}(\lambda')}{2} \right), \quad \lambda, \lambda' = \lambda_b, \lambda_b^* \quad (92)$$

Из соотношения (92) следует, что если поглощение родившихся частиц в состояниях с различными значениями величины спиральности одинаково [$\sigma_b(\lambda) = \text{const}(\lambda)$], то элементы матрицы плотности реакции на ядре, а следовательно и угловые распределения продуктов распада частицы b , оказываются независимыми от атомного номера A ядра-мишени. Обнаружение A -зависимости этих характеристик в процессах рождения частиц с перезарядкой явилось бы указанием на существование λ -зависимости величин $\sigma_{bN}(\lambda)$. (В процессах некогерентного рождения без перезарядки ситуация несколько сложнее, о чем более подробно см. ниже.) Кратко обсудим чувствительность измеряемых величин процессов $aA \rightarrow bA'$ к значениям величины $\sigma_{bN}(\lambda)$. Прежде всего заметим, что в правую часть (92) входят характеристики элементарных процессов рождения частиц B на нуклоне, сконструированные из амплитуд, включающих зависимость от спина нуклона

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'} \right)_0 = \text{Sp} f_{ab}^{\lambda}(q, \sigma) f_{ab}^{\lambda'+}(q, \sigma)/2, \quad (93)$$

т. е. величины, доступные измерению на водородных (дейтериевых) мишенях. Поэтому нет необходимости исключать их из соотношений (92), беря отношение наблюдаемых величин, соответствующих двум разным ядерным мишеням, как это делалось при анализе когерентных реакций, а можно непосредственно измерять величины

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'} \right)_0 = \frac{Z}{A} \left(\frac{N}{A} \right) N \left(\sigma_a, \frac{\sigma_b(\lambda) + \sigma_b^{\lambda'}(\lambda')}{2} \right) \quad (94)$$

и исследуя их A -зависимость определять $(\sigma_{bN}(\lambda) + \sigma_{bN}^{\lambda'}(\lambda'))/2$.

Для иллюстрации чувствительности величин $N(\sigma_1, \sigma_2)$ к значениям σ_2 на рис. 7 представлена A -зависимость отношений

$$\xi = N(\sigma_1, \sigma_2, A) / N(\sigma_1, \sigma_1, A) \quad (95)$$

для $\sigma_1 = 25$ мбарн, $\sigma_2 = 10, 20, 30, 40, 50$ мбарн.

Из сравнения с рис. 3 видно, что чувствительность измеряемых величин процессов некогерентного рождения к интенсивности поглощения рождающихся частиц такая же, как у дифференциальных сечений процессов когерентного рождения, т. е. довольно высокая. Это весьма важно для проблемы определения полных сечений bN -взаимодействия из анализа данных о процессах некогерентного рождения.

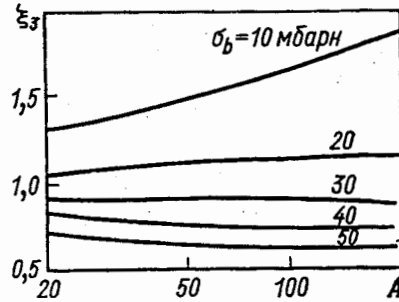


Рис. 7. Зависимость $\xi_3(\sigma_a, \sigma_b, A)$ от атомного номера для $\sigma_a = 25$ мбарн и различных σ_b

14. ЭФФЕКТЫ ТОЖДЕСТВЕННОСТИ НУКЛОНОВ В ПРОЦЕССАХ ПЕРЕЗАРЯДКИ

До сих пор обсуждение структуры наблюдаемых величин процессов некогерентного рождения частиц с перезарядкой проводилось в пренебрежении эффектами тождественности нуклонов ядра. Известно, что запрет тождественным нуклонам находиться в одном и том же состоянии (принцип Паули) приводит к подавлению сечений процессов с малой передачей импульса нуклону, на котором происходит реакция перезарядки. Формально тождественность нуклонов проявляется в определенных свойствах симметрии волновых функций начального и конечного состояний ядра. Учет этих свойств, а также свойств симметрии амплитуды процесса позволяет в приближении (14) получить замкнутое, но весьма громоздкое выражение для поправок к формулам для сечений, а также других измеряемых величин, обусловленных принципом Паули, и учитывающее эффекты многократных столкновений частиц a и b в ядре. В этом выражении помимо основного поправочного члена, существенно отличного от нуля лишь при значениях переданного импульса $q \lesssim k_F$ и приводящего к уменьшению результирующего сечения в этой области, содержатся также слагаемые, отличные от нуля при сколь угодно больших значениях переданного импульса и приводящие к некоторому (очень незначительному, порядка 5%) увеличению сечения. Эти слагаемые отсутствуют в борновском приближении, а появление их при учете взаимодействия в началь-

ном и конечном состоянии, по-видимому, отражает тот факт, что в результате упругих когерентных столкновений частиц a и b с нуклонами ядра последние освобождают занимаемые ими уровни и тем самым частично снимают запрет на появление нового нуклона, который образовался в результате перезарядки, на занятых ранее уровнях. Ввиду малости этого эффекта не будем обсуждать его более подробно, а рассмотрим лишь структуру основного поправочного члена к (92).

В тех же приближениях, в которых получена (92), для основного поправочного члена получается выражение

$$\Delta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'} \right) = - \frac{ZN}{A^2} \int \frac{1}{2} \text{Sp} f^\lambda(q, \sigma) \hat{\rho}_Z(s_1, s_2, z_1, z_2, \sigma) \times \\ \times f^{\lambda'+} (q, \sigma) \hat{\rho}_N(s_2, s_1; z_2, z_1, \sigma) \exp i q_T (s_1 - s_2) \times \\ \times \exp i q_L (z_1 - z_2) E(\sigma'_a, \sigma'_b, s_1, z_1) \times \\ \times E^*(\sigma'_a, \sigma'_b, s_2, z_2) ds_1 ds_2 dz_1 dz_2, \quad (96)$$

где $\hat{\rho}_{Z(N)}(r_1, r_2, \sigma)$ — одночастичная матрица плотности распределения протонов (нейтронов) в ядре.

Для бесспинового ядра

$$\left. \begin{aligned} \hat{\rho}(r_1, r_2, \sigma) &= \rho_1(r_1, r_2) + i\sigma \frac{r_1 \times r_2}{r_1 r_2} \rho_2(r_1, r_2); \\ \rho_1(r, r) &= \rho(r). \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Никакой экспериментальной информации о $\hat{\rho}_{1(2)}(r_1, r_2)$ — при $r_1 \neq r_2$ пока не существует и поэтому при оценке эффектов тождественности приходится привлекать модельные представления о структуре ядра. При рассмотрении реакций на легких ядрах для построения $\hat{\rho}$ можно с хорошей точностью использовать волновые функции гармонического осциллятора. При этом оказывается, что для некоторых ядер, например ^{12}C , $\rho_2(r_1, r_2) \neq 0$ и комбинации амплитуд $f^\lambda(q, \sigma)$ в правой части соотношения (96) отличаются от комбинаций амплитуд в правой части соотношения (92) и выражаются через такие характеристики процессов $aN \rightarrow bN$, для определения которых необходимо проведение поляризационных измерений с поляризованными нуклонными мишенями. В случае тяжелых ядер-мишеней, использование которых более предпочтительно для изучения поглощения рождающихся частиц, более приемлемой является модель вырожденного ферми-газа, в которой

$$\left. \begin{aligned} \rho_1^{Z(N)}(r_1, r_2) &= \rho^{Z(N)}((r_1 + r_2)/2) j_1(k_F^{Z(N)} |r_1 - r_2|); \\ j_1(x) &= 3 [\sin x - x \cos x]/x^3; \\ \rho_2 &= 0; \rho(r) = \rho_0 \theta(R - r); (k_F^{Z(N)})^3 = 3\pi^2 \rho_0 (Z/A) (N/A). \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Поскольку практически для всех тяжелых ядер $Z \leq N$, то $k_{FZ} = k_1 \leq k_{FN} = k_2$. Учитывая это, представим (96) после проведения приближенных интегрирований с использованием условия $(k_{FR})^{-1} \ll 1$ в следующем виде:

$$\Delta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'} \right) = - \frac{Z}{A} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'} \right)_0 N \left(\sigma_a, \frac{\sigma_b + \sigma_b'}{2} \right) F(q), \quad (99)$$

где

$$F(q) = \begin{cases} 1 & 0 \leq q \leq k_2 - k_1; \\ \tau(q) & k_2 - k_1 \leq q \leq k_2 + k_1; \\ 0 & q > k_2 + k_1. \end{cases}$$

$$\tau(q) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_2^2}{k_1^2} \right) + \frac{3}{8} \left[\frac{k_2^2 - k_1^2 - q^2}{qk_1} + \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2 \left(\frac{k_1^2 - k_2^2 - q^2}{qk_1} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{32} \left[\left(\frac{q^2 - k_2^2 + k_1^2}{qk_1} \right)^3 + \left(\frac{q^2 + k_2^2 - k_1^2}{qk_1} \right)^3 \right];$$

$$q = \sqrt{q_T^2 + q_L^2}. \quad (100)$$

Суммируя выражения (92) и (99), получаем для связи наблюдаемых величин процессов на ядре и на нуклоне с учетом принципа Паули:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'} \right)_0 N \left(\sigma_a, \frac{\sigma_b(\lambda) + \sigma_b(\lambda')}{2} \right) \times$$

$$\times \left[\frac{Z}{A} \left(\frac{N}{A} \right) - \frac{Z}{A} F(q) \right]. \quad (101)$$

Таким образом, при малых значениях q происходит практически полное подавление реакций, сопровождающихся перезарядкой протонов ядра, и неполное, хотя и значительное, подавление реакций с перезарядкой нейтронов. Этот результат вполне естествен с точки зрения модели ферми-газа: превращение в протоны нейтронов с импульсами, превышающими граничный ферми-импульс распределения протонов $k_{FZ} = k_1$, не запрещается принципом Паули. Интегрируя обе части равенства (101) по углу вылета частицы b , можно оценить степень подавления полного выхода частиц, обусловленную принципом Паули. Полагая

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(q) = \frac{d\sigma(0)}{d\Omega} \exp(-Bq^2),$$

$B = 10 \text{ (Гэв/с)}^{-2}$, получаем, что полное сечение образования частиц b в реакциях на ядрах, состоящих из тождественных нуклонов, примерно на 25—30% меньше сечения аналогичных реакций на ядрах, состоящих из нетождественных нуклонов. Неучет эффектов тождественности при анализе экспериментальных данных может привести к неверному (завышенному) значению σ_{bN} .

15. СТРУКТУРА СЕЧЕНИЙ НЕКОГЕРЕНТНОГО РОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ БЕЗ ПЕРЕЗАРЯДКИ

Существует довольно распространенное убеждение в том, что связь между наблюдаемыми величинами любого некогерентного процесса на ядре и элементарного процесса на нуклоне одинакова как для процессов с перезарядкой, так и для процессов без перезарядки. В действительности это не так или, по крайней мере, не всегда так. Продемонстрируем такую связь сначала на примере некогерентных процессов $aA \rightarrow bA'$ с бесспиновыми частицами a и b , зарядовые характеристики которых совпадают. Существенное отличие этих процессов от процессов типа перезарядки состоит в том, что в дифференциальном сечении некогерентного процесса помимо квадратов модулей амплитуд, описывающих рождение частицы b на разных нуклонах ядра, содержится интерференция таких амплитуд. Эти интерференционные слагаемые отсутствуют в борновском приближении ($\sigma_a = \sigma_b = 0$) и появляются лишь при учете взаимодействия в начальном и конечном состояниях.

Ограничиваясь рассмотрением реакций в области значений передат импульса внутри дифракционного конуса $qB \leq 1$, где можно пренебречь эффектами кратных некогерентных перерассеяний, получаем для сечения рассматриваемого процесса следующее представление:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int \rho(\mathbf{b}, z) |\varphi(q, \mathbf{b}, z)|^2 d\mathbf{b} dz, \quad (102)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(q, \mathbf{b}, z) = & f_{ab}(q) E(\sigma'_a, \sigma'_b, \mathbf{b}, z) \exp(iq_L z) - \\ & - f_{aa}(q) \frac{2\pi}{ik} f_{ab}(0) \int_z^\infty \rho(\mathbf{b}, z') E(\sigma'_a, \sigma'_b, \mathbf{b}, z') \times \\ & \times \exp(iq_L z') dz' - f_{bb}(q) \frac{2\pi}{ik} f_{ab}(0) \times \\ & \times \int_{-\infty}^z \rho(\mathbf{b}, z') E(\sigma'_a, \sigma'_b, \mathbf{b}, z) \exp(iq_L z') dz'. \end{aligned} \quad (103)$$

Первое слагаемое в (103) описывает, если следовать терминологии работы [40], процесс некогерентного рождения частицы b , тогда как второе и третье отвечают когерентному рождению (почти на нулевой угол) с предшествующим (второе слагаемое) или последующим (третье слагаемое) некогерентным рассеянием (на угол $\theta \sim q/k$) частиц a и b . При относительно низких энергиях $q_L l \gg 1$ механизм когерентного рождения с некогерентными перерассеяниями существенно подавлен и получается простая связь между

сечениями процессов на ядре $aA \rightarrow bA'$ и на нуклоне $aN \rightarrow bN$:

$$d\sigma/d\Omega = (d\sigma/d\Omega)_0 N(\sigma_a, \sigma_b), \quad (104)$$

которая обычно считается справедливой при любых энергиях. На самом деле при достаточно высоких энергиях ($q_L l \ll 1$) вклад второго и третьего слагаемых в амплитуду (103) весьма существен, что заметно сказывается на результирующем выражении для сечения (102). Прежде всего заметим, что в сечении некогерентного рождения частиц b без перезарядки входят амплитуды aN - и bN -рассеяния не только на нулевой угол (в виде стандартных комбинаций $\sigma'_x = 2\pi f_{xx}(0)/(ik)$, $x = a, b$). Появление в (102, 103) величин $f_{bb}(q)$ в принципе позволяет ставить вопрос об исследовании угловой зависимости сечений bN -рассеяния, при условии, что известна q -зависимость величин $f_{aa}(q)$ и $f_{ab}(q)$ из экспериментов на свободных нуклонах. Однако, на основании современных представлений о динамике сильных взаимодействий можно ожидать, что q -зависимость всех амплитуд $f_{xy}(q)$ ($x, y = a, b$) примерно одинакова, т. е.

$$f_{ab}(q)/f_{ab}(0) = f_{aa}(q)/f_{aa}(0) = f_{bb}(q)/f_{bb}(0). \quad (105)$$

В пределе высоких энергий ($k \rightarrow \infty$) и в предположении о справедливости (105) легко получить

$$d\sigma/d\Omega = (d\sigma/d\Omega)_0 \tilde{N}(\sigma'_a, \sigma'_b), \quad (106)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\sigma'_a, \sigma'_b) &= \int T(b) \left| \frac{\sigma'_a \exp(-\sigma'_a T(b)/2) - (\sigma'_b/2) \exp(-\sigma'_b T(b)/2)}{\sigma'_b - \sigma'_a} \right|^2 db = \\ &= \frac{|\sigma_a|^2 N(\sigma_a, \sigma_a) + |\sigma_b|^2 N(\sigma_b, \sigma_b) - 2\sigma_a \sigma_b N((\sigma_a + \sigma_b)/2, (\sigma_a - \sigma_b)/2)}{|\sigma_b - \sigma_a|^2}. \end{aligned} \quad (107)$$

Рассмотрим два частных случая: 1) $\sigma_a = 0$, $\sigma_b = \sigma$; 2) $\sigma_a = \sigma_b = \sigma$. Первый соответствует, например, фоторождению V^0 -мезонов на ядрах. В этом случае $\tilde{N}(\sigma'_a, \sigma'_b) = N(\sigma, \sigma)$ и таким образом фоторождение V^0 -мезонов на ядрах при высоких энергиях выглядит также, как их образование при низких энергиях адронами с сечением $\sigma_{aN} = \sigma_{V^0N}$. В данном случае говорят об адроноподобном поведении фотонов в реакциях при высоких энергиях. Во втором случае $\tilde{N}(\sigma'_a, \sigma'_b) = N_1(\sigma) - 2N_2(\sigma) + 3N_3(\sigma)/2$ и для реакций на тяжелых ядрах также заметно отличается от эффективного числа нуклонов, соответствующего низкоэнергетическому режиму [ср., например, с (104)]. Таким образом, наличие интерференционных слагаемых в сечении некогерентного рождения частиц без перезарядки в общем случае приводит к уменьшению этого сечения.

Изучим «пороговое» (при $q = 0$) поведение сечений некогерентных процессов без перезарядки. Принцип Паули и в этом случае должен подавлять сечение реакций при малых значениях передач импульса. Однако использование только свойств симметрии волновых функций начального и конечного состояний ядра и амплитуды процесса относительно перестановки нуклонных переменных совместно с приближением некоррелированных нуклонов (13) и (14) приводит лишь к результатам, обсуждавшимся выше. Формально принцип Паули будет проявляться через существование парных корреляций в распределениях тождественных нуклонов (точнее протонов и нейтронов в отдельности). Опуская для простоты спиновые переменные, определяем корреляционную функцию второго ранга соотношением

$$c(r_1, r_2) = \rho_2(r_1, r_2) - \rho(r_1)\rho(r_2); \quad (108)$$

$$\rho_2(r_1, r_2) = \int \rho(r_1, r_2, r_3, \dots, r_A) dr_3 dr_4 \dots dr_A. \quad (109)$$

В модели независимых частиц (оболочечная модель или модель вырожденного ферми-газа) при $Z, N, A \rightarrow \infty$

$$c_{Z(N)}(r_1, r_2) = -\hat{\rho}_{Z(N)}(r_1, r_2)\hat{\rho}_{Z(N)}(r_2, r_1), \quad (110)$$

где $\hat{\rho}$ — введенная ранее одночастичная матрица плотности. Нестационарные корреляции распределения протонов и нейтронов, разумеется, отсутствуют. Не выписывая общего выражения для сечений некогерентных процессов с учетом парных корреляций ввиду его чрезвычайной громоздкости, приведем лишь окончательный результат, учитывающий основной эффект — подавление сечений некогерентных процессов при малых значениях переданных импульсов:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & |f_{ab}(q)|^2 M_1(\sigma'_a, \sigma'_b, q_L) [1 - \tilde{F}(\sqrt{q_L^2 + q_T^2})] + \\ & + 2 \operatorname{Re} [f_{ab}(q) f_{aa}^*(q) M_2(\sigma'_a, \sigma'_b, q_L) + f_{ab}(q) f_{bb}^*(q) M_3(\sigma'_a, \sigma'_b, q_L)] \times \\ & \times [1 - \tilde{F}(\sqrt{q_T^2 + (q_L/2)^2})] + \{ |f_{aa}(q)|^2 M_4(\sigma'_a, \sigma'_b, q_L) + \\ & + |f_{bb}(q)|^2 M_5(\sigma'_a, \sigma'_b, q_L) + \\ & + 2 \operatorname{Re} [f_{aa}(q) f_{bb}^*(q) M_6(\sigma'_a, \sigma'_b, q_L)] \} [1 - \tilde{F}(q_T)], \quad (111) \end{aligned}$$

где M_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) — коэффициенты при соответствующих комбинациях амплитуд в выражении (102), не учитывающем эффектов тождественности.

Форм-фактор $\tilde{F}(q)$, приближенно учитывающий эти эффекты, дается следующим выражением:

$$\tilde{F}(q) = \frac{Z}{A} \left\{ \left[1 - \frac{3}{2} \frac{q}{k_1} + \frac{1}{16} \left(\frac{q}{k_1} \right)^3 \right] \theta(2k_1 - q) + \frac{N}{A} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{q}{k_2} + \frac{1}{16} \left(\frac{q}{k_2} \right)^3 \right] \theta(2k_2 - q) \right\}, \quad (112)$$

где $k_1 = k_{F_2}$; $k_2 = k_{F_N}$.

Очевидно, что величины эффектов, обусловленных тождественностью нуклонов, в процессах некогерентного рождения частиц без перезарядки и в процессах с перезарядкой одного порядка. Отметим, что указанное изменение поведения сечений некогерентных процессов при малых значениях передач импульса есть наиболее существенное проявление наличия корреляций в распределении нуклонов в ядре. В остальном эффекты корреляций приводят к равномерному (во всем интервале передач импульса) увеличению дифференциальных сечений на величину порядка 5—10%.

16. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССОВ НЕКОГЕРЕНТНОГО РОЖДЕНИЯ БЕЗ ПЕРЕЗАРЯДКИ

Обсудим, наконец, структуру поляризационных характеристик в процессах некогерентного рождения частиц b со спином без перезарядки. Для простоты частицы a будем считать бесспиновыми.

В приближении одного некогерентного столкновения измеряемые величины обсуждаемых процессов даются выражением:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda^*} = \int \rho(b, z) \frac{1}{2} \text{Sp} \varphi^\lambda(q, b, z, \sigma) \varphi^{\lambda^*}(q, b, z, \sigma) db dz, \quad (113)$$

в котором спиральные амплитуды φ^λ имеют в общем такую же структуру, как амплитуда φ [см. (103)] в процессах рождения бесспиновых частиц, т. е. содержат наряду с членами, описывающими «некогерентное» рождение, также члены, описывающие «когерентное» рождение с предшествующим или последующим некогерентным перерассеянием. При этом, однако, должно учитываться следующее важное обстоятельство: когерентное рождение описывается спиральными амплитудами $f_{ab}^\lambda(q=0, \sigma=0)$ процесса $aN \rightarrow bN$, усредненными по спину нуклона, которые, согласно (19), равны нулю, если $\lambda \neq 0$. Таким образом, в амплитудах φ^λ с $\lambda \neq 0$ слагаемые, описывающие «когерентное рождение» с изменением спиральности быстрой частицы, аналогичные второму и третьему слагаемым в (103) отсутствуют. В действительности, конечно, термин «когерентное рождение» не означает, что частица b рождается строго под нулевым углом и соответственно

обсуждаемые слагаемые не равны строго нулю. Однако малость характерных «когерентных» углов рассеяния [$\theta_{\text{coh}} \sim (kR)^{-1}$] делает вклад механизма когерентного рождения с $\Delta\lambda \neq 0$ ничтожно малым. Поправки к наблюдаемым величинам, возникающие при более строгом учете вклада этого механизма, оказываются того же порядка, что и эффекты когерентных перерассеяний с изменением направления движения в (80).

Другое важное обстоятельство, которое должно учитываться при рассмотрении процессов рождения частиц со спином, — это возможность переворота спина частицы b в некогерентных упругих перерассеяниях $bN \rightarrow bN$, сопровождающих процесс когерентного рождения, в котором, согласно сказанному выше, могут рождаться только частицы нулевой спиральности (если спин частицы a равен нулю). По существу это означает, что должны учитываться вклады в амплитуду от своеобразных двухступенчатых процессов (см. разд. 7), в которых помимо акта рождения вторым неупругим актом является упругое спин-флиповое рассеяние. Ясно, что в приближении одного некогерентного столкновения этот механизм может давать вклад лишь в амплитуду φ^λ с $\lambda \neq 0$.

С учетом этих замечаний легко видеть, что амплитуда φ^λ в (113) дается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \varphi^{\lambda=0}(q, \sigma, b, z) &= f_{ab}^{\lambda=0}(q, \sigma) E(\sigma_a, \sigma_b, b, z) \exp(iq_L z) - \\ &- \frac{2\pi}{ik} f_{ab}^{\lambda=0}(0, 0) f_{aa}(q, \sigma) \int_z^\infty E(\sigma_a, \sigma_b, b, z') \exp(iq_L z') dz' - \\ &- \frac{2\pi}{ik} f_{ab}^{\lambda=0}(0, 0) f_{bb}^{00}(q, \sigma) \int_{-\infty}^z E(\sigma_a, \sigma_b, b, z') \exp(iq_L z') dz', \end{aligned} \quad (114)$$

а для $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} \varphi^\lambda(q, \sigma, b, z) &= f_{ab}^\lambda(q, \sigma) E(\sigma_a, \sigma_b, b, z) \exp(iq_L z) - \\ &- \frac{2\pi}{ik} f_{ab}(0, 0) f_{bb}^{0\lambda}(q, \sigma) \int_{-\infty}^z E(\sigma_a, \sigma_b(\lambda=0), b, z') \times \\ &\times \exp(iq_L z') \exp\left[-\frac{\sigma_b'(\lambda) - \sigma_b'(\lambda=0)}{2}\right] T_+(b, z'). \end{aligned} \quad (115)$$

Второй член в (115) соответствует вкладу двухступенчатого механизма. При относительно низких энергиях ($q_L l \gg 1$) опять механизм когерентного рождения оказывается подавленным большим значением минимального передаваемого импульса q_L и в результате (113) приобретает простой вид:

$$\frac{d\alpha}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'}\right)_0 N\left(\sigma_a, \frac{\sigma_b(\lambda) + \sigma_b(\lambda')}{2}\right). \quad (116)$$

Формула (116) совпадает с соответствующей формулой (92) для некогерентных процессов с перезарядкой. Кроме того, она верна

и при любых энергиях, если по какой-либо причине запрещены (или очень сильно подавлены) переходы $a \rightarrow b$ без изменения спиральности. Такая ситуация, по-видимому, имеет место в процессах рождения A_2 -мезонов π -мезонами [64].

В другом предельном случае $q_L l \ll 1$ в (113) можно выполнить все интегрирования по dz' и dz . Выражения для наблюдаемых величин (113) при этом содержат билинейные комбинации амплитуд $f_{xy}(q, \sigma)$, которые не могут выразиться через наблюдаемые величины процесса $aN \rightarrow bN$ без привлечения дополнительных предположений о q - и σ -зависимости этих амплитуд. Если в рассматриваемом процессе рождения $aN \rightarrow bN$, как и в упругом рассеянии, доминирует обмен помероном, то предположение об одинаковой q - и σ -зависимости соответствующих амплитуд переходов с изменением или без изменения спиральности довольно естественно. В этом случае имеет место пропорциональность величин $(d\sigma/d\Omega) \rho^{\lambda\lambda'}$ для процессов на ядре и на нуклоне

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho^{\lambda\lambda'} \right)_0 N^{\lambda\lambda'} (\sigma_a, \sigma_b(0), \sigma_b(\lambda), \sigma_b(\lambda')). \quad (117)$$

В пределе высоких энергий ($k \rightarrow \infty$, $q_L \rightarrow 0$) величины $N^{\lambda\lambda'}$ даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} N^{00} &= [\sigma_b(\lambda=0) - \sigma_a]^{-2} \left\{ \sigma_a^2 N(\sigma_a, \sigma_a) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_b^2(\lambda=0) N[\sigma_b(\lambda=0), \sigma_b(\lambda=0)] - \right. \\ &\quad \left. - 2\sigma_a\sigma_b(\lambda=0) N \left[\frac{\sigma_a + \sigma_b(\lambda=0)}{2}, \frac{\sigma_a + \sigma_b(\lambda=0)}{2} \right] \right\}; \\ N^{0\lambda} &= [\sigma_b(\lambda=0) - \sigma_a]^{-1} \left\{ \sigma_a (1 - W^\lambda) N \left[\sigma_a, \frac{\sigma_a + \sigma_b(\lambda)}{2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_a W^\lambda N \left[\sigma_a, \frac{\sigma_a + \sigma_b(\lambda=0)}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sigma_b(\lambda=0) (1 - W^\lambda) N \left[\frac{\sigma_a + \sigma_b(\lambda=0)}{2}, \frac{\sigma_b(\lambda=0) + \sigma_b(\lambda)}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sigma_b(\lambda=0) W^\lambda N \left[\sigma_a, \frac{\sigma_b(\lambda=0) + \sigma_b(\lambda)}{2} \right] \right\}, \quad \lambda \neq 0; \\ N^{\lambda\lambda'} &= (1 - W^\lambda) (1 - W^{\lambda'}) N \left[\sigma_a, \frac{\sigma_b(\lambda) + \sigma_b(\lambda')}{2} \right] + \\ &\quad + W^\lambda W^{\lambda'} N[\sigma_a, \sigma_b(\lambda=0)] + \\ &\quad + (1 - W^\lambda) W^{\lambda'} N \left[\sigma_a, \frac{\sigma_b(\lambda=0) + \sigma_b(\lambda)}{2} \right] + \\ &\quad + (1 - W^{\lambda'}) W^\lambda N \left[\sigma_a, \frac{\sigma_a(\lambda=0) + \sigma_b(\lambda')}{2} \right], \\ &\quad \lambda, \lambda' \neq 0, \end{aligned} \quad (118)$$

где $W^\lambda = f_{bb}^{0\lambda}(q, \sigma) f_{ab}^0(0, 0) / \{ f_{ab}^\lambda(q, \sigma) [f_{bb}^{00}(0, 0) - f_{aa}(0, 0)] \}$.

Величины W^λ характеризуют относительную интенсивность спин-флипсового взаимодействия в процессах упругого bN -рассеяния и являются дополнительными параметрами, подлежащими определению из эксперимента, наряду с $\sigma_{bN}(\lambda)$. Информация о $W^{\lambda=1}$, как отмечалось выше (см. разд. 7), может извлекаться из анализа поляризационных явлений в процессах когерентного рождения частиц в реакции $aA \rightarrow bA$.

Соотношения (116) и (117) разумеется, не учитывают эффектов тождественности. Результаты разд. 14 позволяют без труда учесть их.

17. ЭФФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С НЕСТАБИЛЬНОСТЬЮ РОЖДАЮЩИХСЯ РЕЗОНАНСОВ

Кратко обсудим эффекты, связанные с нестабильностью резонансов. Очевидно, что, по крайней мере, при достаточно высоких энергиях, когда распадная длина резонанса $l_b = k/(m_b \Gamma_b)$, где m , Γ -масса резонанса и его ширина, много больше его длины свободного пробега в ядре, практически все частицы b распадаются за пределами ядра и при рассмотрении прохождения через ядерное вещество их можно рассматривать как стабильные. Таким образом, только при анализе процессов рождения, с одной стороны, достаточно широких, а с другой — слабо поглощаемых ядерным веществом резонансов при не очень высоких энергиях может возникнуть необходимость учета эффектов нестабильности.

Ограничимся рассмотрением влияния эффектов нестабильности резонансов в процессах некогерентного рождения без учета спина.

Распределение по квадрату эффективной массы m^2 продуктов распада резонанса b дается следующим выражением:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega dm^2} &= \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \frac{\Gamma_b m_b}{\pi k^2} \int \rho(b, z) |\tilde{E}(b, z, \sigma_a, \sigma_b, \tilde{\sigma}_b, m^2, \Gamma)|^2 db dz; \\ \tilde{E} &= E(b, z, \sigma_a, \sigma_b) \int_z^\infty dz' \exp \left\{ \frac{\sigma'_a - \tilde{\sigma}'_b}{2} T(b, z') - \tilde{\gamma}(z' - z) \right\}; \\ \tilde{\gamma} &= [\Gamma_b m_b + i(m_b^2 - m^2)]/2k. \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Здесь $\tilde{\sigma}_b$ — сечение взаимодействия продуктов распада резонанса b с нуклонами. Если бы продукты распада резонанса поглощались с такой же интенсивностью, как и сами резонансы ($\tilde{\sigma}_b = \sigma_b$), то весь эффект нестабильности сводился бы к обычной брейт-винеровской зависимости сечений. При этом (119) принимает вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dm^2} = \frac{1}{\pi} \frac{d\sigma_0}{d\Omega} N(\sigma_a, \sigma_b) \frac{\Gamma m_b}{\Gamma^2 m_b^2 + (m^2 - m_b^2)^2}. \quad (120)$$

Различие величин $\tilde{\sigma}_b$ и σ_b приводит к двоякому следствию. Во-первых, помимо обычного брейт-вигнеровского слагаемого в выражении (119) появляются другие, с более пологой зависимостью от квадрата эффективной массы продуктов распада, и, следовательно, имитирующие наличие «фона» в процессе рождения резонанса на ядре, даже если в процессе рождения на нуклоне таковой отсутствует. Во-вторых, коэффициент при брейт-вигнеровской части сечения оказывается иным, чем $N(\sigma_a, \sigma_b)$.

В модели однородного распределения нуклонов в ядре из (120) получается следующий результат:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dm^2} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[\frac{1}{\pi} \frac{\Gamma m}{\Gamma^2 m^2 + (m^2 - m_b^2)^2} \times \right. \\ \left. \times N(\sigma_a, \sigma_b, \tilde{\sigma}_b, \Delta\sigma) + \text{фон} \right], \quad (121)$$

где $\Delta\sigma = \Gamma m / (k\rho_0)$; \tilde{N} представляет следующую комбинацию эффективных чисел:

$$\tilde{N} = (\tilde{\sigma}_b - \sigma_b - 2\Delta\sigma)^{-1} [(\tilde{\sigma}_b - \sigma_b) N(\sigma_a, \sigma_b + \Delta\sigma) - \\ - 2\Delta\sigma N(\sigma_a, (\sigma_b + \tilde{\sigma}_b)/2)]. \quad (122)$$

Величина $\tilde{\sigma}_b$ близка к сумме полных сечений взаимодействия с нуклонами продуктов распада резонанса b (с точностью до поправки на взаимное экранирование) и обычно существенно больше, чем σ_b . При $\tilde{\sigma}_b \gg \sigma_b$, $\Delta\sigma$ приближенно имеем:

$$\tilde{N}(\sigma_a, \sigma_b, \tilde{\sigma}_b, \Delta\sigma) \approx N(\sigma_a, \sigma_b + \Delta\sigma). \quad (123)$$

Таким образом, нестабильность резонанса имитирует увеличение сечения взаимодействия его с нуклонами. Учет этого обстоятельства позволяет согласовать данные работ [15, 16] о сечении реакции $\pi^- A \rightarrow \rho^- A'$ при $p_\pi = 3,5 - 4,5$ Гэв ($\Delta\sigma = 8-10$ мбарн) с предположением о малости величины $\sigma_{\rho N}^L$ [65].

Формула (119) соответствует предположению о том, что все продукты распада резонанса движутся вдоль направления его движения (ось z), т. е. угловой разброс в направлениях движения продуктов распада мал. Такое предположение может быть справедливо при очень высоких энергиях, когда частица b практически не распадается внутри ядра. В тех же случаях, когда существенны эффекты нестабильности (сравнительно низкие энергии), угол разлета продуктов распада в л. с. может быть заметным, и тогда поглощение каждого из них следует учитывать отдельно вдоль траектории его движения. Обобщение формулы (119), учитывающее этот эффект, тривиально.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Этим завершается обсуждение наиболее существенных, на наш взгляд, результатов теории когерентного и некогерентного рождения нестабильных частиц на ядерных мишенях в приближении Глаубера, которые могут быть полезны экспериментаторам, проводящим или планирующим соответствующие исследования.

Проведение обширных экспериментальных исследований процессов рождения частиц на ядрах важно для изучения динамики взаимодействия резонансов с нуклонами и для проверки основных положений теории адрон-ядерного взаимодействия, одним из возможных вариантов которой является теория многократного рассеяния.

При этом, чтобы получить более полную информацию об амплитудах резонанс-нуклонного рассеяния на малые углы, необходимо наряду с реакциями когерентного рождения нестабильных частиц на ядрах изучать также процессы их некогерентного рождения и особенно поляризационные явления в них. Новые перспективы в исследовании динамики резонанс-нуклонных взаимодействий, по-видимому, связаны с изучением глубоко-неупругого (инклюзивного) рождения нестабильных частиц на ядерных мишенях. Очевидно, что в этих процессах должны каким-то образом проявляться свойства глубоко-неупругого рассеяния резонансов на нуклонах. Тем самым появляется возможность, от определения полных сечений резонанс-нуклонного взаимодействия из анализа данных о когерентном и некогерентном рождении нестабильных частиц на ядрах перейти к изучению структурных функций «инклюзивного рассеяния» резонансов на нуклонах. Однако теория этих явлений находится пока в зачаточном состоянии, а их экспериментальные исследования даже не начинались. Поэтому более подробное обсуждение этих и связанных с ними вопросов целесообразно отложить до появления в них хотя бы частичной ясности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bulos F. e.a. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 22, p. 490.
2. Behrend H. G. e.a. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 336, 1276.
3. Alvensleben H. e.a. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 786.
4. Goldhaber A. S. e.a. «Phys. Rev. Lett.», 1960, v. 22, p. 802.
5. Bemporad C. e.a. «Nucl. Phys. B», 1971, v. 33, p. 377.
6. Bemporad C. e.a. «Nucl. Phys. B», 1972, v. 42, p. 627.
7. Bemporad C. e.a. «Nucl. Phys. B», 1973, v. 59, p. 106.
8. Beusch W. e.a. «Phys. Lett. B», 1975, v. 55, p. 97.
9. Boyarski A. M. e.a. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 23, p. 1343.
10. Abrahamian L. e.a. «Phys. Lett. B», 1972, v. 38, p. 544.
11. Vartapetian H. A. «Phys. Lett. B», 1973, v. 44, p. 301.
12. Guisan O., Bonamy P., Ledu P. «Nucl. Phys. B», 1971, v. 32, p. 68.
13. Bolotov V. N. e.a. «Nucl. Phys. B», 1975, v. 86, p. 347.
14. O'Brien D. P. e.a. «Nucl. Phys. B», 1974, v. 77, p. 1.
15. Арефьев А. В. и др. Препринт ИТЭФ-46, 1973.
16. Chaundary B. S. e.a. «Nucl. Phys. B», 1973, v. 67, p. 333.

17. Belletini G. e.a. «Nuovo cimento», 1965, v. 40, p. 1139.
18. Gobbi V. e.a. «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 33, p. 1450.
19. Vemporad C. e.a. «Nucl. Phys.», 1973, v. 51, p. 1.
20. Ломакин Ю. Ф. Диссертация ОИЯИ, 1975.
21. Glauber R. J. In: Lectures in theoretical physics. Ed. W. E. Brittin e.a. V. 1. Interscience Publishers, N. Y., 1959, p. 315.
22. Glauber R. J. In: High-energy physics and nuclear structure, Proc. of 2nd Intern Conf., Rehovoth, 1967. Ed. G. Alexander. North-Holland, Amsterdam, 1967, p. 311.
23. Glauber R. J., Matthiae G. «Nucl. Phys. B», 1970, v. 21, p. 135.
24. Глаубер Р. «УФН», 1971, т. 103, с. 641.
25. Drell S. P., Trefil J. S. «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 16, p. 552; p. 832 (E).
26. Formanek J., Trefil J. S. «Nucl. Phys.», 1967, v. 63, p. 155; «Nucl. Phys. B», 1968, v. 4, p. 165.
27. Trefil J. S. «Nucl. Phys. B», 1969, v. 11, p. 330.
28. Trefil J. S. «Phys. Rev.», 1969, v. 180, p. 1366, 1379.
29. Margolis B. «Phys. Lett. B», 1968, v. 26, p. 254.
30. Margolis B. «Nucl. Phys. B», 1968, v. 4, p. 165.
31. Kölblig K. S., Margolis B. «Nucl. Phys. B», 1968, v. 6, p. 85.
32. Kofoid-Hansen O., Margolis B. «Nucl. Phys. B», 1969, v. 11, p. 445.
33. Von Bochman G., Margolis B. «Nucl. Phys. B», 1969, v. 14, p. 605.
34. Von Bochman G. e. a. «Phys. Lett. B», 1969, v. 30, p. 254.
35. Faldt G. «Nucl. Phys. B», 1972, v. 43, p. 591.
36. Faldt G. «Nucl. Phys. B», 1973, v. 62, p. 86.
37. Faldt G. «Nucl. Phys. B», 1975, v. 87, p. 445.
38. Van Hove L. «Nucl. Phys. B», 1972, v. 46, p. 75.
39. Gottfried K. In: Photon and hadron interactions in nuclei. Proc. the 1972 CERN School of Physics, p. 55—125; Gottfried K. «Acta Phys. Polon B», 1972, v. 3, p. 769.
40. Gottfried K., Yennie D. R. «Phys. Rev.», 1969, v. 182, p. 1595.
41. Геворкян С. Р., Тарасов А. В., Цэрэн Ч. Препринт ОИЯИ P2-5604, 1971.
42. Геворкян С. Р. и др. Препринт ОИЯИ P2-6581, 1972.
43. Геворкян С. Р., Тарасов А. В. «Ядерная физика», 1972, т. 15, с. 248.
44. Геворкян С. Р., Тарасов А. В., Цэрэн Ч. «ЯФ», 1972, т. 15, с. 35.
45. Геворкян С. Р. «Изв. АН АрмССР», 1972, т. 7, с. 320.
46. Геворкян С. Р., Тарасов А. В. «Письма в ЖЭТФ», 1972, т. 15, с. 684.
47. Геворкян С. Р., Тарасов А. В. «Письма в ЖЭТФ», 1972, т. 16, с. 418.
48. Коротких В. Л. Конспект лекций. М., Изд-во МГУ, 1973.
49. Пак А. С., Тарасов А. В. Препринт ОИЯИ P2-6599, 1972.
50. Пак А. С., Тарасов А. В. Препринт ОИЯИ P2-8132.
51. Пак А. С., Тарасов А. В. «Ядерная физика», 1975, т. 21, с. 3.
52. Пак А. С. Докт. диссертация. ОИЯИ, 1975.
53. Геворкян С. Р. и др. «Ядерная физика», 1974, т. 20, с. 731.
54. Геворкян С. Р., Жамкочян В. М., Тарасов А. В. «ЯФ», 1975, т. 21, с. 288.
55. Фейнберг Е. Л. В кн.: Проблемы теоретической физики. М., «Наука», 1972.
56. David R., Harrigton. «Phys. Rev.», 1969, v. 184, p. 1745.
57. Труды IV Междунар. конф. по физике высоких энергий и структуре ядра. Дубна, 1971.
58. Helm R. H. «Phys. Rev.», 1956, v. 104, p. 1466.
59. Афанасьев Н. Г. и др. «Ядерная физика», 1968, т. 8, с. 1112.
60. Rajasekaran G. TIFR [ТНЗ] 71-16.
61. Цэрэн Ч. «Ядерная физика», 1968, т. 8, с. 909.
62. Deck R. T. «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 1, p. 164.
63. Askoli G. e.a. «Phys. Rev. Lett.», 1971, v. 26, p. 929.
64. Antipov Yu. M. e.a. «Nucl. Phys. B», 1973, v. 63, p. 153.
65. Sacurai J. J. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 981.
66. Ballam J. e.a. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 960.

Elastic form factors of hydrogenlike atoms in nS -states *

L.G. Afanasyev and A.V. Tarasov

Laboratory of Nuclear Problems, Joint Institute for Nuclear Research,
Head Post Office, P.O. Box 79, 101000 Moscow Russia.

E-mail: afanasev@jinr.ru

Abstract

The exact analytic formula for elastic form factors of the hydrogenlike atoms in the nS -states is given. The formula has a quite simple form.

PACS number: 31.10.+z, 31.20.-d, 32.80 Cy

1. Introduction

Our interest to the hydrogenlike atoms was caused by papers [1-3] where production of the Coulomb bound states of various elementary particles (elementary atoms) was predicted for high energy processes. Till now three such atoms were observed: e^+e^- atom from decay of π^0 [4-6]; $\pi\mu$ atom from decay of K_L^0 [7-9]; $\pi^+\pi^-$ atom from p Ta interaction at 70 GeV [10].

Interaction of such atoms with ordinary atoms is an essential part of those experiments. Especially for the $\pi^+\pi^-$ atoms whose observation and lifetime measurement is based on accurate calculation of the ionization (breaking up) probability at passing through the target where they are produced [3],[10]. To do so a great number of elementary atom cross sections for various initial states is required.

As shown in Ref. [11],[12] elementary atoms interact with ordinary atoms predominantly via Coulomb potential. So this interaction may be treated in terms of atomic form factors.

The general solution of the classical problem of hydrogenlike atom form factor was found in the paper [13]. Using the group-theoretical method the authors gave the exact analytic formulas of form factors for all transitions. However those formulas have a sufficiently complicated form, long calculation should be done for each value of a transfer momentum.

Here we give the simple exact formulas for the elastic form factor of hydrogenlike atoms in the nS -states obtained using special function algebra. General formulas of form factors for discrete-discrete transitions should be considered later.

2. Formulas

Form factor of hydrogenlike atoms is written as

$$F_n(\vec{q}) = \int |\Psi_n(\vec{r})|^2 e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r}, \quad (1)$$

here \vec{q} is the transferred momentum and $\Psi_n(\vec{r})$ is the atomic wave function. For the nS -states (principal quantum number n and zero numbers l, m) the wave function is

*JINR Preprint, E4-93-293, Dubna, 1993.

$$\Psi_n(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2(\alpha\mu)^{3/2}}{n^{5/2}} \exp(-\alpha\mu r/n) L_{n-1}^1(2\alpha\mu r/n). \quad (2)$$

Here L_{n-1}^1 is the Laguerre polynomial, α is the fine structure constant, μ is the atomic reduced mass ($\hbar = c = 1$). Then the form factor is written as

$$F_n(q) = \frac{4\alpha\mu^3}{n^5} \int_0^\infty \exp(-2\alpha\mu r/n) (L_{n-1}^1(2\alpha\mu r/n))^2 \frac{\sin qr}{qr} r^2 dr. \quad (3)$$

For S-states form factor dose not depend on a choice of the quatization axis. Using the following substitutions

$$2\alpha\mu r/n = x \quad \Delta = qn/2\alpha\mu \quad qr = \Delta x, \quad (4)$$

one has the expression

$$F_n(q) = \frac{1}{2n^2} \int_0^\infty \exp(-x) (L_{n-1}^1(x))^2 \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} x^2 dx. \quad (5)$$

To evaluate the improper integral one should use the following relations for the Laguerre polynomials (see for instance [14]).

$$(L_{n-1}^1(x))^2 = \frac{n}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(n-k-1/2)}{\Gamma(k+2)\Gamma(n-k)} L_{2k}^2(2x) \quad (6)$$

$$\int_0^\infty \exp(-x) L_{2k}^2(x) \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} x^2 dx = \frac{\cos^2(\phi/2)}{\sin \phi} \times \\ \times \left[(k+1) \sin((2k+1)\phi) + (k+1/2) \sin((2k+2)\phi) \right] \quad (7)$$

Here $\tan(\phi/2) = \Delta$.

After substitution of (6) and (7) into (5) the form factor has the form

$$F_n(q) = \frac{\cos^2(\phi/2)}{2n\pi \sin \phi} \times \\ \times \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(n-k-1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)} \sin((2k+1)\phi) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+3/2)\Gamma(n-k-1/2)}{\Gamma(k+2)\Gamma(n-k)} \sin((2k+2)\phi) \right]. \quad (8)$$

Nothing is changed if one begins the second sum from -1 and then increases index k by unity. After replacing the sin function by the exponential one has

$$\begin{aligned}
F_n(q) = & \frac{\cos^2(\phi/2)}{2n\pi \sin \phi} \times \\
& \times \operatorname{Im} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(n-k-1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)} \exp(i(2k+1)\phi) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(n-k+1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \exp(2ik\phi) \right]. \quad (9)
\end{aligned}$$

The sums in (9) may be expressed via hypergeometric function ${}_2F_1$.

$$\begin{aligned}
F_n(q) = & \frac{\cos^2(\phi/2)}{2n\pi \sin \phi} \times \\
& \times \operatorname{Im} \left[\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)} e^{i\phi} {}_2F_1(1/2, 1-n; 3/2-n; e^{2i\phi}) + \right. \\
& \left. + \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} {}_2F_1(1/2, -n; 1/2-n; e^{2i\phi}) \right] \quad (10)
\end{aligned}$$

After using the following relation for the Legendre polynomial

$$P_n(\cos \phi) = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)} e^{-in\phi} {}_2F_1(1/2, -n; 1/2-n; e^{2i\phi}), \quad (11)$$

one has the expression

$$F_n(q) = \frac{\cos^2(\phi/2)}{2n \sin \phi} \operatorname{Im} \left[e^{-in\phi} P_n(\cos \phi) + e^{-in\phi} P_{n-1}(\cos \phi) \right]. \quad (12)$$

Then one replaces back the exponential by the sin function. Finally for the elastic form factor of the hydrogenlike atoms in nS -states one has

$$F_n(q) = \frac{\cos^2(\phi/2)}{2n} \frac{\sin n\phi}{\sin \phi} [P_n(\cos \phi) + P_{n-1}(\cos \phi)]. \quad (13)$$

Or it may be expressed via the Jacobi polynomial $P_{n-1}^{(0,1)}$

$$F_n(q) = \frac{\cos^4(\phi/2)}{n} \frac{\sin n\phi}{\sin \phi} P_{n-1}^{(0,1)}(\cos \phi). \quad (14)$$

For computation one may use well known recurrence relations for the Jacobi polynomial or for the Legendre polynomials in (13) (see for instance [15]). Using obtained formulas one can investigate n dependence of total cross sections for S -states of the hydrogenlike atoms.

The authors would like to thank L.L. Nemenov for encouragement of the work and A.V. Kuptsov for helpful remarks.

References

- [1] Nemenov L.L. et al., *Yad. Fiz.* **15** (1972) 1047
[Sov. J. Nucl. Phys. **15** (1972) 582].
- [2] Nemenov L.L. et al., *Yad. Fiz.* **16** (1972) 125
[Sov. J. Nucl. Phys. **16** (1973) 67].
- [3] Nemenov L.L. et al., *Yad. Fiz.* **41** (1985) 980
[Sov. J. Nucl. Phys. **41** (1985) 629].
- [4] Alekseev G.D. et al., *Yad. Fiz.* **40** (1984) 139
[Sov. J. Nucl. Phys. **40** (1984) 87].
- [5] Afanasyev L.G. et al., *Yad. Fiz.* **50** (1989) 7
[Sov. J. Nucl. Phys. **50** (1985) 4].
- [6] Afanasyev L.G. et al., *Phys. Lett.* **236B** (1990) 116.
- [7] Coombes R. et al., *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 249.
- [8] Aronson S.H. et al., *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1078.
- [9] Aronson S.H. et al., *Phys. Rev.* **D33** (1986) 3180.
- [10] Afanasyev L.G. et al., *Phys. Lett.* **308B** (1993) 200.
- [11] Mrówczyński S., *Phys. Rev.* **D36** (1987) 1520.
- [12] Denisenko K.G. and Mrówczyński S., *Phys. Rev.* **D36** (1987) 1529.
- [13] Barut A.O. and Wilson R., *Phys. Rev.* **A40** (1989) 1340.
- [14] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I., *Integrals and Series. Special Functions.*, (Nauka Publ., Moscow, 1983).
- [15] Abramowitz M. and Stegun I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, (National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, 1964).

Breakup of relativistic $\pi^+\pi^-$ atoms in matter*

L.G. Afanasyev and A.V. Tarasov

Laboratory of Nuclear Problems, Joint Institute for Nuclear Research,
141980 Dubna, Moscow Region, Russia

Abstract

Relativistic motion of atoms formed by π^+ and π^- mesons in a matter is considered. Exact analytic formulas of discrete-discrete transition form factors of hydrogenlike atoms were obtained in a form convenient for numerical calculations. Total and transition cross sections for interaction of $\pi^+\pi^-$ atoms with a matter were calculated in the Born approximation. Evolution of atomic state populations is treated in terms of kinetic equations. The method of calculation allows to obtain populations of the discrete atomic states as well as probability of transfer to the continuous spectrum (ionization). The considered method has allowed to get the first experimental estimation of the $\pi^+\pi^-$ atom lifetime.

1. Introduction

In the paper [1] production of the Coulomb bound states of various elementary particles (elementary atoms) was predicted for high energy processes. Up till now $\pi^+\pi^-$ atom ($A_{2\pi}$) has been observed in pTa interaction at 70 GeV [2]. $A_{2\pi}$ decays dominantly through the charge-exchange process $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^0\pi^0$ (annihilates). An accurate measurement of the $A_{2\pi}$ lifetime τ will allow to check the high precision prediction of the Chiral Perturbation Theory and therefore a low energy limit of QCD [3].

Interaction of $\pi^+\pi^-$ atoms with ordinary atoms is an essential part of that experiment, as observation of $\pi^+\pi^-$ atoms bases on the atom breakup (ionization) while passing through the target where they are produced [1]. In the experiment [2] yield of $\pi^+\pi^-$ pairs from the $A_{2\pi}$ breakup was measured. To obtain the $\pi^+\pi^-$ atom lifetime one should calculate the breakup probability as a function of the atom lifetime with high accuracy, that is, describe a passage of multilevel atomic system through a matter.

2. Interaction of $A_{2\pi}$ with atoms

Being produced in hadron-nucleus interaction, $A_{2\pi}$ moves through a material of the target and interacts, dominantly, via electric field with target atoms (Coulomb interaction). Cross sections of these processes depend on charge as Z^2 so that the interaction of $A_{2\pi}$ with atom electrons is Z times smaller than with the nucleus. For tantalum the interaction with atom electrons (so called incoherent scattering) increases the cross section about 1.5% only [4]. As shown in [5, 6] one should also consider the interaction of $A_{2\pi}$ with magnetic fields that arise due to the Lorentz transformation. However, for example, for the interaction of relativistic $A_{2\pi}$ with Pb the total cross section of the magnetic interaction is only 0.4% [6] of the electric one and so is not considered here.

For the description of the Coulomb interaction of $A_{2\pi}$ with atoms the first Born approximation, which considers only single photon exchange (see for example [7]), was used. Another

* Physics of Atomic Nuclei, 59:12 (1996) 2130–2136. © 2010 МАИК Наука/Interperiodika Publishing. Reproduced with kind permission of Pleiades Publishing, Ltd.

method, the so called Coulomb-modified Glauber approximation, allows to consider all multi-photon exchanges [8]. The accuracy of this method is estimated to go as $(Z^{1/3}\alpha)^2$ and for Ta it is better than 0.2%. It has been shown [8] that all the cross sections calculated at this approach are smaller than the ones corresponding to the Born approximation. For the total cross section of $A_{2\pi}$ in 1S state with Ta this difference does not exceed 7%.

In the first Born approximation the transition and total cross sections of atom-atom interactions are expressed via atom form factors [7]:

$$\sigma_{n_1 l_1 m_1}^{n_2 l_2 m_2} = \frac{1}{4\pi\beta^2} \int_0^\infty |V(q)|^2 |F_{n_1 l_1 m_1}^{n_2 l_2 m_2}(q/2) - F_{n_1 l_1 m_1}^{n_2 l_2 m_2}(-q/2)|^2 dq^2 \quad (1)$$

$$\sigma_{n_1 l_1 m_1}^{tot} = \frac{1}{4\pi\beta^2} \int_0^\infty |V(q)|^2 (2 - 2F_{n_1 l_1 m_1}^{n_1 l_1 m_1}(q)) dq^2. \quad (2)$$

Here β is the velocity of $A_{2\pi}$ ($\hbar = c = 1$); n_1, l_1, m_1 and n_2, l_2, m_2 denote the quantum number of the initial and final states of $A_{2\pi}$; $F_{n_1 l_1 m_1}^{n_2 l_2 m_2}(q)$ is the transition form factor of $A_{2\pi}$; $V(q)$ is the potential energy of interaction with target atoms; q is a transfer momentum.

The Molière parametrization of the Thomas-Fermi potential (T.F.M.) [9] was used for the potential energy $V(q)$.

$$V(q) = 4\pi Z\alpha \left(\frac{0.35}{q^2 + \beta_1^2} + \frac{0.55}{q^2 + \beta_2^2} + \frac{0.10}{q^2 + \beta_3^2} \right) \quad (3)$$

$$\beta_1 = \frac{0.3Z^{1/3}}{0.885a_0}, \quad \beta_2 = 4\beta_1, \quad \beta_3 = 5\beta_2 \quad \text{and} \quad a_0 = 0.529 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

A more accurate representation of $V(q)$ can be achieved with the use of the self-consistent field method of Hartree-Fock [10, 11]. Calculations performed for interaction of $A_{2\pi}$ with various materials using these two methods [4] show that the uncertainty in the cross sections calculated with the T.F.M. parametrization is about 1% for the $A_{2\pi}$ ground state and slightly more for excited states.

For the $A_{2\pi}$ form factors $F_{n_1 l_1 m_1}^{n_2 l_2 m_2}(q)$ there were employed exact analytic expressions discussed below.

Thus the transition and total cross sections for interaction of $A_{2\pi}$ with target atoms have been calculated with an uncertainty not greater than 7%. Using the more accurate methods mentioned above shall allow to calculate the cross sections within accuracy better than 0.5%.

In Table 1 some illustrative values of the interaction cross sections with Ta are given for nS states. Total cross sections increase with increasing n and consequently the size of the excited atoms. By interactions the excited $A_{2\pi}$ mainly transfers to any other excited states and predominantly to states with greater quantum numbers. The probability of excitation also increases with increasing n . So to obtain the probability of the $A_{2\pi}$ breakup in the target one need to take into account an evolution of the atom state population during $A_{2\pi}$ passing through the target.

Table 1: Total cross sections (σ_{nS}^{tot}) of $A_{2\pi}$ nS state interaction with Ta are shown for different principal quantum number n . The ratio $\sum_{n_2 \leq 10} \sigma_{nS}^f / \sigma_{nS}^{tot}$ gives a probability of transfer from nS state to any other discrete state f with the principal quantum number $n_2 \leq 10$. The ratio $\sum_{n \leq n_2 \leq 10} \sigma_{nS}^f / \sigma_{nS}^{tot}$ gives a probability of transfer to any discrete state f with the principal quantum number n_2 obeying $n \leq n_2 \leq 10$ that is the probability of excitation.

n	$\sigma_{nS}^{tot}, \text{cm}^2$	$\sum_{n_2 \leq 10} \sigma_{nS}^f / \sigma_{nS}^{tot}$	$\sum_{n \leq n_2 \leq 10} \sigma_{nS}^f / \sigma_{nS}^{tot}$
1	$3.468 \cdot 10^{-20}$	0.619	0.619
2	$3.128 \cdot 10^{-19}$	0.887	0.887
3	$1.038 \cdot 10^{-18}$	0.940	0.935
4	$2.240 \cdot 10^{-18}$	0.957	0.946
5	$3.812 \cdot 10^{-18}$	0.960	0.944
6	$5.597 \cdot 10^{-18}$	0.958	0.937
7	$7.448 \cdot 10^{-18}$	0.952	0.926

3. Form factors of hydrogenlike atoms

Transition form factors of hydrogenlike atoms are important for a wide range of applications. Explicit expressions of the form factors

$$F_{n_1 l_1 m_1}^{n_2 l_2 m_2}(\vec{q}) = \int \psi_{n_2 l_2 m_2}^*(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} \psi_{n_1 l_1 m_1}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (4)$$

for various initial ($n_1 l_1 m_1$) and final states ($n_2 l_2 m_2$) have been obtained in numerous papers (see for example [12, 13, 14, 15]). A general solution of the problem for arbitrary ($n_1 l_1 m_1$) and ($n_2 l_2 m_2$) has been found in a paper [16] using a group-theoretical method. However the complicated analytic structure of this result makes it unsuitable for practical usage because of long numerical calculations.

Therefore, another approach to calculation of the form factors (4) for arbitrary discrete-discrete transition is developed. Main formulas are given in this section and some details enter in Appendixes A and B.

After integration (4) over angular variables using standard relations of the angular momentum theory (see for example [17]) one has

$$F_{n_1 l_1 m_1}^{n_2 l_2 m_2}(\vec{q}) = N \sum_{s=0}^{s_m} A_s I_s, \quad (5)$$

where

$$N = \frac{(2a)^{l_1+1} (2b)^{l_2+1}}{n_1 + n_2} \left[\lambda_1 \lambda_2 \frac{\Gamma(n_{r_1} + 1)}{\Gamma(n_{r_1} + \lambda_1 + 1)} \frac{\Gamma(n_{r_2} + 1)}{\Gamma(n_{r_2} + \lambda_2 + 1)} \right]^{1/2}, \quad (6)$$

$$a = \frac{n_2}{n_1 + n_2}, \quad b = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad a + b = 1,$$

$$\lambda_1 = 2l_1 + 1, \quad \lambda_2 = 2l_2 + 1, \quad n_{r_1} = n_1 - l_1 - 1, \quad n_{r_2} = n_2 - l_2 - 1,$$

$$A_s = i^{l_1 - l_2} \sqrt{\frac{4\pi}{2l + 1}} \langle l_1, l_2, m_1, -m_2 | l, m \rangle \langle l_1, l_2, 0, 0 | l, 0 \rangle Y_{lm} \left(\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} \right), \quad (7)$$

$$L = l_1 + l_2, \quad l = L - 2s, \quad m = m_1 - m_2, \quad s_m = \min(l_1, l_2),$$

and

$$I_s = \int_0^\infty x^{L+2} j_{L-2s}(\Delta x) e^{-x} L_{n_1}^{\lambda_1}(2ax) L_{n_2}^{\lambda_2}(2bx) dx, \quad (8)$$

$$x = \frac{r(n_1 + n_2)}{r_B n_1 n_2}, \quad \Delta = \frac{q r_B n_1 n_2}{n_1 + n_2}.$$

Here r is a distance between particles in the atom, $r_B = 1/\alpha\mu$ is the Bohr radius of the atom (μ is the reduced atomic mass, α is the fine structure constant), j_l is the spherical Bessel function and L_n^α is the Laguerre polynomial.

The spherical Bessel function j_{L-2s} in (8) can be decomposed into a sum (see for example [18]):

$$j_{L-2s}(\Delta x) = \sum_{p=0}^s B_{ps} \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^p j_{L-p}(\Delta x) \quad (9)$$

$$B_{ps} = (-1)^{s-p} \Gamma(p+1) \binom{s}{p} \binom{L-s+1/2}{p} \quad (10)$$

The product of the Laguerre polynomials in (8) can be expanded in a sum also:

$$L_{n_1}^{\lambda_1}(2ax) L_{n_2}^{\lambda_2}(2bx) = \sum_{k=0}^{k_m} H_k L_k^{\lambda_1 + \lambda_2}(2x) \quad (11)$$

$$H_k = (-1)^{k+m} \binom{m+n}{m} \binom{m+n}{k}^{-1} Q_k^{(n_2, n_1)} Q_{\bar{k}}^{(n_1 + \lambda_1, n_2 + \lambda_2)} \quad (12)$$

where

$$k_m = n_{r_1} + n_{r_2}, \quad \bar{k} = n_{r_1} + n_{r_2} - k, \quad Q_n^{(\mu, \nu)} = P_n^{(\mu-n, \nu-n)}(a-b).$$

Here $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ are the Jacobi polynomials. The derivation of (12) is given in the Appendix A. Functions $Q_n^{(\mu, \nu)}$ can be easily calculated using recurrence relations

$$(n+1)Q_{n+1}^{(\mu, \nu)} - [(\mu-n)b - (\nu-n)a] Q_n^{(\mu, \nu)} + (\mu + \nu - n + 1)ab Q_{n-1}^{(\mu, \nu)} = 0, \quad (13)$$

where $a + b = 1$ and starting values $Q_{-1}^{(\mu, \nu)} = 0$ and $Q_0^{(\mu, \nu)} = 1$.

After substitution of (9) and (11) in (8) the calculation is reduced to the integral having the form:

$$\begin{aligned} I_k^{(L, p)}(\Delta) &= \int_0^\infty x^{L-p+2} j_{L-p}(\Delta x) e^{-x} L_k^{2L+2}(2x) dx = \\ &= 2\Gamma(L-p+2) (2\Delta)^{L-p} w^{L-p+2} \left(C_k^{(L+2, p)}(z) + C_{k-1}^{(L+2, p)}(z) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Here $w = 1/(1 + \Delta^2)$, $z = 1 - 2w$ and

$$C_k^{(\lambda,p)}(z) = \frac{\Gamma(k+2\lambda)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2\lambda)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k, k+2\lambda, \lambda-p \\ \lambda+1/2, \lambda \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2}\right)$$

is the generalized Gegenbauer polynomial which obey the following recurrence relations (see [19])

$$(k+2)C_{k+2}^{(\lambda,p)}(z) - [k+1+2p+2z(k+\lambda-p+1)]C_{k+1}^{(\lambda,p)}(z) + [k+2\lambda-2p+2z(k+\lambda+p)]C_k^{(\lambda,p)}(z) - (k+2\lambda-1)C_{k-1}^{(\lambda,p)}(z) = 0, \quad (15)$$

with starting values $C_{-2}^{(\lambda,p)}(z) = C_{-1}^{(\lambda,p)}(z) = 0$ and $C_0^{(\lambda,p)}(z) = 1$. The derivation of (14) is given in the Appendix B.

Finally for the transition form factors one has

$$F_{n_1 l_1 m_1}^{n_2 l_2 m_2}(\vec{q}) = N \sum_{k=0}^{k_m} H_k \sum_{p=0}^{p_m} D_p \Delta^{L-2p} w^{L-p+2} \left(C_k^{(L+2,p)}(z) + C_{k-1}^{(L+2,p)}(z) \right), \quad (16)$$

where $p_m = s_m$ and

$$D_p = 2^{L+1} \Gamma(L-p+2) \sum_{s=p}^{s_m} B_{ps} A_s.$$

The relation (16) is valid for any choice of the quantization axis. For our case it is suitable to choose this axis along a momentum of the atom in the lab frame. Then the transfer momentum \vec{q} is virtually normal to the quantization axis [5] and A_s in (7) becomes

$$A_s = \frac{2^{-l} \sqrt{\Gamma(l+m+1)\Gamma(l-m+1)}}{\Gamma\left(\frac{l+m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l-m}{2}+1\right)} \times \cos\left[\frac{\pi}{2}(l_1-m_1-l_2+m_2)\right] e^{im\phi_q} \langle l_1, l_2, m_1, -m_2 | l, m \rangle \langle l_1, l_2, 0, 0 | l, 0 \rangle, \quad (17)$$

where ϕ_q is the azimuth angle of the transfer momentum \vec{q} in the selected frame.

It is worth to note that usage of the recurrence relations (13) and (15) is essential for rate and accuracy of calculations.

4. $A_{2\pi}$ passage through the target

Using the calculated transition (excitation and deexcitation) and the total cross sections one can describe the evolution of the atom state populations while passing through the target, taking also into account the $A_{2\pi}$ annihilation. Yield of $\pi^+\pi^-$ pairs from the $A_{2\pi}$ breakup inside the target (named further the probability of the $A_{2\pi}$ breakup) is calculated basing on these populations.

The quantization axis along the atom momentum, used for the form factors calculation, conserves for all subsequent collisions as the atom momentum is much greater than the transfer one. This allows to describe the evolution of the atom state population in a simple way.

With the chosen quantization axis only atomic transitions that conserve Z -parity $P^Z = (-1)^{l-m}$ are permitted [8] (l and m are the orbital and magnetic quantum numbers). The $A_{2\pi}$ atoms are produced in nS states, so they have positive Z -parity. Thus only states with positive Z -parity have nonzero populations and only these states are considered further.

Population of discrete states is described by a set of differential kinetic equations:

$$\frac{dp_i(s)}{ds} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} p_j(s). \quad (18)$$

Here $p_i(s)$ is the probability of $A_{2\pi}$ to be in the state i after travelling a distance s in the matter, a_{ij} is the matrix of inverse lengths of the transition from the state j to the state i . For $i \neq j$ a_{ij} is written

$$a_{ij} = \frac{\sigma_j^i \rho N_0}{A}. \quad (19)$$

Here ρ and A are the density and atomic weight of the target, respectively, N_0 is the Avogadro number. For $i = j$ a_{ii} describes the total decrease of the population of the state i :

$$a_{ii} = -\frac{\sigma_i^{\text{tot}} \rho N_0}{A} - \begin{cases} M_A/p_A c \tau_n & \text{for } nS \text{ states} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

Here the first term is related to the population decrease due to interactions with the target and the second one is related to annihilation (decay). (Elastic scattering is forbidden in the first Born approximation.) M_A and p_A are atom mass and momentum correspondingly, $\tau_n = \tau n^3$ is the lifetime of $A_{2\pi}$ nS states. A decrease of population of any other states due to annihilation has been neglected as well as a decrease of population of all states due to radiation transition because the lifetime for these processes is much greater than the time of flight through the target [1].

The initial condition for the set of equations (18) is given by the probability of $A_{2\pi}$ production with different quantum numbers which proportional to n^{-3} for nS states and zero for all other [1]. The lifetime and momentum of $A_{2\pi}$ are parameters of equations (18). Its solution is reduced to calculation of eigenvalues and eigenvectors of matrix a_{ij} and then to decomposition of initial conditions over the set of eigenvectors.

Since $A_{2\pi}$ can get excited or deexcited at the interaction, the matrix a_{ij} does not show a triangular form like it is in a case of a chain of radiation decays which is described by the analogous set of equations. Therefore an exact solution for any state may only be obtained as a solution of the infinite set of equations. Hence one has to limit the set of equations including only states with the principal quantum number $n \leq n_{\text{max}}$.

The transition cross sections obey the equality $\sigma_i^f = \sigma_j^i$ and so the matrix a_{ij} is symmetric. The cross sections depend on the magnetic quantum numbers of initial and final states m_1 and m_2 as $|m_2 - m_1|$. Moreover, the initial condition for the equations includes the fact that only nS states (with $m = 0$) are not empty. It can be concluded that states with the opposite sign magnetic quantum numbers have equal populations. This allows to exclude the states with negative magnetic quantum numbers from the equation set and thus to reduce a dimension of the set. For $n_{\text{max}} = 7$ the dimension of the matrix a_{ij} reduces from 84 to 50. However the resulting matrix a_{ij} becomes asymmetric.

The solution of equations (18) has been found for all states with $n \leq n_{\max} = 7$. The uncertainty in solution of equation (18) caused by this limit has an influence on states only with n close to n_{\max} , as atoms transfer mainly to states with the nearest quantum number.

Thus populations of all states with $n \leq n_{\max}$ as a function of the path s in the target have been calculated. This function takes into account excitation and deexcitation by interactions with target atoms and $A_{2\pi}$ annihilation. Points of $A_{2\pi}$ production are distributed uniformly over the target thickness. So one has to use the average values over this distribution for all discussed probabilities.

From calculations one can conclude that the sum of population of discrete atomic states P_{dsc} with $n \leq n_{\max}$ is known with precision much better than 1% and the summed population P_n of atomic states with fixed n has an asymptotical behavior $an^{-3} + bn^{-5} + \dots$ at high n . Using this fact, estimation has been obtained for the sum of populations of all other atomic states P_{tail} those were not included in the equation set ("tail" with $n > 7$). An uncertainty in this estimation (about 20%) has little influence on the final results because of the smallness of the "tail" (see (22)).

Atoms annihilate mainly from 1S state [1]. The population of the first few states is known with high accuracy so the probability of $A_{2\pi}$ annihilation P_{anh} is calculated with the same accuracy.

Thus one has calculated the probability of $A_{2\pi}$ stays in discrete state or annihilates while passing through the target. The remainder is the probability of the $A_{2\pi}$ breakup P_{br} :

$$P_{\text{br}} = 1 - P_{\text{dsc}} - P_{\text{tail}} - P_{\text{anh}}. \quad (21)$$

The following values of probabilities were obtained with $\tau = 3.7 \cdot 10^{-15}$ s, the average momentum of $A_{2\pi}$ in the experiment $\langle p_A \rangle = 2.9$ GeV/c and the target thickness of 8 μm Ta.

$$P_{\text{dsc}} = 0.421, \quad P_{\text{tail}} = 0.006, \quad P_{\text{anh}} = 0.159 \quad \text{and} \quad P_{\text{br}} = 0.414 \quad (22)$$

To illustrate the validity of the limit n_{\max} used in these calculations, the value of P_{br} obtained with $n_{\max} = 5$ differs from the above one obtained with $n_{\max} = 7$ by 0.36%. From an analysis of the "tail" one can conclude that the accuracy the P_{br} calculation procedure is estimated not worse than 0.5%. This is much better than that of the precision of the cross sections. Thus the accuracy of P_{br} is limited by the precision of the cross section calculations and is estimated at 7%.

The approach discussed here neglects two effects. The first one is the formation time of atom states. This time is small in comparison with the time between subsequent collisions. Therefore, the formation time has been neglected. This assumption is valid for levels with principal quantum numbers $n \leq 7$. Secondly one neglects possible interference effects between atom states with equal n and m and with orbital quantum numbers l that differ by $\Delta l = 2$. This interference occurs due to the Coulomb degeneration of atom states. Its influence cannot be significant because the interference is permitted only for states with $n \geq 3$ having small populations. These two effects could be considered if one describes the evolution of atom states by quantum mechanical equations in terms of density matrix elements.

The $A_{2\pi}$ breakup probability has been calculated as a function of various parameters to choose conditions for observation of the atoms in the experiment [2]. Some relations are shown in Fig. 1.

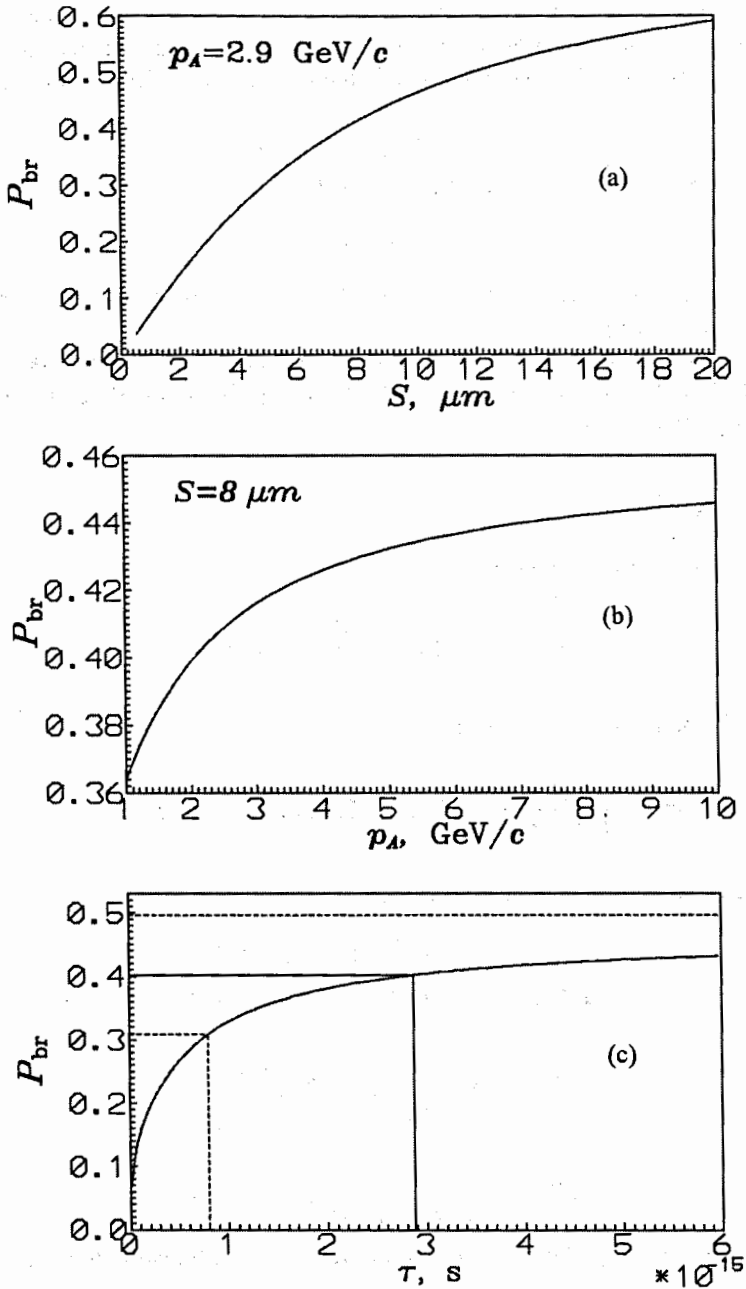


Figure 1: Probability of the $A_{2\pi}$ breakup in the target as a function: (a) of the target thickness for average momentum of $A_{2\pi}$ (p_A) = 2.9 GeV/c; (b) of the atom momentum for the target thickness $S = 8 \mu m$; (c) of the $A_{2\pi}$ lifetime, averaged over the spectrum of observed atoms.

In Fig. 1c the $A_{2\pi}$ breakup probability averaged over the spectrum of atoms, observed in the experiment [2], is shown as a function of the lifetime. Using this function and the measured value of $P_{br} = 0.40 \pm 0.09$ [2] one obtains estimation of the $A_{2\pi}$ lifetime in the ground state

$$\tau = (2.9_{-2.1}^{+\infty}) \cdot 10^{-15} \text{ s} \quad (23)$$

or limitation for the lifetime at 90% confidence level

$$\tau > 0.6 \cdot 10^{-15} \text{ s}. \quad (24)$$

This result agrees with the theoretical value of $\tau = (3.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-15} \text{ s}$ predicted by the Chiral Perturbation Theory.

Authors would like to thank L.L. Nemenov for encouragement of the work. The research described in this publication was made possible in part by Grant No. RFQ000 from the International Science Foundation.

Appendix A

Coefficients H_k of the expansion

$$L_n^\alpha(ax) L_m^\beta(bx) = \sum_{k=0}^{n+m} H_k L_k^\gamma(x), \quad (25)$$

for a and $b > 0$, are given by expression

$$H_k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\gamma+1)} \int_0^\infty x^\gamma e^x L_n^\alpha(ax) L_m^\beta(bx) L_k^\gamma(x) dx. \quad (26)$$

The Laguerre polynomials can be written as

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(ax) &= \hat{D}_t^{(n)} [(1+t)^{\alpha+n} e^{atx}] \\ L_m^\beta(bx) &= \hat{D}_u^{(m)} [(1+u)^{\beta+m} e^{bux}] \end{aligned} \quad (27)$$

where

$$\hat{D}_z^{(s)} f(z) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \left. \frac{d^s f(z)}{dz^s} \right|_{z=0}$$

and

$$L_k^\gamma(x) = \frac{x^{-\gamma} e^x}{\Gamma(k+1)} \frac{d^k}{dx^k} (x^{\gamma+k} e^{-x}).$$

After not complicated integration over x and differentiation with respect to parameters t and u one has

$$\begin{aligned} H_k &= \hat{D}_t^{(n)} \hat{D}_u^{(m)} \left[\frac{(at+bu)^k (1+t)^{\alpha+n} (1+u)^{\beta+m}}{(1+at+bu)^{k+\gamma+1}} \right] = \\ &= \sum_p \binom{k}{p} \binom{\rho+\bar{n}-1}{\bar{n}} \binom{\sigma+\bar{m}-1}{\bar{m}} a^p b^{k-p} F_2(\omega, -\bar{n}, -\bar{m}; \rho, \sigma; a, b), \end{aligned} \quad (28)$$

where

$$\begin{aligned}\bar{n} &= n - p, \quad \bar{m} = m + p - k, \quad \rho = \alpha + p + 1, \\ \sigma &= \beta + k - p + 1, \quad \omega = k + \gamma + 1.\end{aligned}\quad (29)$$

Here F_2 is the Appell function [20]

$$F_2(\omega, -\bar{n}, -\bar{m}; \rho, \sigma; a, b) = \sum_{ij} \frac{(\omega)_{i+j} (-\bar{n})_i (-\bar{m})_j a^i b^j}{(\rho)_i (\sigma)_j \Gamma(i+1) \Gamma(j+1)}.\quad (30)$$

If parameters a, b, α, β and γ obey relations

$$a + b = 1 \quad \text{and} \quad \gamma = \alpha + \beta,\quad (31)$$

then the analytic structure of (28) becomes much-simplified. Using a transformation formula for the functions F_2 [20] and assuming that

$$a < b \quad \text{and} \quad a + b = 1$$

one has

$$\begin{aligned}F_2(\omega, -\bar{n}, -\bar{m}; \rho, \sigma; a, b) &= \\ &= (1-a)^{-\omega} F_2\left(\omega, \rho - \bar{n}, -\bar{m}; \rho, \sigma; \frac{a}{a-1}, \frac{b}{1-a}\right) = \\ &= b^{-\omega} F_2\left(\omega, \rho - \bar{n}, -\bar{m}; \rho, \sigma; -\frac{a}{b}, 1\right) = \\ &= (-1)^{-\bar{m}} b^{-\omega} \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\omega - \sigma + 1)}{\Gamma(\sigma + \bar{m})\Gamma(\omega - \sigma - \bar{m} + 1)} {}_3F_2\left(\omega, \rho + \bar{n}, 1 + \omega - \sigma \mid -\frac{a}{b}\right).\end{aligned}\quad (32)$$

The relation $\gamma = \alpha + \beta$ leads to a change in the arguments of the function ${}_3F_2$: $1 + \omega - \sigma = \rho$. So the following transformations can be done.

$$\begin{aligned}{}_3F_2\left(\omega, \rho + \bar{n}, 1 + \omega - \sigma \mid -\frac{a}{b}\right) &= {}_3F_2\left(\omega, \rho + \bar{n}, \rho \mid -\frac{a}{b}\right) \equiv \\ &\equiv {}_2F_1(\omega, \rho + \bar{n}; \rho - \bar{m}; -a/b) = \\ &= b^{\omega + \bar{n} + \bar{m}} {}_2F_1(\bar{m} - \bar{n}, \rho - \bar{m} - \omega; \rho - \bar{m}; -a/b)\end{aligned}\quad (33)$$

Substituting (29) one can see that no arguments of the function ${}_2F_1$ in (33) depend on the sum index p in (28). It allows to sum (28) over p and leads to the final result for the expansion coefficients H_k

$$H_k = (-1)^{k+m} \binom{m+n}{n} \binom{m+n}{k}^{-1} P_k^{(m-k, n-k)}(b-a) P_{\bar{k}}^{(m+\alpha-\bar{k}, n+\beta-\bar{k})}(b-a).\quad (34)$$

Here $\bar{k} = m + n - k$ and $P_s^{(\mu, \nu)}$ is the Jacobi polynomial.

Appendix B

To calculate the integral

$$I_k^{(L,p)} = \int_0^\infty x^{L-p+2} j_{L-p}(\Delta x) e^{-x} L_k^{2L+2}(2x) dx \quad (35)$$

it is convenient to use the representation of the Laguerre polynomials in the form

$$L_k^{2L+2}(2x) = \hat{D}_t^{(k)} \left[(1-t)^{-2L-3} e^{\frac{-2x}{1-t}} \right], \quad (36)$$

and the tabular integral [20]

$$\int_0^\infty x^{\mu+2} j_\mu(\Delta x) e^{-\alpha x} dx = \frac{2\alpha(2\Delta)^\mu \Gamma(\mu+2)}{(\Delta^2 + \alpha^2)^{\mu+2}}, \quad (37)$$

here

$$\mu = L - p \quad \text{and} \quad \alpha = \frac{1+t}{1-t}.$$

Introducing variables

$$w = \frac{1}{1+\Delta^2}, \quad u = 1 - \alpha^2 = -\frac{4t}{(1-t)^2} \quad \text{and} \quad z = 1 - 2w \quad (38)$$

one obtains

$$I_k^{(L,p)}(\Delta) = 2\Gamma(L-p+2) (2\Delta)^{L-p} w^{L-p+2} \left(C_k^{(L+2,p)}(z) + C_{k-1}^{(L+2,p)}(z) \right). \quad (39)$$

Here $C_k^{(L+2,p)}(z)$ is defined as

$$C_k^{(\lambda,p)}(z) = \hat{D}_t^{(k)} \left[\frac{1}{(1-t)^{2\lambda} (1-uw)^{\lambda-p}} \right], \quad (40)$$

where $\lambda = L + 2$.

Using the identity

$$\frac{1}{(1-uw)^{\lambda-p}} \equiv \frac{1}{B(\lambda-p,p)} \int_0^1 \frac{v^{\lambda-p-1} (1-p)^{p-1} dv}{(1-uvw)^\lambda}, \quad (41)$$

the definition of the Gegenbauer polynomial for $\bar{z} = 1 - 2vw$

$$\begin{aligned} \hat{D}_t^{(k)} \left[\frac{1}{(1-2t\bar{z}+t^2)^\lambda} \right] &= C_k^\lambda(\bar{z}) = \\ &= \frac{\Gamma(k+2\lambda)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2\lambda)} {}_2F_1 \left(-k, k+2\lambda; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-\bar{z}}{2} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

and the representation of the ${}_3F_2$ function in the form [19]

$$\frac{1}{B(\mu, \nu - \mu)} \int_0^1 v^{\mu-1} (1-v)^{\nu-\mu-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; vw) dv = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta, \mu \\ \gamma, \nu \end{matrix} \middle| w \right), \quad (43)$$

finally one has for $C_k^{(\lambda, p)}$ in (40)

$$C_k^{(\lambda, p)}(z) = \frac{\Gamma(k+2\lambda)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2\lambda)} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, k+2\lambda, \lambda-p \\ \lambda+1/2, \lambda \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) \quad (44)$$

The polynomials $C_k^{(\lambda, p)}$ obey the recurrence relations (15).

References

- [1] *Nemenov L.L.* // *Yad. Fiz.*, 1985, V.41, P.980; *Sov. J. Nucl. Phys.*, 1985, V.41, P.629.
- [2] *Afanasyev L.G. et al.* // *Phys. Lett.*, 1993, V.B308, P.200; *Phys. Lett.*, 1994, V.338B, P.478.
- [3] *B.Adeva et al.* // Lifetime measurement of $\pi^+\pi^-$ atoms to test low energy QCD predictions., Proposal to the SPSLC, CERN/SPSLC 95-1, SPSLC/P 284, Geneva 1995.
- [4] *Afanasyev L.G.* // Preprint JINR E2-91-578, Dubna, 1991; JINR B1-2-91-572, Dubna, 1991.
- [5] *Mrówczyński S.* // *Phys.Rev.*, 1987, V.D36, P.1520.
- [6] *Denisenko K.G. and Mrówczyński S.* // *Phys.Rev.*, 1987, V.D36, P.1529.
- [7] *Mrówczyński S.* // *Phys.Rev.*, 1986, V.A33, P.1549.
- [8] *Tarasov A.V. and Christova I.U.* // JINR Communication P2-91-10, Dubna, 1991.
- [9] *G. Molière* // *Z.Naturforsch.*, 1947, V.2A, P.3.
- [10] *Hubbel J.H. et al.* // *J.Phys.Chem.Ref.Data*, 1975, V.4, P.471.
- [11] *Hubbel J.H. and Overbo I.* // *J.Phys.Chem.Ref.Data*, 1979, V.8, P.69.
- [12] *Massey H.S.W., Burhop E.H.S. and Gilbody H.G.* // *Electronic and Ionic Impact Phenomena*, 2nd ed., Oxford University Press, 1969, Volume I, Chapter 7 and references therein.
- [13] *Omidvar K.* // *Phys.Rev.*, 1969, V.188, P.140, and references therein.
- [14] *Afanasyev L.G. and Tarasov A.V.* // Preprint JINR E4-93-293, Dubna, 1993.
- [15] *Afanasyev L.G.* // to appear in *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 1995 V61.
- [16] *Barut A.O. and Wilson R.* // *Phys.Rev.*, 1989, V.A40, P.1340.
- [17] *Landau L.D. and Lifshitz E.M.* // *Quantum Mechanics*, Nauka Publication, Moscow, 1974.
- [18] *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A. and Marichev O.I.* // *Integrals and Series. Special Functions*. Nauka Publication, Moscow, 1983, P.636.
- [19] *Luke Y.L.* // *Mathematical functions and their approximation*. Academic Press Inc. New York, San Francisco, London 1975.
- [20] *Gradshteyn I.S. and Ryzhik I.M.* // *Tables of Integrals, Series and Products*, 5th edition, Nauka Publication, Moscow, 1971.

Полные сечения взаимодействия водородоподобных атомов с атомами вещества *

О.О. Воскресенская¹, С.Р. Геворкян² и А.В. Тарасов¹

¹Лаборатория ядерных проблем, Объединенный Институт Ядерных Исследований, Дубна, Московская область, 141980, Россия

²Ереванский Физический Институт

Аннотация

В рамках эйконального приближения получено аналитическое выражение для полных сечений кулоновского взаимодействия водородоподобных атомов с атомами мишени. Показано, что для компактных атомов (размеры которых много меньше размеров атомов мишени) поправки к борновскому приближению по своей структуре схожи с формулой Бете—Блоха для ионизационных потерь в веществе и формулами Бете—Максимона для тормозного излучения и образования пар в кулоновском поле атома. При рассеянии на мишенях с большими Z эти поправки становятся существенными, и их учет является необходимым при определении времени жизни водородоподобных атомов из экспериментов на ядерных мишенях.

Задача систематического анализа характеристик взаимодействия элементарных водородоподобных атомов с веществом приобретает особую актуальность в связи с предполагаемым проведением на SPSLC CERN эксперимента [1] по измерению времени жизни пиония τ_0 в основном $1S$ -состоянии с точностью ~ 10 процентов. Особое внимание должно быть уделено тщательному расчету полных сечений взаимодействия пиония в $1S$ -состоянии с атомами мишени σ_{100}^{tot} , поскольку неопределенность в значении этой величины напрямую входит в ошибку измеряемого времени жизни [2] $n_0 \Delta \sigma_{100}^{tot} = \Delta [1/(\tau_0 v \gamma)]$ (n_0 – число атомов мишени в единице объема, v и γ – скорость и лоренц-фактор атомов пиония).

В борновском приближении величина σ_{100}^{tot} рассчитывалась в работах [3,4], причем в последней анализировалась чувствительность значения этой величины к выбору модели атомного формфактора мишени (модель Томаса—Ферми, модель Хартри—Фока). Поскольку в эксперименте предполагается использование мишеней с $Z \gg 1$, важное значение приобретает учет поправок к результату борновского приближения для σ_{100}^{tot} , обусловленных вкладом многофотонных обменов. Эта задача может быть решена в рамках эйконального приближения.

Согласно [5], полные сечения взаимодействия атомов пиония с атомами вещества в этом приближении даются выражением:

$$\sigma_{nlm}^{tot} = 2Re \int d^2 b d^3 r |\Psi_{nlm}(\vec{r})|^2 \Gamma(\vec{b}, \vec{s}), \quad (1)$$

$$\Gamma(\vec{b}, \vec{s}) = 1 - \exp[i(\chi_+ - \chi_-)],$$

$$\chi_{\pm} = \chi(\vec{b}_{\pm}) = \frac{e}{\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sqrt{\vec{b}_{\pm}^2 + \xi^2} d\xi = \frac{2Ze^2}{\hbar v} \int_{b_{\pm}}^{\infty} \ln \frac{b_{\pm}}{\rho} n(\rho) \rho d\rho,$$

$$b_{\pm} = |\vec{b}_{\pm}|, \quad \vec{b}_{\pm} = \vec{b} \pm \vec{s}/2, \quad \vec{s} = \vec{r} - \frac{\vec{r}v}{v^2}, \quad \int_0^{\infty} n(\rho) \rho d\rho = 1.$$

*Ядерная физика, 1998, т. 61, № 9, с. 1628–1630. © 1998 МАИК Наука/Interperiodica Publishing. Печатается с разрешения Академиздатцентра “Наука” РАН.

В этом выражении U – экранированный кулоновский потенциал атома мишени; $n(\rho)$ – плотность распределения электронов в плоскости прицельного параметра (плоскости ортогональной скорости пиония \vec{v}); \vec{b} и \vec{s} – проекции радиусов векторов \vec{R} (расстояние между центрами тяжести атома мишени и пиония) и \vec{r} (расстояние между π^+ и π^- на плоскости прицельного параметра); Ψ_{nlm} -волновая функция пиония в состоянии nlm .

Для произвольных nlm расчет величины σ_{nlm}^{tot} сопряжен с достаточно трудоемкими расчетами на ЭВМ. Однако поправки к результату борновского приближения для σ_{100}^{tot} могут быть вычислены аналитически с достаточно высокой степенью точности. Это обусловлено тем, что характерные размеры атома пиония в основном состоянии ($R_\pi \sim 1/(m_\pi\alpha) = 2 \times 10^{-11}$ см) много меньше характерных размеров атома вещества ($R \sim 1/(m_e\alpha Z^{1/3}) \sim 5 \times 10^{-9} Z^{-1/3}$ см).

Для получения аналитического выражения из (1) необходимо вычисление интегралов вида

$$I(\vec{s}) = \int \Gamma(\vec{b}, \vec{s}) d^2b = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty b db \Gamma(\vec{b}, \vec{s}, \cos \phi), \quad (2)$$

где $\cos \phi = \vec{b}\vec{s}/(bs)$. Удобно разбить область интегрирования по величине прицельного параметра b на две части:

- 1) $b_0 \leq b \leq \infty$ (соударения с большими прицельными параметрами),
- 2) $0 \leq b \leq b_0$ (соударения с малыми прицельными параметрами).

При этом величина b_0 принадлежит интервалу $R_\pi \ll b_0 \ll R$.

Рассмотрим сначала область больших прицельных параметров. Разлагая в ряд разность фаз, входящую в (1), получим:

$$\begin{aligned} \chi_+ - \chi_- &= \chi(\vec{b} + \vec{s}/2) - \chi(\vec{b} - \vec{s}/2) \\ &= \vec{s}\nabla\chi(\vec{b}) + O\left(\frac{s^2}{b_0^2}\right) = s \frac{d\chi}{db} \cos \phi + O\left(\frac{s^2}{b_0^2}\right), \\ I_1(s) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{b_0}^\infty b db \Gamma(b, s, \cos \phi) = \frac{\pi s^2}{2} \left[\int_{b_0}^\infty b db \left| \frac{d\chi(b)}{db} \right|^2 + O\left(\frac{s^2}{b_0^2}\right) \right] \\ &= 2\pi s^2 \eta^2 \left[\int_{b_0}^\infty \frac{db}{b} \left| \int_b^\infty n(\rho) \rho d\rho \right|^2 + O\left(\frac{s^2}{b_0^2}\right) \right] \\ &= 2\pi s^2 \eta^2 \left[\ln \frac{\bar{R}}{b_0} \left(1 + O\left(\frac{b_0^2}{\bar{R}^2}\right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

В этом выражении $\bar{R} = \nu R$, а величина ν определяется из условия

$$\int_0^\infty \ln \frac{\bar{R}}{b} n(b) \int_b^\infty n(\rho) \rho d\rho b db = 0, \quad \nu \sim 1, \quad \eta = \frac{Ze^2}{\hbar v}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению вклада близких соударений. Очевидно, что в этой области прицельных параметров ($b \leq b_0$) можно пренебречь эффектами экранирования кулоновского поля ядра незначительным ($\sim b_0^2/R^2$) числом электронов, находящихся в непосредственной близости от ядра, и считать, что $\chi_+ - \chi_- = 2\eta \ln[b_+/b_-]$. Тогда

выражение для функции профиля в этой области принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\Gamma(\vec{b}, \vec{s}) &= 1 - \left(\frac{b_+}{b_-}\right)^{2i\eta} = -iu\eta_2 F_1(1 - i\eta; 1; 2; -u) \\ &= \frac{-i\eta}{|\Gamma(1 - i\eta)|^2} \int_0^1 dx x^{-i\eta} (1-x)^{i\eta} \frac{u}{1+ux},\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$u = \frac{b_+^2}{b_-^2} - 1 = \frac{2\vec{b}\vec{s}}{|\vec{b} - \vec{s}/2|^2}.$$

Используя представление (4), можно проинтегрировать выражение (1) в области близких соударений по углу и прицельному параметру:

$$I_2(s) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{b_0} b db \Gamma(\vec{b}, \vec{s}) = \frac{-i\eta}{|\Gamma(1 - i\eta)|^2} \int_0^1 dx x^{-i\eta} (1-x)^{i\eta} \lambda(b_0, s, x), \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\lambda(b_0, s, x) &= \int_0^{b_0} b db \int_0^{2\pi} d\phi \frac{2\vec{b}\vec{s}}{(\vec{b} - \vec{s}/2)^2 + 2\vec{b}\vec{s}x} \\ &= \frac{s^2}{2} t \left[\frac{1}{V(0, s, t)} - \frac{1}{V(b_0, s, t)} + \ln \frac{V(0, s, t)}{V(b_0, s, t)} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(b, s, t) &= \frac{w + (w^2 + s^2 t^2 (1 - b^2))^{1/2}}{s^2 (1 - b^2)}, \quad w = 2b^2 + \frac{s^2}{2(1 - 2t^2)}, \\ t &= 2x - 1.\end{aligned}$$

Пренебрегая в $\lambda(b_0, s, t)$ величинами, исчезающими в пределе $(s^2/b_0^2) \rightarrow 0$, получим:

$$\lambda(b_0, s, x) = \frac{s^2}{2} (1 - 2x) \left[\ln \frac{b_0^2}{s^2 x (1 - x)} - 1 + O\left(\frac{s^2}{b_0^2}\right) \right].$$

В результате величину $I_2(s)$ можно представить в следующем виде:

$$I_2(s) = 2\pi s^2 \eta^2 \left[\ln \frac{b_0}{s} + 1 - \text{Re}[\psi(1 + i\eta) - \psi(1)] \right]. \quad (6)$$

Таким образом, суммарный вклад от соударений с близкими и далекими прицельными параметрами $I(s) = I_1(s) + I_2(s)$ имеет вид:

$$I(s) = 2\pi s^2 \eta^2 \left[\ln \frac{\bar{R}}{s} + 1 - \text{Re}[\psi(1 + i\eta) - \psi(1)] \right], \quad (7)$$

где $\psi(z) = d \ln \Gamma(z) / dz$. Для нахождения полного сечения σ_{100}^{tot} необходимо, согласно выражению (1), усреднить выражение (7) по волновым функциям основного состояния атома:

$$\sigma_{100}^{tot} = 4\pi \eta^2 \langle s^2 \rangle_{100} \left[\ln \frac{\bar{R}}{\bar{R}_\pi} - \text{Re}[\psi(1 + i\eta) - \psi(1)] \right], \quad (8)$$

$$\langle s^2 \rangle_{100} = \int |\psi(\vec{r})_{100}|^2 s^2 d^3r, \quad \bar{R}_\pi = \nu_1 R_\pi, \quad \nu \sim 1.$$

Поправка к борновскому приближению за счет многофотонных обменов (второе слагаемое в (8)) по своей структуре схожа с формулами Бете—Блоха для ионизационных потерь [6] и формулами Бете—Максимона для тормозного излучения и рождения пар в кулоновском поле атома [7]. Из ее представления в виде ряда

$$\text{Re}[\psi(1+i\eta) - \psi(1)] = \eta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k^2 + \eta^2)}$$

видно, что в (8) учтены все возможные многофотонные обмены. Численно эти поправки не малы. Так, например, если в качестве мишени использовать тантал ($Z=73$), как это планируется в эксперименте [1], то вклад в (8) от многофотонных обменов составляет величину ~ 7 процентов, так что их учет является необходимым при определении времени жизни водородоподобных атомов из экспериментов на ядерных мишенях.

Выражение (8) является основным результатом настоящей работы. Оно справедливо не только для полных сечений взаимодействия атомов пиония в основном состоянии с атомами мишени, но и для полных сечений взаимодействия любых водородоподобных атомов и их возбужденных состояний с атомами мишени, при условии, что размеры водородоподобных атомов гораздо меньше размеров атомов мишени. Примером таких систем могут служить атомы, состоящие из K^+K^- и $P\bar{P}$, размеры которых гораздо меньше размеров атомов пиония, что позволяет использовать полученное выше выражение для расчетов не только основных состояний этих атомов, но и их возбужденных состояний.

Список литературы

- [1] B. Adeva et al. Lifetime measurement of $\pi^+\pi^-$ atoms to test low energy QCD predictions., Proposal to the SPSLC, CERN/SPSLC 95-1, SPSLC/P 284, Geneva, 1995.
- [2] Л.Г. Афанасьев, А.В. Тарасов, Ядерная физика, т. 59, вып. 12, с. 2240, 1996.
- [3] S. Mrowczynski, Phys. Rev., D 36, p. 1520, 1987.
- [4] L.G. Afanasyev, Preprint JINR E2-91-578, Dubna, 1991.
- [5] А.В. Тарасов, И.У. Христова, Сообщение ОИЯИ P2-91-10, Дубна, 1991.
- [6] H. Bethe and J. Ashkin, In: Experimental Nuclear Physics v.1, Ed. E. Segre, (Wiley, New York, 1953).
- [7] H. Bethe and L. Maximon, Phys. Rev., v. 93, p. 768, 1954.

Challenges of nuclear shadowing in DIS *

B.Z. Kopeliovich^{1,3}, J. Raufeisen² and A.V. Tarasov^{2,3}

¹Max-Planck Institut für Kernphysik, Postfach 103980, 69029 Heidelberg, Germany

²Institut für Theoretische Physik der Universität, Philosophenweg 19, Heidelberg, Germany

³Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980 Moscow Region, Russia

Abstract

Nuclear shadowing in DIS at moderately small x is suppressed by the nuclear form factor and depends on the effective mass of a hadronic fluctuation of the virtual photon. We propose a solution to the problems (i) of how to combine a definite transverse size of the fluctuation with a definite effective mass, and (ii) of how to include the nuclear form factor in the higher multiple scattering terms. Comparison of the numerical results with known approximations shows a substantial difference.

1. Introduction

Shadowing in deep-inelastic scattering (DIS) off nuclei is a hot topic for the last two decades. In the infinite momentum frame of the nucleus it can be interpreted as a result of parton fusion leading to a diminishing parton density at low Bjorken x [1] - [4]. A more intuitive picture arises in the rest frame of the nucleus where the same phenomenon looks like nuclear shadowing of hadronic fluctuations of the virtual photon [5] - [12]. To crystallize the problem and its solution we restrict ourselves in this paper to only quark-antiquark fluctuations of the photon, neglecting those higher Fock components which contain gluons and $q\bar{q}$ pairs from the sea. The lifetime of the $q\bar{q}$ fluctuation (called coherence time) is given by

$$t_c = \frac{2\nu}{Q^2 + M^2} \quad (1)$$

where ν is the photon energy, Q^2 its virtuality and M is the effective mass of the $q\bar{q}$ pair.

Provided that the coherence time is much longer than the nuclear radius, $t_c \gg R_A$, the total cross section on a nucleus reads [13],

$$\begin{aligned} \sigma_{tot}^{\gamma^*A}(x, Q^2) &= 2 \int d^2b \int d^2r G_{\gamma^*}(Q^2, r) \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma(r) T(b) \right] \right\} \\ &\equiv 2 \int d^2b \left\{ 1 - \left\langle \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma(r) T(b) \right] \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Here $G_{\gamma^*}(Q^2, r)$ characterizes the probability for the photon to develop a $q\bar{q}$ fluctuation with transverse separation r . The condition $t_c \gg R_A$ insures that the r does not vary during propagation through the nucleus (Lorentz time dilation). Then the $q\bar{q}$ pair with a definite transverse separation is an eigenstate of the interaction with the eigenvalue of the total cross section $\sigma(r)$. Therefore, one can apply the eikonal expression (2) for the interaction with the nucleus. The nuclear thickness function $T(b) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho_A(b, z)$ is the integral of nuclear density over longitudinal coordinate z and depends on the impact parameter b .

*Phys. Lett. B440 (1998) 151-156. © 1998 Elsevier B.V. Reproduced by permission of Elsevier B.V.

The color dipole cross section $\sigma(r)$ introduced in [13] vanishes like r^2 at small $r \rightarrow 0$ due to color screening. This is the heart of the phenomenon called nowadays color transparency [14, 13, 15]. For this reason nuclear shadowing in (2) is dominated by large size fluctuations corresponding to highly asymmetric sharing of the longitudinal momentum carried by the q and \bar{q} [16, 7, 9, 12]. This leads to Q^2 scaling of shadowing.

Note that the averaging of the whole exponential in (2) makes this expression different from the Glauber eikonal approximation where $\sigma(r)$ is averaged in the exponent. The difference is known as Gribov's inelastic corrections [17]. In the case of DIS the Glauber approximation does not make sense, and the whole cross section is due to the inelastic shadowing.

For the other case, $t_c \sim R_A$, one has to take into account the variation of r during the propagation of the $q\bar{q}$ fluctuation through the nucleus. At present this can only be done for the double scattering term [12] in the expansion of the exponential in (2),

$$\frac{\sigma_{tot}^{\gamma^* A}}{\sigma_{tot}^{\gamma^* N}} \approx 1 - \frac{1}{4} \frac{\langle \sigma^2(r) \rangle}{\langle \sigma(r) \rangle} \langle T \rangle \int d^2b F_A^2(q, b) + \dots, \quad (3)$$

or in hadronic representation [18],

$$\frac{\sigma_{tot}^{\gamma^* A}}{\sigma_{tot}^{\gamma^* N}} \approx 1 - \frac{1}{4\pi\sigma_{tot}^{\gamma^* N}} \langle T \rangle \int d^2b \int dM^2 \frac{d\sigma(\gamma^* N \rightarrow XN)}{dM^2 dt} \Big|_{t=0} F_A^2(q, b) + \dots, \quad (4)$$

where the mean nuclear thickness and the formfactor read,

$$\langle T \rangle = \frac{1}{A} \int d^2b T^2(b), \quad (5)$$

$$F_A(q, b) = \frac{1}{\langle T \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho_A(b, z) e^{iqz}, \quad (6)$$

with longitudinal momentum transfer $q = 1/t_c$ given by (1). In the case of (3) the uncertain fluctuation mass is fixed at $M^2 = Q^2$, $q = 2m_N x$. Two expressions (3) and (4) are related since the integrated forward diffractive dissociation cross section $\gamma^* N \rightarrow XN$ equals to $\langle \sigma^2 \rangle / 16\pi$.

There are two problems remaining which are under discussion:

- How the nuclear formfactor can be included in the higher order scattering terms which are of great importance for heavy nuclei? For instance, the shadowing term in (3), (4) for lead is of the order of one at low x , so the need of the higher order terms is obvious.
- Even for the double scattering term in (3) it is still unclear which argument should enter the formfactor. Indeed, the effective mass of the $q\bar{q}$ fluctuation needed for the coherence time in (1) cannot be defined in the quark representation with a definite $q\bar{q}$ separation. On the other hand, Eq. (4) exhibits an explicit dependence on M_X and the longitudinal momentum transfer is known. However, unknown in this case is the absorptive cross section of the intermediate state X .

We suggest a solution of both problems in the next section. The goal of this paper is restricted to the study of the difference between the predictions of the correct quantum-mechanical

treatment of nuclear shadowing and known approximations. We do it on an example of the valence $q\bar{q}$ part of the photon and neglect the higher Fock components containing gluons and sea quarks, which may be important if to compare with data especially at very low x . Nuclear anti-shadowing effect is omitted as well, since we believe it is beyond the shadowing dynamics (e.g. bound nucleon swelling). Numerical results and a comparison with the standard approach are presented in section 3.

2. The Green function of a $q\bar{q}$ pair in nuclear medium

We start with the generalizing of eq. (2) for the case $l_c \leq R_A$,

$$\sigma_{tot}^{\gamma^* A}(x, Q^2) = \int d^2b \int_0^1 d\alpha \sigma_{tot}^{\gamma^* A}(x, Q^2; b, \alpha), \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} \sigma_{tot}^{\gamma^* A}(x, Q^2; b, \alpha) &= T(b) \int d^2r |\Psi_{\gamma^*}(\vec{r}, \alpha)|^2 \sigma(r) \\ &- 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \rho_A(b, z_1) \int_{z_1}^{\infty} dz_2 \rho_A(b, z_2) A(z_1, z_2, \alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

The first term in r.h.s. of (8) corresponds to the second, lowest order in $\sigma(r)T(b)$, term in expansion of the exponential in (2). The shadowing terms are contained in the second term in (8). $\Psi_{\gamma^*}(\vec{r}, \alpha)$ is the (non-normalized) wave function of the $q\bar{q}$ fluctuation of the virtual photon, where α is the fraction of the light-cone momentum of the photon carried by the quark. An explicit expression of transverse and longitudinally polarized photons can be found in [19, 9].

The function $A(z_1, z_2, \alpha)$ in (8) reads,

$$A(z_1, z_2, \alpha) = \frac{1}{4} \int d^2r_1 d^2r_2 \Psi_{\gamma^*}^*(\vec{r}_2, \alpha) W(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1) \Psi_{\gamma^*}(\vec{r}_1, \alpha) \sigma(r_2) \sigma(r_1) e^{iq_{min}(z_2 - z_1)}, \quad (9)$$

with

$$q_{min} = \frac{Q^2 \alpha (1 - \alpha) + m_q^2}{2\nu \alpha (1 - \alpha)}. \quad (10)$$

This expression was first suggested in unpublished paper [20].

The second (shadowing) term in (8) is illustrated in fig. 1. At the point z_1 the photon diffractively produces the $q\bar{q}$ pair ($\gamma^* N \rightarrow q\bar{q}N$) with transverse separation \vec{r}_1 . The pair propagates through the nucleus along arbitrarily curved trajectories (should be summed over) and arrives at the point z_2 with a separation \vec{r}_2 . The initial and the final separations are controlled by the distribution amplitude $\Psi_{\gamma^*}(\vec{r})$. While passing the nucleus the $q\bar{q}$ pair interacts with bound nucleons via the cross section $\sigma(r)$ which depends on the local separation \vec{r} . The function $W(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1)$ describing the propagation of the pair from z_1 to z_2 also includes that part of the phase shift between the initial and the final photons, which is due to transverse motion of the quarks, while longitudinal motion is already included in (10) via the exponential.

Thus, Eq. (8) does not suffer from either of the two problems of the approximations (3) - (4). The longitudinal momentum transfer is known and all the multiple interactions are included.

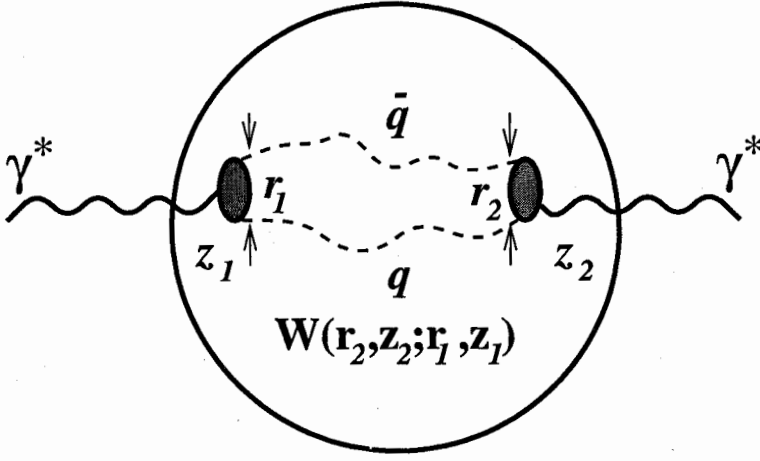


Figure 1: A cartoon for the shadowing (negative) term in (8). The Green function $W(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1)$ results from the summation over different paths of the $q\bar{q}$ pair propagation through the nucleus.

The propagation function $W(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1)$ in (9) satisfies the equation [20],

$$i \frac{\partial W(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1)}{\partial z_2} = -\frac{\Delta(r_2)}{2\nu\alpha(1-\alpha)} W(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1) - \frac{i}{2} \sigma(r_2) \rho_A(b, z_2) W(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1), \quad (11)$$

with the boundary condition $W(\vec{r}_2, z_1; \vec{r}_1, z_1) = \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. The Laplacian $\Delta(r_2)$ acts on the coordinate \vec{r}_2 . The full derivation of (11) will be given elsewhere. Here we only notice that it looks natural like Schrödinger equation with the kinetic term $\Delta/[2\nu\alpha(1-\alpha)]$ which takes care of the varying effective mass of the $q\bar{q}$ pair and provides a proper phase shift, and z_2 plays the role of the time. The imaginary part of the optical potential describes the absorptive process.

In the "frozen" limit $\nu \rightarrow \infty$ the kinetic term in (11) can be neglected and

$$W(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1) = \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma(r_2) \int_{z_1}^{z_2} dz \rho_A(b, z) \right]. \quad (12)$$

When this expression is substituted into (8) - (9) and with $q_{min} \rightarrow 0$ one arrives at result (2) with $G_{\gamma^*}(Q^2, r) = \int_0^1 d\alpha |\Psi_{\gamma^*}(\vec{r}, \alpha)|^2$.

We can also recover the approximation (3) - (4) if one neglects the absorption of the $q\bar{q}$ pair in the medium. Then W becomes the Green function of a free motion,

$$\bullet \quad W(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1)|_{\sigma \rightarrow 0} = \frac{1}{2\pi} \int d^2 k \exp \left[i\vec{k}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{ik^2(z_2 - z_1)}{2\nu\alpha(1-\alpha)} \right], \quad (13)$$

where \vec{k} is the transverse momentum of the quark.

With this expression the shadowing term in (8) reproduces the second term in (4). Indeed, the amplitude of the photon diffractive dissociation in the plane wave approximation reads,

$$f_{dd}(k) = \frac{1}{2} \int d^2r \Psi_{\gamma^*}(\vec{r}, \alpha) \sigma(r) e^{i\vec{k}\vec{r}}. \quad (14)$$

Therefore, (9) can be represented as,

$$A(z_1, z_2, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int d^2k |f_{dd}(k)|^2 \exp \left[(z_2 - z_1) \frac{Q^2 \alpha (1 - \alpha) + m_q^2 + k^2}{2\nu \alpha (1 - \alpha)} \right] \quad (15)$$

Taking into account that $M_X^2 = (m_q^2 + k^2)/\alpha(1 - \alpha)$ is the effective mass squared of the $q\bar{q}$ pair and substituting (15) to (8) we arrive at eq. (4).

3. Numerical results

We calculate nuclear shadowing for calcium and lead from the above displayed equations. As was mentioned in the Introduction, only the valence $q\bar{q}$ -part of the photon is taken into account, but the higher Fock components containing gluons and sea quarks are neglected, as well as the effect of anti-shadowing. Therefore, we do not compare our results with data, but only to the standard approach (3) - (4).

We do the same calculations again, using the free Green function (13). This makes it possible to disentangle between the influence of higher scattering terms and the formfactor.

We approximate the cross section by the dipole form $\sigma(r) = Cr^2$, $C \approx 3$, which is a good approximation at $r > 0.2 - 0.3 fm$ [21]. However, we calculated the proton structure function $F_2(x, Q^2)$ perturbatively (we fixed the quark masses at $m_q = 0.3 GeV$, $m_s = 0.45 GeV$ and $m_c = 1.5 GeV$) what leads to an additional logarithmic r -dependence at small r . This is important since results in the double-log Q^2 dependence of F_2 . Nuclear shadowing, however, is dominated by soft fluctuations with large separation [12], therefore, the dipole form of the cross section is sufficiently accurate.

We use a uniform density for all nuclei, $\rho_A = 0.16 fm^{-3}$, what is sufficient for our purpose, comparison with the standard approach calculated under the same assumption.

Within these approximations it is possible to solve (11) analytically. The solution is the harmonic oscillator Green function with a complex frequency [21],

$$W(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1) = \frac{a}{2\pi \sinh(\omega \Delta z)} \exp \left\{ -\frac{a}{2} \left[(r_2^2 + r_1^2) \coth(\omega \Delta z) - \frac{2\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1}{\sinh(\omega \Delta z)} \right] \right\}, \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta z &= z_2 - z_1 \\ \omega^2 &= i \frac{C\rho_A}{\nu\alpha(1-\alpha)} \\ a^2 &= -i C\rho_A\nu\alpha(1-\alpha). \end{aligned} \quad (17)$$

This formal solution properly accounts for all multiple scatterings and finite lifetime of hadronic fluctuations of the photon, as well as for fluctuations of the transverse separation of the $q\bar{q}$ pair.

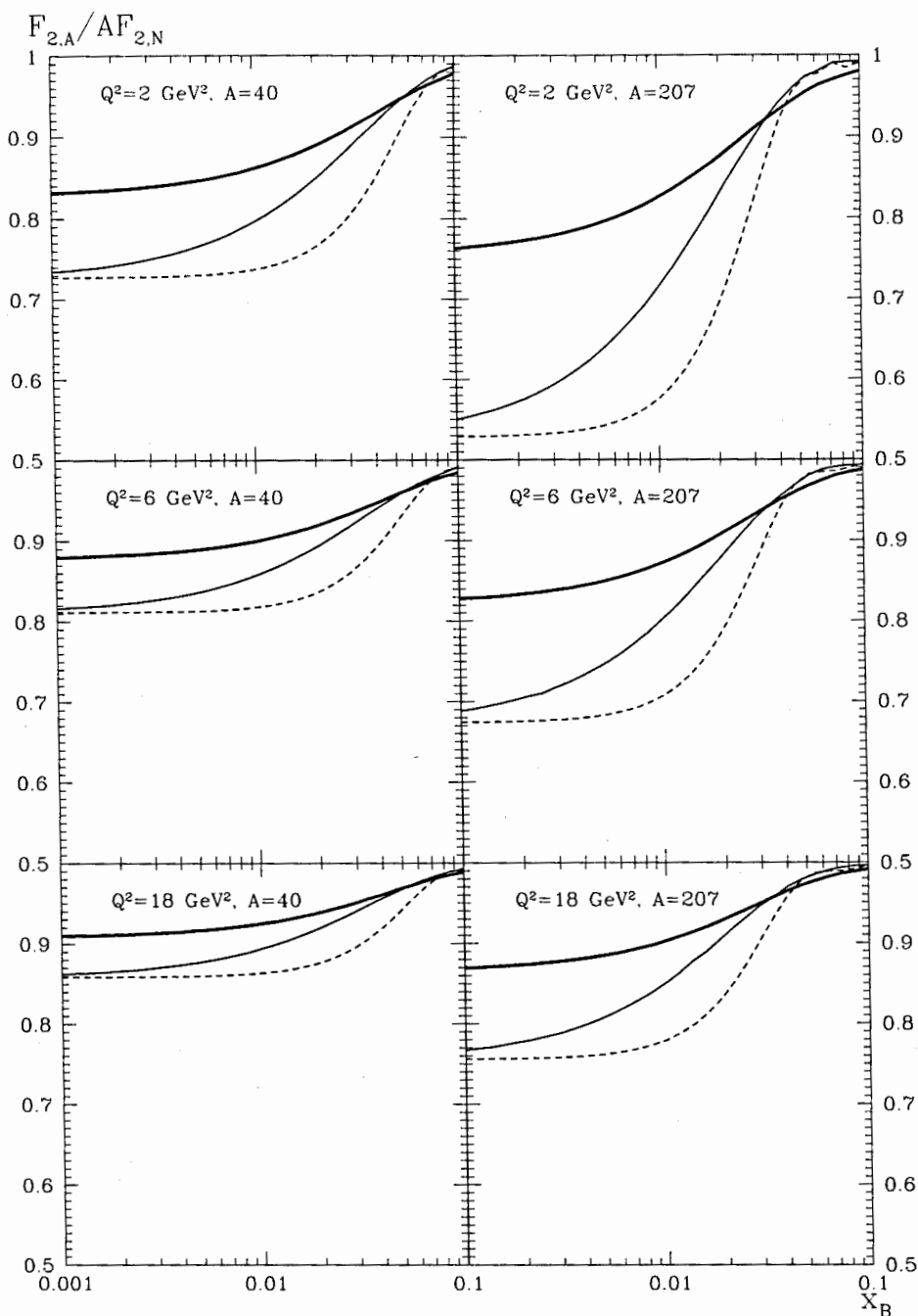


Figure 2: Nuclear shadowing for calcium and lead. The dotted curve is calculated in the standard approach (3). The thin solid curve corresponds to the double scattering approximation with the free Green function, (13), and the thick solid curve shows the full calculation, (16).

The results of calculations are shown in fig. 2. The dashed curves show predictions of (3) which we call standard approach. The mean values of σ^2 and σ are calculated using the same $q\bar{q}$ distribution functions [19, 9] as in (9) and the intermediate state mass is fixed at $M^2 = Q^2$. At low $x < 0.01$ shadowing saturates because $q = 2m_N x \ll 1/R_A$. The thin solid curve also corresponds to a double scattering approximation, *i.e.* absorption (the second term in (11)) is omitted. However, the formfactor is treated properly, *i.e.* the kinetic term in (11) taking into account the relative transverse motion of the $q\bar{q}$ pair, correctly reproduces the phase shift. The difference between the curves is substantial. The thin solid curve does not show saturation even at $x = 0.001$.

The next step is to do the full calculations and study importance of the higher order rescattering terms in (11). The results are shown by the thick solid curves. Higher order scattering brings another substantial deviation (especially for lead) from the standard approach. At very low x the curves saturate at the level given by (2).

4. Conclusions and outlook

We suggest a solution for the problem of nuclear shadowing in DIS with correct quantum-mechanical treatment of multiple interaction of the virtual photon fluctuations and of the nuclear formfactor. We perform numerical calculations for $q\bar{q}$ fluctuations of the photon and find a significant difference with known approximations. Realistic calculations to be compared with data on nuclear shadowing should incorporate the higher Fock components which include gluons. The same path integral technique can be applied in this case. The x -dependence of the dipole cross section $\sigma(r, x)$ (correlated with \vec{r} [22]) should be taken into account. One should also include the effect of anti-shadowing, although it is only a few percent. A realistic form for the nuclear density should be used (this can be done replacing $\rho_A(b, z)$ by a multistep function like in [21]). We are going to settle these problems in a forthcoming paper.

Acknowledgements: We are grateful for stimulating discussions to Jörg Hüfner and Gerry Garvey who read the paper and made many useful comments.

The work of J.R. and A.V.T was supported by the Gesellschaft für Schwerionenforschung, GSI, grant HD HÜF T, and B.K. was partially supported by European Network: Hadronic Physics with Electromagnetic Probes, No FMRX CT96-0008, and by INTAS grant No 93-0239ext. J.R and A.V.T. greatly acknowledge the hospitality at the MPI.

References

- [1] O.V. Kancheli, Sov. Phys. JETP Lett. **18** (1973) 274
- [2] L.V. Gribov, E.M. Levin and M.G. Ryskin, Phys. Rept. **100** (1983) 1
- [3] A.H. Mueller and J. Qiu, Nucl. Phys. **B268**, (1986) 427
- [4] J. Qiu, Nucl. Phys. **B291** (1987) 746
- [5] L.D. Landau and I.Ya. Pomeranchuk, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **92** (1953) 535; *ibid* 735. In English see in L.D. Landau *The Collected Papers of L.D. Landau* (Pergamon Press, New York, 1965)

- [6] T.H. Bauer, R.D. Spital, D.R. Yennie and F.M. Pipkin,
Rev. Mod. Phys. **50** (1978) 261
- [7] L.L. Frankfurt and M.I. Strikman, Phys. Rept. **160** (1988) 235
- [8] S.J. Brodsky and H.J. Lu, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1342
- [9] N.N. Nikolaev and B.G. Zakharov, Z. Phys. **C49** (1991) 607
- [10] W. Melnitchouk and A.W. Thomas, Phys. Lett. **B317** (1993) 437
- [11] G. Piller, W. Ratzka and W. Weise, Z. Phys. **A352** (1995) 427
- [12] B.Z. Kopeliovich and B. Povh, Phys. Lett. **B367** (1996) 329;
Z. Phys. **A356** (1997) 467
- [13] A.I.B. Zamolodchikov, B.Z. Kopeliovich and L.I. Lapidus,
Sov. Phys. JETP Lett. **33**, (1981) 612
- [14] S.J. Brodsky and A. Mueller, Phys. Lett. **B206** (1988) 685
- [15] G. Bertsch, S.J. Brodsky, A.S. Goldhaber and J.F. Gunion,
Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 297
- [16] J.D. Bjorken and J. Kogut, Phys. Rev. **D8** (1973) 1341
- [17] V.N. Gribov, Sov. Phys. JETP **57** (1969) 1306
- [18] V. Karmanov and L. Kondratyuk, JETP Lett., **18** (1973) 451
- [19] S. Gevorkyan, A.M. Kotsinian and V.M. Jaloian, Phys. Lett. **B212** (1988) 251
- [20] B.G. Zakharov, 'Light-cone path integral approach to the LPM effect',
MPI-H-V44-1997 (unpublished)
- [21] B.Z. Kopeliovich and B.G. Zakharov, Phys.Rev. **D44** (1991)3466
- [22] B.Z. Kopeliovich and B. Povh, hep-ph/9806284

Total interaction cross sections of relativistic $\pi^+\pi^-$ -atoms with ordinary atoms in the eikonal approach *

L Afanasyev, A Tarasov and O Voskresenskaya

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscow Region, 141980 Russia

Abstract. The total interaction cross sections of the relativistic $\pi^+\pi^-$ -atoms with ordinary atoms are obtained in the eikonal approach which takes into consideration all multiphoton exchange processes. Contribution of these processes strongly depends on the atom nucleus charge Z and varies from 1.5% for Titanium ($Z = 22$) to 14% for Tantalum ($Z = 73$). The formulas derived are applicable for an arbitrary initial state of $\pi^+\pi^-$ -atom.

PACS numbers: 34.50.-s, 36.10.-k, 11.80.Fv

Hydrogen-like atoms consisting of π^+ and π^- mesons (dimesoatoms) have been already observed in the inclusive process in proton-nucleus interactions at 70 GeV [1] and an estimation of it's lifetime has been obtained [2]. The accurate measurement of the $\pi^+\pi^-$ -atom lifetime in the experiment DIRAC at the CERN Proton Synchrotron [3] will allow one to check a high precision prediction of the Chiral Perturbation Theory for $\pi\pi$ -scattering lengths. An interaction of the relativistic $\pi^+\pi^-$ -atoms with ordinary atoms is an essential part of this experiment, as the atom observation bases on their breakup (ionization) while passing through the target where they are produced in proton-nucleus interactions at 24 GeV.

Cross sections of $\pi^+\pi^-$ -atoms with ordinary atoms were usually calculated in the first Born approximation [4, 5, 6]. In the papers [7, 8] the cross sections for few low states of the dimesoatom were calculated in the eikonal (Coulomb-modified Glauber) approximation. It has been shown that the multiphoton exchange processes play a significant role in the interaction of $\pi^+\pi^-$ -atoms with atoms. As is shown in the paper [6] dimesoatom break up most likely from excited states after few successive interactions. Because of this, here the total interaction cross sections were obtained for an arbitrary initial state of $\pi^+\pi^-$ -atom.

In the eikonal approximation the total cross sections of the coherent interaction of $\pi^+\pi^-$ -atom with ordinary atoms could be written [7] as:

$$\sigma_{nlm}^{tot} = 2 \operatorname{Re} \int d^2b d^3r |\psi_{nlm}(r)|^2 \{1 - \exp[i\chi(b - s/2) - i\chi(b + s/2)]\}. \quad (1)$$

Here $s = r_{\perp}$ is the projection of the vector r on the plane of the impact parameter b , $\psi_{nlm}(r)$ is the wave function of $\pi^+\pi^-$ -atom in the state with principal, orbital and magnetic quantum

* J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 25 (1999) B7-B10. © 1999 IOP Publishing Ltd. Reproduced with kind permission of IOP Publishing Ltd.

numbers n , l and m , respectively. The phase shift $\chi(b)$ is expressed via the screened Coulomb potential of the target atom:

$$\chi(b) = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sqrt{b^2 + z^2}) dz. \quad (2)$$

Here v is the velocity of dimesoatom in the lab frame.

Let us write (1) in another form taking into account the following relations:

$$\exp(i\chi(b)) = 1 - \gamma(b), \quad (3)$$

$$\gamma(b) = \frac{1}{2\pi i} \int f(q) \exp(-iqb) d^2q, \quad (4)$$

$$f(q) = \frac{i}{2\pi} \int [1 - \exp(i\chi(b))] \exp(ibq) d^2b = i \int_0^{\infty} [1 - \exp(i\chi(b))] J_0(qb) b db. \quad (5)$$

Here $f(q)$ is the amplitude of the elastic Coulomb πA -scattering normalized by the relations:

$$\sigma_{\pi A}^{tot} = 4\pi \operatorname{Im} f(0), \quad (6)$$

$$\frac{d\sigma_{\pi A}}{dq} = |f(q)|^2. \quad (7)$$

Then it is easy to get the total cross section in the form

$$\sigma_{nlm}^{tot} = 2 \int |f(q)|^2 [1 - S_{nlm}(q)] d^2q, \quad (8)$$

$$S_{nlm}(q) = \int |\psi_{nlm}(\mathbf{r})|^2 \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) d^3r. \quad (9)$$

Here $S_{nlm}(q)$ is the elastic form factor of the $\pi^+\pi^-$ -atom in the state with the quantum numbers n , l and m .

The expressions (8) and (9) together with the results obtained in the paper [6] for the transition form factors of the hydrogen-like atoms allow one to calculate the total cross sections for any state of the dimesoatom. However, in this paper we only consider the cross sections averaged over the magnet quantum number:

$$\sigma_{nl}^{tot} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \sigma_{nlm}^{tot}. \quad (10)$$

The wave function of $\pi^+\pi^-$ can be written as a product of the radial and angular parts:

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\Theta, \phi). \quad (11)$$

Taking into account the normalization

$$\frac{1}{2l+1} \sum_m |Y_{lm}(\Theta, \phi)|^2 = 1, \quad (12)$$

we have

$$\sigma_{nl}^{tot} = 4\pi \int |f(q)|^2 (1 - S_{nl}(q)) q dq, \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
S_{nl}(q) &= \frac{1}{2l+1} \sum_m S_{nlm}(q) = \int |R_{nl}|^2 \exp(iqr) d^3r \\
&= 4\pi \int_0^\infty |R_{nl}|^2 \frac{\sin qr}{q} r dr = \frac{4\pi}{q} \operatorname{Im} \int_0^\infty |R_{nl}|^2 \exp(iqr) r dr.
\end{aligned} \tag{14}$$

The radial wave function of the hydrogen-like atom is expressed in terms of the Laguerre polynomial. So integration in (14) is reduced to the hypergeometric functions using the expression [9]:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \exp(-bx) x^\alpha L_n^\alpha(\lambda x) L_m^\alpha(\mu x) dx \\
&= \frac{\Gamma(m+n+\alpha+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)} \frac{(b-\lambda)^n (b-\mu)^m}{b^{n+m+\alpha+1}} F\left[-m, -n, -m-n-\alpha; \frac{b(b-\lambda-\mu)}{(b-\mu)(b-\lambda)}\right].
\end{aligned} \tag{15}$$

Finally for the form factor we have

$$\begin{aligned}
S_{nl}(q) &= \frac{\sin 2n\phi (\cos \phi)^{2l+4}}{n \sin 2\phi} F(l+1-n, l+1+n; 1; \sin^2 \phi), \\
\phi &= \arctan\left(\frac{nq}{\alpha m \pi}\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

For the numerical calculation we use the Molière parametrization of the Thomas-Fermi potential [10]

$$U(r) = Z\alpha \sum_{i=1}^3 \frac{c_i \exp(-\lambda_i r)}{r}; \tag{17}$$

which allows one to obtain the exact expression for the phase shift $\chi(b)$

$$\chi(b) = \frac{2Z\alpha}{v} \sum_{i=1}^3 c_i K_0(b\lambda_i), \tag{18}$$

$$c_1 = 0.35, \quad c_2 = 0.55, \quad c_3 = 0.1;$$

$$\lambda_1 = 0.3\lambda_0, \quad \lambda_2 = 1.2\lambda_0, \quad \lambda_3 = 6\lambda_0, \quad \lambda_0 = m_e \alpha Z^{1/3} / 0.885.$$

The numerical results were calculated for the Titanium ($Z = 22$) and Tantalum ($Z = 73$) targets. The velocity of $\pi^+\pi^-$ -atom was taken as $v = 1$. Figures 1–4 show the most important dependencies and comparison with the Born calculation [6]. We can conclude that the contribution of the multiphoton exchange processes strongly depends on the target atom nucleus charge Z and varies from 1.5% for Titanium to 14% for Tantalum.

In the DIRAC experiment the dimesoatom lifetime is going to be measured for various targets with an accuracy of 10% using the breakup probability [3, 6] which is calculated basing on the interaction cross sections. Thus, account of the multiphoton processes is essential for an interpretation of the experiment results.

Authors would like to thank L.Nemenov for encouragement of the work, Z.Halabuka, J.Hüfner, B.Kopeliovich, and D.Trautmann for helpful discussions. This work is partially supported by RFBR grant 97-02-17612.

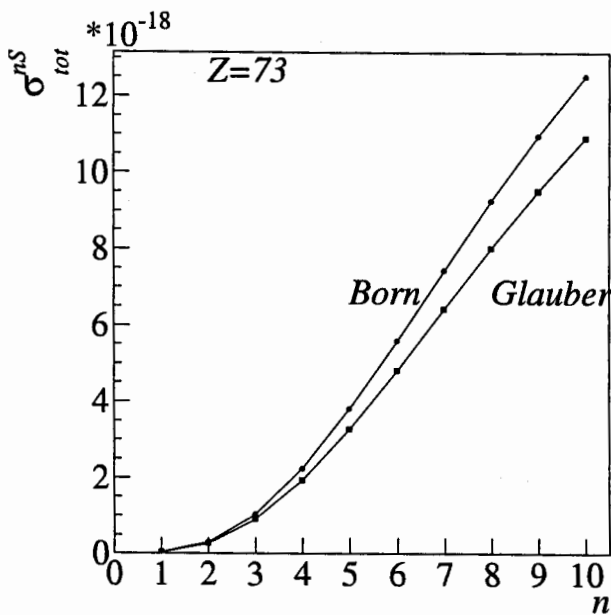


Figure 1. Total cross sections of $\pi^+\pi^-$ -atom interactions in nS states with Tantalum ($Z = 73$) versus the principal quantum number n in the Born and Glauber approximation.

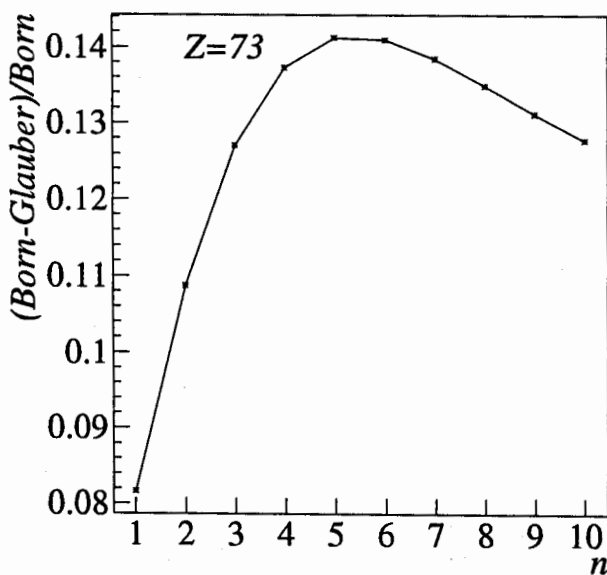


Figure 2. Relative difference between the total cross sections of $\pi^+\pi^-$ -atom interaction in nS states with Tantalum ($Z = 73$) calculated in the Born and Glauber approximation versus the principal quantum number n .

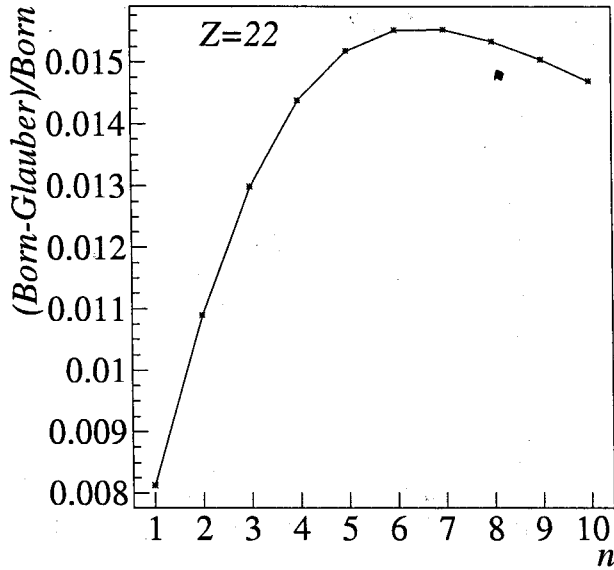


Figure 3. Relative difference between the total cross sections of $\pi^+\pi^-$ -atom interaction in nS states with Titanium ($Z = 22$) calculated in the Born and Glauber approximation versus the principal quantum number n .

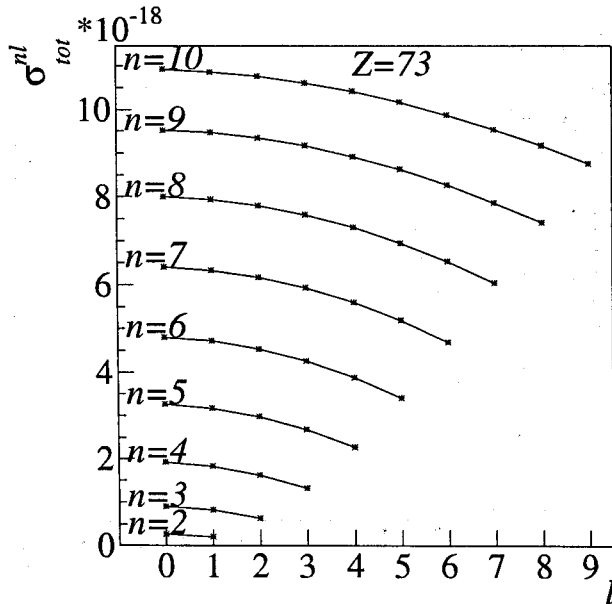


Figure 4. Dependence of the total cross sections of $\pi^+\pi^-$ -atom interaction with Tantalum ($Z = 73$) on the orbital quantum number l for the various principal quantum number n .

References

- [1] Afanasyev L G *et al* 1993 *Phys. Lett. B* **308** 200–6
- [2] Afanasyev L G *et al* 1994 *Phys. Lett. B* **338** 478–82
- [3] Adeva B, *et al* 1995 *Lifetime measurement of $\pi^+\pi^-$ atoms to test low energy QCD predictions* (Proposal to the SPSLC, CERN/SPSLC 95–1, SPSLC/P 284, Geneva)
- [4] Mrówczyński S 1986 *Phys. Rev. A* **33** 1549–55
- [5] Mrówczyński S 1987 *Phys. Rev. D* **36** 1520–28;
Denisenko K and Mrówczyński S 1987 *Phys. Rev. D* **36** 1529–37
- [6] Afanasyev L G and Tarasov A V 1996 *Yad. Fiz.* **59** 2212–18 [*Physics of Atomic Nuclei* **59** 2130–36]
- [7] Tarasov A V and Christova I U 1991 *JINR Communication*, P2-91-10 Dubna (in russian)
- [8] Voskresenskaya O O, Gevorkyan S R and Tarasov A V 1998 *Yad. Fiz.* **61** 1628–30
[*Physics of Atomic Nuclei* **61** 1517–19]
- [9] Gradshteyn I S and Ryzhik I M 1971 *Tables of Integrals, Series and Products* (5th edn. Nauka Publication, Moscow)
- [10] Molière G 1947 *Z. Naturforsch* **2A** 3

Bremsstrahlung of a Quark Propagating through a Nucleus*

Boris Z. Kopeliovich^{1,2}, Andreas Schäfer⁴
and Alexander V. Tarasov^{2,3}

¹ Max-Planck Institut für Kernphysik, Postfach 103980, 69029 Heidelberg

² Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980 Moscow Region

³ Institut für Theoretische Physik der Universität, Philosophenweg 19, 69120 Heidelberg

⁴ Institut für Theoretische Physik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg

Abstract

The density of gluons produced in the central rapidity region of a heavy ion collision is poorly known. We investigate the influence of the effects of quantum coherence on the transverse momentum distribution of photons and gluons radiated by a quark propagating through nuclear matter. We describe the case that the radiation time substantially exceeds the nuclear radius (the relevant case for RHIC and LHC energies), which is different from what is known as Landau-Pomeranchuk-Migdal effect corresponding to an infinite medium. We find *suppression* of the radiation spectrum at small transverse photon/gluon momentum k_T , but *enhancement* for $k_T > 1$ GeV. Any nuclear effects vanish for $k_T \geq 10$ GeV. Our results allow also to calculate the k_T dependent nuclear effects in prompt photon, light and heavy (Drell-Yan) dilepton and hadron production.

PACS numbers: 12.38.Bx, 12.38.Aw, 24.85.+p, 25.75.-q

1 Introduction

One of the major theoretical problems in relativistic heavy ion physics is the reliable calculation of gluon bremsstrahlung in the central rapidity region. It is one of the determining factors for the general dynamics of heavy-ion collisions, the approach to thermodynamic equilibrium and the possible formation of a quark-gluon plasma-like state. This problem has been approached by a variety of ways. We do not want to discuss the relative draw-backs and merits of the various approaches here and we will only cite those, which are directly related to ours.

In this paper we consider bremsstrahlung of photons and gluons resulting from the interaction of a projectile quark with a nucleus for the case that the radiation time is much longer than the time needed to cross the nucleus. This radiation or formation time was introduced in [1] and can be presented as,

$$t_f = \frac{\cosh y}{k_T} \approx \frac{2\omega}{k_T^2}, \quad (1)$$

where y , ω and k_T are the rapidity, energy and the transverse momentum of the radiated quantum in the nuclear rest frame. Eq. (1) assumes that the radiated energy is relatively small, i.e. $\omega \ll E_q$. It is easy to interpret the formation time (1) as lifetime of a photon(gluon)-quark fluctuation [2] or as the time needed to distinguish a radiated quantum from the static field of the quark [3].

*Phys. Rev. C59 (1999) 1609. © 1999 The American Physical Society. Reproduced by permission of the APS.

The total time for bremsstrahlung is proportional to the initial energy and can therefore substantially exceed the time of interaction with the target [4]. Radiation continues even after the quark leaves the target. This part of radiation does not resolve multiple scattering processes. Important is only the total momentum transfer. This illuminating manifestation of coherence is along these lines that the well known Landau-Pomeranchuk-Migdal effect (LPM) for long formation times can be treated. Note that LPM effect corresponds to the opposite energy limit, when the radiation time is much shorter than the time of propagation through the medium. It was first suggested by Landau and Pomeranchuk [1] and investigated by Migdal [5] and has attracted much attention during recent years [6, 3, 7, 8, 9]. This regime applies only for the problem of energy loss in a medium, which is not the problem we discuss here. Our treatment should apply to the real situation in heavy-ion collisions at high energies. The relationships between the cited papers are complex. In a recent publication Baier et al. [10] have shown that their diagrammatic approach is in fact equivalent to that of Zakharov [8]. The latter is, however, physically far more intuitive and therefore lends itself more easily to a generalization to the case that the nuclei are not infinitely extended. In another recent paper Kovchegov and Mueller [11] have undertaken the first attempt to calculate in-medium modification of the transverse momentum distribution of gluon radiation. This paper has also elucidated the relation between the approaches of [7] and [9]. In the approach of [9] based on the use of the light-cone gauge the final state interactions summed up in [7] (in the covariant gauge) are effectively included in the light-cone wave function. These observations suggest that all three different approaches might be equivalent when followed carefully enough.

The main goal of this paper is to study the dependence of the effects of coherence on the transverse momentum of the radiated photon or gluon. We use the light-cone approach for radiation first suggested in [12] and developed in [13, 8]. As it is based on an explicit treatment of the transverse coordinates it is easily adapted to our purpose. In addition it seems to be by far the most direct and elegant approach. We described this approach in Section 2 for both photon and gluon bremsstrahlung. We establish a relation between the strength of the coherence effects and the transverse size of the Fock state containing the radiated quantum.

The second main result of our paper is the extension of the light-cone approach to calculations for differential cross sections as functions of the transverse photon/gluon momentum \vec{k}_T . This is presented in section 3. As one might have expected, nuclear shadowing, *i.e.* *suppression* of radiation, is most pronounced at small k_T . An unexpected result is antishadowing, *i.e.* *enhancement* of radiation for $k_T > 1$ GeV, which, however, vanishes for still larger k_T .

The results and practical implications for the Drell-Yan process, prompt photon production and hadroproduction are discussed in the last section.

2 Integrated radiation spectra

We start with electromagnetic radiation. We cover both, virtual photon radiation (dilepton production) and real photon radiation (so called prompt photons).

The total radiation cross section for (virtual) photons, as calculated from the diagrams shown in Fig. 1, has the following factorized form in impact parameter representation [12] (see also [13]),

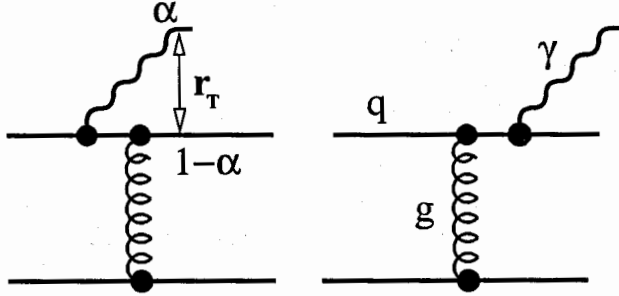


Figure 1: Feynman graphs for bremsstrahlung.

$$\frac{d\sigma^N(q \rightarrow \gamma q)}{d(\ln\alpha)} = \int d^2 r_T |\Psi_{\gamma q}(\alpha, \vec{r}_T)|^2 \sigma_{\bar{q}q}(\alpha r_T). \quad (2)$$

Here $\Psi_{\gamma q}(\alpha, \vec{r}_T)$ is the wave function of the $\gamma - q$ fluctuation of the projectile quark which depends on α , the relative fraction of the quark momentum carried by the photon, and r_T , the transverse separation between γ and q (Ψ is not normalized). $\sigma_{\bar{q}q}(\rho)$ is the total interaction cross section for a $\bar{q}q$ pair with transverse separation ρ and a nucleon. $\sigma_{\bar{q}q}(\rho)$ depends also parametrically on the total collision energy squared s , a dependence we do not write out explicitly (see, however, section 4). This becomes only important when fits to actual data are performed. Eq.(2) contains a remarkable observation which is crucial for this whole approach [12]: although we regard only a single projectile quark, the elastic amplitude of which is divergent, the radiation cross section is equal to the total cross section of a $\bar{q}q$ pair, which is finite.

This can be interpreted as follows. One should discriminate between the total interaction cross section and the freeing (radiation) cross section of a fluctuation. The projectile quark is represented in the light-cone approach as a sum of different Fock components. If each of them interacts with the target with the same amplitude the coherence between the components is not disturbed, *i.e.* no bremsstrahlung is generated. Therefore, the production amplitude of a new state (a new combination of the Fock components) is proportional to the difference between the elastic amplitudes of different fluctuations. Thus the universal divergent part of the elastic amplitudes cancels and the radiation amplitude is finite.

It is also easy to understand why the $\bar{q}q$ separation in (2) is αr_T . As is pointed out above one should take the difference between the amplitudes for a quark-photon fluctuation and a single quark. The impact parameters of these quarks are different. Indeed, the impact parameter of the projectile quark serves as the center of gravity for the $\gamma - q$ fluctuation in the transverse plane. The distance to the quark in the quark-gluon Fock-state is then αr_T and that to the photon is $(1 - \alpha)r_T$.

The wave function of the $\gamma^* q$ fluctuation in (2) for transversely and longitudinally polarized photons reads (compare with [14]),

$$\Psi_{\gamma^* q}^{T,L}(\vec{r}_T, \alpha) = \frac{\sqrt{\alpha_{em}}}{2\pi} \chi_f \hat{O}^{T,L} \chi_i K_0(\epsilon r_T) \quad (3)$$

Here $\chi_{i,f}$ are the spinors of the initial and final quarks. $K_0(x)$ is the modified Bessel function. The operators $\widehat{O}^{T,L}$ have the form,

$$\widehat{O}^T = i m_q \alpha^2 \vec{e}^* \cdot (\vec{n} \times \vec{\sigma}) + \alpha \vec{e}^* \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}) - i(2 - \alpha) \vec{e}^* \cdot \vec{\nabla}, \quad (4)$$

$$\widehat{O}^L = 2m_{\gamma^*} (1 - \alpha), \quad (5)$$

where

$$\epsilon^2 = \alpha^2 m_q^2 + (1 - \alpha) m_{\gamma^*}^2. \quad (6)$$

\vec{e} is the polarization vector of the photon, \vec{n} is a unit vector along the projectile momentum, and $\vec{\nabla}$ acts on \vec{r}_T . For radiation of prompt photons $m_{\gamma^*} = 0$.

Eq. (2) can be used for nuclear targets as well. We consider hereafter formation times given by the energy denominator,

$$t_f = \frac{2 E_q \alpha (1 - \alpha)}{\epsilon^2 + m_q^2} \gg R_A, \quad (7)$$

which substantially exceed the nuclear radius. In this limit the transverse $\gamma^* - q$ separation in the fluctuation is "frozen", *i.e.* does not change during propagation through the nucleus. The recipe for the extension of Eq. (2) to a nuclear target is quite simple [12, 15]. One should just replace $\sigma_{\bar{q}q}^N(\alpha r_T)$ by $\sigma_{\bar{q}q}^A(\alpha r_T)$,

$$\frac{d\sigma^A(q \rightarrow \gamma q)}{d(\ln\alpha)} = 2 \int d^2b \int d^2r_T |\Psi_{\gamma q}(\alpha, \vec{r}_T)|^2 \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{q}q}(\alpha r_T) T(b) \right] \right\}, \quad (8)$$

where

$$T(b) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho_A(b, z). \quad (9)$$

Here $\rho_A(b, z)$ is the nuclear density which depends on the impact parameter b and the longitudinal coordinate z . One can eikonalize Eq. (2) because a fluctuation with a "frozen" transverse size is an eigenstate of interaction [15].

Eq. (8) shows how the interference effects work versus k_T . At small r_T the exponent $\sigma_{\bar{q}q}(\alpha r_T) T(b)/2 \ll 1$ since $\sigma_{\bar{q}q}(\alpha r_T)$ is small. Therefore, one can expand the exponential and the cross section turns out to be proportional to A . This is the Bethe-Heitler limit for bremsstrahlung. In the opposite limit $\sigma_{\bar{q}q}(\alpha r_T) T(b)/2 \gg 1$ one can neglect the exponential for $b \leq R_A$ and the cross section (8) is proportional to $A^{2/3}$. This is the limit of full coherence when the whole row of nucleons with the same impact parameter acts like a single nucleon. As the gluon transverse momentum is related to the inverse of r_T , one could expect that the limit of maximal coherence is reached for small k_T , and the Bethe-Heitler limit for large k_T . The situation is, however, more complicated as discussed in the next section.

Gluon radiation is described by the diagrams [16] shown in Fig. 2.

The radiation cross section for a nucleon target and the nuclear effects [12] look similar to those of Eqs. (2) - (8)

$$\frac{d\sigma^A(q \rightarrow gq)}{d(\ln\alpha)} = 2 \int d^2b \int d^2r_T |\Psi_{gq}(\alpha, \vec{r}_T)|^2 \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma_{g\bar{q}q}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) T(b) \right] \right\}, \quad (10)$$

where $\Psi_{gq}(\alpha, \vec{r}_T)$ is the wave function of a quark-gluon fluctuation which has the same form as in Eq.(3), but with the replacements $\gamma^* \Rightarrow g$, $\alpha_{em} \Rightarrow 4\alpha_s/3$ and $m_{\gamma^*} \Rightarrow m_g$. We keep the gluon

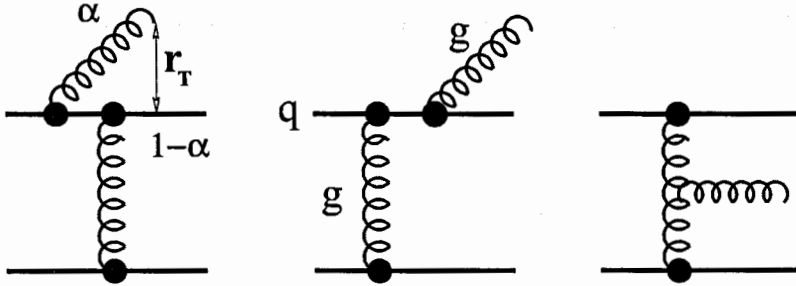


Figure 2: Feynman graphs for gluon bremsstrahlung of an interacting quark.

mass nonzero in order to simulate the possible effects of confinement on gluon bremsstrahlung. $\sigma_{g\bar{q}q}$ is the interaction cross section of a colorless $g\bar{q}q$ system with a nucleon [17],

$$\sigma_{g\bar{q}q}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{9}{8} \left\{ \sigma_{\bar{q}q}(r_1) + \sigma_{\bar{q}q}(r_2) \right\} - \frac{1}{8} \sigma_{\bar{q}q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (11)$$

where \vec{r}_1 and \vec{r}_2 are the transverse separations gluon – quark and gluon – antiquark respectively. In the case of gluon radiation, i.e. Eq. (10), $\vec{r}_1 = \vec{r}_T$ and $\vec{r}_2 = (1 - \alpha)\vec{r}_T$.

Although Eq. (10) looks simple, it includes the effects of quark and gluon rescattering in the nucleus to all orders.

3 The transverse momentum distribution

3.1 Electromagnetic radiation

The transverse momentum distribution of photon bremsstrahlung in quark-nucleon interactions integrated over the final quark transverse momentum reads (see Appendix A),

$$\frac{d^3\sigma^N(q \rightarrow q\gamma)}{d(\ln\alpha) d^2k_T} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2r_1 d^2r_2 \exp[i\vec{k}_T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] \Psi_{\gamma q}^*(\alpha, \vec{r}_1) \Psi_{\gamma q}(\alpha, \vec{r}_2) \sigma_\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha), \quad (12)$$

where

$$\sigma_\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{\bar{q}q}(\alpha r_1) + \sigma_{\bar{q}q}(\alpha r_2) - \sigma_{\bar{q}q}[\alpha(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] \right\}. \quad (13)$$

By integrating over k_T one obviously recovers Eq. (2), since $\sigma_\gamma(\vec{r}, \vec{r}, \alpha) = \sigma_{\bar{q}q}(\alpha r)$.

For $\alpha \ll 1$ one can use the dipole approximation for the cross section, i.e. one can set $\sigma_{\bar{q}q}(\rho) = C\rho^2$. Moreover, this approximation works also rather well at larger interquark separations, even for hadronic sizes [18]. For the latter the cross section is proportional to the mean radius squared. Therefore, we use the dipole approximation for all cases considered. Then (13) simplifies to

$$\sigma_\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) \approx C\alpha^2 \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2, \quad (14)$$

and we can explicitly calculate the k_T distribution (12),

$$\frac{d^3\sigma_T^N(q \rightarrow q\gamma^*)}{d(\ln\alpha) d^2k_T} = \frac{\alpha_{em} C \alpha^2}{\pi^2 (k_T^2 + \epsilon^2)^4} \left\{ 2m_q^2 \alpha^4 k_T^2 + [1 + (1 - \alpha)^2](k_T^4 + \epsilon^4) \right\}, \quad (15)$$

$$\frac{d^3\sigma_L^N(q \rightarrow q\gamma^*)}{d(\ln\alpha) d^2k_T} = \frac{4 \alpha_{em} C \alpha^2 (1 - \alpha)^2 m_q^2 k_T^2}{\pi^2 (k_T^2 + \epsilon^2)^4}. \quad (16)$$

Note that for small α (15) and (16) vanish like α^2 . This could have been expected since electromagnetic bremsstrahlung is known to be located predominantly in the fragmentation regions of colliding particles rather than at midrapidity.

In the case of a nuclear target the transverse momentum distribution has to be modified by eikonization of (12) (see Appendix A),

$$\frac{d^3\sigma^A(q \rightarrow q\gamma)}{d(\ln\alpha) d^2k_T} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2r_1 d^2r_2 \exp[i\vec{k}_T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] \Psi_{\gamma q}^*(\alpha, \vec{r}_1) \Psi_{\gamma q}(\alpha, \vec{r}_2) \Sigma_\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha), \quad (17)$$

where

$$\begin{aligned} \Sigma_\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) &= \int d^2b \left\{ 1 + \exp\left[-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{q}q}[\alpha(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] T(b)\right] \right. \\ &\quad \left. - \exp\left[-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{q}q}(\alpha r_1) T(b)\right] - \exp\left[-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{q}q}(\alpha r_2) T(b)\right] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

The fluctuation wave functions in (17) can be represented using (3) in the form

$$\begin{aligned} \sum_{in, f} \Psi_{\gamma^* q}^T(\vec{r}_1, \alpha) \Psi_{\gamma^* q}^{T*}(\vec{r}_2, \alpha) &= \frac{\alpha_{em}}{2\pi^2} \left\{ m_q^2 \alpha^4 K_0(\epsilon r_1) K_0(\epsilon r_2) \right. \\ &\quad \left. + [1 + (1 - \alpha)^2] \epsilon^2 \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_2}{r_1 r_2} K_1(\epsilon r_1) K_1(\epsilon r_2) \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\sum_{in, f} \Psi_{\gamma^* q}^L(\vec{r}_1, \alpha) \Psi_{\gamma^* q}^{L*}(\vec{r}_2, \alpha) = \frac{2\alpha_{em}}{\pi^2} m_q^2 (1 - \alpha)^2 K_0(\epsilon r_1) K_0(\epsilon r_2), \quad (20)$$

where we average over the initial quark polarization and sum over the final polarizations of quark and photon.

At first glance, one could think that the k_T distribution is not modified by the nucleus in the case $t_f \gg R_A$, since the fluctuation is formed long before the nucleus and the quark interact. This is, however, not the case. Due to color filtering [19] the mean size of $\bar{q}q$ dipoles surviving propagation through the nucleus decreases with A . Correspondingly, the transverse momentum of the photon increases. In other words, a heavier nucleus provides a larger momentum transfer to the quark, hence it is able to break up smaller size fluctuations and release photons with larger k_T .

Note that one can also calculate the distribution with respect to the transverse momentum \vec{p}_T of the final quark integrating the differential cross section over the photon momentum \vec{k}_T . The result turns out to be the same as (12) and (17) with the replacement $\alpha \Rightarrow 1 - \alpha$.

We also calculated the nuclear dependence of the differential cross section (17) - (18) using the dipole approximation for $\sigma_{\bar{q}q}(r)$. The details of the necessary integration can be found in

Appendix B. As usual, we approximate the cross section by an A^n -dependence. The power n is then defined by

$$n(k_T, \alpha) = \frac{d \left\{ \ln \left[d^3 \sigma^A(q \rightarrow q\gamma) / (d(\ln \alpha) d^2 k_T) \right] \right\}}{d(\ln A)} \quad (21)$$

This power can also be A dependent. We performed calculations for $A = 200$. To simplify these calculations, we used the constant density distribution, $\rho_A(r) = \rho_0 \Theta(R_A - r)$ with $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$.

First of all, we calculated $n(k_T, \alpha)$ for Drell-Yan lepton pair production at $m_{\mu^+ \mu^-} = 4 \text{ GeV}$. The results are shown in Fig. 3 for transversely and longitudinally polarized virtual photons (the two components can be extracted from the angular distribution of the lepton pairs). We see that

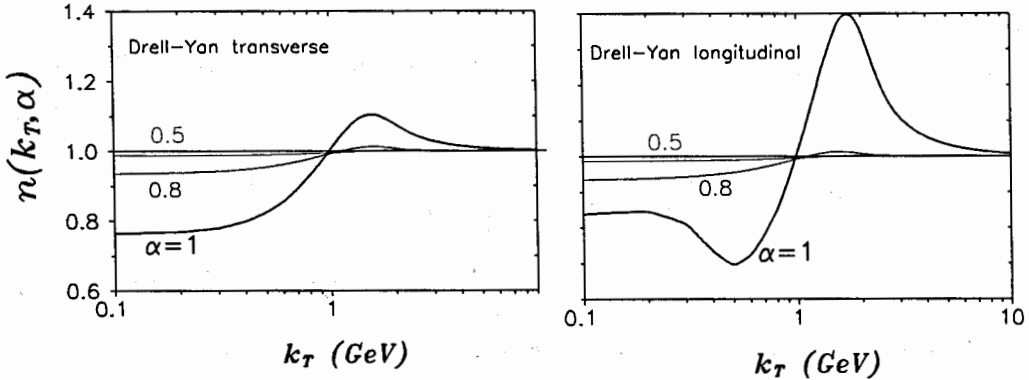


Figure 3: The exponent (21) of the atomic number dependence parameterized as A^n versus k_T and α for transversely (left figure) and longitudinally (right figure) polarized virtual photons.

$n < 1$ for $k_T < 1 \text{ GeV}$, i.e. the Drell-Yan pair production is shadowed by the nucleus. The shadowing is stronger for larger α [12]. Shadowing in the Drell-Yan process was first observed by the E772 Collaboration [20]. Their effect is, however, much weaker which can easily be explained because for Fermilab energies the radiation time (1) is quite short compared to the nuclear radius. This fact is taken into account in [12] by means of nuclear formfactor. Then the data can be described quite nicely. (See also [21].)

An interesting result contained in Fig. 3 is the appearance of an antishadowing region for $k_T > 1 \text{ GeV}$. This is the first case in which the coherence effects enhances rather than suppresses the radiation spectrum. It originates from an interference effect which is not noticeable for the integrated quantities.

Nuclear antishadowing is especially strong for longitudinal photons and $k_T \sim 1.5 - 2 \text{ GeV}$. Color filtering in nuclear matter changes the angular distribution of Drell-Yan pairs and enhances the yield of longitudinally polarized dileptons. The nontrivial behaviour of n for longitudinal photons at small k_T is due to the dip at $k_T = 0$ in the differential cross section for a nucleon, see Eq. (16). This minimum is filled by multiple scattering of the quark in the nucleus leading to an increase of $n(k_T = 0)$ and a strong A -dependence of $n(k_T = 0)$. (Formally, for longitudinal

photons $n(k_T = 0)$ goes to infinity for $A = 1$, because the proton cross-section at $k_T = 0$ is zero).

Note that nuclear enhancement of Drell-Yan pair production at large k_T was also observed experimentally [20]. However, as was mentioned, these data were taken in the kinematical region of the Bethe-Heitler regime, i.e. $t_f \ll R_A$. Therefore, they cannot be compared with our calculations. In fact the observation was explained quite satisfactory in [21].

The k_T -dependence of n is expected to be nearly the same for different dilepton masses, down to the mass range probed in the CERES experiment at SPS CERN. However, the nuclear effects turn out to be quite different for real photons. Our results are shown in Fig. 4. In order

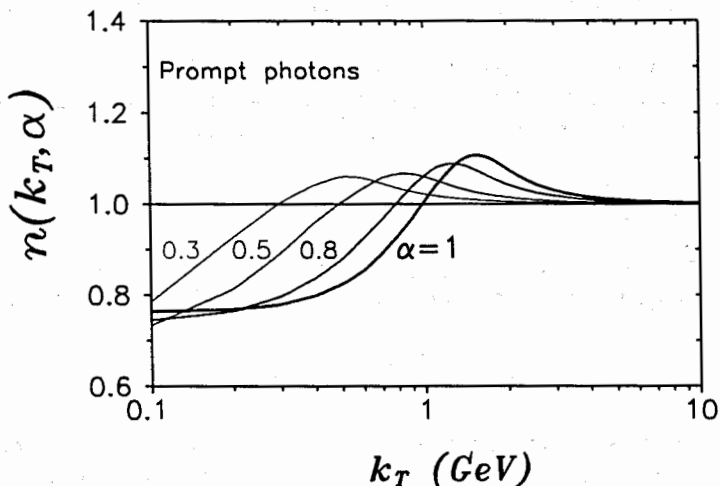


Figure 4: The same as in Fig. 3, but for real photons.

to compare with experimental dilepton cross sections and prompt photon production rates our results have to be convoluted with the quark distribution function for the projectile proton. Since the electromagnetic radiation steeply falls off with decreasing α (proportional to α^2 , see (15) - (16)), the convolution effectively picks out large values of α where the nuclear effects are in turn expected to be large. Detailed calculations and comparisons with data are postponed to a later publication.

3.2 Gluon radiation

Now we can discuss bremsstrahlung in the non-Abelian case. Summing up the diagrams in Fig. 2 we get in impact parameter representation

$$\frac{d^3\sigma^N(q \rightarrow qg)}{d(\ln\alpha) d^2k_T} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2r_1 d^2r_2 \exp[i\vec{k}_T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] \Psi_{gq}^*(\alpha, \vec{r}_1) \Psi_{gq}(\alpha, \vec{r}_2) \sigma_g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha), \quad (22)$$

where (see Appendix A)

$$\sigma_g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{g\bar{q}q}(\vec{r}_1, \vec{r}_1 - \alpha r_2) + \sigma_{g\bar{q}q}(\vec{r}_2, \vec{r}_2 - \alpha r_1) - \sigma_{\bar{q}q}[\alpha(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] - \sigma_{gg}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right\}. \quad (23)$$

Here $\sigma_{gg}(r) = \frac{9}{4} \sigma_{\bar{q}q}(r)$ is the total cross section of a colorless gg dipole with a nucleon.

Note that (23) reproduces several simple limiting cases:

- 1.) $\sigma_g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha)$ vanishes if either of r_1 or r_2 goes to zero, which expresses the fact that a point-like quark-gluon fluctuation cannot be resolved by any interaction. To show this limiting behaviour one simply has to insert e.g. for $\vec{r}_2 = 0$ the two relations $\sigma_{g\bar{q}q}(\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \sigma_{gg}(\vec{r}_1)$ and $\sigma_{g\bar{q}q}(\vec{0}, -\alpha\vec{r}_1) = \sigma_{\bar{q}q}(-\alpha\vec{r}_1) = \sigma_{\bar{q}q}(\alpha\vec{r}_1)$. (Quark and antiquark at the same point in space act like a gluon etc.)
- 2.) For $\alpha \rightarrow 1$ the quark-gluon separation tends to zero and (23) transforms into (13). On the other hand, at $\alpha \rightarrow 0$ the quark-antiquark separation vanishes and (23) takes again the same form as (13), except that the $\bar{q}q$ pair is replaced by a gluon-gluon dipole.

$$\sigma_g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) \Big|_{\alpha \ll 1} = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{gg}(r_1) + \sigma_{gg}(r_2) - \sigma_{gg}[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] \right\} = \frac{9}{4} \sigma_{\gamma^*}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) \Big|_{\alpha=1}. \quad (24)$$

We use the dipole approximation $\sigma_{\bar{q}q}(r_T) \approx C r_T^2$, which is well justified in this case since the mean transverse quark-gluon separation is small at small α . In this case (23) and (11) lead to

$$\sigma_g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) \approx \left[\alpha^2 + \frac{9}{4}(1 - \alpha) \right] C \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \quad (25)$$

This expression coincides with (14) up to the factor $[1 + 9(1 - \alpha)/(4\alpha^2)]$. Therefore, we can use the results (15) - (16) obtained for photon bremsstrahlung which for $\alpha \rightarrow 0$ lead to

$$\frac{d^3 \sigma_T^N(q \rightarrow qg)}{d(\ln\alpha) d^2 k_T} \Big|_{\alpha \ll 1} \approx \frac{6 C \alpha_s}{\pi^2} \frac{k_T^4 + m_g^4}{(k_T^2 + m_g^2)^4} \quad (26)$$

$$\frac{d^3 \sigma_L^N(q \rightarrow qg)}{d(\ln\alpha) d^2 k_T} \Big|_{\alpha \ll 1} \approx \frac{12 C \alpha_s m_g^2 k_T^2}{\pi^2 (k_T^2 + m_g^2)^4} \quad (27)$$

In contrast to photon bremsstrahlung this cross sections do not vanish for $\alpha \rightarrow 0$. This is a consequence of the non-Abelian nature of QCD [16]. The radiating color current propagates through the whole rapidity interval between the projectile and the target providing a constant gluon density (26) - (27) with respect to rapidity.

Eikonalization of the cross section (22) results in,

$$\frac{d^3 \sigma^A(q \rightarrow qg)}{d(\ln\alpha) d^2 k_T} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 r_1 d^2 r_2 \exp[i\vec{k}_T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] \Psi_{gq}^*(\alpha, \vec{r}_1) \Psi_{gq}(\alpha, \vec{r}_2) \Sigma_g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha), \quad (28)$$

where

$$\begin{aligned} \Sigma_g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) = & \int d^2 b \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{q}q}[\alpha(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]\right] + \exp\left[-\frac{1}{2} \sigma_{gg}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) T(b)\right] \right. \\ & \left. - \exp\left[-\frac{1}{2} \sigma_{g\bar{q}q}(\vec{r}_1, \vec{r}_1 - \alpha r_2) T(b)\right] - \exp\left[-\frac{1}{2} \sigma_{g\bar{q}q}(\vec{r}_2, \vec{r}_2 - \alpha r_1) T(b)\right] \right\} \quad (29) \end{aligned}$$

In the limit $\alpha \ll 1$, which is of practical interest at high energy (23) transforms to the form of (24) and Eq. (29) simplifies to

$$\Sigma_g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha)|_{\alpha \ll 1} = \int d^2b \left\{ 1 + \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_{gg}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)T(b)\right] - \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_{gg}(\vec{r}_1)T(b)\right] - \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_{gg}(\vec{r}_2)T(b)\right] \right\} \quad (30)$$

Note that the transverse momentum distribution for gluon radiation was calculated previously in [11] in the limit $\alpha \rightarrow 0$ and $m_q = m_g = 0$. Our results (28), (30) agree with that in [11] in this limit.

In (30) we make use of the fact that at zero $\bar{q}q$ separation a $g\bar{q}q$ -system interacts like a pair of gluons, $\sigma_{g\bar{q}q}(\vec{r}, \vec{r}) = \sigma_{gg}(r) = (9/4)\sigma_{\bar{q}q}(r)$. Therefore, (28) - (29) can be calculated in the same way as (12) - (17) in the electromagnetic case at $\alpha = 1$ (see Appendix B), except that the fluctuation wave functions must be taken at $\alpha = 0$. We assign an effective mass to the gluon, either of the order of the inverse confinement radius, $m_g \approx 0.15$ GeV, or in accordance with the results of lattice calculations for the range of gluon-gluon correlations [22] of size $m_g = 0.75$ GeV. We sum over the polarization of the emitted gluon. The numerical results are plotted in Fig. 5. They are qualitatively similar to those for photon radiation (see Fig. 3): shadowing at

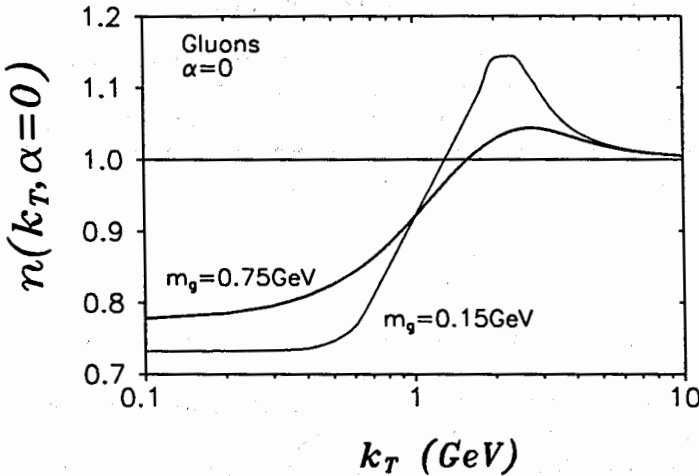


Figure 5: The same as in Fig. 3, but for gluons at $\alpha = 0$ for different effective gluon masses.

small and antishadowing at large k_T . However, the effect of antishadowing is more pronounced for light gluons.

Antishadowing of gluons results in antishadowing for inclusive hadron production, which is well known as Cronin effect [23]. Although it was qualitatively understood that the source of this enhancement is multiple interaction of the partons in the nucleus, to our knowledge no realistic calculation taking into account color screening was done so far. We expect that the Cronin effect disappears at very large k_T , which would actually be in accordance with available data [24]. For

a honest comparison with these data, one has to relate the k_T of the gluon to that of the produced hadron, a step which lies not within the scope of this paper.

4 Conclusions and discussion

The main results of the paper are the following.

- The factorized light-cone approach [12] for the analysis of radiation cross sections was extended to treat the k_T dependence, and was applied both to photon (real and virtual) and gluon bremsstrahlung.
- The effects of coherence which are known to suppress radiation at long formation times, is only effective for small k_T . At $k_T > 1$ GeV the interference instead actually enhances the radiation spectrum. This was indeed observed for dilepton and inclusive hadron production off nuclei (Cronin effect). The enhancement of radiation by the coherence effects turns out to vanish at very large transverse momenta $k_T \geq 10$ GeV. This was also observed in hadroproduction.
- suppression and enhancement of radiation by the effects of coherence are quite different for transversely and longitudinally polarized photons. Both contributions can be separated by measuring the angular distribution of the produced dileptons.

Note that we use Born graphs shown in Figs. 1 - 2 to derive expressions (2) and others having a factorized form. As a result of Born approximation the dipole cross section $\sigma_{\bar{q}q}(\rho)$ is energy independent. It is well known [29] that the higher order corrections lead to a cross section rising with energy. HERA data suggest that this energy dependence is correlated with the dipole size r_T . Therefore, the parameter $C(s)$ can be parameterized as

$$C(s) = C_0 \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\Delta(r_T)}, \quad (31)$$

where $s_0 = 100 \text{ GeV}^2$, $C_0 \approx 3$. The power $\Delta(r_T)$ grows with decreasing r_T . This dependence is extracted from an analysis of HERA data in [25]

Our results obtained for the radiation by a quark interacting with a nucleus are easily adapted to proton-nucleus collisions by convolution with the quark distribution in the proton.

We plan also to extend our analysis to relativistic heavy ion collisions. The condition we use, $t_f \gg R_A$ is poorly satisfied at present fixed target accelerators, but are well justified at RHIC or LHC. Indeed, if s_{NN} is the total NN collision energy squared, for a gluon(photon) radiated at central rapidity,

$$\alpha = \frac{3 k_T}{\sqrt{s_{NN}}} \quad (32)$$

$$t_f = \frac{\sqrt{s_{NN}}}{m_N k_T}. \quad (33)$$

We conclude that at RHIC or LHC energies $\alpha \ll 1$ and that gluons with a few GeV transverse momentum are radiated far away from the nucleus, i.e. $t_f \gg R_A$. Thus our calculations should be directly applicable.

Acknowledgements: We are grateful to Jörg Hüfner for many stimulating and fruitful discussions and to Vitali Dodonov for help with numerical calculations. We are especially thankful to Urs Wiedemann whose questions helped us to make the presentation more understandable. He also found a few misprints in Appendix A. The work of A.V.T. was supported by the Gesellschaft für Schwerionenforschung, GSI, grant HD HÜF T, and A.S. was supported by the GSI grant OR SCH T. A.V.T. and A.S. greatly acknowledge the hospitality of the MPI für Kernphysik.

Appendix A

In this section we illustrate how to eikonalize the differential cross section in the case of a nuclear target and for the example of electromagnetic bremsstrahlung of an electron. The latter is described as propagating in a stationary field $U(\vec{x})$, where \vec{x} is a three-dimensional vector.

The differential cross section reads,

$$\frac{d^5\sigma}{d(\ln\alpha) d^2p_T d^2k_T} = \frac{\alpha_{em}}{(2\pi)^4} |M_{fi}|^2, \quad (\text{A.1})$$

where \vec{k}_T and \vec{p}_T are the transverse momenta of the photon and the electron in the final state.

The radiation amplitude for a transversely polarized massive photon γ^* ($\omega^2 = k^2 + m_{\gamma^*}^2$) has the form,

$$M_{fi}^T = \int d^3x \Psi^{-\dagger}(\vec{x}, \vec{p}_2) \hat{\alpha} \cdot \vec{e}^* e^{-i\vec{k}\vec{x}} \Psi^+(\vec{x}, \vec{p}_1), \quad (\text{A.2})$$

where $\hat{\alpha} = \gamma_0 \vec{\gamma}$ are the Dirac matrices, and the wave functions $\Psi(\vec{x}, \vec{p}_{1,2})$ of the initial and final electron, are solutions of the Dirac equation in the external potential $U(\vec{x})$,

$$\left[\epsilon_{1,2} - U(\vec{x}) - m\beta + i\hat{\alpha}\vec{\nabla} \right] \Psi(\vec{x}, \vec{p}_{1,2}) = 0. \quad (\text{A.3})$$

The upper indices "−" and "+" in (A.2) indicate that for the initial and final states the solutions contain in addition to the plane wave also an outgoing and incoming spherical wave respectively.

If the energy is sufficiently high, $\epsilon_{1,2} \gg m$, U it is natural to search for a solution of (A.3) in the form of a polynomial expansion over powers of $1/\epsilon$ ($\epsilon = \epsilon_{1,2}$),

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}, \vec{p}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(\vec{x}, \vec{p}), \\ \Psi_n(\vec{x}, \vec{p}) &\sim \epsilon^{-n}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Note that in the case of radiation of a longitudinally polarized photon it is sufficient to take into account only the main (Ψ_0) which has a form,

$$\Psi_0(\vec{x}, \vec{p}) = e^{i\vec{p}\vec{r}} f(\vec{x}, \vec{p}) \frac{u(\vec{p})}{\sqrt{2\epsilon}}, \quad (\text{A.5})$$

where $u(\vec{p}_{1,2})$ is the 4-component spinor corresponding to a free electron with momentum $\vec{p}_{1,2}$, and the scalar function $f(\vec{x}, \vec{p})$ is a solution of the equation,

$$\left(\Delta + 2i\vec{p}\vec{\nabla} - 2\epsilon U(\vec{x}) \right) f(\vec{x}, \vec{p}) = 0. \quad (\text{A.6})$$

In the case of radiation of transversely polarized photons it is known [26] that the two first terms in expansion (A.4) are important. Their sum can be represented in the form, of Furry approximation, Ψ_F [27]

$$\Psi_0 + \Psi_1 \equiv \Psi_F = e^{i\vec{p}\vec{x}} \left(1 - \frac{i\hat{\alpha}\vec{\nabla}}{2\epsilon} \right) f(\vec{x}, \vec{p}) \frac{u(\vec{p})}{\sqrt{2\epsilon}}. \quad (\text{A.7})$$

One can estimate the accuracy of the Furry approximation using the following relations,

$$\Psi - \Psi_F \equiv \delta\Psi = e^{i\vec{p}\vec{x}} \Phi(\vec{x}, \vec{p}), \quad (\text{A.8})$$

where $\Phi(\vec{x}, \vec{p})$ satisfies the equation,

$$\left[\Delta + 2i\vec{p} \cdot \vec{\nabla} - 2\epsilon U(\vec{x}) + i\hat{\alpha} \cdot \vec{\nabla} U(\vec{x}) \right] \Phi(\vec{x}, \vec{p}) = -\frac{1}{2\epsilon} \left(\hat{\alpha} \cdot \vec{\nabla} U(\vec{x}) \right) \left(\hat{\alpha} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}, \vec{p}) \right) \quad (\text{A.9})$$

It turns out that this correction to the Furry approximation for the electron wave function is of the order of \bar{U}/ϵ in the bremsstrahlung cross section.

It is convenient (see below) to chose the axis z along the momentum of the radiated photon. In this case one can represent the Furry approximation (A.7) for the functions $\Psi^+(\vec{x}, \vec{p}_1)$ and $\Psi^-(\vec{x}, \vec{p}_2)$ in the form,

$$\Psi_F^+(\vec{x}, \vec{p}_1) = e^{ip_1 z} \hat{D}_1 F^+(\vec{x}, \vec{p}_1) \frac{u(\vec{p}_1)}{\sqrt{2\epsilon_1}}, \quad (\text{A.10})$$

$$\Psi_F^-(\vec{x}, \vec{p}_2) = e^{ip_2 z} \hat{D}_2 F^-(\vec{x}, \vec{p}_2) \frac{u(\vec{p}_2)}{\sqrt{2\epsilon_2}}, \quad (\text{A.11})$$

where

$$\begin{aligned} \hat{D}_{1,2} &= 1 - i \frac{\hat{\alpha} \cdot \vec{\nabla}}{2\epsilon_{1,2}} - \frac{\hat{\alpha}(\vec{p}_{1,2} - \vec{n} p_{1,2})}{2\epsilon_{1,2}}; \\ \vec{n} &= \frac{\vec{k}}{k}; \\ z &= \vec{n} \cdot \vec{x}; \\ p_{1,2} &= |\vec{p}_{1,2}|. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

In this case the functions $F(\vec{x}, \vec{p})$ and $f(\vec{x}, \vec{p})$ are related as,

$$F(\vec{x}, \vec{p}) = \exp(ip\vec{x} - ipz) f(\vec{x}, \vec{p}). \quad (\text{A.13})$$

Therefore, $F(\vec{x}, \vec{p}) = F^\pm(\vec{x}, \vec{p})$ has to satisfy the equation,

$$\left(\Delta + 2ip \frac{d}{dz} - 2\epsilon U(\vec{x}) \right) F(\vec{x}, \vec{p}). \quad (\text{A.14})$$

The characteristic longitudinal distances in the problem under consideration $x_L \sim \epsilon/m^2$ are much longer than the typical transverse distances $x_T \sim 1/m$ [26]. Therefore, in the Laplacian

$\Delta = d^2/dz^2 + (d/d\vec{x})^2$ one can drop the first term d^2/dz^2 . Then (A.14) takes the form of the two-dimensional Schrödinger equation,

$$i \frac{d}{dz} F(\vec{x}, \vec{p}) = \left[-\frac{\Delta_T}{2p} + U(\vec{x}) \right] F(\vec{x}, \vec{p}), \quad (\text{A.15})$$

where $p = |\vec{p}|$. We define F^\pm in accordance with the asymptotic behavior,

$$F^+(\vec{x}, \vec{p}_1) \Big|_{z \rightarrow z_- = -\infty} \rightarrow e^{i \vec{p}_{1T} \vec{r}} \quad (\text{A.16})$$

$$F^-(\vec{x}, \vec{p}_2) \Big|_{z \rightarrow z_+ = +\infty} \rightarrow e^{i \vec{p}_{2T} \vec{r}}. \quad (\text{A.17})$$

Here we introduced new notations for transverse, $\vec{r} \equiv \vec{x}_T$, and longitudinal, $z \equiv x_L$, coordinates. It follows from (A.15) - (A.17) that these functions can be represented in the form,

$$F^+(\vec{x}, \vec{p}_1) = \int d^3 r_1 G(z, \vec{r}; z_-, \vec{r}_1 | \vec{p}_1) e^{i \vec{p}_{1T} \vec{r}_1}, \quad (\text{A.18})$$

$$F^{*-}(\vec{x}, \vec{p}_2) = \int d^3 r_2 G(z_+, \vec{r}_2; z, \vec{r} | \vec{p}_2) e^{-i \vec{p}_{2T} \vec{r}_2}, \quad (\text{A.19})$$

where $G(z_2, \vec{r}_2; z_1, \vec{r}_1 | \vec{p})$ is the retarded Green function corresponding to Eq. (A.15),

$$\left[i \frac{d}{dz_2} + \frac{\Delta_2}{2p} - U(z_2, \vec{r}_2) \right] G(z_2, \vec{r}_2; z_1, \vec{r}_1 | \vec{p}) = i \delta(z_2 - z_1) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (\text{A.20})$$

and satisfying the conditions,

$$\begin{aligned} G(z_2, \vec{r}_2; z_1, \vec{r}_1 | \vec{p}) \Big|_{z_1 = z_2} &= \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ G(z_2, \vec{r}_2; z_1, \vec{r}_1 | \vec{p}) \Big|_{z_1 > z_2} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

It is convenient to chose the axis z along the momentum of the radiated photon. Then

$$\begin{aligned} \vec{p}_{1T} &= -\frac{\vec{k}_T}{\alpha}, \\ \vec{p}_{2T} &= \vec{p}_T - \frac{1-\alpha}{\alpha} \vec{k}_T, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

where \vec{k}_T and \vec{p}_T are the transverse components of the photon and final electron momenta relative to the direction of the initial electron; α is the fraction of the light-cone momentum of the initial electron carried by the photon.

We arrive at the following expression for the radiation amplitude (A.2),

$$\begin{aligned} M_{fi}^T &= \frac{1}{2p(1-\alpha)} \int d^2 r_1 d^2 r_2 d^2 r dz \exp(-i \vec{p}_{2T} \vec{r}_2) G(z_+, r_2; z, r | \vec{p}_2) \\ &\exp(i q_{min} z) \hat{\Gamma} G(z, r; z_-, r_1 | \vec{p}_1) \exp(i \vec{p}_{1T} \vec{r}_1), \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

where

$$q_{min} = \frac{\alpha m_q^2}{2(1-\alpha)E_q} + \frac{m_\gamma^2}{2\alpha E_q}, \quad (\text{A.24})$$

and E_q , m_q are the energy and the mass of the projectile quark. In the approximation considered in this paper when the fluctuation time substantially exceeds the interaction time, $q_{min} \ll 1/R_A$ and can be neglected.

The vertex function in (A.23) reads,

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} &= \sqrt{1-\alpha} u^*(\vec{p}_2) \hat{D}_2^* \hat{\alpha} \cdot \vec{e}^* \hat{D}_1 u(p_1) \\ &= \chi_2^\dagger \left[i m \alpha (\vec{n} \times \vec{\sigma}) \cdot \vec{e}^* + \alpha (\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}_T) \cdot \vec{e}^* - i(2-\alpha) \vec{\nabla}_T \cdot \vec{e}^* \right] \chi_1. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

The operator $\vec{\nabla}_T = d/d\vec{r}$ acts to the right. $\chi_{1,2}$ are the two-component spinors of the initial and final electrons.

In the case of a composite target the potential has to be summed over the constituents,

$$U(\vec{r}, z) = \sum_i U_0(\vec{r} - \vec{r}_i, z - z_i) \quad (\text{A.26})$$

and the bremsstrahlung cross section should be averaged over the positions (\vec{r}_i, z_i) of the scattering centres.

The averaged matrix element squared takes the form,

$$\begin{aligned} \langle |M_{fi}^T|^2 \rangle &= 2 \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{z_1}^{\infty} dz_2 \int d^2 r_1 d^2 r'_1 d^2 r_2 d^2 r'_2 d^2 r d^2 r' d^2 \rho d^2 \rho' \\ &\times \exp \left[i \vec{p}_2 T (\vec{r}_2 - \vec{r}_2) - i \vec{p}_1 T (\vec{r}_1 - \vec{r}_1) - i q_{min} (z_2 - z_1) \right] \\ &\times \left\langle G(z_+, \vec{r}_2; z_2, \vec{\rho} | p_2) G^*(z_+, \vec{r}'_2; z_2, \vec{\rho}' | p_2) \right\rangle \\ &\times \hat{\Gamma}'^* \left\langle G(z_2, \vec{\rho}; z_1, \vec{r} | p_2) G^*(z_2, \vec{r}'_1; z_1, \vec{\rho}' | p_1) \right\rangle \\ &\times \hat{\Gamma} \left\langle G(z_1, \vec{r}; z_-, \vec{r}_1 | p_1) G^*(z_1, \vec{\rho}'_1; z_-, \vec{r}'_1 | p_1) \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

where $\hat{\Gamma}'$ differs from $\hat{\Gamma}$ in (A.25) by the replacement

$$\vec{\nabla} = \frac{d}{d\vec{r}} \Rightarrow \vec{\nabla}' = \frac{d}{d\vec{r}'}$$

The following consideration is based on the representation of the Green function G in the form of a continuous integral [28],

$$G(z_2, \vec{r}_2; z_1, \vec{r}_1 | p) = \int \mathcal{D}\vec{r}(z) \exp \left\{ \frac{ip}{2} \int_{z_1}^{z_2} dz \left(\frac{d\vec{r}(z)}{dz} \right)^2 - i \int_{z_1}^{z_2} dz U(\vec{r}(z), z) \right\}, \quad (\text{A.28})$$

where

$$\vec{r}(z_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(z_2) = \vec{r}_2,$$

and the relation

$$\int_{z_1}^{z_2} dz \sum_i U_0(\vec{r}(z) - \vec{r}_i, z - z_i) = \sum_i \chi(\vec{r}(z_i) - \vec{r}_i) \Theta(z_2 - z_i) \Theta(z_i - z_1), \quad (\text{A.29})$$

where $\chi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz U_0(\vec{r}, z)$.

The mean value of the eikonal exponential is,

$$\left\langle \exp \left\{ i \sum_i [\chi(\vec{r}(z_i)) - \chi(\vec{r}'(z_i))] \Theta(z_2 - z_i) \Theta(z_i - z_1) \right\} \right\rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} dz n(z, \vec{b}) \sigma [\vec{r}(z) - \vec{r}'(z)] \right\}, \quad (\text{A.30})$$

where

$$\sigma(\vec{r} - \vec{r}') = 2 \int d^2 \rho [1 - \exp(i\chi(\vec{r} - \vec{\rho}) - i\chi(\vec{r}' - \vec{\rho}))], \quad (\text{A.31})$$

and $n(z, \vec{b})$ is the density of scattering centres.

Using these relations and performing integration by parts in (A.27),

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^T}{d(\ln\alpha)d^2p_T d^2k_T} &= \frac{\alpha_{em}}{(2\pi)^4 4p^2(1-\alpha)^2} 2\text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{z_1}^{\infty} dz_2 \int d^2b d^2\rho_1 d^2\rho_2 \\ &\times \exp \left[i\alpha \vec{p}_{2T} \vec{\rho}_2 - i\alpha \vec{p}_{1T} \vec{\rho}_1 - \int_{z_2}^{\infty} dz V(z, \vec{\rho}_2) - \int_{-\infty}^{z_1} dz V(z, \vec{\rho}_1) \right] \\ &\times \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_1^* W(z_2, \vec{\rho}_2; z_1, \vec{\rho}_1 | p). \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

The variables in this equation are related to those in (A.27) as,

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_1 &= \frac{\vec{r}'_1 - \vec{r}_1}{\alpha} \\ \vec{\rho}_2 &= \frac{\vec{r}'_2 - \vec{r}_2}{\alpha} \\ \vec{b} &= \frac{1}{2}(\vec{r}'_1 + \vec{r}_1). \end{aligned}$$

Other variables in (A.27) are integrated explicitly.

Matrices $\hat{\gamma}$ are related to $\hat{\Gamma}$ in (A.25) by replacement $m \Rightarrow \alpha m$ and $d/d\vec{r} \Rightarrow d/d\vec{\rho}$.

Absorptive potential V in (A.32) reads,

$$V(z, \vec{\rho}) = n(z, \vec{b}) \frac{\sigma}{2} (\alpha \cdot \vec{\rho}),$$

and W is the solution of either of the equations,

$$\frac{\partial}{\partial z_2} W(z_2, \vec{\rho}_2; z_1, \vec{\rho}_1 | p) = \frac{i[\Delta(\vec{\rho}_2) - \epsilon^2]}{2\alpha(1-\alpha)p} W(z_2, \vec{\rho}_2; z_1, \vec{\rho}_1 | p) - V(\vec{\rho}_2, z_2) W(z_2, \vec{\rho}_2; z_1, \vec{\rho}_1 | p), \quad (\text{A.33})$$

$$-\frac{\partial}{\partial z_1} W(z_2, \vec{\rho}_2; z_1, \vec{\rho}_1 | p) = \frac{i[\Delta(\vec{\rho}_1) - \varepsilon^2]}{2\alpha(1-\alpha)p} W(z_2, \vec{\rho}_2; z_1, \vec{\rho}_1 | p) - V(\vec{\rho}_1, z_1) W(z_2, \vec{\rho}_2; z_1, \vec{\rho}_1 | p), \quad (\text{A.34})$$

with the boundary condition

$$W(z_2, \vec{\rho}_2; z_1, \vec{\rho}_1 | p) \Big|_{z_2=z_1} = \delta(\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1). \quad (\text{A.35})$$

Using these equations and the relation,

$$[\Delta(\vec{\rho}) - \varepsilon^2] K_0(\varepsilon |\vec{\rho}|) = -2\pi\delta(\vec{\rho}) \quad (\text{A.36})$$

simple but cumbersome calculations lead to a new form for Eq. (A.32),

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^T}{d(\ln\alpha) d^2 p_T d^2 k_T} &= \frac{\alpha^2}{(2\pi)^4} \left\{ \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d^2 b d^2 \rho_1 d^2 \rho_2 d^2 \rho \right. \\ &\times \exp \left[i\alpha \vec{p}_{2T} \vec{\rho}_2 - i\alpha \vec{p}_{1T} \vec{\rho}_1 - \int_z^{\infty} dz' V(z', \vec{\rho}_2) - \int_{-\infty}^z dz' V(z', \vec{\rho}_1) \right] \\ &\times \Psi_T^\dagger(\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}) \left[2V(z, \vec{\rho}) - V(z, \vec{\rho}_1) - V(z, \vec{\rho}_2) \right] \Psi_T(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}) \\ &- 2\text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{z_1}^{\infty} dz_2 \int d^2 b d^2 \rho_1 d^2 \rho_2 d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2 \\ &\times \exp \left[i\alpha \vec{p}_{2T} \vec{\rho}_2 - i\alpha \vec{p}_{1T} \vec{\rho}_1 - \int_{z_2}^{\infty} dz V(z, \vec{\rho}_2) - \int_{-\infty}^{z_1} dz V(z, \vec{\rho}_1) \right] \\ &\times \Psi_T^\dagger(\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}'_2) \left[V(z_2, \vec{\rho}_2) - V(z_2, \vec{\rho}'_2) \right] W(z_2, \vec{\rho}_2; z_1, \vec{\rho}'_1 | p) \\ &\times \left. \left[V(z_1, \vec{\rho}_1) - V(z_1, \vec{\rho}'_1) \right] \Psi_T(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}'_1) \right\}, \quad (\text{A.37}) \end{aligned}$$

where

$$\Psi_T(\vec{\rho}) = \frac{\sqrt{\alpha_{em}}}{2\pi} \hat{\Gamma} K_0(\varepsilon\rho). \quad (\text{A.38})$$

In the ultrarelativistic limit ($p \rightarrow \infty$) we have

$$W(z_2, \vec{\rho}_2; z_1, \vec{\rho}_1 | \infty) = \delta(\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1) \exp \left[- \int_{z_1}^{z_2} dz V(z, \vec{\rho}_2) \right]. \quad (\text{A.39})$$

The integrations over z , z_1 , z_2 in (A.37) can be performed analytically, and we arrive at the expression

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^T}{d(\ln\alpha) d^2 p_T d^2 k_T} &= \frac{\alpha^2}{(2\pi)^4} \int d^2 r_1 d^2 r_2 d^2 r \exp \left[i\alpha \vec{r} (\vec{p}_T + \vec{k}_T) + i(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{k}_T \right] \\ &\times \psi_T(\vec{r}_1) \psi_T^*(\vec{r}_2) \Sigma_\gamma(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha), \quad (\text{A.40}) \end{aligned}$$

where

$$\Sigma_\gamma(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) = \Sigma\left(\alpha(\vec{r} + \vec{r}_1)\right) + \Sigma\left(\alpha(\vec{r} - \vec{r}_2)\right) - \Sigma(\alpha\vec{r}) - \Sigma\left(\alpha(\vec{r} + \vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right), \quad (\text{A.41})$$

and

$$\Sigma(\rho) = \int d^2b \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{\sigma(\rho)}{2} T(b)\right] \right\}. \quad (\text{A.42})$$

The derivation of the correspondent expressions for gluon bremsstrahlung is done analogously. We skip the details and present only the results.

$$\Sigma_g(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) = \Sigma_1(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) + \Sigma_2(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) - \Sigma_3(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) - \Sigma_4(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha), \quad (\text{A.43})$$

where

$$\Sigma_i(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) = \int d^2b \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{1}{2} \sigma_i(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) T(b)\right] \right\}; \quad (\text{A.44})$$

$$\sigma_1(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) = \frac{9}{8} \left[\sigma(\vec{r} + (1 - \alpha)\vec{r}_2) + \sigma(\vec{r}_1) \right] - \frac{1}{8} \sigma(\vec{r} + \alpha\vec{r}_1); \quad (\text{A.45})$$

$$\sigma_2(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) = \frac{9}{8} \left[\sigma(\vec{r} - (1 - \alpha)\vec{r}_2) + \sigma(\vec{r}_2) \right] - \frac{1}{8} \sigma(\vec{r} + \alpha\vec{r}_2); \quad (\text{A.46})$$

$$\sigma_3(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) = \sigma(\alpha\vec{r}); \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned} \sigma_4(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) &= \sigma(\vec{r} - \alpha(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) + \frac{9}{4} \sigma(\vec{r} + (1 - \alpha)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) + \frac{9}{8} \left[\sigma(\vec{r}_1) + \sigma(\vec{r}_2) \right. \\ &\quad \left. - \sigma(\vec{r} + (1 - \alpha\vec{r}_1 + \alpha\vec{r}_2)) - \sigma(\vec{r} - (1 - \alpha\vec{r}_2 + \alpha\vec{r}_1)) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

This expression simplifies and gets the form of (29) if one integrates in (A.40) over transverse momentum p_T of the quark. Note that the last cross section $\sigma_4(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha)$ is the total cross section for a colorless system of two gluons, quark and antiquark interacting with a nucleon (compare with (11)). Here \vec{r}_1 and \vec{r}_2 are the transverse separations inside the qg and $\bar{q}g$ pairs and \vec{r} is the transverse distance between the centers of gravity of these pairs.

Appendix B

In order to calculate Eqs. (17) - (18) in the dipole approximation $\sigma_{q\bar{q}} = C r^2$, we need to evaluate integrals of two types:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2r_1 d^2r_2 \exp\left[i\vec{k}_T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right] \\ &\quad \times K_0(\epsilon r_1) K_0(\epsilon r_2) \exp\left\{-\frac{1}{4}(f r_1^2 + h r_2^2 - 2g\vec{r}_1\vec{r}_2)\right\}; \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

and

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2r_1 d^2r_2 \exp\left[i\vec{k}_T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right] \\ &\quad \times \frac{(\vec{r}_1\vec{r}_2)}{r_1 r_2} K_1(\epsilon r_1) K_1(\epsilon r_2) \exp\left\{-\frac{1}{4}(f r_1^2 + h r_2^2 - 2g\vec{r}_1\vec{r}_2)\right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Here we use the notation,

$$\frac{\sigma_{\bar{q}q}(\rho)}{2} T(b) = \frac{1}{4} (fr_1^2 + hr_2^2 - 2g\bar{r}_1\bar{r}_2). \quad (\text{B.3})$$

We use the integral representation for the modified Bessel functions, which reads

$$K_0(\varepsilon r) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp \left\{ -t - \frac{\varepsilon^2 r^2}{4t} \right\}; \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{1}{\varepsilon r} K_1(\varepsilon r) = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \exp \left\{ -t - \frac{\varepsilon^2 r^2}{4t} \right\}. \quad (\text{B.5})$$

After substitution of (B.5) and (B.7) into (B.1) and (B.2) and making use of the following obvious relations,

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^2 r_1 d^2 r_2 \exp \left\{ i\vec{k}_T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (ar_1^2 + cr_2^2 - 2b\bar{r}_1\bar{r}_2) \right\} \\ &= \frac{1}{(ac - b^2)} \exp \left\{ -\frac{k_T^2 (a + c - 2b)}{(ac - b^2)} \right\}; \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{16(2\pi)^2} \int d^2 r_1 d^2 r_2 (\bar{r}_1\bar{r}_2) \exp \left\{ i\vec{k}_T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (ar_1^2 + cr_2^2 - 2b\bar{r}_1\bar{r}_2) \right\} \\ &= \left[\frac{1}{(ac - b^2)^2} - \frac{bk_T^2(a + c - 2b)}{(ac - b^2)^3} \right] \times \exp \left\{ -\frac{k_T^2(a + c - 2b)}{ac - b^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

one arrives at,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dt}{t} \frac{du}{u} \exp(-u - t) I_3, \\ I_2 &= \varepsilon^2 \int \frac{dt}{t^2} \frac{du}{u^2} \exp(-u - t) I_4; \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

where

$$a = \frac{\varepsilon^2}{t} + f, \quad c = \frac{\varepsilon^2}{u} + h, \quad b = g. \quad (\text{B.9})$$

Thus, for the general case in addition to the integration over the impact parameter one has to evaluate numerically a two-dimensional integral over dt and du .

The situation is simplified in the case of photon bremsstrahlung, when integration for the three exponentials in (17) correspond to the following values of the parameters, respectively,

$$\begin{aligned} f &= g = 0, & h &= 2c\alpha^2 T(b); \\ h &= g = 0, & f &= 2c\alpha^2 T(b); \\ f &= h = g & &= 2c\alpha^2 T(b). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

In this case Eqs. (B.7) and (B.7) are reduced to one-dimensional integrals.

References

- [1] L.D. Landau, I.Ya. Pomeranchuk, *ZhETF* **24** (1953) 505,
L.D. Landau, I.Ya. Pomeranchuk, *Doklady AN SSSR* **92** (1953) 535, 735,
E.L. Feinberg, I.Ya. Pomeranchuk, *Doklady AN SSSR* **93** (1953) 439,
I.Ya. Pomeranchuk, *Doklady AN SSSR* **96** (1954) 265,
I.Ya. Pomeranchuk, *Doklady AN SSSR* **96** (1954) 481,
E.L. Feinberg, I.Ya. Pomeranchuk, *Nuovo Cim. Suppl.* **4** (1956) 652
- [2] B.Z. Kopeliovich, J. Nemchik and E. Predazzi, Hadronization in Nuclear Environment and Electroproduction of Leading Hadrons, in proc. of ELFE Summer School on Confinement Physics, ed. by S.D. Bass and P.A.M. Guichon, Editions Frontieres, 1995, p. 391 [hep-ph/9511214]
- [3] M. Gyulassy and X.-N. Wang, *Nucl. Phys.* **B420** (1994) 583; M. Gyulassy and M. Plümer, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 3436
- [4] See e.g. Yu.L. Dokshitzer, V.A. Khoze, A.H. Mueller, and S.I. Troyan, 'Basics of perturbative QCD', ch. 1, Editions Frontieres, 1991
- [5] A.B. Migdal, *Phys. Rev.* **103** (1956) 1811
- [6] F. Niedermayer, *Phys. Rev.* **D34** (1986) 3494
- [7] R. Baier, Yu.L. Dokshitzer, A.H. Mueller, S. Peigne and D. Schiff, *Nucl. Phys.* **B483** (1997) 291; **B484** (1997) 265
- [8] B.G. Zakharov, *JETP Lett.* **63** (1996) 952; **64** (1996) 781; **65** (1997) 615
- [9] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, L. Mc Lerran and H. Weigert, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 5414
- [10] R. Baier, Yu.L. Dokshitzer, A.H. Mueller, and D. Schiff, 'Medium-induced radiative energy loss; equivalence between the BDMPS and Zakharov formalism', preprint, hep-ph/9804212
- [11] Y.V. Kovchegov and A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B529** (1998) 451 [hep-ph/9802440]
- [12] B.Z. Kopeliovich, Soft Component of Hard Reactions and Nuclear Shadowing (DIS, Drell-Yan reaction, heavy quark production), in proc. of the Workshop Hirscheegg'95: Dynamical Properties of Hadrons in Nuclear Matter, Hirscheegg, January 16-21, 1995, ed. by H. Feldmeier and W. Nörenberg, Darmstadt, 1995, p. 102 [hep-ph/9609385]
- [13] S.J. Brodsky, A. Hebecker and E. Quack, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 2584
- [14] J.B. Kogut and D.E. Soper, *Phys. Rev.* **D1** (1970) 2901; J.M. Bjorken, J.B. Kogut and D.E. Soper, **D3** (1971) 1382
- [15] A.B. Zamolodchikov, B.Z. Kopeliovich and L.I. Lapidus, *Sov. Phys. JETP Lett.* **33** (1981) 612
- [16] J.F. Gunion and G. Bertsch, *Phys. Rev.* **D25** (1982) 746
- [17] N.N. Nikolaev and B.G. Zakharov, *JETP* **78** (1994) 598
- [18] J. Hüfner and B. Povh, *Phys. Rev.* **D46** (1992) 990
- [19] G. Bertsch, S.J. Brodsky, A.S. Goldhaber and J.F. Gunion, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 297

- [20] D.M. Alde et al., Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2479
- [21] J. Hüfner and B.Z. Kopeliovich, Phys. Lett. **B312** (1993) 235
- [22] E.V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **65** (1993) 1
- [23] J. Cronin et al., Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 426
- [24] Y.B. Hsiung et al., Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 457
- [25] B.Z. Kopeliovich and B. Povh, hep-ph/9806284
- [26] V.B. Berestetski, E.M. Lifshits and L.P. Pitaevski, *Relativistic Quantum Theory. Vol. I. – Landau Course of Theoretical Physics. Vol. IV.* (Moscow, Nauka, 1968) [English translation: (Oxford, Pergamon Press, 1979)]
- [27] W.N. Furry, Phys. Rev. **46** (1934) 391
- [28] R.P. Feynman and A.R. Gibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGRAW-HILL Book Company, New York 1965
- [29] L.N. Lipatov, Sov. Phys. JETP **63** (1986) 904

Nonperturbative Effects in Gluon Radiation and Photoproduction of Quark Pairs *

Boris Kopeliovich^{1,2}, Andreas Schäfer³ and Alexander Tarasov^{1,2,3}

¹Max-Planck Institut für Kernphysik, Postfach 103980, 69029 Heidelberg, Germany

²Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980 Moscow Region, Russia

³Institut für Theoretische Physik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg, Germany

Abstract

We introduce a nonperturbative interaction for light-cone fluctuations containing quarks and gluons. The $\bar{q}q$ interaction squeezes the transverse size of these fluctuations in the photon and one does not need to simulate this effect via effective quark masses. The strength of this interaction is fixed by data. Data on diffractive dissociation of hadrons and photons show that the nonperturbative interaction of gluons is much stronger. We fix the parameters for the nonperturbative quark-gluon interaction by data for diffractive dissociation to large masses (triple-Pomeron regime). This allows us to predict nuclear shadowing for gluons which turns out to be not as strong as perturbative QCD predicts. We expect a delayed onset of gluon shadowing at $x \leq 10^{-2}$ shadowing of quarks. Gluon shadowing turns out to be nearly scale invariant up to virtualities $Q^2 \sim 4 \text{ GeV}^2$ due to presence of a semihard scale characterizing the strong nonperturbative interaction of gluons. We use the same concept to improve our description of gluon bremsstrahlung which is related to the distribution function for a quark-gluon fluctuation and the interaction cross section of a $\bar{q}qG$ fluctuation with a nucleon. We expect the nonperturbative interaction to suppress dramatically the gluon radiation at small transverse momenta compared to perturbative calculations.

1 Introduction

The light-cone representation introduced in [1] is nowadays a popular and powerful tool to study the dynamics of photo-induced (real and virtual) reactions. The central concept of this approach is the non-normalized distribution amplitude of $\bar{q}q$ fluctuations of the photon in the mixed $(\vec{\rho}, \alpha)$ representation, where $\vec{\rho}$ is the transverse $\bar{q}q$ separation and α is the fraction of the light-cone momentum of the photon carried by the quark (antiquark). For transversely and longitudinally polarized photons it reads [1, 2],

$$\Psi_{\bar{q}q}^{T,L}(\vec{\rho}, \alpha) = \frac{\sqrt{\alpha_{em}}}{2\pi} \bar{\chi} \hat{O}^{T,L} \chi K_0(\epsilon\rho). \quad (1)$$

Here χ and $\bar{\chi}$ are the spinors of the quark and antiquark respectively. $K_0(\epsilon\rho)$ is the modified Bessel function, where

$$\epsilon^2 = \alpha(1 - \alpha)Q^2 + m_q^2. \quad (2)$$

This is a generalization of [1, 2] to the case of virtual photons [3, 4].

The operators $\hat{O}^{T,L}$ have the form,

$$\hat{O}^T = m_q \vec{\sigma} \cdot \vec{e} + i(1 - 2\alpha) (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) (\vec{e} \cdot \vec{\nabla}_\rho) + (\vec{\sigma} \times \vec{e}) \cdot \vec{\nabla}_\rho, \quad (3)$$

*Phys. Rev. D62 (2000) 054022. Copyright © 1999 The American Physical Society. Reproduced by permission of the APS.

$$\widehat{O}^L = 2Q\alpha(1-\alpha)\vec{\sigma}\cdot\vec{n}, \quad (4)$$

where the dimension-two operator $\vec{\nabla}_\rho$ acts on the transverse coordinate $\vec{\rho}$; $\vec{n} = \vec{p}/p$ is a unit vector parallel to the photon momentum; $\vec{\epsilon}$ is the polarization vector of the photon.

The advantage of the light-cone approach is the factorized form of the interaction cross section which is given by the sum of the cross sections for different fluctuations weighted by the probabilities of these Fock states [5, 3, 6]. The flavor independent color-dipole cross section $\sigma_{\bar{q}q}$ first introduced in [5] as dependent only on transverse $\bar{q}q$ separation ρ . It vanishes quadratically at $\rho \rightarrow 0$ due to color screening,

$$\sigma_{\bar{q}q}(\rho, s) \Big|_{\rho \rightarrow 0} = C(\rho, s) \rho^2, \quad (5)$$

where $C(\rho, s)$ is a smooth function of separation and energy. In fact, $C(\rho, s)$ also depends on relative sharing by the \bar{q} and q of the total light cone momentum. We drop this dependence in what follows unless it is important (e.g. for diffractive gluon radiation). It was first evaluated assuming no energy dependence in pQCD [5, 7] and phenomenologically [8] at medium large energies and ρ 's and turned out to be $C \approx 3$. There are several models for the function $C(\rho, s)$ (e.g. in [9, 10, 11]), unfortunately neither seems to be reliable. In this paper we concentrate on the principal problems how to include nonperturbative effects, and do not try to optimize the form of the cross section. For practical applications it can be corrected as soon as a more reliable model for $C(\rho, s)$ is available. We modify one of the models mentioned above [10] which keeps the calculations simple to make it more realistic and use it throughout this paper.

The distribution amplitudes (1) control the mean transverse $\bar{q}q$ separation in a virtual photon,

$$\langle \rho^2 \rangle \sim \frac{1}{\alpha(1-\alpha)Q^2 + m_q^2}. \quad (6)$$

Thus, even a highly virtual photon can create a large size $\bar{q}q$ fluctuation with large probability provided that α (or $1-\alpha$) is very small, $\alpha Q^2 \sim m_q^2$. This observation is central to the aligned jet model [2]. At small Q^2 soft hadronic fluctuations become dominant at any α . In this case the perturbative distribution functions (1) which are based on several assumptions including asymptotic freedom, are irrelevant. One should expect that nonperturbative interactions modify (squeeze) the distribution of transverse separations of the $\bar{q}q$ pair. In Section 2.1 we introduce a nonperturbative interaction between the quark and antiquark into the Schrödinger type equation for the Green function of the $\bar{q}q$ pair [12, 13, 14]. The shape of the real part of this potential is adjusted to reproduce the light-cone wave function of the ρ -meson. We derive new light-cone distribution functions for the interacting $\bar{q}q$ fluctuations of a photon, which coincide with the known perturbative ones in the limit of vanishing interaction. The strength of the nonperturbative interaction can be fixed by comparison with data sensitive to the transverse size of the fluctuations. The observables we have chosen in Section 2.2 are the total photoabsorption cross sections on protons and nuclei and the cross section for diffractive dissociation of a photon into a $\bar{q}q$ pair.

For gluon bremsstrahlung we expect the transverse separation in a quark-gluon fluctuation to be of the order of the typical color correlation length $\sim 0.3 fm$ obtained by several QCD analyses [15] – [17]. This corresponds to the radius of a constituent quark in many effective models. To the extent that the typical $q-G$ separation is smaller than the $\bar{q}q$ one we expect

gluon radiation to be suppressed. This results in particular in a suppression of diffractive gluon radiation, *i.e.* of the triple-Pomeron coupling, which is seen indeed in the data.

In Section 3.1 we assume a similar shape for the quark-gluon potential as for the $\bar{q}q$ one, but with different parameters. A new light-cone distribution function for a quark-gluon fluctuation of a quark is derived, which correctly reproduces the known limit of perturbative QCD.

Comparison with data on diffractive excitations with large mass fixes the strength of the nonperturbative interaction of gluons. An intuitive physical picture of diffraction, as well as a simple calculation of the cross sections of different diffractive reactions is presented in Appendix A. A more formal treatment of the same diffractive reactions via calculation of Feynman diagrams is described in Appendix B.

A crude estimate of the interaction parameters is given in Section 3.1.1 within the additive quark model (AQM). For this purpose the cross section of diffractive gluon radiation by a quark, $qN \rightarrow qGN$, is calculated in Appendices A.2 and B.1, based on general properties of diffraction (Appendix A.1) and the direct calculation of Feynman diagrams.

Quite a substantial deviation from the results for the AQM is found in Section 3.1.2 and Appendix C where the diffractive excitation of a nucleon via gluon radiation, $NN \rightarrow XN$ is calculated. The high precision of the data for this reaction allows to fix the strength of the nonperturbative interaction of gluons rather precisely.

The cross sections of diffractive gluon radiation by mesons and photons are calculated in Appendices A.3 and B.2. In Section 3.1.3 we compare the values of the triple-Pomeron couplings (calculated in Appendix C) for diffractive dissociation of a photon and different hadrons and find a violation of Regge factorization by about a factor of two.

Our results for the cross section of diffractive dissociation $\gamma^*N \rightarrow q\bar{q}GN$ in the limit of vanishing nonperturbative interaction can be compared with previous perturbative calculations [18, 19]. *In this limit we are in agreement with [19], but disagree with [18].[†] The source of error in [18] is the application of Eq. (A.6) to an exclusive channel and a renormalization recipe based on a probabilistic treatment of diffraction.*

Diffractive radiation of photons is considered in Appendices A.4 and B.3. It is shown that no radiation occurs without transverse momentum transfer to the quark (in contrast to gluon radiation). Therefore, the cross section for diffractive production of Drell-Yan pairs is suppressed compared to the expectation of [20] which is also based on an improper application of Eq. (A.6) to an exclusive channel.

Section 3.2 is devoted to nuclear shadowing for the gluon distribution function at small x . Calculations for many hard reactions on nuclei (DIS, high p_T jets, heavy flavor production, etc.) desperately need the gluon distribution function for nuclei which is expected to be shadowed at small x . Many approaches [21]–[31] to predict nuclear shadowing for gluons can be found in the literature (see recent review [32]). Our approach is based on Gribov's theory of inelastic shadowing [33] and is close to that in [30, 31] which utilizes the results [34, 35] for the gluonic component of the diffractive structure function assuming factorization and using available data. Instead, we fix the parameters of the nonperturbative interaction using data on diffraction of protons and real photons. Besides, we achieved substantial progress in understanding the evolution of diffractively produced intermediate states in nuclear matter.

Nuclear suppression of the gluon density which looks like a result of gluon fusion $GG \rightarrow G$ in the infinite momentum frame of the nucleus, should be interpreted as usual nuclear

[†]In spite of the claim in [19] that their result coincides with that of [18], they are quite different. We are thankful to Mark Wüsthoff for discussion of this controversy.

shadowing for the total interaction cross section of fluctuations containing a gluon if seen in the rest frame of the nucleus. We perform calculations for longitudinally polarized photons which are known to be a good probe for the gluon distribution function. Although the physics of nuclear shadowing and diffraction are closely related, even a good knowledge of single diffractive cross section and mass distributions is not sufficient to predict nuclear shadowing completely, but only the lowest order shadowing correction. A technique for inclusion of the multiple scattering corrections was developed in [12, 13] which includes evolution of the intermediate states propagating through the nucleus. These corrections are especially important for gluon shadowing which does not saturate even at very small x in contrast to shadowing of quarks. In Section 3.2.1 we find quite a steep x -dependence of gluon shadowing at $Q^2 \geq 4 \text{ GeV}^2$ which is rather weak compared to what have been estimated in [30, 31]. Shadowing starts at smaller values of $x < 0.01$ compared to the shadowing of quarks. Such a delayed onset of gluon shadowing is a result of enlarged mass of the fluctuations containing gluons.

As soon as our approach incorporates the nonperturbative effects we are in position to calculate shadowing for soft gluons as well. This is done in Section 3.2.2 using two methods. In hadronic basis one can relate the shadowing term in the total hadron-nucleus cross section to the known diffractive dissociation cross section. This also give the scale for the effective absorption cross section. A better way is to apply the Green function approach which includes the nonperturbative gluon interaction fixed by comparison with data for diffraction. With both methods we have arrived at a similar shadowing, but the Green function approach leads to a delayed onset of shadowing starting at $x < 0.01$. We conclude that gluon shadowing is nearly scale independent up to $Q^2 \sim 4 \text{ GeV}^2$.

The nonperturbative interaction of the radiated gluons especially affects their transverse momentum distribution. One can expect a substantial suppression of radiation with small k_T related to large transverse separations in quark-gluon fluctuations of the projectile quark. Indeed, in Section 3.3 we have found suppression by almost two orders of magnitude for radiation at $k_T = 0$ compared to the perturbative QCD predictions. The difference remains quite large up to a few GeV of momentum transfer. Especially strong nonperturbative effects we expect for the k_T -distribution of gluon bremsstrahlung by a quark propagating through a nucleus. Instead of a sharp peak at $k_T = 0$ predicted by pQCD [36] now we expect a minimum.

2 Virtual photoproduction of quark pairs

2.1 Green function of an interacting quark-antiquark pair

Propagation within a medium of an interacting $\bar{q}q$ pair which has been produced with initial separation $\rho = 0$ from a virtual photon at a point with longitudinal coordinate z_1 and developed a separation $\vec{\rho}$ at the point z_2 (see Fig. 1) can be described by a light-cone Green function $G_{\bar{q}q}(z_1, \vec{\rho}_1 = 0; z_2, \vec{\rho}_2 = \vec{\rho})$. The evolution equation for this Green function was studied in [12]–[14][†],

$$i \frac{d}{dz_2} G_{\bar{q}q}(z_1, \vec{\rho}_1; z_2, \vec{\rho}_2) = \left[\frac{\epsilon^2 - \Delta_\rho}{2p\alpha(1-\alpha)} + V_{\bar{q}q}(z_2, \vec{\rho}, \alpha) \right] G_{\bar{q}q}(z_1, \vec{\rho}_1; z_2, \vec{\rho}_2). \quad (7)$$

[†]our Green function is related to that in [12] by $G_{\bar{q}q}(z_1, \vec{\rho}_1 = 0; z_2, \vec{\rho}_2 = \vec{\rho}) = \exp[-i\epsilon^2(z_2 - z_1)/2p\alpha(1-\alpha)] W(z_1, \rho_1 = 0; z_2, \rho_2 = \rho)$

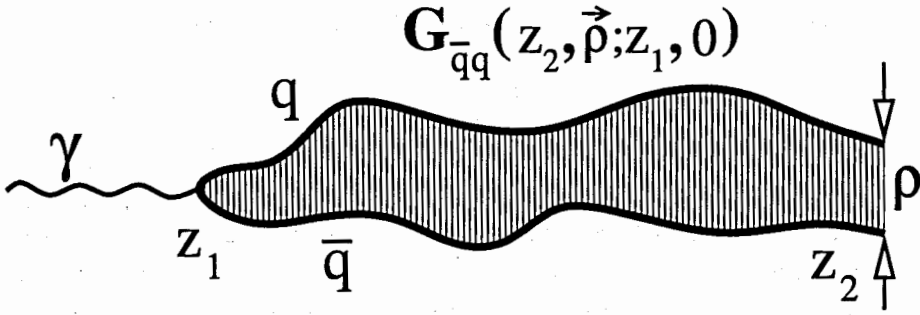


Figure 1: Illustration for the Green function $G_{\bar{q}q}(z_1, \vec{\rho}_1 = 0; z_2, \vec{\rho}_2 = \vec{\rho})$ for an interacting $\bar{q}q$ fluctuation of a photon, as defined by Eq. (7).

The first term on the *r.h.s.* is analogous to the kinetic term in a Schrödinger equation. It takes care of the phase shift for the propagating $\bar{q}q$ pair. Indeed, the relevant phase factor is given by $\exp[i \int_{z_1}^{z_2} dz q_L(z)]$, with the relative longitudinal momentum transfer q_L . The latter is defined by

$$q_L(z) = \frac{M^2(z) + Q^2}{2p} = \frac{\epsilon^2 + k_T^2}{2p\alpha(1 - \alpha)}. \quad (8)$$

Here p is the photon momentum; M is the effective mass of the $\bar{q}q$ pair (which varies with z) and Q^2 is the photon virtuality. It depends on the transverse momentum k_T of the quark (antiquark) which is replaced by the Laplacian, $k_T^2 \Rightarrow -\Delta_\rho$, in the coordinate representation (7).

The imaginary part of the potential $V_{\bar{q}q}(z_2, \vec{\rho}, \alpha)$ is responsible for absorption in the medium which is supposed to be cold nuclear matter.

$$\text{Im } V_{\bar{q}q}(z_2, \vec{\rho}, \alpha) = -\frac{\sigma_{\bar{q}q}(\rho)}{2} \rho_A(z_2). \quad (9)$$

Here $\rho_A(z)$ is the nuclear density and we omit the dependence on the nuclear impact parameter. $\sigma_{\bar{q}q}(\rho, s)$ is the total interaction cross section of a colorless $\bar{q}q$ pair with a nucleon [5] introduced in (5). Eq. (7) with the imaginary potential (9) was used in [12] to calculate nuclear shadowing in deep-inelastic scattering. In other applications the quarks were treated as free, what is justified only in the domain of validity of perturbative QCD.

Our objective here is to include explicitly the nonperturbative interaction between the quarks in (7). We are going to rely on a nonrelativistic potential, which, however, should be modified to be a function of the light-cone variables $\vec{\rho}$ and α . This general problem is, however, not yet solved. Nevertheless, we try to model the real part of the potential based on its general properties. Particularly, the $\bar{q}q$ pair is supposed to have bound states which are vector mesons.

It is assumed usually that the wave function of a vector meson in the ground state depends on ρ and α according to

$$\Psi_V(\vec{\rho}, \alpha) = f(\alpha) \exp\left[-\frac{1}{2}a^2(\alpha)\vec{\rho}^2\right]. \quad (10)$$

In order for this to be a solution of (7) the real part of the potential should be,

$$\text{Re } V_{\bar{q}q}(z_2, \vec{\rho}, \alpha) = \frac{a^4(\alpha) \vec{\rho}^2}{2p\alpha(1-\alpha)}. \quad (11)$$

Unfortunately, no reliable way to fix the form of $a(\alpha)$ is known. A parameterization popular in the literature is $a(\alpha) = 2a\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$, which results from attempts to construct a relativistic approach to the problem of a $\bar{q}q$ bound state (see [37] and references therein). In this case, however, the mean $\bar{q}q$ separation $\rho \propto 1/\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$ increases unrestrictedly towards the endpoints $\alpha = 0, 1$. Such a behavior contradicts the concept of confinement and should be corrected. The simplest way to do so is to add a constant term to $a(\alpha)$ (the real form of $a(\alpha)$ may be quite different, but so far data allow only for a simple two parameter fit),

$$a^2(\alpha) = a_0^2 + 4a_1^2\alpha(1-\alpha). \quad (12)$$

One can roughly evaluate a_0 by demanding that even at $\alpha = 0, 1$ the transverse $\bar{q}q$ separation does not exceed the confinement radius,

$$a_0 \sim R_c^{-1} \approx \Lambda_{QCD}, \quad (13)$$

i.e. $a_0 \approx 200 \text{ MeV}$. Comparison with data (see below) leads to a somewhat smaller value.

In what follows we study the consequences of the interaction between q and \bar{q} in the form (11) – (12) for the quark wave function of the photon, and we discuss several observables.

Let us denote the Green function of a $\bar{q}q$ pair propagating in vacuum ($\text{Im } V = 0$) as $G_{\bar{q}q}(z_1, \vec{\rho}_1; z_2, \vec{\rho}_2)$. The solution of (7) has the form [38],

$$G_{\bar{q}q}(z_1, \vec{\rho}_1; z_2, \vec{\rho}_2) = \frac{a^2(\alpha)}{2\pi i \sin(\omega \Delta z)} \exp \left\{ \frac{i a^2(\alpha)}{\sin(\omega \Delta z)} \left[(\rho_1^2 + \rho_2^2) \cos(\omega \Delta z) - 2 \vec{\rho}_1 \cdot \vec{\rho}_2 \right] - \frac{i \epsilon^2 \Delta z}{2p\alpha(1-\alpha)} \right\}, \quad (14)$$

where $\Delta z = z_2 - z_1$ and

$$\omega = \omega(\alpha) = \frac{a^2(\alpha)}{p\alpha(1-\alpha)}. \quad (15)$$

The normalization factor here is fixed by the condition $G_{\bar{q}q}(z_1, \vec{\rho}_1; z_2, \vec{\rho}_2)|_{z_2=z_1} = \delta^2(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2)$.

Now we are in the position to calculate the distribution function of a $\bar{q}q$ fluctuation of a photon including the interaction. It is given by the integral of the Green function over the longitudinal coordinate z_1 of the point at which the photon forms the $\bar{q}q$ pair (see Fig. 1),

$$\Psi_{\bar{q}q}^{T,L}(\vec{\rho}, \alpha) = \frac{i Z_q \sqrt{\alpha_{em}}}{4\pi p \alpha(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{z_2} dz_1 \left(\bar{\chi} \hat{O}^{T,L} \chi \right) G_{\bar{q}q}(z_1, \vec{\rho}_1; z_2, \vec{\rho}_2) \Big|_{\rho_1=0; \vec{\rho}_2=\vec{\rho}}. \quad (16)$$

The operators $\hat{O}^{T,L}$ are defined in (4)–(6). Here they act on the coordinate $\vec{\rho}_1$.

If we write the transverse part as

$$\bar{\chi} \hat{O}^T \chi = A + \vec{B} \cdot \vec{\nabla}_{\rho_1}, \quad (17)$$

then the distribution functions read,

$$\Psi_{\bar{q}q}^T(\vec{\rho}, \alpha) = Z_q \sqrt{\alpha_{em}} \left[A \Phi_0(\epsilon, \rho, \lambda) + \vec{B} \vec{\Phi}_1(\epsilon, \rho, \lambda) \right], \quad (18)$$

$$\Psi_{\bar{q}q}^L(\vec{\rho}, \alpha) = 2 Z_q \sqrt{\alpha_{em}} Q \alpha (1 - \alpha) \vec{\chi} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \chi \Phi_0(\epsilon, \rho, \lambda), \quad (19)$$

where

$$\lambda = \lambda(\alpha) = \frac{2 a^2(\alpha)}{\epsilon^2}. \quad (20)$$

The functions $\Phi_{0,1}$ in (18)–(19) are defined as

$$\Phi_0(\epsilon, \rho, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dt \frac{\lambda}{\text{sh}(\lambda t)} \exp \left[-\frac{\lambda \epsilon^2 \rho^2}{4} \text{cth}(\lambda t) - t \right], \quad (21)$$

$$\vec{\Phi}_1(\epsilon, \rho, \lambda) = \frac{\epsilon^2 \vec{\rho}}{8\pi} \int_0^\infty dt \left[\frac{\lambda}{\text{sh}(\lambda t)} \right]^2 \exp \left[-\frac{\lambda \epsilon^2 \rho^2}{4} \text{cth}(\lambda t) - t \right]. \quad (22)$$

Note that the $q-\bar{q}$ interaction emerges in (18)–(19) through the parameter λ defined in (20). In the limit $\lambda \rightarrow 0$ (i.e. $Q^2 \rightarrow 0$, α is fixed, $\alpha \neq 0$ or 1) we get the well known perturbative expressions (1) for the distribution functions,

$$\Phi_0(\epsilon, \rho, \lambda) \Big|_{\lambda=0} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} K_0(\epsilon\rho), \quad (23)$$

$$\vec{\Phi}_1(\epsilon, \rho, \lambda) \Big|_{\lambda=0} \Rightarrow \frac{\epsilon \vec{\rho}}{2\pi\rho} K_1(\epsilon\rho) = -\frac{1}{2\pi} \vec{\nabla} K_0(\epsilon\rho). \quad (24)$$

In contrast to these relations, in the general case, i.e. for $\lambda \neq 0$

$$\vec{\Phi}_1(\epsilon, \rho, \lambda) \neq -\vec{\nabla} \Phi_0(\epsilon, \rho, \lambda). \quad (25)$$

In the strong interaction limit $\lambda \gg m_q$ (or if both (Q^2 , $m_q \rightarrow 0$)) which is appropriate particularly for real photons and massless quarks, the functions $\Phi_{0,1}$ acquire again simple analytical forms,

$$\Phi_0(\epsilon, \rho, \lambda) \Big|_{\lambda \rightarrow \infty} \Rightarrow \frac{1}{4\pi} K_0 \left[\frac{1}{2} a^2(\alpha) \rho^2 \right], \quad (26)$$

$$\vec{\Phi}_1(\epsilon, \rho, \lambda) \Big|_{\lambda \rightarrow \infty} \Rightarrow \frac{\vec{\rho}}{2\pi\rho^2} \exp \left[-\frac{1}{2} a^2(\alpha) \rho^2 \right]. \quad (27)$$

The interaction confines even massless quarks within a finite range of ρ .

2.2 Absorption cross section for virtual photons

For highly virtual photons, $Q^2 \gg a^2(\alpha)$, according to (20) $\lambda \rightarrow 0$ and the effects related to the nonperturbative $\bar{q}q$ interaction should be gone. Although for very asymmetric configurations, $\alpha(1-\alpha) \ll 1$, see (2) the transverse $\bar{q}q$ separation increases and one may expect the nonperturbative interaction to be at work, it does not happen if the dipole cross section is independent of ρ at large ρ .

Thus, our equations show a smooth transition between the formalism of perturbative QCD valid at high Q^2 and our model for low Q^2 where nonperturbative effects are important.

The absorption cross sections for transversely (T) and longitudinally (L) polarized virtual photons, including the nonperturbative effects read,

$$\sigma_{tot}^T = 2 N_c \sum_F Z_q^2 \alpha_{em} \int_0^1 d\alpha \int d^2\rho \sigma_{\bar{q}q}(\rho, s) \left\{ m_q^2 \Phi_0^2(\epsilon, \rho, \lambda) + [\alpha^2 + (1 - \alpha)^2] \left| \bar{\Phi}_1(\epsilon, \rho, \lambda) \right|^2 \right\} \quad (28)$$

$$\sigma_{tot}^L = 8 Q^2 N_c \sum_F Z_q^2 \alpha_{em} \int_0^1 d\alpha \alpha (1 - \alpha) \int d^2\rho \sigma_{\bar{q}q}(\rho, s) \Phi_0^2(\epsilon, \rho, \lambda). \quad (29)$$

Here N_c is the number of colors, and the contributions of different flavors F are summed up.

According to (5) the dipole cross section vanishes $\sigma_{\bar{q}q}(\rho, s) \propto \rho^2$ at small $\rho \ll 1 fm$. Such a behavior approximately describes *e.g.* the observed hierarchy of hadronic cross sections as functions of the mean hadronic radii [8]. We expect, however, that the dipole cross section flattens off at larger separations $\rho > 1 fm$. Therefore, the approximation $\sigma_{\bar{q}q}(\rho) \propto \rho^2$ is quite crude for the large separations typical for soft reactions. Even the simple two-gluon approximation [39, 40] provides only a logarithmic growth at large ρ [5], and confinement implies a cross section which becomes constant at large ρ . Besides, the energy dependence of the dipole cross section is stronger at small ρ than at large ρ [41]. We use hereafter a parameterization similar to one suggested in [10].

$$\sigma_{\bar{q}q}(\rho, s) = \sigma_0(s) \left[1 - \exp\left(-\frac{\rho^2}{\rho_0^2(s)}\right) \right], \quad (30)$$

where $\rho_0(s) = 0.88 fm (s_0/s)^{0.14}$ and $s_0 = 1000 GeV^2$. In contrast to [10] all values depend on energy (as it is supposed to be) rather than on x and we introduce an energy dependent parameter $\sigma_0(s)$,

$$\sigma_0(s) = \sigma_{tot}^{\pi p}(s) \left(1 + \frac{3 \rho_0^2(s)}{8 \langle r_{ch}^2 \rangle \pi} \right), \quad (31)$$

otherwise one fails to reproduce hadronic cross sections. Here $\langle r_{ch}^2 \rangle_\pi = 0.44 \pm 0.01 fm^2$ [42] is the mean square of the pion charge radius. Cross section (30) averaged with the pion wave function squared automatically reproduces the pion-proton cross section. We use the results of the fit [43] for the Pomeron part of the cross section,

$$\sigma_{tot}^{\pi p}(s) = 23.6 (s/s_0)^{0.08} mb, \quad (32)$$

where $s_0 = 1000 GeV^2$. We fixed the parameters comparing data with the proton structure function calculated using Eqs. (28)–(29) and the cross section (30). Agreement is reasonably good up to $Q^2 \sim 20 GeV^2$ sufficient for our purposes.

To fix from data the parameters $a_{0,1}$ of the potential we concentrate on real photoabsorption which is most sensitive to nonperturbative corrections. The photoabsorption cross section with free quark fluctuations in the photon diverges logarithmically at $m_q \rightarrow 0$,

$$\sigma_{tot}^T \approx \sigma_0 \ln\left(\frac{1}{m_q \rho_0}\right). \quad (33)$$

Inclusion of interaction between the quarks in the photon makes the photoabsorption cross section finite at $m_q \rightarrow 0$.

$$\sigma_{tot}^T = \sigma_0 \frac{\alpha_{em} N_c}{12\pi} \sum_F Z_q^2 \left[\phi(x_1) - \phi(x_2) \right], \quad (34)$$

where

$$x_1 = \frac{1 + a_0^2 \rho_0^2}{a_1^2 \rho_0^2}; \quad x_2 = \frac{a_0^2}{a_1^2}, \quad (35)$$

and

$$\phi(x) = 4 \ln \left(\frac{x}{4} \right) - 2x + (4+x) \sqrt{1+x} \ln \left(\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1} \right). \quad (36)$$

In this case the cross section of photoabsorption is independent of the quark mass in the limit $m_q/a_{0,1} \ll 1$.

We adjust the values of a_0 and a_1 to the value of the photoabsorption cross section $\sigma_{tot}^{\gamma p} = 160 \mu b$ at $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$ [44, 45]. Eq. (34) alone does not allow to fix the two parameters a_0 and a_1 completely, but it provides a relation between them. We found a simple way to parameterize this ambiguity. If we choose

$$\begin{aligned} a_0^2 &= v^{1.15} (112 \text{ MeV})^2 \\ a_1^2 &= (1-v)^{1.15} (165 \text{ MeV})^2, \end{aligned} \quad (37)$$

the total photoabsorption cross section, turns out to be constant (within 1%) if v varies between 0 and 1. This covers all possible choices for a_0 and a_1 .

In order to fix v in (37) one needs additional experimental information. We have tried a comparison with the following data:

(i) The cross section of forward diffraction dissociation $\gamma N \rightarrow \bar{q}qN$ (the PPR graph in the triple-Reggeon phenomenology [46]),

$$\left. \frac{d\sigma(\gamma N \rightarrow \bar{q}qN)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{16\pi} \int d\alpha d^2\rho \left| \Psi_{\bar{q}q}(\alpha, \rho) \right|^2 \sigma^2(\rho). \quad (38)$$

(ii) The total photoabsorption cross sections for nuclei (high-energy limit),

$$\sigma_{tot}^{\gamma A} = 2 \int d^2b \int d\alpha d^2\rho \left| \Psi_{\bar{q}q}(\alpha, \rho) \right|^2 \left\{ 1 - \exp \left[\frac{1}{2} \sigma(\rho) T(b) \right] \right\}, \quad (39)$$

where

$$T(b) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho_A(b, z) \quad (40)$$

is the nuclear thickness function and the nuclear density $\rho_A(b, z)$ depends on impact parameter b and longitudinal coordinate z . This expression can be used for virtual photons as well with a proper discrimination between transverse and longitudinal photons.

A calculation of the observables (i) and (ii) shows, however, a surprising stability of the results against variation of v in (37): the cross sections change only within $\sim 1\%$ if v varies between 0 and 1. Thus, we were unable to constrain the parameters a_0 and a_1 any further.

We have also calculated the effective interaction cross section of a $\bar{q}q$ pair with a nucleon,

$$\sigma_{eff}^{\bar{q}qN} = \frac{\int d\alpha d^2\rho \left| \Psi_{\bar{q}q}(\alpha, \rho) \right|^2 \sigma^2(\rho, s)}{\int d\alpha d^2\rho \left| \Psi_{\bar{q}q}(\alpha, \rho) \right|^2 \sigma(\rho, s)} \equiv \frac{\langle \sigma^2 \rangle}{\langle \sigma \rangle}, \quad (41)$$

which is usually used to characterize shadowing for the interaction of the $\bar{q}q$ fluctuation of a real photon with a nucleus (*e.g.* see in [30, 31]). We got at $\sigma_{eff}^{\bar{q}qN} = 30 \text{ mb}$ at $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$. This well corresponds to the pion-nucleon cross section (32) $\sigma_{tot}^{\pi p} = 31.7 \text{ mb}$ at this energy. This result might be treated as success of VDM. On the other hand, A calculation [47] using VDM and $\sigma_{tot}^{\pi p} \approx 25 \text{ mb}$ instead of $\sigma_{tot}^{\rho p}$ at lower energy for photoproduction of ρ -mesons off nuclei is in good agreement with recent HERMES measurements [48].

However, a word of caution is in order. The nucleus to nucleon ratio of total photoabsorption cross sections in the approximation of frozen fluctuations (reasonably good at very small x) reads [5, 30, 31],

$$\frac{\sigma_{tot}^{\gamma^* A}}{A \sigma_{tot}^{\gamma^* N}} = \frac{2}{\langle \sigma \rangle} \int d^2b \left\langle 1 - \exp \left[-\frac{\sigma}{2} T(b) \right] \right\rangle, \quad (42)$$

Expanding the exponential up to the next term after the double scattering one $(1/4)\sigma_{eff}$ one gets $(1/24)\langle \sigma^3 \rangle / \langle \sigma \rangle$. This is 1.5 times larger than $(1/24)\sigma_{eff}^2 / \langle \sigma \rangle$ if to use the dipole approximation $\sigma \propto \rho^2$ and a Gaussian distribution over ρ for color triplet ($\bar{q} - q$) or color octet ($G - \bar{q}q$) dipoles.

3 Gluon bremsstrahlung

3.1 Radiation of interacting gluons

In processes with radiation of gluons, like

$$q + N \rightarrow q + G + X \quad (43)$$

$$\gamma^* + N \rightarrow q + \bar{q} + G + X, \quad (44)$$

the interaction between the radiated gluon and the parent quark traveling in nearly the same direction may be important and significantly change the radiation cross section and the transverse momentum distribution compared to perturbative QCD calculations [50, 36, 51].

We describe the differential cross section of gluon radiation in a quark-nucleon collision in the factorized light-cone approach [36]

$$\frac{d^3\sigma(q \rightarrow qG)}{d(\ln\alpha) d^2k_T} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2r_1 d^2r_2 \exp[i\vec{k}_T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] \Psi_{Gq}^*(\alpha, \vec{r}_1) \Psi_{Gq}(\alpha, \vec{r}_2) \sigma_G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha), \quad (45)$$

where

$$\sigma_G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \alpha) = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{G\bar{q}q}(\vec{r}_1, \vec{r}_1 - \alpha r_2) + \sigma_{G\bar{q}q}(\vec{r}_2, \vec{r}_2 - \alpha r_1) - \sigma_{\bar{q}q}[\alpha(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] - \sigma_{GG}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right\}. \quad (46)$$

Hereafter we assume all cross sections to depend on energy, but do not show it explicitly for the sake of brevity (unless it is important).

The cross section of a colorless $G\bar{q}q$ system with a nucleon $\sigma_{G\bar{q}q}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ is expressed in terms of the usual $\bar{q}q$ dipole cross sections,

$$\sigma_{G\bar{q}q}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{9}{8} \left\{ \sigma_{\bar{q}q}(r_1) + \sigma_{\bar{q}q}(r_2) \right\} - \frac{1}{8} \sigma_{\bar{q}q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (47)$$

\vec{r}_1 and \vec{r}_2 are the transverse separations gluon - quark and gluon - antiquark respectively. In (46) $\sigma_{GG}(r) = \frac{9}{4} \sigma_{\bar{q}q}(r)$ is the total cross section of a colorless GG dipole with a nucleon.

The cross sections of reactions (44)–(44) integrated over k_T have simple form,

$$\frac{d\sigma(q \rightarrow qG)}{d(\ln\alpha)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2r \left| \Psi_{Gq}(\alpha, \vec{r}) \right|^2 \sigma_{G\bar{q}q}[\vec{r}, (1-\alpha)\vec{r}], \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\gamma^* \rightarrow q\bar{q}G)}{d(\ln\alpha_G)} \Big|_{\alpha_G \ll 1} &= \int_0^1 d\alpha_q \int d^2R \left| \Psi_{\bar{q}q}^{\gamma^*}(R, \alpha_q) \right|^2 \\ &\times \int d^2r \left\{ \left| \Psi_{\bar{q}G}(\vec{R} + \vec{r}, \alpha_G) \right|^2 \sigma_{GG}^N(\vec{R} + \vec{r}) + \left| \Psi_{qG}(\vec{r}, \alpha_G) \right|^2 \sigma_{GG}^N(r) \right. \\ &\left. - \operatorname{Re} \Psi_{qG}^*(\vec{r}, \alpha_G) \Psi_{\bar{q}G}(\vec{R} + \vec{r}, \alpha_G) \left[\sigma_{\bar{q}q}^N(\vec{R} + \vec{r}) + \sigma_{\bar{q}q}^N(r) - \sigma_{GG}^N(R) \right] \right\}. \quad (49) \end{aligned}$$

Here α_G is the fraction of the quark momentum carried by the gluon; \vec{R} and \vec{r} are the quark-antiquark and quark-gluon transverse separations respectively. The three terms in the curly brackets in (49) correspond to the radiation of the gluon by the quark, by the antiquark and to their interference respectively.

The key ingredient of (45), (48) and (49) is the distribution function $\Psi_{Gq}(\alpha, \vec{r})$ of the quark-gluon fluctuation, where α is the fraction of the light-cone momentum of the parent quark carried by the gluon, and \vec{r} is the transverse quark-gluon separation. This function has a form [36, 52, 53] similar to (1),

$$\Psi_{Gq}^T(\alpha, \vec{r}) \Big|_{free} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha_s}{3}} \chi_f \hat{\Gamma}^{T,L} \chi_i K_0(\tau r_T), \quad (50)$$

where the operator $\hat{\Gamma}^T$ is defined in [36],

$$\hat{\Gamma}^T = i m_q \alpha^2 e^{\vec{\tau}} \cdot (\vec{n} \times \vec{\sigma}) + \alpha e^{\vec{\tau}} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}) - i(2 - \alpha) e^{\vec{\tau}} \cdot \vec{\nabla}, \quad (51)$$

We treat the gluons as massless since we incorporate the nonperturbative interaction explicitly and do not need to introduce any effective mass.

The factor τ differs from ϵ as defined in (2),

$$\tau^2 = \alpha^2 m_q^2. \quad (52)$$

In the general case the distribution function including the interaction between the quark and gluon can be found via the Green function $G_{qG}(z_1, \vec{\rho}_1; z_2, \vec{\rho}_2)$ for the propagation of a quark-gluon pair, in analogy to (16),

$$\Psi_{qG}(\vec{\rho}, \alpha) = \frac{i \sqrt{\alpha_s/3}}{2\pi p \alpha(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{z_2} dz_1 \left(\bar{\chi} \hat{\Gamma}^T \chi \right) G_{qG}(z_1, \vec{\rho}_1; z_2, \vec{\rho}_2) \Big|_{\rho_1=0; \vec{\rho}_2=\vec{\rho}}. \quad (53)$$

Let us add a few comments as to why this direct analogy holds. Eq. (46) might give the impression that we would have to implement the interaction between all three partons: the gluon, the quark and the antiquark. Checking the way in which this equation was derived, one realizes, however, that this is not the case. We studied gluon bremsstrahlung from a single quark and then expressed the radiation amplitude as a difference between the inelastic amplitudes for a qG system and an individual \bar{q} . This is how $\sigma_{G\bar{q}q}$ has to be interpreted and this is why one should only take the $q-G$ nonperturbative interaction into account.

The evolution equation for the Green function of an interacting qG pair originating from the parent quark at the point with longitudinal coordinate z_1 with initial transverse separation $\rho_1 = 0$ looks similar to (7) with the replacement $\epsilon \Rightarrow \tau$ and $V_{\bar{q}q}(z_2, \vec{\rho}, \alpha) \Rightarrow V_{qG}(z_2, \vec{\rho}, \alpha)$. We parameterize the quark-gluon potential in the same way as in (11) for quark-antiquark,

$$\text{Re } V_{qG}(z_2, \vec{\rho}, \alpha) = \frac{b^4(\alpha) \vec{\rho}^2}{2p \alpha(1-\alpha)}, \quad (54)$$

where $b^2(\alpha) = b_0^2 + 4 b_1^2 \alpha(1-\alpha)$.

The solution of the evolution equation for the quark-gluon Green function in absence of absorption ($\text{Im } V_{qG} = 0$) looks the same as (14) with replacement $a(\alpha) \Rightarrow b(\alpha)$.

The following transformations go along with (16) – (27). The vertex function in (53) is represented as,

$$\bar{\chi} \hat{\Gamma}^T \chi = D + \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\rho_1}, \quad (55)$$

then the result of integration in (53) is,

$$\Psi_{qG}(\vec{\rho}, \alpha) = 2 \sqrt{\left(\frac{\alpha_s}{3}\right)} \left[D \Phi_0(\tau, \rho, \lambda) + \vec{E} \cdot \vec{\Phi}_1(\tau, \rho, \lambda) \right], \quad (56)$$

The functions $\Phi_0(\tau, \rho, \lambda)$ and $\vec{\Phi}_1(\tau, \rho, \lambda)$ are defined in (21) – (22). However, λ is now defined by

$$\lambda = \frac{2b^2(\alpha)}{\tau^2}. \quad (57)$$

One might argue that the quark-gluon potential we need (and which we shortly shall constrain by comparison with experimental data) could simply be obtained by adding two quark-quark potentials with an appropriate color factor. Such a procedure could, however, lead to a completely wrong results as we want to illustrate by the following example.

Motivated by perturbative QCD one might expect that the gluon-gluon and quark-quark potentials differ simply by a factor 9/4 (the ratio of the Casimir factors). However, this relation is affected by non-trivial properties of the QCD vacuum which makes the interaction of gluons much stronger [54, 17]. The octet string tension κ_8 is related to α'_p , the slope of the

Pomeron trajectory in the same way as the color triplet string tension relates to the slope of the meson Regge trajectories [55],

$$\kappa_8 = \frac{1}{2\pi\alpha'_P} \approx 4 \text{ GeV}/fm. \quad (58)$$

Here $\alpha'_P = 0.25 \text{ GeV}^{-2}$. Thus, the value of κ_8 is in fact four times larger than the well known $\bar{q}q$ string tension, $\kappa_3 = 1 \text{ GeV}/fm$, and not only by a factor 9/4.

Another piece of information about the strength of the gluon interaction which supports this observation comes from data on diffractive dissociation. The triple-Pomeron coupling turns out to be rather small [46]. If interpreted as a product of the Pomeron flux times the Pomeron-proton total cross section, the latter turns out to be an order of magnitude smaller than the proton-proton one. Naively one would again assume that the Pomeron as a colorless gluonic dipole should interact 9/4 times stronger than an analogous $\bar{q}q$ dipole (such a consideration led some authors to the conclusion that gluons are shadowed at small x in nuclei stronger than sea quarks). The only way to explain this discrepancy is to assume that the gluon-gluon dipole is much smaller. This, in turn, demands a stronger gluon-gluon interaction. Thus, diffraction is sensitive to nonperturbative interaction of gluons. We shall use this observation in the next section to fix the corresponding parameters b_0 and b_1 .

3.1.1 Diffractive bremsstrahlung of gluons. The triple-Pomeron coupling in the additive quark model

Let us start with diffractive dissociation of a quark, $qN \rightarrow qGN$. We assume the diffractive amplitude to be proportional to the gluon density $G(x, Q^2) = x g(x, Q^2)$ [56, 57] (it should be a non-diagonal distribution if the energy is not very large) as is shown in Fig. 2. Since the amplitude is predominantly imaginary at high energies one can use the generalized unitarity relation known as Cutkosky rule [58],

$$2 \text{Im} A_{ab} = \sum_c A_{ac} A_{cb}^\dagger, \quad (59)$$

where A_{ab} is the amplitude of the process $a \rightarrow b$ and a, b denote all the particles in initial and final states respectively. In the case under discussion $a = \{q, N\}$, $b = \{q, G, N\}$, and c denotes either $c_1 = \{q, N_8^*\}$ or $c_2 = \{q, G, N_8^*\}$, where N_8^* is a color-octet excitation of the nucleon resulting from gluon radiation(absorption) by a nucleon.

In what follows, we concentrate on forward diffraction, *i.e.* the transverse momentum transfer $\vec{q}_T = 0$. In this case the diffractive amplitude reads,

$$F(\alpha, k_T, q_T = 0) = \frac{i}{4\pi} \int \frac{d^2\rho}{2\pi} e^{i\vec{k}_T \vec{\rho}} \Psi_{qG}(\alpha, \vec{\rho}) \bar{\sigma}(\vec{\rho}), \quad (60)$$

where k_T is the transverse momentum of the radiated gluon and

$$\bar{\sigma}(\vec{\rho}) = \frac{9}{8} \sigma_{\bar{q}q}(\vec{\rho}). \quad (61)$$

Eq. (60) is derived in Appendix A.2 in a simple and intuitive way based on the general properties of a diffractive process discussed in Appendix A.1. A more formal derivation based

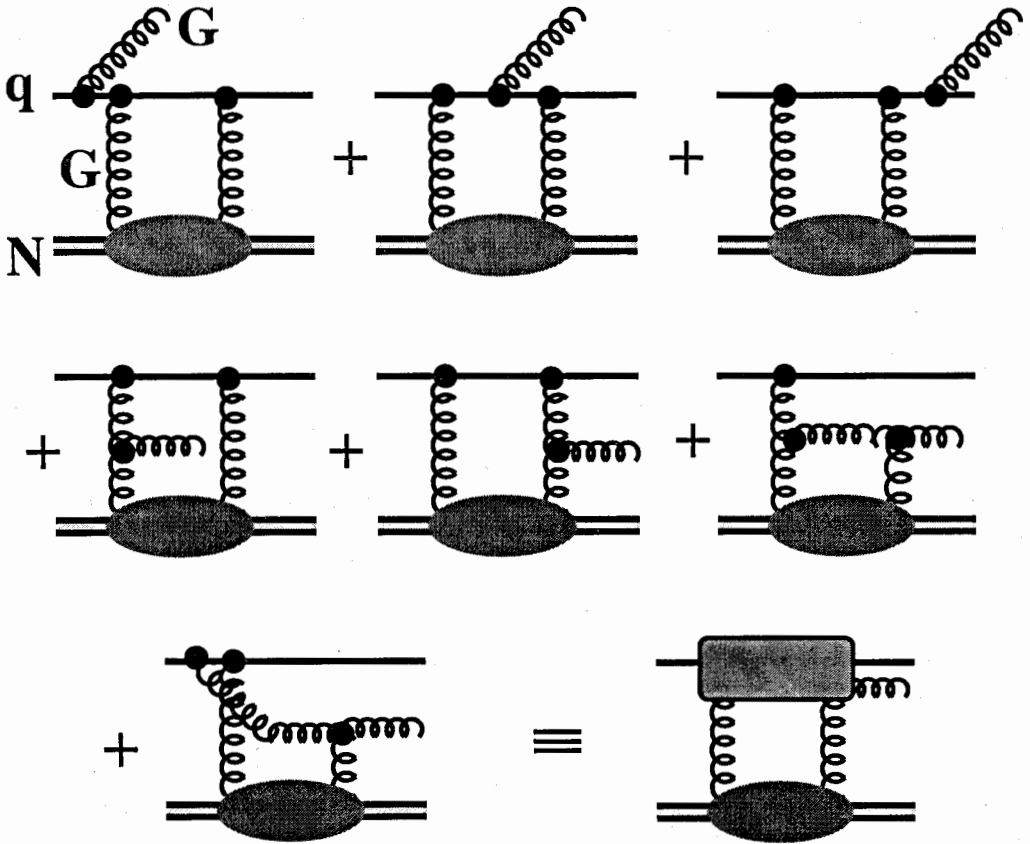


Figure 2: Feynman diagrams for diffractive radiation of a gluon in a quark-nucleon interaction, $qN \rightarrow qGN$.

on a direct calculation of Feynman diagrams and the Cutkosky rule (59) is presented in Appendix B.1.

The relation (60) is valid for any value of α . In contrast to the inclusive cross section for gluon bremsstrahlung the diffractive cross section depends on α only via the distribution function.

The amplitude (60) is normalized according to,

$$\frac{d\sigma(qN \rightarrow qGN)}{d(\ln\alpha) d^2k_T d^2q_T} = \left| F(\alpha, \vec{k}_T, \vec{q}_T) \right|^2. \quad (62)$$

The distribution for the effective mass squared, $M^2 = k_T^2/\alpha(1-\alpha) \approx k_T^2/\alpha$, at $q_T = 0$ has the form,

$$\left. \frac{d\sigma(qN \rightarrow qGN)}{dM^2 dq_T^2} \right|_{q_T=0} = 2\pi^2 \int_0^{M^2} dk_T^2 \left| F(\alpha, \vec{k}_T, \vec{q}_T) \right|^2, \quad (63)$$

which transforms in the limit $M^2 \rightarrow \infty$ into

$$\frac{M^2 d\sigma(qN \rightarrow qGN)}{dM^2 dq_T^2} \Big|_{q_T=0} = \frac{1}{16\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int d^2\rho \left| \Psi_{qG}(\alpha, \vec{\rho}) \bar{\sigma}(\rho, \bar{s}) \right|^2, \quad (64)$$

where $\bar{s} = M_0^2/\xi$, where $M_0^2 = 1 \text{ GeV}^2$ and $\xi \equiv x_P \equiv 1 - x_F \approx M^2/s$.

Since dissociation into large mass states is dominated by the triple-Pomeron (3P) graph the value on the *l.h.s.* of (64) is the effective 3P coupling $G_{3P}(qN \rightarrow XN)$ (see definition in [46]) at $q_T = 0$. It can be evaluated using $G_{3P}(pp \rightarrow Xp) \approx 1.5 \text{ mb/GeV}^2$ as it follows from measurement by the CDF Collaboration [59] (according to [61][§] we divided the value of G_{3P} given in [59] by factor 2). This value is twice as small as one derived from the triple-Regge analyses [46] at medium large energies. This is supposed to be due to absorptive corrections which grossly diminish the survival probability of large rapidity gaps at high energies [60]. One can see energy dependence of G_{3P} even in the energy range of the CDF experiment [59].

Assuming the additive quark model (AQM) to be valid one can write,

$$G_{3P}^{AQM}(qN \rightarrow XN) \approx \frac{1}{3} G_{3P}(NN \rightarrow XN) \approx 0.5 \frac{\text{mb}}{\text{GeV}^2} \quad (65)$$

(see below about interference effects). To compare with this estimate we calculate the triple-Pomeron coupling (64) using the distribution function in the form (56) and the dipole cross section (30),

$$G_{3P}^{AQM}(qN \rightarrow XN) = \frac{27\alpha_s}{4} \left(\frac{\sigma_0}{8\pi} \right)^2 \ln \left(\frac{t_1 t_2}{t_3^2} \right), \quad (66)$$

where $t_1 = b^2(0)/2$, $t_2 = t_1 + 1/\rho_0^2$ and $t_3 = 2t_1 t_2 / (t_1 + t_2)$. The parameters σ_0 and ρ_0 are defined in (30). We use here a fixed value of $\alpha_s = 0.6$ which is an appropriate approximation for a soft process.

Comparison of Eq. (66) with the value (65) leads to a rough evaluation of the parameter b_0 of our potential (we are not sensitive to b_1 since keep α small),

$$b^{AQM}(0) \approx 570 \text{ MeV}. \quad (67)$$

Thus, a typical quark-gluon separation is $\sim 1/b(0) \approx 0.4 \text{ fm}$ what is roughly the radius of a 'constituent' quark. Note that a substantial modification of (65) by interference of radiation amplitudes for different quarks is possible.

3.1.2 Diffractive excitation of nucleons, $NN \rightarrow XN$, beyond the AQM.

The amplitude of diffractive gluon radiation $NN \rightarrow 3qGN$ can be represented as a superposition of radiation by different quarks as shown in Fig. 3. In this process the colorless $3q$ system ($|3q\rangle_1$) converts into a color-octet final state ($|3q\rangle_8$). There are two independent octet $|3q\rangle$ states which differ from each other by their symmetry under a permutation of the color indices of the quarks. Correspondingly, the amplitude for the process $NN \rightarrow |3q\rangle_8 GN$ is a superposition of two amplitudes (see below).

[§]We thank Doug Jansen and Thomas Nunnemann who helped to clarify this point.

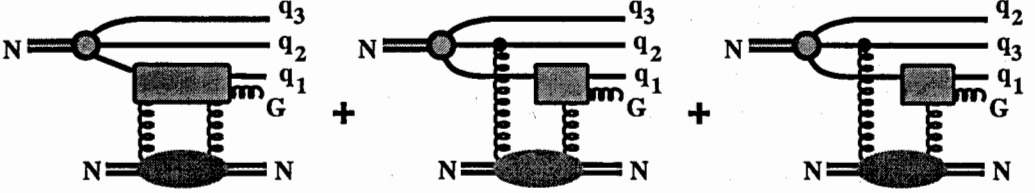


Figure 3: Contributions from projectile valence quarks to the amplitude of diffractive gluon emission in NN collisions. Six additional graphs resulting from the permutation $\{1 \rightleftharpoons 2\}$ and $\{1 \rightleftharpoons 3\}$ have not been plotted.

The contribution to the amplitude of the first graph in Fig. 3 reads,

$$F^I(NN \rightarrow 3qGN) = \frac{if_{abc}}{\sqrt{3}} \langle (3q)_8 | \tau_b^{(1)} \tau_c^{(2)} | (3q)_1 \rangle \tilde{\sigma}(\vec{\rho}_1) \Phi(\{\vec{r}, \alpha\}, \vec{\rho}_1, \alpha_G). \quad (68)$$

The second and third graphs in Fig. 3 give correspondingly,

$$F^{II}(NN \rightarrow 3qGN) = \frac{if_{abc}}{\sqrt{3}} \langle (3q)_8 | \tau_b^{(1)} \tau_c^{(2)} | (3q)_1 \rangle \left[\tilde{\sigma}(\rho_2) - \tilde{\sigma}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] \Phi(\{\vec{r}, \alpha\}, \vec{\rho}_1, \alpha_G); \quad (69)$$

and

$$F^{III}(NN \rightarrow 3qGN) = \frac{if_{abc}}{\sqrt{3}} \langle (3q)_8 | \tau_b^{(1)} \tau_c^{(2)} | (3q)_1 \rangle \left[\tilde{\sigma}(\rho_3) - \tilde{\sigma}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \right] \Phi(\{\vec{r}, \alpha\}, \vec{\rho}_1, \alpha_G). \quad (70)$$

Here $\{\vec{r}, \alpha\} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3; \alpha_1 \alpha_2, \alpha_3)$; \vec{r}_i are the positions of the quarks in the impact parameter plane; $\vec{\rho}_i = \vec{\rho} - \vec{r}_i$, where $\vec{\rho}$ is the position of the gluon;

$$\Phi(\{\vec{r}, \alpha\}, \vec{\rho}_i, \alpha_G / \alpha_i) = \Psi_{N \rightarrow 3q}(\{\vec{r}, \alpha\}) \Psi_{Gq}(\vec{\rho}_i, \alpha_G); \quad (71)$$

f_{abc} is the structure constant of the color group, where "a" is the color index of the radiated gluon, and we sum over "b" and "c". The Gell-Mann matrices $\lambda_c^i = 2\tau_c^i$ act on the color index of i -th quark.

Using the relation,

$$f_{abc} \tau_b^{(1)} \tau_c^{(1)} |3q\rangle_1 = f_{abc} (\tau_b^{(2)} \tau_c^{(1)} + \tau_b^{(3)} \tau_c^{(1)}) |3q\rangle_1 \quad (72)$$

one can present the sum of the amplitudes F^I , F^{II} and F^{III} in the form,

$$\begin{aligned} F^{(1)}(NN \rightarrow 3qGN) &= F^I + F^{II} + F^{III} \\ &= \frac{if_{abc}}{\sqrt{3}} \Phi(\vec{r}_i, \alpha_i, \vec{\rho} - \vec{r}_1, \alpha_G) \langle (3q)_8 | \tau_b^{(2)} \tau_c^{(1)} \Sigma_{12} + \tau_b^{(3)} \tau_c^{(1)} \Sigma_{13} | (3q)_1 \rangle, \end{aligned} \quad (73)$$

where $\Sigma_{ij} = \tilde{\sigma}(\vec{\rho} - \vec{r}_i) + \tilde{\sigma}(\vec{\rho} - \vec{r}_j) - \tilde{\sigma}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$. The index "1" in $F^{(1)}(NN \rightarrow 3qGN)$ indicates that the gluon is radiated by the quark q_1 in accordance with Fig. 3.

The amplitudes $F^{(2)}$ and $F^{(3)}$ is obviously related to $F^{(1)}$ by replacement $1 \rightarrow 2, 3$. Note that the color structure $f_{abc} \tau^{(2)} \tau^{(3)}$ which is not present in (73) is not independent due to the relation,

$$f_{abc} \left(\tau^{(1)} \tau^{(2)} + \tau^{(2)} \tau^{(3)} + \tau^{(3)} \tau^{(1)} \right) |3q\rangle_1 = 0. \quad (74)$$

Thus, we are left with only two independent color structures, as was mentioned above.

The full amplitude for diffractive gluon radiation squared $|F(NN \rightarrow 3qGN)|^2 = |F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)}|^2$, summed over all color states of the $3qG$ system, reads,

$$\sum_f \left| F(NN \rightarrow 3qGN) \right|^2 = \frac{1}{3} |\Psi_{N \rightarrow 3q}(\{\vec{r}, \alpha\})|^2 \left\{ \sum_{i=1}^3 |\Psi_{qG}(\vec{\rho}_i, \alpha_G)|^2 A^{(i)}(\{\vec{r}, \vec{\rho}\}) - \text{Re} \sum_{i \neq k} \Psi_{qG}(\rho_i, \alpha_G) \Psi_{qG}(\vec{\rho}_k, \alpha_G) B^{(i,k)}(\{\vec{r}, \vec{\rho}\}) \right\}, \quad (75)$$

where

$$A^{(1)}(\{\vec{r}, \vec{\rho}\}) = \Sigma_{12}^2 + \Sigma_{13}^2 + \Sigma_{12}\Sigma_{13}, \quad (76)$$

$$B^{(1,2)}(\{\vec{r}, \vec{\rho}\}) = 2\Sigma_{12}^2 + \Sigma_{12}(\Sigma_{13} + \Sigma_{23}) - \Sigma_{13}\Sigma_{23}. \quad (77)$$

The expressions for $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ and $B^{(1,3)}$, $B^{(2,3)}$ are obtained by simply changing the indices.

The effective triple-Pomeron coupling results from integrating (75) over phase space,

$$G_{3P}(NN \rightarrow NX) = \frac{1}{16\pi} \int d^2r_1 d^2r_2 d^2r_3 d^2\rho d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \times \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \sum_f \left| F(NN \rightarrow 3qGN) \right|^2. \quad (78)$$

To evaluate $G_{3P}(NN \rightarrow NX)$ we use (19) for $\Psi_{qG}(\vec{\rho}, \alpha)$ and a Gaussian parameterization for the valence quark distribution in the nucleon,

$$|\Psi_{N \rightarrow 3q}(\{\vec{r}, \alpha\})|^2 \propto \exp \left[- \left(\sum_{i=1}^2 \vec{r}_i^2 \right) / \langle r_{ch}^2 \rangle_p \right], \quad (79)$$

where $\langle r_{ch}^2 \rangle_p \approx 0.79 \pm 0.03 \text{ fm}^2$ is the mean square radius of the proton [62]. At this point one has to introduce some specific model for the α_i distributions. Quite some proposals can be found in the literature, and a quantitative analysis will require careful numerical studies. For a first qualitative discussion we make the simple ansatz for the quark momentum distribution in the nucleon, $F_q^N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \propto \prod_i \delta(\alpha_i - 1/3)$ which allows to continue our calculations analytically. The details of the integration of (78) can be found in Appendix C. G_{3P} is a function of the parameter $b(0)$. As a trial value we choose Eq. (67), $b(0) = 570 \text{ MeV}$, (estimated using the result of the additive quark model $G_{3P}(qN \rightarrow XN) \approx 0.5 \text{ mb/GeV}^2$) we arrive at $G_{3P}(NN \rightarrow XN) \approx 2.4 \text{ mb/GeV}^2$. This value is substantially higher than the experimental value $G_{3P}(NN \rightarrow XN) = 1.5 \text{ mb/GeV}^2$. This is an obvious manifestation of

simplifying approximations (the quark additivity) we have done. In order to fit the experimental value of $G_{3P}(NN \rightarrow NX)$ after the contributions of the second and third graphs in Fig. 3 are included we should use in (78)

$$b(0) = 650 \text{ MeV}. \quad (80)$$

With this value (66) gives,

$$G_{3P}(qN \rightarrow XN) \approx 0.3 \frac{mb}{\text{GeV}^2} \approx \frac{1}{5} G_{3P}(NN \rightarrow XN), \quad (81)$$

which shows a substantial deviation from the AQM.

3.1.3 Diffractive gluon radiation by a (virtual) photon and mesons. Breakdown of Regge factorization

One can use a similar technique to calculate the cross section for diffractive gluon radiation by a photon and mesons. The diffraction amplitude $\gamma(M)N \rightarrow \bar{q}qGN$ is described by the four diagrams depicted in Fig. 4. The first two diagrams correspond to the AQM. In this

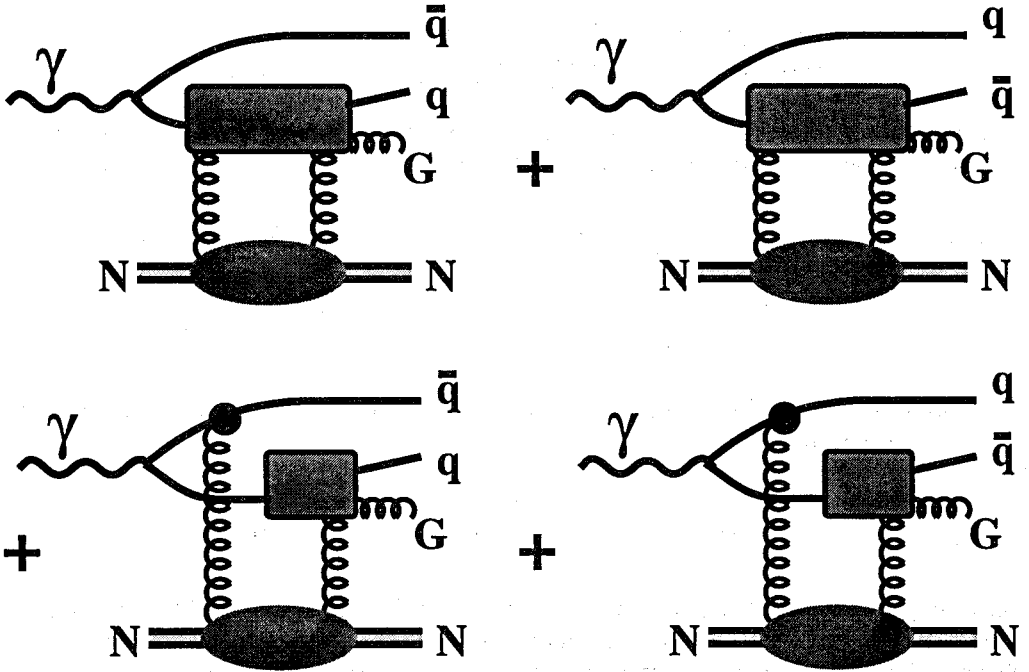


Figure 4: Diagrams for the diffractive radiation of a gluon in photon-nucleon interaction, $\gamma^*N \rightarrow \bar{q}qGN$.

approximation the forward ($q_T = 0$) amplitude $\gamma N \rightarrow \bar{q}qGN$ reads,

$$F^{AQM}(\gamma N \rightarrow \bar{q}qGN) = \Psi_{\bar{q}q}(\alpha, \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2) \left[F(qN \rightarrow qGN) - F(\bar{q}N \rightarrow \bar{q}GN) \right]$$

$$= \Psi_{\bar{q}q}(\alpha, \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2) \left[\Psi_{qG} \left(\frac{\alpha_G}{\alpha}, \vec{\rho}_1 \right) \bar{\sigma}(\rho_1) - \Psi_{\bar{q}G} \left(\frac{\alpha_G}{1-\alpha}, \vec{\rho}_2 \right) \bar{\sigma}(\rho_2) \right], \quad (82)$$

where $\vec{\rho}_i = \vec{\rho} - \vec{r}_i$ ($i=1,2$). $\vec{\rho}$, $\vec{r}_{1,2}$ are the radius-vectors of the gluon, quark and antiquark respectively. The limit $\alpha_G \rightarrow 0$ is assumed.

After addition of the last two graphs in Fig. 4 the amplitude takes the form (we do not write out its trivial color structure),

$$F(\gamma N \rightarrow \bar{q}qGN) = \Psi_{\bar{q}q}(\alpha, \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2) \left[\Psi_{qG} \left(\frac{\alpha_G}{\alpha}, \vec{\rho}_1 \right) - \Psi_{\bar{q}G} \left(\frac{\alpha_G}{1-\alpha}, \vec{\rho}_2 \right) \right] \\ \times \left[\bar{\sigma}(\rho_1) + \bar{\sigma}(\rho_2) - \bar{\sigma}(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2) \right]. \quad (83)$$

The detailed calculation of the diagrams depicted in Fig. 4 is presented in Appendix B.2. A much simpler and more intuitive derivation of Eq. (83) is suggested in Appendix A.3.

If one neglects the nonperturbative effects in Eq. (83) ($b(\alpha) = 0$) this expression coincides with Eq. (3.4) in [19], but is quite different from the cross section of diffractive gluon radiation derived in [18], Eq. (60) (see footnote¹). A crucial step in [18] is the transition from Fock states which are the eigenstates of interaction, to the physical state basis. Such a rotation of the S -matrix leads to a renormalization of the probability *amplitudes* for the Fock states (see Appendix A.1), rather than just the probabilities as it was assumed in [18].

The amplitude (83) is normalized as,

$$\frac{d\sigma}{d(\ln\alpha_G) dq_T^2} \Big|_{q_T=0} = \frac{1}{16\pi} \int d^2\rho_1 d^2\rho_2 d\alpha \left| F(\gamma N \rightarrow \bar{q}qGN) \right|^2 \quad (84)$$

Direct comparison of the cross section for diffractive gluon radiation by a photon calculated with this expression with data is complicated by contribution of diffraction to $\bar{q}q$ states and nondiffractive (Reggeon) mechanisms. This is why one should first perform a detailed triple-Regge analysis of data and then to compare (84) with the effective triple-Pomeron coupling. Good data for photon diffraction are available at lab. energy $E_\gamma = 100 \text{ GeV}$ [63]. At this energy, however, there is no true triple-Regge region which demands $s/M^2 \gg 1$ and $M^2 \gg 1 \text{ GeV}^2$. Therefore the results of the triple-Regge analysis in [63] cannot be trusted. It is much more appropriate to use available data from HERA, particularly those in [64] at $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$ where a triple-Regge analysis taking into account four graphs was performed. The result for the effective triple-Pomeron coupling

$$G_{3P}^{\gamma p}(0) = (8.19 \pm 1.6 \pm 1.34 \pm 2.22) \mu\text{b}/\text{GeV}^2 \quad (85)$$

should be compared with our prediction $G_{3P}^{\gamma p}(0) = 9 \mu\text{b}/\text{GeV}^2$. To estimate the mean energy for the dipole cross section $\bar{s}/M^2 \text{ GeV}^2$ we used the mid value $M^2 = 250 \text{ GeV}^2$ of the interval of M^2 measured in [64] which corresponds to $x_P = 0.0064$. Thus, high-energy data for gluon radiation in diffractive dissociation of protons and photons give the value (80) for the parameter of nonperturbative quark-gluon interaction.

Note that the relative role of "additive" (# 1,2 in Fig. 4 and # 1 in Fig. 3) and "non-additive" (# 3,4 in Fig. 4 and # 2,3 in Fig. 3) graphs depends on the relation between the three characteristic sizes $R_h = \sqrt{\langle r_{ij}^2 \rangle}$, ρ_0 and $1/b(0)$. In the limit $R_h \gg \rho_0$, $1/b(0)$ the

contribution of the “non-additive” graphs vanishes and the additive quark model becomes a good approximation. However, at realistic values of $R_h \sim 1 \text{ fm}$ the “additive” and “non-additive” contributions are of the same order and the latter becomes dominant for small R_h . Particularly, this explains why the factorization relation,

$$A_{3P}(hN \rightarrow XN) = \frac{G_{3P}(hN \rightarrow XN)}{\sigma_{\text{tot}}(hN)} = \text{Const}, \quad (86)$$

i.e. independent of h , is substantially broken. We expect,

$$\begin{aligned} A_{3P}(NN \rightarrow XN) &= 0.025 \text{ GeV}^{-2}, \\ A_{3P}(\pi N \rightarrow XN) &= 0.031 \text{ GeV}^{-2}, \\ A_{3P}(KN \rightarrow XN) &= 0.042 \text{ GeV}^{-2}, \\ A_{3P}(\gamma N \rightarrow XN) &= 0.052 \text{ GeV}^{-2}. \end{aligned} \quad (87)$$

We see that our predictions for the triple-Pomeron vertex as defined from diffractive dissociation of nucleons and photons are different by almost factor of three. On top of that, the absorptive corrections which are known to be larger for diffraction than for elastic scattering also contribute to the breaking of Regge factorization. A manifestation of these correction shows up as deviation between the data and the Regge based expectations for the energy dependence of the diffractive cross section [61, 65].

3.2 Gluon shadowing in nuclei

It is known since long time [66] that the parton distribution in nuclei is shadowed at small x due to parton fusion. In QCD this effect corresponds to the nonlinear term in the evolution equation responsible for gluon recombination [21, 67]. This phenomenon is very important as soon as one calculates the cross section of a hard reaction (gluon radiation with high k_T , prompt photons, Drell-Yan reaction, heavy flavor production, etc.) assuming factorization. Nuclear shadowing of sea quarks is well measured in DIS, but for gluons it is poorly known. One desperately needs to know it to provide predictions for the high-energy nuclear colliders, RHIC and LHC.

The interpretation of nuclear shadowing depends on the choice of the reference frame. In the infinite momentum frame of the nucleus it looks like parton fusion. Indeed, the longitudinal spread of the valence quarks in the bound nucleons, as well as the internucleon distances, are subject to Lorentz contraction. Therefore the nucleons are spatially well separated. However, the longitudinal spread of partons at small x contracts much less because they have an x times smaller Lorentz factor. Therefore, such partons can overlap and fuse even if they originate from different nucleons [66]. Fusion of two gluons into a $q\bar{q}$ pair leads to shadowing of sea quarks. If two gluons fuse to a single gluon it results in shadowing of gluons.

The same phenomenon looks quite differently in the rest frame of the nucleus, as shadowing of long-living hadronic fluctuations of the virtual photon. This resembles the ordinary nuclear shadowing for the total cross sections of hadron-nucleus interaction. Indeed, the total virtual photoabsorption cross section is proportional to the structure function $F_2(x, Q^2)$. However, one can calculate in this way only shadowing of quarks. To predict shadowing of gluons it was suggested in [68] to replace the photon by a hypothetical particle probing gluons. Assuming for

the GG fluctuation of this particle the same distribution function as for $\bar{q}q$ one may conclude that the effective absorption cross section providing shadowing is 9/4 times larger than for a $\bar{q}q$ fluctuation of a photon. Such a simple result cannot be true because of the strong gluon-gluon interaction which makes their distribution function quite different ("squeezes" it). Besides, the spin structure of the GG distribution function is different too.

3.2.1 Nuclear shadowing for longitudinal photons

Longitudinally polarized photons are known to be a good probe for the gluon structure function. Indeed, the aligned jet model [2] cannot be applied in this case since the distribution function for longitudinal photons (1), (4) suppresses the asymmetric $\bar{q}q$ fluctuations with $\alpha \rightarrow 0, 1$. Therefore, the transverse separation of the $\bar{q}q$ pair is small $\sim 1/Q^2$ and nuclear shadowing can be only due to shadowing of gluons. One can also see that from the expression for the cross section of a small size dipole [56, 57],

$$\sigma_{\bar{q}q}^{A,N}(r_T, x) \approx \frac{\pi^2}{3} \alpha_s(Q^2) G_N(x, Q^2), \quad (88)$$

where $G_N(x, Q^2) = x g(x, Q^2)$ is the gluon density and $Q^2 \sim 1/r_T^2$. Thus, we expect nearly the same nuclear shadowing at large Q^2 for the longitudinal photoabsorption cross section and for the gluon distribution,

$$\frac{\sigma_A^L(x, Q^2)}{\sigma_N^L(x, Q^2)} \approx \frac{G_A(x, Q^2)}{G_N(x, Q^2)} \quad (89)$$

The estimate for nuclear shadowing for longitudinally polarized photons follows.

Nuclear shadowing for photons corresponds to the inelastic nuclear shadowing as it was introduced for hadrons by Gribov 30 years ago [33]. Therefore, the term $\Delta\sigma(\gamma^*A) = \sigma_{tot}(\gamma^*A) - A\sigma(\gamma^*N)$ representing shadowing in the total photoabsorption cross section is proportional to the diffractive dissociation cross section $\gamma^*N \rightarrow XN$ [33, 69], considered above. In the lowest order in the intensity of XN interaction the shadowing correction reads,

$$\begin{aligned} \Delta\sigma(\gamma^*A) &= 8\pi \operatorname{Re} \int d^2b \int dM_X^2 \left. \frac{d^2\sigma(\gamma^*N \rightarrow XN)}{dM_X^2 dq_T^2} \right|_{q_T=0} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \Theta(z_2 - z_1) \rho_A(b, z_1) \rho_A(b, z_2) \exp[-iq_L(z_2 - z_1)], \quad (90) \end{aligned}$$

where

$$q_L = \frac{Q^2 + M_X^2}{2\nu}. \quad (91)$$

Here ν is the photon energy; z_1 and z_2 are the longitudinal coordinates of the nucleons N_1 and N_2 , respectively, participating in the diffractive transition $\gamma^*N_1 \rightarrow XN_1$ and back $XN_2 \rightarrow \gamma^*N_2$.

The longitudinal momentum transfer (91) controls the lifetime (coherence time t_c) of the hadronic fluctuation of the photon, $t_c = 1/q_L$. It is known only if the mass matrix is diagonal, i.e. the fluctuations have definite masses. However, in this case the interaction cross section of the fluctuation has no definite value. Then one faces a problem of calculation of nuclear attenuation for the intermediate state X via interaction with the nuclear medium.

This problem can be settled using the Green function formalism developed above in Section 2.1 [12, 14]. One should switch to the quark-gluon representation for the produced state $X = |\bar{q}q\rangle, |\bar{q}qG\rangle, |\bar{q}q2G\rangle, \dots$. As one can see below an exact solution is not an easy problem even for the two lowest Fock states. For higher states containing two or more gluons it may be solved in the double-leading-log approximation which neglects the size of the previous Fock state and treats a multi-gluon fluctuation as a color octet-octet dipole. This is actually what we do in what follows, except the Fock state with only one gluon leads to a $1/M^2$ mass distribution for diffraction, while inclusion of multi-gluon components makes it slightly steeper. This is not a big effect, besides, the nuclear formfactor substantially cuts off the reachable mass interval (see below). Therefore, we restrict the following consideration by the first two Fock states.

For the lowest state $|\bar{q}q\rangle$ one can write,

$$\begin{aligned} & 8\pi \operatorname{Re} \int dM_X^2 \frac{d^2\sigma(\gamma^* N \rightarrow XN)}{dM_X^2 dq_T^2} \Big|_{q_T=0} \exp[-i q_L (z_2 - z_1)] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int d^2k_T \int_0^1 d\alpha \left| F_{\gamma^* \rightarrow \bar{q}q}(\vec{k}_T, \alpha) \right|^2 \exp \left[-i \frac{\epsilon^2 + k_T^2}{2\nu\alpha(1-\alpha)} (z_2 - z_1) \right] \\ &\equiv \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int d^2r_1 d^2r_2 \int_0^1 d\alpha F_{\gamma^* \rightarrow \bar{q}q}^\dagger(\vec{r}_2, \alpha) G_{\bar{q}q}^0(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1) F_{\gamma^* \rightarrow \bar{q}q}(\vec{r}_1, \alpha), \quad (92) \end{aligned}$$

where ϵ was defined in (3).

The amplitudes of diffraction $\gamma^* N \rightarrow XN$ in the transverse momentum and coordinate representations are related by Fourier transform,

$$F_{\gamma^* \rightarrow \bar{q}q}(\vec{k}_T, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int d^2r F_{\gamma^* \rightarrow \bar{q}q}(\vec{r}_1, \alpha) e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{r}}. \quad (93)$$

This amplitude in the coordinate representation has a factorized form,

$$F_{\gamma^* \rightarrow \bar{q}q}(\vec{r}_1, \alpha) = \Psi_{\bar{q}q}(\vec{r}, \alpha) \sigma_{\bar{q}q}(r). \quad (94)$$

$G_{\bar{q}q}^0(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1)$ in (92) is the Green function of a free propagation of the $\bar{q}q$ pair between points z_1 and z_2 . It is a solution of Eq. (7) without interaction.

$$G_{\bar{q}q}^0(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k_T \exp \left[-i \vec{k}_T \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - \frac{i k_T^2 (z_2 - z_1)}{2\nu\alpha(1-\alpha)} \right]; \quad (95)$$

The boundary condition for the Green function is,

$$G_{\bar{q}q}^0(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1) \Big|_{z_2=z_1} = \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (96)$$

In Eq. (95) the phase shift on the distance $z_2 - z_1$ is controlled by the transverse momentum squared as one could expect from Eqs. (90)-(91) where it depends on the M_X^2 . However, Eq. (92) is written now in the coordinate representation and contains no uncertainty with the absorption cross section, as different from (90). In order to include the effects of absorption of the intermediate state X into (92) one should replace the free Green function $G_{\bar{q}q}^0(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1)$

by the solution of the Schrödinger equation (7) with imaginary potential (9). This was done in paper [12] and the results have demonstrated a substantial deviation of nuclear shadowing from usually used approximations for transverse photons. One should also include the real part of the potential which takes into account the nonperturbative interaction between q and \bar{q} as it is described in Section 2.1. This is important only for nuclear shadowing of transverse photons and low Q^2 longitudinal photons and is beyond the scopes of present paper. Therefore, we skip further discussion of nuclear shadowing for the $|\bar{q}q\rangle$ pair and switch to the next Fock component $|\bar{q}qG\rangle$.

For the intermediate state (44) $X = \bar{q}qG$ Eq. (92) is modified as,

$$\begin{aligned} & 8\pi \int dM_X^2 \left. \frac{d^2\sigma(\gamma^* N \rightarrow XN)}{dM_X^2 dq_T^2} \right|_{q_T=0} \cos[q_L(z_2 - z_1)] \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \text{Re} \int d^2x_2 d^2y_2 d^2x_1 d^2y_1 \int d\alpha_q d\ln(\alpha_G) \\ \times & F_{\gamma^* \rightarrow \bar{q}qG}^\dagger(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \alpha_q, \alpha_G) G_{\bar{q}qG}(\vec{x}_2, \vec{y}_2, z_2; \vec{x}_1, \vec{y}_1, z_1) F_{\gamma^* \rightarrow \bar{q}qG}(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \alpha_q, \alpha_G) \end{aligned} \quad (97)$$

where α_q and α_G are the fractions of the photon light cone momentum carried by the quark and gluon respectively. The amplitude of diffraction $\gamma^* N \rightarrow XN$ depends on the q - \bar{q} transverse separation \vec{x} and the distance \vec{y} from the gluon to the center of gravity of the $\bar{q}q$ pair (we switch to these variables from the previously used $\vec{\rho}_{1,2}$ for the sake of convenience, it simplifies the expression for kinetic energy).

The Schrödinger equation for the Green function $G_{\bar{q}qG}$ describing propagation of the $\bar{q}qG$ system through a medium including interaction with the environment as well as between the constituent has the form,

$$\begin{aligned} & i \frac{d}{dz_2} G_{\bar{q}qG}(\vec{x}_2, \vec{y}_2, z_2; \vec{x}_1, \vec{y}_1, z_1) \\ = & \left\{ \frac{Q^2}{2\nu} - \frac{\alpha_q + \alpha_{\bar{q}}}{2\nu \alpha_q \alpha_{\bar{q}}} \Delta(\vec{x}_2) - \frac{1}{2\nu \alpha_G(1 - \alpha_G)} \Delta(\vec{y}_2) + V(\vec{x}_2, \vec{y}_2, z_2, \alpha_q, \alpha_G) \right\} \\ \times & G_{\bar{q}qG}(\vec{x}_2, \vec{y}_2, z_2; \vec{x}_1, \vec{y}_1, z_1), \end{aligned} \quad (98)$$

with the boundary condition,

$$G_{\bar{q}qG}(\vec{x}_2, \vec{y}_2, z_2; \vec{x}_1, \vec{y}_1, z_1) \Big|_{z_2=z_1} = \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \delta(\vec{y}_2 - \vec{y}_1). \quad (99)$$

The imaginary part of the potential $V(\vec{x}_2, \vec{y}_2, z_2, \alpha_q, \alpha_G)$ in (98) is proportional to the interaction cross section for the $\bar{q}qG$ system with a nucleon,

$$\begin{aligned} & 2 \text{Im}V(\vec{x}_2, \vec{y}_2, z_2, \alpha_q, \alpha_G) \\ = & \left\{ \frac{1}{8} \sigma_{\bar{q}q}(\vec{x}) - \frac{9}{8} \left[\sigma_{\bar{q}q} \left(\vec{y} - \frac{\alpha_{\bar{q}}}{1 - \alpha_G} \vec{x} \right) + \sigma_{\bar{q}q} \left(\vec{y} - \frac{\alpha_{\bar{q}}}{1 - \alpha_G} \vec{x} \right) \right] \right\} \rho_A(b, z) \end{aligned} \quad (100)$$

The real part of this potential responsible for the nonperturbative interaction between the quarks and gluon is discussed below.

If the potential $\text{Im}V(\vec{x}_2, \vec{y}_2, z_2, \alpha_q, \alpha_G)$ is a bi-linear function of \vec{x} and \vec{y} then Eq. (98) can be solved analytically. Nevertheless, the general case of nuclear shadowing for a three-parton system is quite complicated and we should simplify the problem.

Let us consider nuclear shadowing for longitudinally polarized photons with high Q^2 . The latter means that one can neglect the eikonal attenuation for the $\bar{q}q$ Fock component of the longitudinal photon, *i.e.*

$$Q^2 \gg 4C \langle T_A \rangle \approx 1 \text{ GeV}^2, \quad (101)$$

where C is the factor in Eq. (5) and $\langle T_A \rangle$ is the mean nuclear thickness function.

As different from the case of transversely polarized photons which distribution function (1) - (3) contains $\bar{q}q$ pairs with large separation ($\alpha \rightarrow 0, 1$) even at large Q^2 , in longitudinally polarized photons small size ($\sim 1/Q$) $\bar{q}q$ pairs always dominate [1, 2]. This property suggest a few simplifications for the following calculations.

1. One can neglect at large Q^2 the nonperturbative $\bar{q}q$ interaction and use the perturbative photon wave function (1) - (4).
2. One can simplify the expression for the diffractive amplitude $\gamma^* N \rightarrow \bar{q}q G N$ introduced in (97) relying on smallness of the typical $\bar{q}q$ separation $|\vec{x}| \sim 1/Q$ in comparison with the distance between the $\bar{q}q$ and the gluon $|\vec{y}| \sim 1/b_0 \approx 0.3 \text{ fm}$.
3. One can also simplify the equation (98) for the Green function $G_{\bar{q}qG}$ fixing $\vec{x} = 0$ in the expression (99) for the nonperturbative potential $\text{Im}V(\vec{x}_2, \vec{y}_2, z_2, \alpha_q, \alpha_G)$. This leads in (98) to a factorized dependence on variables \vec{x} and \vec{y} .

As a result of these approximations and $\alpha_G \rightarrow 0$ we arrive at,

$$F_{\gamma^* \rightarrow \bar{q}qG}(\vec{x}, \vec{y}, \alpha_q, \alpha_G) = -\Psi_{\bar{q}q}^L(\vec{x}, \alpha_q) \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \Psi_{qG}(\vec{y}) \sigma_{GG}(\vec{y}), \quad (102)$$

where

$$\Psi_{qG}(\vec{y}) = \lim_{\alpha_G \rightarrow 0} \Psi_{qG}(\alpha_G, \vec{y}), \quad (103)$$

and

$$\sigma_{GG}(r, s) = \frac{9}{4} \sigma_{\bar{q}q}(r, s). \quad (104)$$

As soon as we neglect the size of the color-octet $\bar{q}q$ pair, it interacts a gluon, this is why one can replace $\sigma_{\bar{q}qG}$ by the dipole cross section σ_{GG} . The latter is larger than $\sigma_{\bar{q}q}$ by the Casimir factor $9/4$.

In this case the tree-body Green function factorizes to a product of two-body ones,

$$G_{\bar{q}qG}(\vec{x}_2, \vec{y}_2, z_2; \vec{x}_1, \vec{y}_1, z_1) \Rightarrow G_{\bar{q}q}(\vec{x}_2, z_2; \vec{x}_1, z_1) G_{GG}(\vec{y}_2, z_2; \vec{y}_1, z_1), \quad (105)$$

where $G_{\bar{q}q}(\vec{x}_2, z_2; \vec{x}_1, z_1)$ is the "free" Green function of the $\bar{q}q$ pair, and $G_{GG}(\vec{y}_2, z_2; \vec{y}_1, z_1)$ describes propagation of the GG dipole which constituents interact with each other, as well as with the nuclear medium.

$$i \frac{d}{dz_2} G_{GG}(\vec{y}_2, z_2; \vec{y}_1, z_1) = \left[-\frac{\Delta(\vec{y}_2)}{2\nu \alpha_G (1 - \alpha_G)} + V(\vec{y}_2, z_2) \right] G_{GG}(\vec{y}_2, z_2; \vec{y}_1, z_1), \quad (106)$$

where

$$2 \text{Im} V(\vec{y}, z) = -\sigma_{GG}(\vec{y}) \rho_A(b, z). \quad (107)$$

On analogy to (11) we assume the real part of the potential has a form

$$\text{Re } V(\vec{y}, z) = \frac{\bar{b}^4 y^2}{2\nu \alpha_G(1 - \alpha_G)}, \quad (108)$$

where $\bar{b} \sim b_0$.

To simplify the estimate we assume that $\sigma_{GG}(r, s) \approx C_{GG}(s) r^2$, where $C_{GG}(s) = d\sigma_{GG}(r, s)/dr_{r=0}^2$.

The solution of Eq. (106) has a form,

$$G_{GG}(\vec{y}_2, z_2; \vec{y}_1, z_1) = \frac{A}{2\pi \sinh(\Omega \Delta z)} \times \exp \left\{ -\frac{A}{2} \left[(y_1^2 + y_2^2) \coth(\Omega \Delta z) - \frac{2\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2}{\sinh(\Omega \Delta z)} \right] \right\}, \quad (109)$$

where

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\bar{b}^4 - i \alpha_G(1 - \alpha_G) \nu C_{GG} \rho_A}, \\ \Omega &= \frac{i A}{\alpha_G(1 - \alpha_G) \nu}, \\ \Delta z &= z_2 - z_1. \end{aligned} \quad (110)$$

The quark-gluon wave function in (102) has a form similar to (27),

$$\Psi_{qG}(\vec{y}) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha_s}{3}} \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{y}}{y^2} \exp \left[-\frac{b^2}{2} y^2 \right]. \quad (111)$$

Now we have all the components of the amplitude (102) which we need to calculate the nuclear shadowing correction (97). Integration in $\vec{x}_{1,2}$ and $\vec{y}_{1,2}$ can be performed analytically.

$$\begin{aligned} &8\pi \int dM_X^2 \frac{d^2\sigma(\gamma^* N \rightarrow XN)}{dM_X^2 dq_T^2} \Big|_{q_T=0} \cos(q_L \Delta z) \\ &= \text{Re} \int d\alpha_q d\ln(\alpha_G) \frac{16\alpha_{em} (\sum_F Z_q^2) \alpha_s(Q^2) C_{GG}^2}{3\pi^2 Q^2 \bar{b}^2} [(1 - 2\zeta - \zeta^2)e^{-\zeta} + \zeta^2(3 + \zeta)E_1(\zeta)] \\ &\times \left[\frac{t}{w} + \frac{\sinh(\Omega \Delta z)}{t} \ln \left(1 - \frac{t^2}{u^2} \right) + \frac{2t^3}{u w^2} + \frac{t \sinh(\Omega \Delta z)}{w^2} + \frac{4t^3}{w^3} \right], \end{aligned} \quad (112)$$

where

$$\begin{aligned} \zeta &= i x m_N \Delta z; \\ t &= \frac{A}{\bar{b}^2}; \\ u &= t \cosh(\Omega \Delta z) + \sinh(\Omega \Delta z); \\ w &= (1 + t^2) \sinh(\Omega \Delta z) + 2t \cosh(\Omega \Delta z). \end{aligned} \quad (113)$$

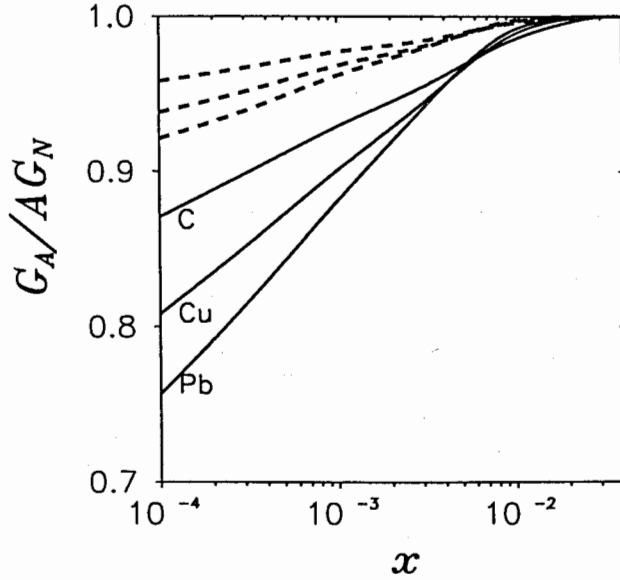


Figure 5: Ratio of the gluon distribution functions in nuclei (carbon, copper and lead) and nucleons at small Bjorken x and $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ (solid curves) and 40 GeV^2 (dashed curves).

The rest integration in (112) can be performed numerically. We calculated the ratio $R_{A/N}^G = G_A(x, Q^2) / A G_N(x, Q^2)$ for the gluon distribution functions for small values of Bjorken $10^{-4} < x < 10^{-1}$ and high $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$. We found $R_{A/N}^G$ almost independent of Q^2 at higher Q^2 . The results are depicted in Fig. 5.

One can see that in contrast to the quark distribution the onset of nuclear shadowing for gluons starts at quite small $x \sim 10^{-2}$. This is because the photon fluctuations containing gluons are heavier than $\bar{q}q$ fluctuations. Correspondingly, the lifetime of such fluctuations is shorter (or q_L is smaller) and they need a smaller x to expose coherent effects like nuclear shadowing. One can expect an antishadowing effect at medium $x \sim 0.1$ like in $F_2(x, Q^2)$ which should push the crossing point $G_A(x, Q^2) / G_N(x, Q^2) = 1$ down to smaller x . Discussion of the dynamics of antishadowing (swelling of bound nucleons, etc.) goes beyond the scopes of this paper.

A similar approach to the problem of gluon shadowing is developed in [30] which relates shadowing to the diffractive radiation of gluons. Note that a delayed onset of gluon shadowing (at $x < 0.02$) is also expected in [30]. However, this is a result of an *ad hoc* parameterization for antishadowing, rather than calculations. The phase shift factor $\cos(q_L \Delta z)$ which controls the onset of shadowing in (97), (112) is neglected in [30] assuming that x is sufficiently small. However, nuclear shadowing for gluons does not saturate even at very small x because of the $1/M^2$ form of the mass dependence of diffractive radiation of gluons (triple-Pomeron diffraction). The smaller the $x = Q^2 / 2m_N \nu$ is, the higher masses are allowed by the nuclear form factor ($q_L = (Q^2 + M^2) / 2\nu < 1/R_A$) to contribute to the shadowing.

Our results also show that $R_{A/N}^G$ steeply decreases down to small x and seems to have a

tendency to become negative. It would not be surprising for heavy nuclei if our shadowing correction corresponded to double scattering term only. However, the expression (97) includes all the higher order rescattering terms. The source of the trouble is the obvious breaking down of the unitarity limit $\sigma_{diff} < \sigma_{tot}$. This problem is well known and easily fixed by introducing the unitarity or absorptive corrections which substantially slow down the growth of the diffractive cross section. Available data for diffraction $pp \rightarrow pX$ clearly demonstrate the effect of unitarity corrections [61, 65]. One may expect that at very high energies the relative fraction of diffraction decreases. We restrict ourselves with this word of caution in the present paper and postpone a further study of unitarity effects for a separate publication, as well as the effects of higher Fock components containing more than one gluon. Those corrections also become more important at small x .

Note that quite a strong nuclear suppression for gluons $G^A(x, Q^2)/G^N(x, Q^2) < F_2^A(x, Q^2)/F_2^N(x, Q^2)$ was predicted in [68] basing on the fact that the cross section of a color octet-octet dipole contains the factor $9/4$ compared to $\sigma_{\bar{q}q}$. However, it is argued above in section 3.1 and confirmed by the following calculations that the observed smallness of the diffractive cross section of gluon radiation shows that the strong nonperturbative interaction of gluons substantially reduces the size of fluctuations including the gluon. The situation is much more complicated and cannot be reduced to a simple factor $9/4$.

A perspective method for calculation of nuclear shadowing for gluons was suggested in the recent publication [31]. Experimental data for diffractive charm production can be used to estimate the effect. This seems to be more reliable than pure theoretical calculations performed above. Indeed, the transverse separation of a heavy flavored $\bar{Q}Q$ pair is small even at low Q^2 , and may be assumed to be much smaller than the mean distance between the $\bar{Q}Q$ and the gluon. Unfortunately, the available data obtained at HERA have quite poor accuracy. The results from H1 [71] and ZEUS [72] experiments are different by almost factor of two. Besides, the theoretical analysis [34, 35] which is needed to reconstruct the diffractive cross section of charm production from production of D^* in a limited phase space, introduces substantial uncertainty. According to [35] the realistic solutions for the diffractive charm production differ by a factor of five. In this circumstances we suppose our calculation for nuclear shadowing of gluons seems to be more reliable.

Note that we expect much weaker nuclear shadowing for gluons than it was predicted in [27, 29, 30]. For instance at $x = 10^{-3}$ and $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ we expect $G_A/A G_N \approx 0.9$, while a much stronger suppression $G_A/A G_N \approx 0.6$ [27], even $G_A/A G_N \approx 0.3$ [29, 30] was predicted for $A \approx 200$ at $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$.

It is instructive to compare the gluon shadowing at high Q^2 with what one expects for hadronic reactions at much smaller virtualities. One should expect more shadowing at smaller Q^2 , however, the soft gluon shadowing evaluated in the next section turns out to be much weaker than one predicted in [27, 29, 30] at high Q^2 .

At the same time, quite a different approach to the problem of gluon shadowing based on the nonlinear GLR evolution equation [21] used in [26] led to the results pretty close to ours.

3.2.2 Nuclear shadowing for soft gluons

(i) Hadronic diffraction and gluon shadowing

The hadron-nucleus total cross section is known to be subject to usual Glauber (eikonal) [73] shadowing and Gribov's inelastic corrections [33]. Those corrections are controlled by the

cross section of diffractive dissociation of the projectile hadron $hN \rightarrow XN$ which contains particularly the triple-Pomeron contribution. The latter as was shown above is related to gluon shadowing in nuclei. Namely, absorption of the incoming hadron can be treated as a result of interaction with the gluon cloud (in the infinite momentum frame of the nucleus) of bound nucleons at small x . A substantial part of this absorption is reproduced by the eikonal approximation which assumes the gluon density to be proportional to the number of bound nucleons. However, evolution of the gluon density including gluon fusion (see [66] and [21, 67] for high Q^2) results in reduction of the gluon density compared to one used in the eikonal approximation. Such a reduction makes nuclear matter more transparent for protons [77].

That part of nuclear shadowing which comes from diffractive excitation of the valence quark component of the projectile hadron corresponds in terms of the triple-Regge phenomenology to the *PPR* term in the diffractive cross section. In eigenstate representation for the interaction Hamiltonian the same effect comes from the dependence of the elastic amplitude on positions of the valence quarks in the impact parameter plane [5]. On top of that, the projectile hadron can dissociate via gluon radiation which corresponds to the triple-Pomeron term in diffraction. It can also be interpreted in the infinite momentum frame of the nucleus as a reduction of the density of gluons which interact with the hadron. This relation gives a hint how to approach the problem of gluon shadowing at small x for soft gluons.

Let us model this situation in eigenstate representation with two Fock states for the projectile hadron,

$$|h\rangle = (1 - w) |h\rangle_v + w |h\rangle_G, \quad (114)$$

where $|h\rangle_v$ and $|h\rangle_G$ are the components without (only valence quarks) and with gluons which can be resolved at the soft scale. We assume them to be eigenstates of interaction with eigenvalues σ_v and σ_G respectively. The relative weights are controlled by the parameter w . The hadron-nucleon and hadron-nucleus total cross sections can be represented as [74, 5],

$$\sigma_{tot}^{hN} = \sigma_v + w \Delta\sigma, \quad (115)$$

where $\Delta\sigma = \sigma_G - \sigma_v$, and

$$\sigma_{tot}^{hA} = 2 \int d^2b \left\{ \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_v T(b)\right) \right] + w \left[\exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_v T(b)\right) - \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_G T(b)\right) \right] \right\}. \quad (116)$$

This cross section is smaller than one given by the eikonal Glauber approximation [73], and the difference is known as Gribov's inelastic corrections [33]. The Glauber's cross section can be corrected by replacing the nuclear thickness function by a reduced one, $T(b) \Rightarrow \tilde{T}(b) < T(b)$, which is related to the reduced gluon density in the nucleus,

$$\frac{G_A(x, b)}{G_N(x, b)} = \frac{\tilde{T}(b)}{T(b)}. \quad (117)$$

Thus, nuclear shadowing for soft gluons can be evaluated comparing the total cross section (116) with the modified Glauber approximation,

$$\sigma_{tot}^{hA} = 2 \int d^2b \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_{tot}^{hN} \tilde{T}(b)\right) \right]. \quad (118)$$

Expanding both expressions in small parameters $\Delta\sigma T$ and $\sigma_v \Delta T$, where $\Delta T(b) = T(b) - \bar{T}(b)$, (they are indeed small even for heavy nuclei) we get,

$$\Delta T(b) = \frac{w(\Delta\sigma)^2}{4\sigma_{tot}^{hN}} T^2(b) \left[1 - \frac{1}{6} \Delta\sigma T(b) + O((\Delta\sigma T)^2) \right]. \quad (119)$$

We left here only the leading terms and omitted for the sake of simplicity the terms containing higher powers of w .

According to relation (A.10) $w(\Delta\sigma)^2/16\pi$ is the forward cross section of diffractive gluon radiation which corresponds to the triple-Pomeron part of the diffraction cross section $hN \rightarrow XN$. Therefore, the correction (119) to the nuclear thickness function can be expressed in terms of the effective cross section,

$$\sigma_{eff} = \frac{w(\Delta\sigma)^2}{\sigma_{tot}^{hN}} = 16\pi A_{3P}(hN \rightarrow XN) \ln \left(\frac{M_{max}^2}{M_{min}^2} \right), \quad (120)$$

where $M_{max}^2 \approx 2\sqrt{3}s/(m_N R_A)$ is the upper cut off for the diffractive mass spectrum imposed by the nuclear formfactor. The bottom cut off depends on M^2 -dependence for the triple-Pomeron diffraction at small masses which is poorly known. At high energies under consideration this uncertainty related to the choice of M_{min}^2 is quite small. We fix $M_{min} = 2 GeV$.

Within an approximate Regge factorization scheme $A_{3P}(hN \rightarrow XN)$ defined in (86) is an universal constant (see, however, (87)). Therefore, the driving term in (119) and gluon shadowing are independent of our choice for hadron h , a result which could be expected.

Data on diffractive reaction $pp \rightarrow pX$ fix the triple-Pomeron coupling (e.g. see in [46, 61, 65]) with much better certainty than for other reactions (including data for diffractive DIS). The value of A_{3P} varies from $0.075 GeV^{-2}$ at medium high energies to $0.025 GeV^{-2}$ at Tevatron energy (see (87)). Correspondingly, the effective cross section for $A \approx 200$ ranges as $\sigma_{eff} \approx 3.5 - 5.5 mb$. This is an order of magnitude smaller than the value used in [30] at high Q^2 . It is very improbable that σ_{eff} can grow (so much!) with Q^2 .

It is silently assumed in Eq. (116) that the energy is sufficiently high to freeze the fluctuations, i.e. there is no mixing between the Fock components during propagation through the nucleus. If, however, the energy is not high, or the effective mass of the excitation is too large, one should take care of interferences and represent (117), (119) in the form (compare to [69, 70])

$$\begin{aligned} \frac{G_A(x)}{AG_N(x)} &= 1 - 8\pi A_{3P}(pp \rightarrow pX) \text{Re} \int d^2b \int_{M_{min}^2}^{\infty} \frac{dM_X^2}{M_X^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \Theta(z_2 - z_1) \\ &\times \rho_A(b, z_1) \rho_A(b, z_2) \exp[-i q_L (z_2 - z_1)] \exp\left[-\frac{1}{2} \sigma_{abs} \int_{z_1}^{z_2} dz \rho_A(b, z)\right], \quad (121) \end{aligned}$$

where $\sigma_{abs} = \Delta\sigma$, and we exponentiated the expression in square brackets in the r.h.s. of (117).

The important difference between (121) and the usual expression [69, 70] for inelastic corrections is absence of absorption for the initial ($z < z_1$) and final ($z > z_2$) protons in (121).

This is a natural result, since proton absorption (mostly of eikonal type) has no relevance to gluon shadowing.

Absorption $\sigma_{abs} = \Delta\sigma$ in intermediate state ($z_1 > z > z_2$) is much smaller than σ_{tot}^{NN} and is related to the amplitude of diffractive gluon radiation (see (A.10)). One can estimate σ_{abs} assuming Regge factorization. In this case σ_{eff} is universal and can be applied even to a quark, *i.e.* $h = q$. This makes sense in our model due to short range nature of the nonperturbative gluon interactions.

demanding Eq. (121) to reproduce correctly the "frozen" limit of $q_L \rightarrow 0$. This needs $\sigma_{abs} = \sigma_{eff}$, as was actually guessed in [30].

However, the discussion following Eq. (42) shows that after it is averaged over the quark-gluon separation the absorptive cross section gains an extra factor, $\sigma_{abs} = 1.5\sigma_{eff}$.

We performed numerical estimates for $A = 200, 64$ and 12 assuming a constant nuclear density $\rho_A(r) = \rho_0 \Theta(R_A - r)$ with $\rho_0 = 0.157 \text{ fm}^{-3}$ and $R_A = 1.15 A^{1/3} \text{ fm}$. In this case integration in (121) can be performed analytically and the result reads,

$$\begin{aligned} \frac{G_A(x)}{A G_N(x)} = & 1 - \frac{1}{3v^3 \ln(M_{max}^2/M_{min}^2)} \left\{ \left[3 - \frac{3}{2}v^2 + v^3 - 3(1+v)e^{-v} \right] \right. \\ \times \left[\ln \left(\frac{s}{m_N R_A (M_{min}^2 - m_N^2)} \right) - \gamma \right] & + \left[3 - \frac{3}{2}v^2 + v^3 \right] \left[\gamma + \ln v - Ei(-v) \right] \\ & \left. + \left[\frac{3}{2}v^2 - \frac{11}{2} + \left(\frac{11}{2} + \frac{5}{2}v - v^2 \right) e^{-v} \right] \right\}, \quad (122) \end{aligned}$$

where $v = \frac{3}{2} \sigma_{eff} \rho_0 R_A$, $\gamma = 0.5772$ is the Euler constant, and $Ei(z)$ is the integral exponential function. The value of x can be evaluated as $x = 4 \langle k^2 \rangle / s$, where $\langle k^2 \rangle \sim 1/b_0^2$ is the mean transverse momentum squared in the quark-gluon system.

The results of numerical calculations with Eq. (122) for gluon shadowing are depicted in Fig. 6 by thin solid curves for lead, copper and carbon (from bottom to top) as function of x . Shadowing for soft gluons turns out to be much weaker than predicted in [30, 31] for high Q^2 . This contradicts the natural expectation that the softer gluons are, the stronger shadowing should be.

(ii) The Green function formalism

One can also use the Green function formalism to calculate nuclear shadowing for soft gluon radiation. It provides a better treatment of multiple interactions and phase shifts in intermediate state. In contrast to the above approach which uses a constant average value for σ_{eff} , in the Green function formalism the absorption cross section as well as the phase shift are functions of longitudinal coordinate. This is also a parameter-free description, all the unknowns have already been fixed by comparison with data.

As usual, we treat shadowing for soft gluons as a contribution of the gluonic Fock component to shadowing of the projectile-nucleus total cross section. One can use as a soft projectile a real photon, a meson, even a single quark. Indeed, the mean quark-gluon separation $1/b_0 \approx 0.3 \text{ fm}$ is much smaller than the quark-antiquark separation in a light meson or a $q\bar{q}$ fluctuation of a photon. For this reason one can neglect in (49) the interference between the amplitudes of gluon radiation by the q and \bar{q} . Since the gluon contribution to the cross section corresponds to the difference between total cross sections for $|\bar{q}qG\rangle$ and $|\bar{q}q\rangle$ components, the quark spectator cancels out and the radiation cross section is controlled by the quark-gluon wave function and color octet (GG) dipole cross section.

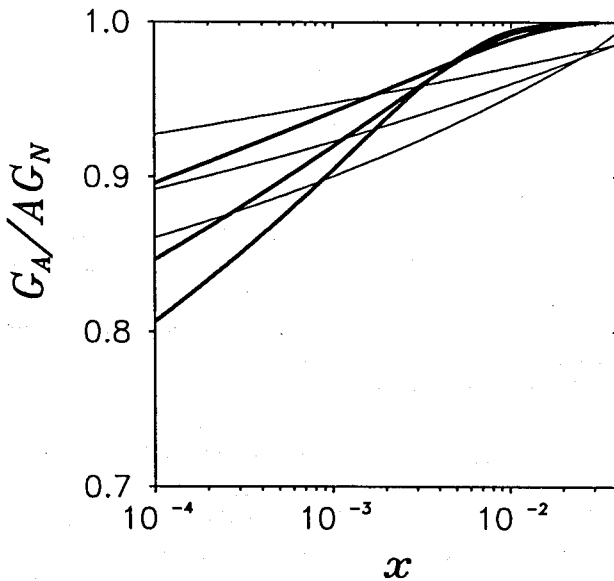


Figure 6: The same as in Fig. 5, but for soft gluons. The thin curves are obtained with (122) using data for the triple-Pomeron contribution to diffraction $pp \rightarrow pX$. The thick curves are predicted using the Green function method.

Thus, the contribution to the total hadron-nucleus cross section which comes from gluon radiation has the form,

$$\sigma_G^{hA} = \int_x^1 \frac{d\alpha_G}{\alpha_G} \int d^2b P(\alpha_G, \vec{b}), \quad (123)$$

where

$$\begin{aligned} P(\alpha_G, \vec{b}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho_A(b, z) \int d^2r |\Psi_{qG}(\vec{r}, \alpha_G)|^2 \sigma_{GG}(r, s) \\ &- \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 dz_2 \Theta(z_2 - z_1) \rho_A(b, z_1) \rho_A(b, z_2) \int d^2r_1 d^2r_2 \\ &\times \Psi_{qG}^*(\vec{r}_2, \alpha_G) \sigma_{GG}(r_2, s) G_{GG}(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1) \sigma_{GG}(r_1, s) \Psi_{qG}(\vec{r}_1, \alpha_G). \end{aligned} \quad (124)$$

Here the energy and Bjorken x are related as $s = 2m_N \nu = 4b_0^2/x$. The explicit solution for the Green function $G_{GG}(\vec{r}_2, z_2; \vec{r}_1, z_1)$ in the case of $\sigma_{GG}(r, s) = C_{GG}(s) r^2$ and a constant nuclear density is given by Eq. (65). Note that the r^2 approximation for the dipole cross section is justified by the small value of $\langle r^2 \rangle = 1/b_0^2 \approx 0.1 \text{ fm}^2$.

Integrations in (124) can be performed analytically,

$$P(\alpha_G, \vec{b}) = \frac{4\alpha_G}{3\pi} \text{Re} \ln(W), \quad (125)$$

where

$$W = ch(\Omega \overline{\Delta z}) + \frac{A^2 + b_0^2}{2 A b_0^2} sh(\Omega \overline{\Delta z}), \quad (126)$$

$$\overline{\Delta z} = 2 \sqrt{R_A^2 - b^2}. \quad (127)$$

We use here the same notations as in Eqs. (109) – (110).

The results of calculations are depicted in Fig. 6 by thick curves for lead, copper and carbon (from bottom to top). They demonstrate about the same magnitude of shadowing as was calculated above using hadronic basis. However, the onset of shadowing is delayed down to $x < 0.01$. We believe that this result is trustable since the Green function approach treats phase shifts and attenuation in nuclear matter more consistently.

Comparing predicted shadowing for soft gluons in Fig. 6 and one at $Q^2 = 4 \text{ GeV}$ in Fig. 5 we arrive at a surprising conclusion that shadowing is independent of scale. A small difference is within the accuracy of calculations. This is a nontrivial result since calculations were done using very different approximations. Shadowing of hard gluons was estimated assuming that the $\bar{q}q$ pair is squeezed to a size $\sim 1/Q$ much smaller than the transverse separation between the gluon and the $\bar{q}q$. On the contrary, radiation of soft gluons is dominated by configurations with a distant q and \bar{q} surrounded by small gluon clouds. The fact that shadowing appears to be the same is a result of existence of the semihard scale b_0^2 (which should be compared with $Q_{eff}^2 < Q^2/4$). At larger virtualities shadowing decreases as one can see from comparison of $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ with 16 GeV^2 in Fig. 5.

3.3 Nonperturbative effects in the transverse momentum distribution of gluon bremsstrahlung

As soon as the strength of the nonperturbative quark-gluon interaction is fixed, we are in a position to calculate the cross section of gluon bremsstrahlung for a high energy quark interacting with a nucleon or a nuclear target and to compare the results with the perturbative QCD calculations [36].

3.3.1 Nucleon target

The transverse momentum distribution of soft gluons ($\alpha_G \ll 1$) reads [36],

$$\frac{d\sigma}{d(\ln\alpha_G) d^2k_T} = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d^2r_1 d^2r_2 \overline{\Psi_{qG}^\dagger(\vec{r}_1, \alpha_G) \Psi_{qG}(\vec{r}_2, \alpha_G)} \exp[i\vec{k}_T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] \times [\sigma_{GG}(r_1) + \sigma_{GG}(r_2) - \sigma_{GG}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]. \quad (128)$$

Here the overline means that we sum over all possible polarizations of the radiated gluon and recoil quark and average over the polarization of the initial quark. In our model for the quark-gluon distribution function including nonperturbative effects we get,

$$\overline{\Psi_{qG}^\dagger(\vec{r}_1, \alpha_G) \Psi_{qG}(\vec{r}_2, \alpha_G)} = \frac{4\alpha_s}{3\pi^2 r_1^2 r_2^2} \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \exp\left[-\frac{b_0^2}{2}(r_1^2 + r_2^2)\right]. \quad (129)$$

The cross section $\sigma_{GG}(r)$ in (128) has the form (104).

We performed calculations for the transverse momentum distribution of gluons for two parameterizations of the dipole cross section,

(I) one which is given by (30) which is constant at $\rho^2 \gg \rho_0^2$. For the sake of convenience we change the notation here, $s^2 = 2/\rho_0^2 = 0.125 \text{ GeV}^{-2}$;

(II) the dipole approximation (5) with $C = \sigma_0 s^2/2$. Only this parameterization is used for nuclear targets because it allows to perform integrations analytically (of course one can do numerical calculation for any shape of the cross section).

Correspondingly, we obtain for the differential radiation cross section,

$$\frac{d\sigma_I^N}{d(\ln\alpha_G) d^2k_T} = \frac{3\alpha_s \sigma_0}{\pi^2} F(k_T^2, b_0^2, s^2), \quad (130)$$

where

$$F(k_T^2, b_0^2, s^2) = \frac{1}{2k_T^2} \Omega_1 (\Omega_1 - 2\Omega_2) + \frac{1}{4s^2} \left[\text{Ei}\left(\frac{k_T^2}{2s^2}\right) - 2\text{Ei}\left(\frac{k_T^2}{2s^2} x_1\right) + \text{Ei}\left(\frac{k_T^2}{2s^2} x_2\right) \right] \quad (131)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 1 - \exp\left(-\frac{k_T^2}{2b_0^2}\right); \\ \Omega_2 &= 1 - \exp\left[-\frac{k_T^2}{2(b_0^2 + s^2)}\right]; \\ x_1 &= \frac{b_0^2}{b_0^2 + s^2}; \quad x_2 = \frac{b_0^2}{b_0^2 + 2s^2}; \end{aligned}$$

and $\text{Ei}(z)$ is the exponential integral function.

In the case of parameterization II it is convenient to represent the dipole cross section in the form,

$$\sigma_{\bar{q}q}(r) = \sigma_0 s^2 \frac{d}{ds^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2} s^2 r^2\right) \right]_{s^2=0}. \quad (132)$$

Then the differential cross section reads,

$$\frac{d\sigma_{II}^N}{d(\ln\alpha_G) d^2k_T} = \frac{3\alpha_s \sigma_0 s^2}{\pi^2} F_1(k_T^2, b_0^2, s^2), \quad (133)$$

where

$$\begin{aligned} F_1(k_T^2, b_0^2, s^2) &= \frac{d}{ds^2} F(k_T^2, b_0^2, s^2) \Big|_{s^2=0} \\ &= \Lambda_1^2 - \Lambda_1 \Lambda_2 + \frac{1}{2} \Lambda_2^2; \end{aligned} \quad (134)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{k_T^2} \Omega_1 = \frac{1}{k_T^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{k_T^2}{2b_0^2}\right) \right]; \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{k_T^2} \exp\left(-\frac{k_T^2}{2b_0^2}\right). \end{aligned}$$

The results of calculations for variants I and II are depicted in Fig. 7 by solid and dashed curves respectively.

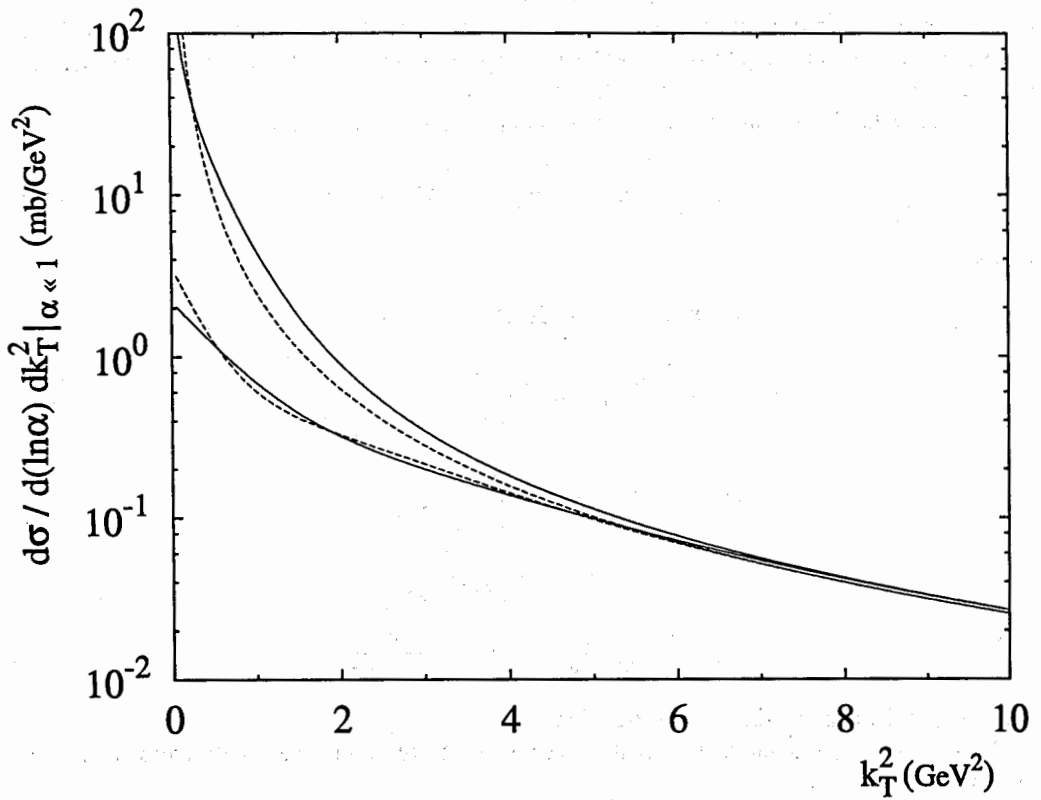


Figure 7: Transverse momentum distribution for gluon bremsstrahlung by a quark scattering on a nucleon target. The solid and dashed curves correspond to parameterizations I and II for the dipole cross section, respectively. The upper curves show the results of the perturbative QCD predictions [36], the bottom curves correspond to the full calculation including the nonperturbative interaction of the radiated gluon.

The two upper curves correspond to perturbative calculations, while the two bottom ones include the nonperturbative effects. The strong interaction between gluon and quark leads to a substantial decrease in the mean transverse size of the quark-gluon fluctuation. Therefore, the mean transverse momentum of the radiated gluons increases. The nonperturbative interaction has especially strong effect at small transverse momentum k_T , where the radiation cross section turns out to be suppressed by almost two orders of magnitude compared to the perturbative QCD expectations.

Note that intensive gluon radiation originating from multiple nucleon interactions in relativistic heavy ion collisions is found [78, 79] to be an important alternative source for suppression of charmonium production rate and is able to explain the corresponding data from the

NA50 experiment at CERN SPS. The found strong suppression of gluon bremsstrahlung by the nonperturbative interaction relevant only to small $\alpha \ll 1$. However, it may substantially reduce the influence of prompt gluons on charmonium production if is important at large α as well. This is to be checked.

3.3.2 Nuclear targets

In the case of nuclear targets Eq. (128) holds, but $\sigma_{GG}(r)$ has the form,

$$\sigma_{GG}^A(r) = 2 \int d^2 B \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{9}{8} \sigma_{\bar{q}q}(r) T(B) \right] \right\}, \quad (135)$$

Our calculations for gluon radiation in the interaction of a quark with a nuclear target are performed only in the parameterization II for the sake of simplicity. For heavy nuclei this approximation can be quite good due to a strong color filtering effect which diminishes the contribution from large size dipoles. The transverse momentum distribution has the form,

$$\frac{d\sigma_{II}^A}{d(\ln\alpha_G) d^2 k_T} = \frac{8\alpha_s}{3\pi^2} \int d^2 B F(k_T^2, b_0^2, S^2(B)), \quad (136)$$

where

$$S^2(B) = \frac{9}{8} \sigma_0 s^2 T(B). \quad (137)$$

For numerical calculations we use the approximation of constant nuclear density, $\rho_A(r) = 3A/(4\pi R_A^3) \Theta(R_A - r)$. The results for the radiation cross section per bound nucleon with (solid curve) and without (dashed) the nonperturbative effects are compared in Figs. 8 and 9 for copper and lead targets respectively. Obviously the nonperturbative interaction generates very large nuclear effects.

The nuclear effects are emphasized by a direct comparison in Figs. 10 and 11 for different targets, a nucleon, copper and lead, including and excluding the nonperturbative interaction respectively. We see that the difference between a free and a bound nucleon at small k_T is substantially reduced by the nonperturbative interaction. Indeed, the interaction squeezes the quark-gluon fluctuation and reduces the nuclear effects. Besides, the region of antishadowing is pushed to larger values of k_T .

This manifestation of the nonperturbative interaction implies that gluon saturation which is an ultimate form of shadowing should happen with a smaller gluon density compared to the expectations [24, 25] based on perturbative calculations. On the other hand, the saturation region spreads up to higher values of k_T .

4 Summary and outlook

We explicitly introduced a nonperturbative interaction between partons into the evolution equation for the Green function of a system of quarks and gluons. The shape of the $\bar{q}q$ potential is chosen to reproduce the light cone wave function of mesons. The magnitude of the potential is adjusted to reproduce data for photoabsorptive cross sections on nucleons and nuclei and data on diffractive dissociation of photons into $\bar{q}q$ pairs.

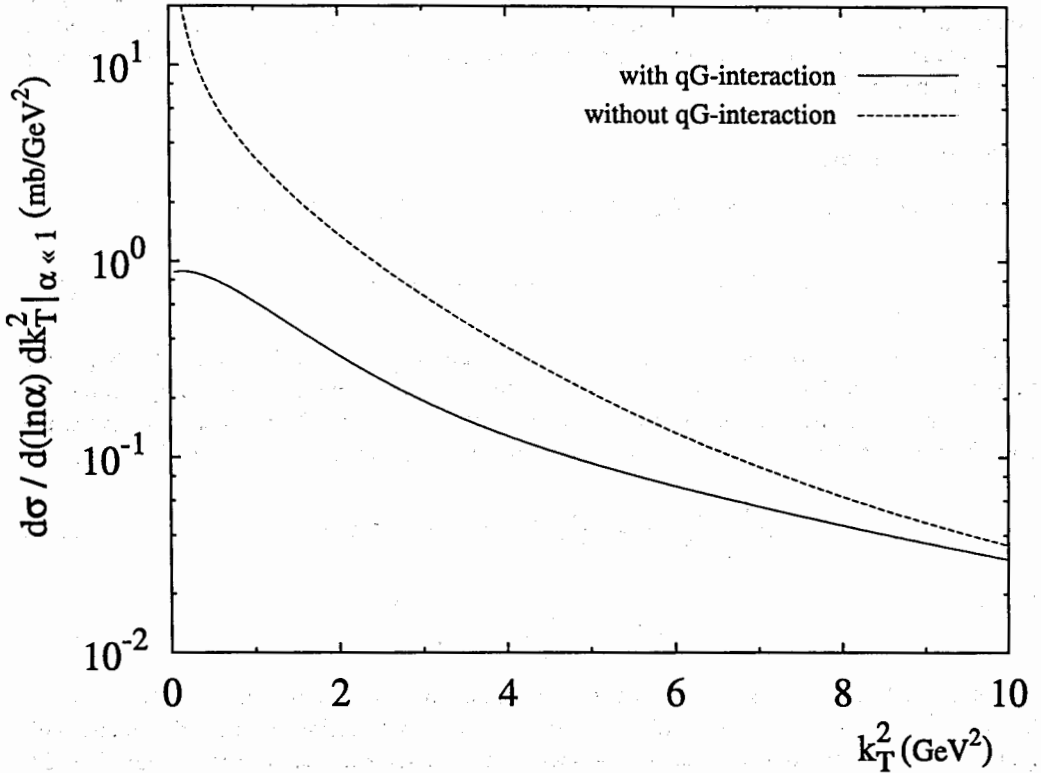


Figure 8: The differential cross section per bound nucleon of soft gluon bremsstrahlung in quark-copper collisions. The solid and dashed curves correspond to calculations with and without the nonperturbative effects respectively.

Based on theoretical arguments and experimental facts we expect a much stronger interaction for a quark-gluon pair than for a quark-antiquark pair. Indeed, data on diffractive dissociation of hadrons and photons into high mass states show that the cross section is amazingly small, what is usually phrased as evidence that the triple-Pomeron coupling is small. We have performed calculations for diffractive gluon radiation (responsible for the production of high mass excitations) including the nonperturbative effects, and fixed the strength of the quark-gluon potential. We found a very simple and intuitive way to get the same results as direct calculations of Feynman diagrams. Both approaches lead to the same diffractive cross section which in the limit of perturbative QCD coincides with the result of a recent calculation [19] for the process $\gamma^* N \rightarrow \bar{q}qGN$. We conclude that the previous analogous calculations [18] are incorrect.

We adjusted the quark-gluon potential to data for the diffractive reaction $pp \rightarrow Xp$ which have the best accuracy and cover the largest range of energies and masses. We predicted the single diffractive cross sections for pions, kaons and photons and find a substantial violation of Regge factorization.

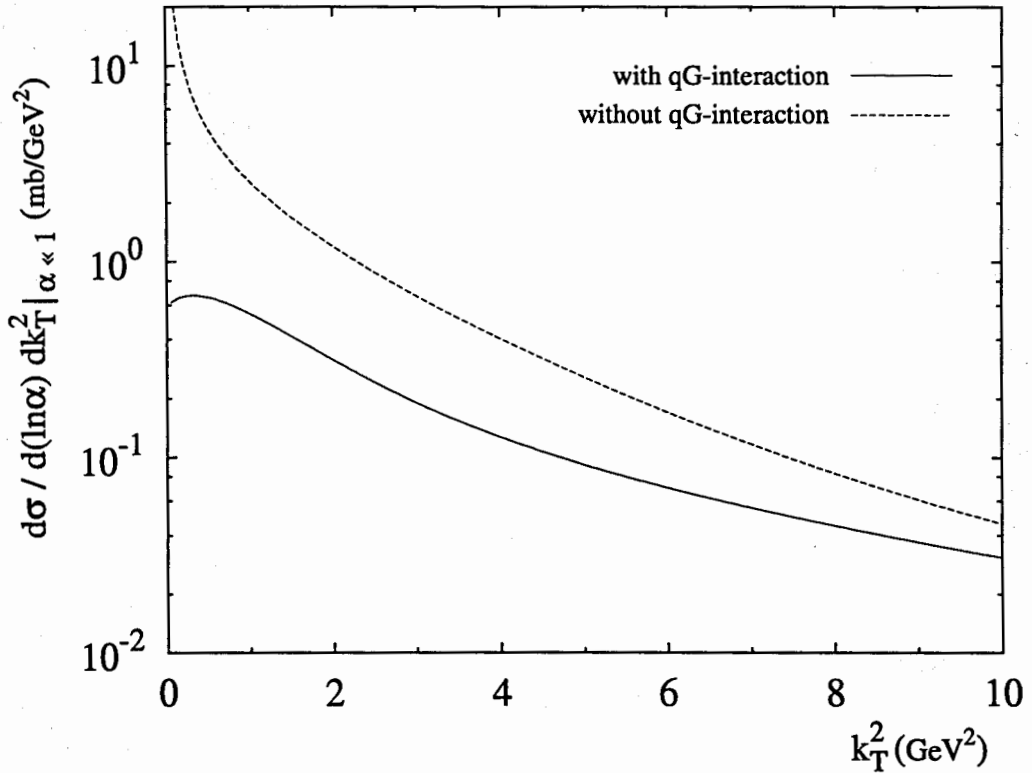


Figure 9: The same as in Fig. 8, but for a lead target.

We calculated nuclear shadowing for longitudinally polarized photons which are known to serve as a sensitive probe for the gluon distribution, using the Green function technique developed in [12] describing the evolution of a $\bar{q}qG$ system propagating through nuclear matter. The evolution equation includes the phase shift which depends on the effective mass of the fluctuation, nuclear attenuation which depends on the transverse separation and energy, and the distribution over transverse separation and longitudinal momenta of the partons which is essentially affected by the nonperturbative interaction of the gluon. The latter substantially reduces the effect of nuclear shadowing of gluons. We have found an x dependence for gluons which is quite different from that for quarks. These differences are far beyond the simple Casimir factor $9/4$.

Nuclear shadowing for soft gluons is essentially controlled by the nonperturbative effects. It turns out to be rather weak similar to what is found at $Q^2 \sim 4 \text{ GeV}^2$. Such a scale invariance at low and medium high virtualities is a consequence of the strong nonperturbative interaction of gluons which introduces a semihard scale $\sim 4 b_0^2 = 1.7 \text{ GeV}^2$.

The nonperturbative interaction changes dramatically the transverse momentum distribution of gluon bremsstrahlung by a high energy quark interacting with a nucleon or a nucleus. The gluon radiation cross section at small k_T turns out to be suppressed by nearly two orders

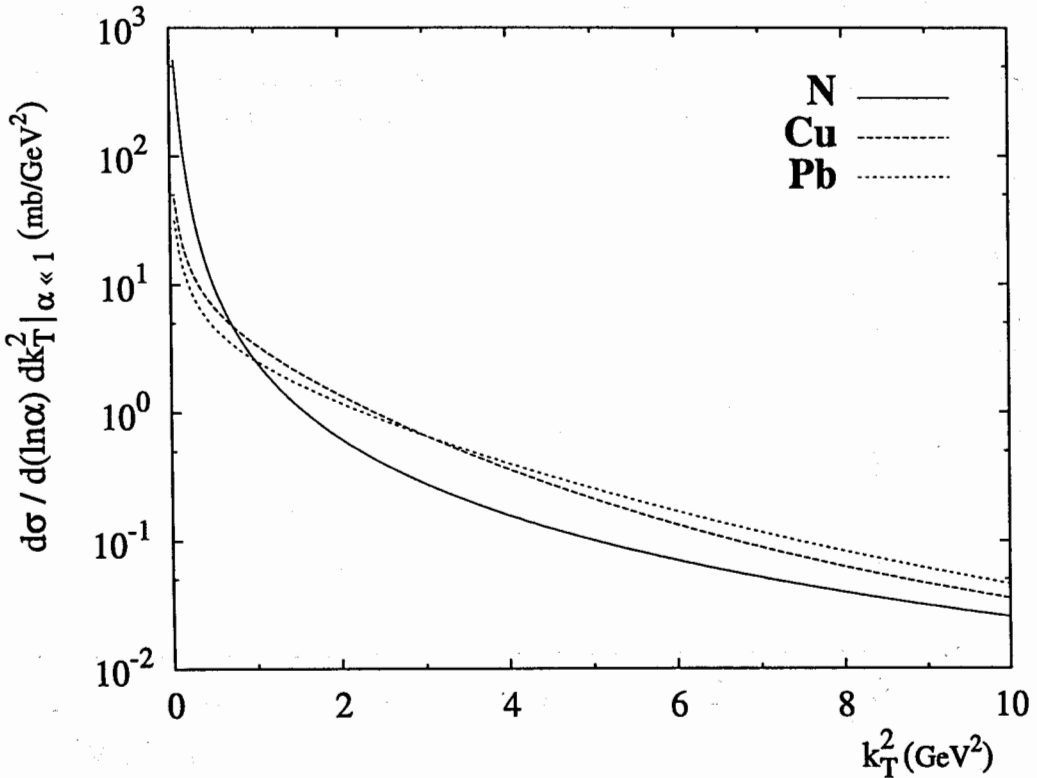


Figure 10: Comparison of the cross sections of gluon radiation per nucleon in the perturbative QCD limit for collisions of a quark with a nucleon (solid curve), copper (dashed curve) and lead (dotted curve) versus the transverse momentum squared of the gluon.

of magnitude compared to the expectations from perturbative QCD [50, 36]. Although these results concern the gluons radiated with $\alpha_G \rightarrow 0$, it might also suppress gluon bremsstrahlung at larger α_G which is predicted [78] to contribute to the break up of charmonia produced in relativistic heavy ion collisions.

This effect is especially strong for nuclear targets where the nonperturbative interaction of radiated gluons creates a forward minimum in the transverse momentum distribution. This suppression is an additional contribution to nuclear shadowing calculated perturbatively in [50, 36] which also leads to a suppression of small transverse momenta. The results of our calculations presented in Figs. 8, 9 include both phenomena.

Nuclear shadowing for small transverse momenta of the radiated gluons is the same effect as the saturation of parton densities at small x in nuclei as seen in the infinite momentum frame of the nucleus. This phenomenon is expected to be extremely important for the problem of quark-gluon plasma formation in relativistic heavy ion collisions. On the one hand, a growth of the mean transverse momentum of radiated gluons increases the produced transverse energy, on

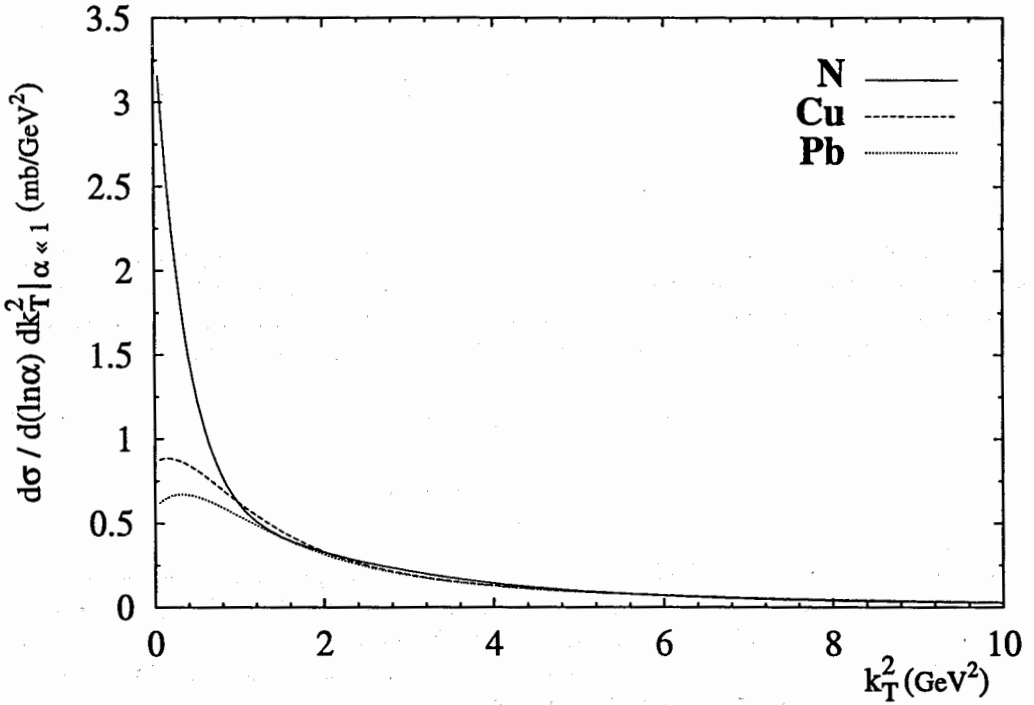


Figure 11: The same as in Fig. 10, but the nonperturbative interaction of gluons is included.

the other hand, it leads to a higher probability for such gluons to escape the interaction region without collisions, *i.e.* the gluon gas may not reach equilibrium [80].

Acknowledgements: We are grateful to Yuri Ivanov and Jörg Raufeisen for their constant assistance in numerical calculations and to Jörg Hüfner, Mikkel Johnson, Andrei Leonidov and Hans-Jürgen Pimer for useful discussions. A substantial part of this work was done when A.V.T. was employed by the Institut für Theoretische Physik der Universität, Heidelberg and was supported by the Gesellschaft für Schwerionenforschung, GSI, grant HD HÜF T.

Appendix A Diffraction

A.1 General consideration

In this section we present a general analysis of diffraction based on the eigenstate decomposition.

The off-diagonal diffractive scattering is a direct consequence of the fact that the interacting particles (hadrons, photon) are not eigenstates of the interaction Hamiltonian [81, 82]. They can be decomposed in a complete set of such eigenstates $|k\rangle$ [74, 83],

$$|h\rangle = \sum_k C_k^h |k\rangle, \quad (\text{A.1})$$

where C_k^h are the amplitudes for the decomposition which obey the orthogonality conditions,

$$\begin{aligned}\sum_k (C_k^{h'})^\dagger C_k^h &= \delta_{hh'} ; \\ \sum_h (C_h^h)^\dagger C_h^h &= \delta_{11} .\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

We denote by $f_k = i\sigma_k/2$ the eigenvalues of the elastic amplitude operator \hat{f} . We assume that the amplitude is integrated over impact parameter, *i.e.* that the forward scattering elastic amplitude is normalized as $|f_k|^2 = 4\pi d\sigma_k/dt|_{t=0}$. We can then express the hadronic amplitudes, the elastic $f_{el}(hh)$ and off diagonal diffractive $f_{dd}(hh')$ amplitudes as,

$$f_{el}(hh) = 2i \sum_k |C_k^h|^2 \sigma_k \equiv 2i \langle \sigma \rangle ; \quad (\text{A.3})$$

$$f_{dd}(hh') = 2i \sum_k (C_k^{h'})^\dagger C_k^h \sigma_k . \quad (\text{A.4})$$

Note that if all the eigen amplitudes are equal the diffractive amplitude (A.4) vanishes due to the orthogonality relation, (A.2). The physical reason is obvious. If all the f_k are identical the interaction does not affect the coherence between the different eigen components $|k\rangle$ of the projectile hadron $|h\rangle$. Therefore, off diagonal transitions are possible only due to differences between the f_k 's. For instance, in the two channel case,

$$f_{dd}(hh') = 2i (C_2^h)^\dagger C_1^h (\sigma_1 - \sigma_2) . \quad (\text{A.5})$$

If one sums over all final states in the diffractive cross section one can use the completeness condition (A.2). Excluding the elastic channels one gets [74, 83, 5],

$$16\pi \frac{d\sigma_{dd}^h}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_i |C_i^h|^2 \sigma_i^2 - \left(\sum_i |C_i^h|^2 \sigma_i \right)^2 \equiv \langle \sigma_i^2 \rangle - \langle \sigma \rangle^2 , \quad (\text{A.6})$$

This formula is valid only for the total (forward) diffractive cross section and cannot be used for exclusive channels.

A.2 Diffractive excitation of a quark, $q \rightarrow qG$

In this case we can restrict ourselves to the first two Fock components of the quark, a bare quark $|q\rangle$ and $|qG\rangle$. Therefore, we can use Eq. (A.5). Thus, we arrive at the following expression for the forward amplitude of diffractive dissociation into a qG pair with transverse separation $\vec{\rho}$,

$$f_{dd}(q \rightarrow qG) \Big|_{q_T=0} = i \Psi_{qG}(\alpha, \vec{\rho}) \left[\sigma_{qG}(\rho) - \sigma_q \right] . \quad (\text{A.7})$$

Both cross sections, σ_{qG} and σ_q are infra-red divergent, but this divergence is obviously the same and cancels in (A.7).

To regulate the divergence we can introduce a small gluon mass m_G , which will not enter the final result, and impose that for separations $r \gg 1/m_G$ the dipole cross section is given by

the additive quark limit, $\sigma_{\bar{q}q}(r \gg 1/m_G) = 2\sigma_q$. To find the convergent part of $\sigma_{qG}(\rho) - \sigma_q$ we can make use of Eq. (47). Let us choose in (47) $r_1 \ll 1/m_G$ and $r_2 \gg 1/m_G$. Then the l.h.s. of (47) saturates at $\sigma_q + \sigma_{qG}(r_1)$. Here $\sigma_{qG}(r_1)$ is different from $\sigma_{\bar{q}}$ due to the color dipole moment of the qG system, i.e. due to $r_1 \neq 0$. Then (47) is modified to,

$$\sigma_q + \sigma_{qG}(r_1) = \frac{9}{8} \left\{ \sigma_{\bar{q}q}(r_1) + 2\sigma_q \right\} - \frac{2}{8} \sigma_q. \quad (\text{A.8})$$

From this relation we obtain the combination of cross sections at the r.h.s. of Eq. (A.7) which takes the form,

$$f_{dd}(q \rightarrow qG) \Big|_{qT=0} = i \Psi_{qG}(\alpha, \vec{\rho}) \frac{9}{8} \sigma_{\bar{q}q}(\rho). \quad (\text{A.9})$$

Thus, we derived Eq. (60) in a simple and intuitive way. A more formal derivation based on direct calculation of Feynman diagrams is presented in Appendix B.1.

A.3 Diffractive gluon radiation by a $\bar{q}q$ pair

The diffractive amplitude of gluon radiation by a $\bar{q}q$ pair, $\bar{q}q \rightarrow \bar{q}qG$, can be easily derived in this approach. We restrict ourselves to two Fock components $|\bar{q}q\rangle$ and $|\bar{q}qG\rangle$. Then the distribution amplitudes C_k^h get the meaning of distribution functions for these Fock states, namely $\Psi_{\bar{q}q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \alpha)$ and $\Psi_{G\bar{q}q}(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \alpha, \alpha_G)$, where the transverse coordinates are defined in (82). Summation over k in (A.1) - (A.4) now means integration over the transverse separations and summation over the Fock components. According to (A.4) - (A.5) the diffractive amplitude $f_{dd}(\bar{q}q \rightarrow \bar{q}qG)$ reads,

$$f_{dd}(\bar{q}q \rightarrow \bar{q}qG) = 2 \int d^2\rho_1 d^2\rho_2 \Psi_{\bar{q}qG}(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \alpha, \alpha_G) [\sigma_{G\bar{q}q}(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) - \sigma_{\bar{q}q}(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2)]. \quad (\text{A.10})$$

Here we make use of the obvious relation $C^{\bar{q}q}(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$. The total cross sections for the two Fock components $\bar{q}q$ and $G\bar{q}q$ are introduced in (9) and (47).

The distribution amplitude for the $G\bar{q}q$ fluctuation in the limit of $\alpha_G \rightarrow 0$ is easily guessed. Indeed, in this limit the impact parameters of the q and \bar{q} are not affected by gluon radiation. Therefore, the $\Psi_{\bar{q}qG}$ should be a product of the $\bar{q}q$ distribution function in the projectile hadron (photon) times the sum of the gluon distribution amplitudes corresponding to radiation of the gluon by q or \bar{q} ,

$$\Psi_{\bar{q}qG}(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \alpha, \alpha_G) = \Psi_{\bar{q}q}(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, \alpha) \left[\Psi_{qG}\left(\vec{\rho}_1, \frac{\alpha_G}{\alpha}\right) - \Psi_{\bar{q}G}\left(\vec{\rho}_2, \frac{\alpha_G}{1-\alpha}\right) \right], \quad (\text{A.11})$$

where $\Psi_{\bar{q}q}$ and Ψ_{qG} are defined in (18), (19) and in (56) respectively. Thus, we have arrived at Eq. (83). A more formal derivation based on the calculation of Feynman graphs is presented in the next Appendix.

After integration over $(\vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2)$ in (A.10) the amplitude of diffractive gluon radiation turns out to be proportional to the difference $\Delta\sigma(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2)$ between the cross sections of the colorless systems $G\bar{q}q$ and $\bar{q}q$. This is a straightforward consequence of the general property of off-diagonal diffractive amplitudes given in (A.5).

These conclusions are also valid for diffractive gluon radiation by a photon $\gamma N \rightarrow \bar{q}qGN$. At first glance presence of a third channel, the photon, may change the situation and gluon

radiation amplitude may not be proportional to $\Delta\sigma$. This is not true, however, since the relative weights of the $\bar{q}q$ and $\bar{q}qG$ components of the photon are the same as above as soon as they are generated perturbatively.

In the limit of purely perturbative interactions the same result as our Eq. (83) was obtained recently in [19] (Eq. (3.4)). However, the cross section for diffractive gluon radiation derived earlier in [18] (Eq. (60)) is not proportional to $(\Delta\sigma)^2$, but contains a linear term. We think that this is a consequence of improper application of relation (A.6) to an exclusive channel.

A.4 Diffractive electromagnetic radiation

The forward amplitude for photon (real or virtual) radiation by a quark is similar to that for gluon radiation (A.7), except that the photon does not interact strongly and one has to replace σ_{qG} by σ_q ,

$$f_{dd}(q \rightarrow q\gamma^*) \Big|_{q_T=0} = i \Psi_{q\gamma^*}(\alpha, \vec{\rho}) \left[\sigma_q - \sigma_q \right] = 0. \quad (\text{A.12})$$

Thus, in order to radiate a photon the quark has to get a kick from the target, no radiation happens if the momentum transfer to the target is zero.

This conclusion is different from the expectation for diffractive Drell–Yan pair production of [20]. The latter was based on the conventional formula (A.10) which cannot be used for an exclusive channel (as well as for gluon radiation). Therefore, the diffractive Drell–Yan cross section should be much smaller than estimated in [20].

Nevertheless, a hadron as a whole can radiate diffractively a photon without momentum transfer as two of its quarks can participate in diffractive scattering, each of them may getting a momentum transfer, while the total momentum transfer is zero.

Appendix B Diffraction: Feynman diagrams

B.1 $qN \rightarrow qGN$

For the example of diffractive excitation of a quark,

$$qN \rightarrow qGN, \quad (\text{B.1})$$

we demonstrate in the following the techniques and approximations we use for the calculation of more complicated diffractive processes.

We use the following notations for the kinematics of (B.1): \vec{k}_T and \vec{p}_T are the transverse momenta of the final gluon and quark respectively; α is the fraction of the initial light-cone momentum carried by the gluon; $\vec{q}_T = \vec{k}_T + \vec{p}_T$ is the total transverse momentum of the final quark and gluon, and $\vec{\kappa}_T = (1 - \alpha)\vec{k}_T - \alpha\vec{p}_T$ appears further on, when the transverse separations $\vec{r}_G = \vec{b} + (1 - \alpha)\vec{\rho}$ and $\vec{r}_q = \vec{b} + \alpha\vec{\rho}$ are inserted: $\vec{k}_T \cdot \vec{r}_G + \vec{p}_T \cdot \vec{r}_q = (\vec{k}_T + \vec{p}_T) \cdot \vec{b} + ((1 - \alpha)\vec{k}_T + \alpha\vec{p}_T) \cdot \vec{\rho}$.

We normalize the amplitude of (B.1) according to

$$\frac{d\sigma(qN \rightarrow qGN)}{d\ln \alpha d^2 \kappa_T d^2 q_T} = \frac{1}{3} \sum_{\mu, \nu, u, s} \left| A_s^{(\mu, \nu)}(\vec{q}_T, \vec{\kappa}_T, \alpha) \right|^2$$

$$= \frac{1}{3} \sum_s \text{Tr} [A_s^\dagger(\vec{q}_T, \vec{\kappa}_T, \alpha) A_s(\vec{q}_T, \vec{\kappa}_T, \alpha)] , \quad (\text{B.2})$$

where

$$A_s^{(\mu, \nu)} = (q^\mu)^\dagger \hat{A}_s q^\nu , \quad (\text{B.3})$$

and $q^{\nu(\mu)}$ are the color spinors of the quark in the initial and final states; s is the color index of the radiated gluon.

We assume that at high energies one can neglect the ratio of the real to imaginary parts of the amplitude for reaction (B.1). Then one can apply the generalized optical theorem (Cutkosky rules [58]),

$$\hat{A}(a \rightarrow b) = \frac{i}{2} \sum_c \hat{A}^\dagger(b \rightarrow c) \hat{A}(a \rightarrow c) . \quad (\text{B.4})$$

here \sum_c includes not only a sum over intermediate channels, but also an integration over the intermediate particle momenta.

To simplify the problem we switch to the impact parameter representation,

$$\hat{A}(\vec{b}, \vec{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2q d^2\kappa_T \hat{A}(\vec{q}_T, \vec{\kappa}_T) \exp(-i\vec{q}_T \vec{b} - i\vec{\kappa}_T \vec{\rho}) . \quad (\text{B.5})$$

Since the initial impact parameters are preserved during the interaction we sum only over intermediate channels in this representation.

We use the Born approximation, *i.e.* the lowest order in α_s , for the sake of clarity, and generalization is straightforward. In this case and for $a = \{qN\}$, $b = \{qGN\}$ only two intermediate states are possible in (B.4): $c_1 = \{qN_8^*\}$ and $c_2 = \{qGN_8^*\}$, where $N_8^* \equiv |3q\rangle_8$ is the octet color state of the $3q$ system produced when the nucleon absorbs the exchanged gluon.

One should sum in (B.4) over all excitations f of the N_8^* ,

$$\begin{aligned} \hat{A}_s(qN \rightarrow qGN) &= \sum_f \left[\hat{A}_s^\dagger(qGN \rightarrow qN_8^*) \hat{A}(qN \rightarrow qN_8^*) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s'} \hat{A}_{s',s}^\dagger(qGN \rightarrow qGN_8^*) \hat{A}_{s'}(qN \rightarrow qGN_8^*) \right] . \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

Here s' is the color index of the gluon in the intermediate state.

We skip the simple but lengthy details of calculation of the amplitudes on the *r.h.s* of (B.6) and present only the results.

$$\hat{A}(qN \rightarrow qN_8^*) = \tau_r \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_1) | i \rangle ; \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \hat{A}'_s(qN \rightarrow qGN_8^*) &= [\tau_{s'} \tau_r \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_1) | i \rangle - \tau_r \tau_{s'} \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_2) | i \rangle \\ &\quad - i f_{s' r p} \tau_p \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_3) | i \rangle] \frac{\sqrt{3}}{2} \Psi_{qG}(\alpha, \vec{\rho}) ; \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_s(qGN \rightarrow qN_8^*) &= \left[\tau_r \tau_s \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_1) | i \rangle - \tau_s \tau_r \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_2) | i \rangle \right. \\ &\quad \left. - i f_{rsp} \tau_p \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_3) | i \rangle \right] \frac{\sqrt{3}}{2} \Psi_{qG}(\alpha, \vec{\rho}) ; \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\hat{A}_{ss'}(qGN \rightarrow qGN_8^*) = \delta_{ss'} \tau_r \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_2) | i \rangle + i f_{ss'r} \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_3) | i \rangle . \quad (\text{B.10})$$

Here $\vec{b}_1 = \vec{b}$; $\vec{b}_2 = \vec{b} - \alpha \vec{\rho}$ are the impact parameters of the projectile and ejectile quarks in reaction (B.1), respectively; $\vec{b}_3 = \vec{b} + (1 - \alpha) \vec{\rho}$ is the impact parameter of the radiated gluon; $\vec{\rho}$ is the transverse separation inside the qG system, and \vec{b} is the distance from its center of gravity to the nucleon target; $\Psi_{qG}(\alpha, \vec{\rho})$ is the distribution function for the qG pair; $\lambda_r = 2 \tau_r$ are the Gell-Mann matrices; f_{rsp} is the structure constant for the $SU(3)$ group. The matrices $\hat{\gamma}_r(\vec{b}_k)$, ($k = 1, 2, 3$) are the operators in coordinate and color space for the target quarks,

$$\hat{\gamma}_r(\vec{b}_k) = \sum_{j=1}^3 \tau_r^{(j)} \chi(\vec{b}_k - \vec{s}_j) , \quad (\text{B.11})$$

$$\chi(\vec{\beta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2 q \frac{\alpha_s(q) \exp(i \vec{q} \vec{T} \vec{\beta})}{q^2 + \Lambda^2} , \quad (\text{B.12})$$

where \vec{s}_j is the transverse distance between the j -th valence quark of the target nucleon and its center of gravity; the matrices $\tau_r^{(j)}$ act on the color indices of this quark. The matrix elements $\langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_k) | i \rangle$ between the initial $i = N$ and final $f = N_8^*$ states are expressed through the wave functions of these states. The effective infra-red cut off Λ in (B.12) does not affect our results, which are infra-red stable due to color screening effects.

Substitution of (B.7)–(B.10) into (B.6) results in,

$$\begin{aligned} \hat{A}_s(qN \rightarrow qGN) &= \frac{i}{2} \left\{ \tau_s \tau_r \tau_{r'} |\Phi_{rr'}(\vec{b}_1, \vec{b}_1) - \tau_r \tau_s \tau_{r'} |\Phi_{rr'}(\vec{b}_2, \vec{b}_1) \right. \\ &\quad + i f_{rsp} \tau_p \tau_{r'} |\Phi_{rr'}(\vec{b}_3, \vec{b}_1) + \tau_r \tau_s \tau_{r'} |\Phi_{rr'}(\vec{b}_1, \vec{b}_2) \\ &\quad - \tau_s \tau_r \tau_{r'} |\Phi_{rr'}(\vec{b}_2, \vec{b}_2) - i f_{rsp} \tau_p \tau_{r'} |\Phi_{rr'}(\vec{b}_2, \vec{b}_3) \\ &\quad - i f_{ss'r} \left[\tau_{s'} \tau_{r'} |\Phi_{rr'}(\vec{b}_1, \vec{b}_3) - \tau_{r'} \tau_{s'} |\Phi_{rr'}(\vec{b}_2, \vec{b}_3) \right. \\ &\quad \left. - i f_{s'r'p} \tau_p \Phi_{rr'}(\vec{b}_3, \vec{b}_3) \right] \left. \right\} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Psi_{qG}(\alpha, \vec{\rho}) , \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

where

$$\Phi_{rr'}(\vec{b}_k, \vec{b}_l) = \sum_f \langle i | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_k) | f \rangle \langle f | \hat{\gamma}_{r'}(\vec{b}_l) | i \rangle . \quad (\text{B.14})$$

We sum in (B.13) over all excitations of the two color octet states of the $3q$ system. To have a complete set of states we have to include also color singlet and decuplet $[3q]$ states. As these states cannot be produced via single gluon exchange, they do not contribute and we can simply extend the summation in (B.14) to the complete set of states and get,

$$\Phi_{rr'}(\vec{b}_k, \vec{b}_l) = \langle i | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_k) \hat{\gamma}_{r'}(\vec{b}_l) | i \rangle . \quad (\text{B.15})$$

In the matrix element (B.15) we average over color indices of the valence quarks and their relative coordinates in the target nucleon. To do so one should use the relation,

$$\langle \tau_r^{(j)} \cdot \tau_{r'}^{(j')} \rangle_{|3q\rangle_1} = \begin{cases} \frac{1}{6} \delta_{rr'} & (j = j') \\ -\frac{1}{12} \delta_{rr'} & (j \neq j') \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Then, Eq. (B.15) can be represented as,

$$\Phi_{rr'}(\vec{b}_k, \vec{b}_l) = \frac{3}{4} \delta_{rr'} S(\vec{b}_k, \vec{b}_l), \quad (\text{B.17})$$

where $S(\vec{b}_k, \vec{b}_l)$ is a scalar function of two vector variables,

$$S(\vec{b}_k, \vec{b}_l) = \frac{2}{9} \int d\{s\} \left[\sum_{j=1}^3 \chi(\vec{b}_k - \vec{s}_j) \chi(\vec{b}_l - \vec{s}_j) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq j'} \chi(\vec{b}_k - \vec{s}_j) \chi(\vec{b}_l - \vec{s}_{j'}) \right] |\Phi_{3q}(\{s\})|^2. \quad (\text{B.18})$$

This function is directly related to the $\bar{q}q$ dipole cross section (5),

$$\sigma_{\bar{q}q}(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2) = \int d^2b \left[S(\vec{b} + \vec{\rho}_1, \vec{b} + \vec{\rho}_1) + S(\vec{b} + \vec{\rho}_2, \vec{b} + \vec{\rho}_2) - 2S(\vec{b} + \vec{\rho}_1, \vec{b} + \vec{\rho}_2) \right]. \quad (\text{B.19})$$

According to (B.17) and (B.18) the function $\Phi(\vec{b}_k, \vec{b}_l)$ is symmetric under the replacement $\vec{b}_k \rightleftharpoons \vec{b}_l$. Therefore, the terms proportional to $\Phi(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ and $\Phi(\vec{b}_2, \vec{b}_1)$ in (B.13) cancel, as well as the terms proportional to $\Phi(\vec{b}_1, \vec{b}_3)$ and $\Phi(\vec{b}_3, \vec{b}_1)$. At the same time, the terms proportional to $\Phi(\vec{b}_2, \vec{b}_3)$ and $\Phi(\vec{b}_3, \vec{b}_2)$ add up.

Making use of the relations,

$$\begin{aligned} \tau_r \tau_r &= 4/3 \\ f_{ss'r} f_{s'rp} &= 3\delta_{sp} \\ -i f_{rsp} \tau_p \tau_r &= \frac{3}{2} \tau_s, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

we arrive at the final result for the amplitude of diffractive dissociation of a quark ($qN \rightarrow qGN$) in impact parameter representation,

$$\begin{aligned} \hat{A}_s(\vec{b}, \vec{\rho}, \alpha) &= \frac{i3\sqrt{3}}{16} \tau_s \Psi_{qG}(\alpha, \vec{\rho}) \left\{ \frac{4}{3} \left[S(\vec{b}_1, \vec{b}_1) - S(\vec{b}_2, \vec{b}_2) \right] \right. \\ &\quad \left. + 3 \left[S(\vec{b}_1, \vec{b}_3) - S(\vec{b}_3, \vec{b}_3) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

The diffraction amplitude in momentum representation reads,

$$\hat{A}_s(\vec{q}_T, \vec{\kappa}_T, \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2b d^2\rho \hat{A}_s(\vec{b}, \vec{\rho}, \alpha) \exp(i\vec{q}_T \vec{b} + i\vec{\kappa}_T \vec{\rho}). \quad (\text{B.22})$$

Using (B.19) and the above mentioned symmetry of $S(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2)$ we obtain a very simple expression for the forward ($q_T = 0$) diffraction amplitude which is related to the dipole cross section,

$$\hat{A}_s(0, \vec{\kappa}_T, \alpha) = -\frac{i9\sqrt{3}}{32(2\pi)^2} \tau_s \int d^2\rho \Psi_{qG}(\alpha, \vec{\rho}) \sigma_{\bar{q}q}(\vec{\rho}) e^{i\vec{\kappa}_T \vec{\rho}}. \quad (\text{B.23})$$

Eventually, the forward diffractive dissociation cross section of a quark reads,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d(\ln \alpha) d^2 q_T} \Big|_{q_T=0} &= \frac{1}{3} \int d^2 \kappa_T \sum_s \text{Tr} \hat{A}_s^\dagger(0, \vec{\kappa}_T, \alpha) \hat{A}_s(0, \vec{\kappa}_T, \alpha) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^2 \rho \left| \Psi_{qG}(\alpha, \vec{\rho}) \frac{9}{8} \sigma_{\bar{q}q}(\vec{\rho}) \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

We should emphasize that all above calculations are done for an arbitrary α .

B.2 Diffractive gluon radiation by a $\bar{q}q$ pair

Gluon radiation is an important contribution to the diffractive dissociation of a (virtual) photon,

$$\gamma^* N \rightarrow \bar{q} q G N. \quad (\text{B.25})$$

In analogy to the previous section we make use of the generalized unitarity relation,

$$\begin{aligned} \hat{A}_s(\gamma^* N \rightarrow \bar{q} q G N) &= \frac{i}{2} \sum_f \left[\hat{A}_s(\bar{q} q G N \rightarrow \bar{q} q N_8^*) \hat{A}(\gamma^* N \rightarrow \bar{q} q N_8^*) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s'} \hat{A}_{ss'}(\bar{q} q G N \rightarrow \bar{q} q G N_8^*) \hat{A}_s(\gamma^* N \rightarrow \bar{q} q G N_8^*) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

where the amplitudes are defined as follows,

$$\hat{A}_s(\gamma^* N \rightarrow \bar{q} q N_8^*) = \left[\tau_r \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_1) | i \rangle + \bar{\tau}_r \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_2) | i \rangle \right] \Psi_{\bar{q}q}(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, \alpha) |\bar{q}q\rangle_1; \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{s'}(\gamma^* N \rightarrow \bar{q} q N_8^*) &= \frac{i\sqrt{3}}{2} f_{s'rp} \left\{ \tau_p \left[\langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_1) | i \rangle - \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_3) | i \rangle \right] \Psi_{qG}(\vec{\rho}_1) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\tau}_p \left[\langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_2) | i \rangle - \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_3) | i \rangle \right] \Psi_{qG}(\vec{\rho}_2) \right\} \Psi_{\bar{q}q}(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, \alpha) |\bar{q}q\rangle_1; \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_s(\bar{q} q G N \rightarrow \bar{q} q N_8^*) &= -\frac{i\sqrt{3}}{2} f_{srp} \left\{ \tau_p \left[\langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_1) | i \rangle - \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_3) | i \rangle \right] \Psi_{qG}(\vec{\rho}_1) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\tau}_p \left[\langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_2) | i \rangle - \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_3) | i \rangle \right] \Psi_{qG}(\vec{\rho}_2) \right\}; \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{ss'}(\bar{q} q G N \rightarrow \bar{q} q G N_8^*) &= \tau_r \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_1) | i \rangle \delta_{ss'} + \bar{\tau}_r \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_2) | i \rangle \delta_{ss'} \\ &\quad + i f_{ss'r} \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_3) | i \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Here $\vec{b}_1 = \vec{b} + \vec{r}_1$, $\vec{b}_2 = \vec{b} + \vec{r}_2$, $\vec{b}_3 = \vec{b} + \vec{\rho}$ are the impact parameters of the quark, antiquark and gluon respectively; \vec{b} is the photon impact parameter; $\vec{\rho}_{1,2} = \vec{\rho} - \vec{r}_{1,2}$; $\Psi_{\bar{q}q}$ and $|\bar{q}q\rangle$ are spatial and color parts of the $\bar{q}q$ -component of the photon wave function, respectively. The matrices

$\tau_r = \lambda_r/2$ and $\bar{\tau}_r = \lambda_r^*/2$ act on the color indices of quark and antiquark respectively. The indices s, s' mark the color states of the gluons in intermediate and final states.

Note that the condition of color neutrality of the singlet state $|\bar{q}q\rangle$ leads to the relation,

$$(\tau_r + \bar{\tau}_r) |\bar{q}q\rangle = 0. \quad (\text{B.31})$$

Substitution of (B.26) – (B.30) into (B.25) leads to the following expression for the amplitude of diffractive dissociation of the photon,

$$\begin{aligned} \hat{A}(\gamma^* N \rightarrow \bar{q}qGN) &= \frac{i3\sqrt{3}}{16} \left\{ \left(i f_{srp} [\tau_p \tau_r + \tau_r \tau_p] \left[s(\vec{b}_1, \vec{b}_1) - s(\vec{b}_3, \vec{b}_1) \right] \right. \right. \\ &\quad + i f_{srp} [\tau_p \bar{\tau}_r + \bar{\tau}_r \tau_p] \left[s(\vec{b}_1, \vec{b}_2) - s(\vec{b}_3, \vec{b}_2) \right] \\ &\quad + f_{ss'r} f_{s'rp} \tau_p \left[s(\vec{b}_3, \vec{b}_1) - s(\vec{b}_3, \vec{b}_3) \right] \left. \right) \Psi_{qG}(\vec{\rho}_1) \\ &\quad + \left(i f_{srp} [\bar{\tau}_p \bar{\tau}_r + \bar{\tau}_r \bar{\tau}_p] \left[s(\vec{b}_2, \vec{b}_2) - s(\vec{b}_2, \vec{b}_3) \right] \right. \\ &\quad + i f_{srp} [\bar{\tau}_p \tau_r + \tau_r \bar{\tau}_p] \left[s(\vec{b}_2, \vec{b}_1) - s(\vec{b}_3, \vec{b}_1) \right] \\ &\quad \left. \left. + f_{ss'r} f_{s'rp} \bar{\tau}_p \left[s(\vec{b}_3, \vec{b}_2) - s(\vec{b}_3, \vec{b}_3) \right] \right) \Psi_{qG}(\vec{\rho}_2) \right\} |\bar{q}q\rangle_1 \Psi_{\bar{q}q}(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, \alpha), \quad (\text{B.32}) \end{aligned}$$

where we made use of the completeness condition, $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$ (see Appendix B.1).

In order to simplify Eq. (B.32) we apply a few relations as follows. Since $f_{srp} = -f_{spr}$ we find

$$f_{srp} [\tau_p \tau_r + \tau_r \tau_p] = f_{srp} [\bar{\tau}_p \bar{\tau}_r + \bar{\tau}_r \bar{\tau}_p] = 0. \quad (\text{B.33})$$

Then, relying on the condition (B.31) we find,

$$\begin{aligned} (\tau_p \bar{\tau}_r + \bar{\tau}_r \tau_p) |\bar{q}q\rangle_1 &= 2\tau_p \bar{\tau}_r |\bar{q}q\rangle_1 \\ &= -2\tau_p \tau_r |\bar{q}q\rangle_1; \quad (\text{B.34}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{\tau}_p \tau_r + \tau_r \bar{\tau}_p) |\bar{q}q\rangle_1 &= 2\bar{\tau}_p \tau_r |\bar{q}q\rangle_1 \\ &= -2\bar{\tau}_p \bar{\tau}_r |\bar{q}q\rangle_1. \quad (\text{B.35}) \end{aligned}$$

We also use the relations

$$\begin{aligned} i f_{srp} \tau_p \tau_r &= \frac{3}{2} \tau_s; \\ i f_{srp} \bar{\tau}_p \bar{\tau}_r &= \frac{3}{2} \bar{\tau}_s; \\ f_{ss'r} f_{s'rp} &= 3\delta_{sp}, \quad (\text{B.36}) \end{aligned}$$

and the symmetry condition, $s(\vec{b}_k, \vec{b}_l) = s(\vec{b}_l, \vec{b}_k)$, and eventually arrive at a modified form of Eq. (B.32)

$$\begin{aligned} \hat{A}_s(\gamma^* N \rightarrow \bar{q}qGN) &= \frac{9\sqrt{3}}{16} [\tau_s \Psi_{qG}(\vec{\rho}_1) + \bar{\tau}_s \Psi_{qG}(\vec{\rho}_2)] |\bar{q}q\rangle_1 \Psi_{\bar{q}q}(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, \alpha) \\ &\quad \times \left[s(\vec{b}_2, \vec{b}_3) + s(\vec{b}_1, \vec{b}_3) - s(\vec{b}_1, \vec{b}_2) - s(\vec{b}_3, \vec{b}_3) \right]. \quad (\text{B.37}) \end{aligned}$$

The last factor in square brackets can be represented as,

$$\begin{aligned}
 P(\vec{b}_1, \vec{b}_2; \vec{b}_3) &\equiv s(\vec{b}_2, \vec{b}_3) + s(\vec{b}_1, \vec{b}_3) - s(\vec{b}_1, \vec{b}_2) - s(\vec{b}_3, \vec{b}_3) \\
 &\equiv \frac{1}{2} \left\{ \left[s(\vec{b}_1, \vec{b}_1) + s(\vec{b}_2, \vec{b}_2) - 2s(\vec{b}_1, \vec{b}_2) \right] - \left[s(\vec{b}_2, \vec{b}_2) + s(\vec{b}_3, \vec{b}_3) - 2s(\vec{b}_2, \vec{b}_3) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[s(\vec{b}_1, \vec{b}_1) + s(\vec{b}_3, \vec{b}_3) - 2s(\vec{b}_1, \vec{b}_3) \right] \right\}. \quad (\text{B.38})
 \end{aligned}$$

Then, the forward diffraction amplitude ($q_T = 0$) in impact parameter representation has the form,

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \int d^2b \hat{A}_s(\vec{b}, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) \\
 &= -\frac{i}{4\pi} \Sigma(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \tau_s \Psi_{qG}(\vec{\rho}_1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{\tau}_s \Psi_{qG}(\vec{\rho}_2) \right] |\bar{q}q\rangle_1 \Psi_{\bar{q}q}(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, \alpha) \quad (\text{B.39})
 \end{aligned}$$

where $\Sigma(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2)$ is introduced in (73).

From (B.39) one easily gets the forward diffractive cross section,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\sigma(\gamma^* N \rightarrow \bar{q}qGN)}{d(\ln \alpha_G) dq_T} \right|_{\substack{q_T = 0 \\ \alpha_G \rightarrow 0}} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^2\rho_1 d^2\rho_2 d\alpha \left| \Psi_{\bar{q}q}(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, \alpha) \right. \\
 &\quad \left. \times \left[\Psi_{qG}(\vec{\rho}_1) - \Psi_{qG}(\vec{\rho}_2) \right] \Sigma(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) \right|^2. \quad (\text{B.40})
 \end{aligned}$$

B.3 Diffractive photon radiation, $qN \rightarrow \gamma qN$

Diffractive electromagnetic radiation is calculated in analogy to what was done in Appendix B.1 for gluon radiation. Since the photon does not interact with the gluonic field of the target the structure of all the amplitudes in the relation,

$$\begin{aligned}
 \hat{A}(qN \rightarrow q\gamma N) &= \frac{i}{2} \sum_f \left[\hat{A}^\dagger(q\gamma N \rightarrow qN_8^*) \hat{A}(qN \rightarrow qN_8^*) \right. \\
 &\quad \left. + \hat{A}^\dagger(q\gamma N \rightarrow q\gamma N_8^*) \hat{A}(qN \rightarrow q\gamma N_8^*) \right], \quad (\text{B.1})
 \end{aligned}$$

turns out to me much simpler.

$$\hat{A}(qN \rightarrow qN_8^*) = \tau_r \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_1) | i \rangle; \quad (\text{B.2})$$

$$\hat{A}(q\gamma N \rightarrow q\gamma N_8^*) = \tau_r \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_2) | i \rangle; \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned}
 \hat{A}(qN \rightarrow q\gamma N_8^*) &= \hat{A}(q\gamma N \rightarrow q\gamma N_8^*) \\
 &= \tau_r \left[\langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_1) | i \rangle - \langle f | \hat{\gamma}_r(\vec{b}_2) | i \rangle \right] \Psi_{q\gamma}(\vec{\rho}, \alpha). \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

Here $\vec{b}_1 = \vec{b}$, $\vec{b}_2 = \vec{b} - \alpha \vec{\rho}$ are the impact parameters of the quark before and after radiation of the photon; $\vec{\rho}$ is the transverse separation between the quark and photon in the final state; and α is the fraction of the quark light cone momentum carried away by the photon. $\Psi_{q\gamma}(\vec{\rho}, \alpha)$ is the distribution function for the $q\gamma$ fluctuation of the quark. The initial, $|i\rangle$, and final, $|f\rangle$, states of the target, as well as the operators $\hat{\gamma}(\vec{b}_k)$ ($k = 1, 2$) are the same as in Appendix B.1.

After substitution of (B.2) – (B.4) into (B.1) we get,

$$\hat{A}(qN \rightarrow q\gamma N) = \frac{i}{2} \left\{ \tau_r \tau_{r'} \left[\Phi_{rr'}(\vec{b}_1, \vec{b}_1) - \Phi_{rr'}(\vec{b}_1, \vec{b}_2) + \Phi_{rr'}(\vec{b}_2, \vec{b}_1) - \Phi_{rr'}(\vec{b}_2, \vec{b}_2) \right] \right\}. \quad (\text{B.5})$$

Here the functions $\Phi_{rr'}(\vec{b}_k, \vec{b}_l)$ are defined in Appendix B.1 Then, the amplitude in impact parameter representation reads,

$$\hat{A}(\vec{b}, \vec{\rho}) = \frac{i}{2} \left[s(\vec{b}_1, \vec{b}_1) - s(\vec{b}_2, \vec{b}_2) \right] = \frac{i}{2} \left[s(\vec{b}, \vec{b}) - s(\vec{b} - \alpha \vec{\rho}, \vec{b} - \alpha \vec{\rho}) \right]. \quad (\text{B.6})$$

After Fourier transform to the momentum representation we get for the forward diffractive amplitude of photon radiation,

$$A(\vec{q}_T, \vec{\kappa}_T)|_{q_T=0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2b d^2\rho \exp(i\vec{q}_T \vec{b} + i\vec{\kappa}_T \vec{\rho}) \hat{A}(\vec{q}_T, \vec{\kappa}_T) \Big|_{q_T=0} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Thus, the direct calculation of Feynman diagrams confirms our previous conclusion (Appendix A.4) that a quark does not diffractively emit electromagnetic radiation if the momentum transfer with the target is zero (as different from the statement in [20]). A hadron, however, can radiate in forward scattering.

Appendix C The triple-Pomeron coupling

In the limit of vanishing quark and gluon masses the quark-gluon wave function (56) retains only the second term $\propto \tilde{\Phi}_1$ which has the form (27). Bi-linear combinations of this wave function averaged over final polarizations can be represented as follows,

$$|\Phi_1(\vec{\rho}_i, \alpha)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{b(\alpha)^2}^{\infty} dt e^{-t\rho_i^2}, \quad (\text{C.1})$$

$$\tilde{\Phi}_1(\vec{\rho}_i, \alpha) \cdot \tilde{\Psi}_1(\vec{\rho}_k) = \frac{\vec{\rho}_i \cdot \vec{\rho}_k}{(2\pi)^2} \int_{b^2(\alpha)/2}^{\infty} du \int_{b^2(\alpha)/2}^{\infty} dt e^{-t\rho_i^2 - u\rho_k^2}. \quad (\text{C.2})$$

This together with (30) and (79) allows to integrate analytically over the coordinates of the quarks and the gluon in (78). Finally integrating over t and u we arrive at,

$$G_{3P}(NN \rightarrow XN) = \frac{\alpha_s}{(4\pi)^2} \left(\frac{9}{8} \sigma_0 \right)^2 \left[F_1(x, z) - F_2(x, z) \right], \quad (\text{C.3})$$

where $x = b^2(0)\rho_0^2$, $z = z_N = 2\langle r^2 \rangle_p / \rho_0^2$, and

$$\begin{aligned}
 F_1(x, z) &= \ln \left[\frac{(x+1)^2}{x(x+2)} \right] + 2s_1 \ln \left[\frac{(x+1)(x+s_1)}{x(1+x+s_1)} \right] \\
 &+ \frac{2}{3}s_2 \left[2 \ln \left(\frac{s_1x+s_2}{xs_1} \right) - \ln \left(\frac{x+2s_2}{x} \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{3}s_3s_4 \left[2 \ln \left(\frac{s_1x+s_3s_4}{xs_1} \right) - \ln \left(\frac{x+2s_4}{x} \right) \right]. \quad (C.4)
 \end{aligned}$$

Here

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{1}{1+z}, & s_2 &= \frac{1}{1+2z}, & s_3 &= \frac{2}{2+z}, \\
 s_4 &= \frac{2}{2+3z}, & s_5 &= \frac{4}{4+3z}, \quad (C.5)
 \end{aligned}$$

$$z F_2(x, z) = \sum_{i=1}^{14} \frac{g(i)}{\beta(i)} \ln \left[\frac{\delta(i)\gamma(i)}{\delta(i)\gamma(i) - \beta^2(i)} \right], \quad (C.6)$$

where

$i=1$	$g=2/3$	$\beta=1/z+2$	$\gamma=\delta=x/2+\beta$	
$i=2$	$g=2$	$\beta=1/z+1$	$\gamma=\delta=x/2+\beta$	
$i=3$	$g=-10/3$	$\beta=1/z+1$	$\delta=x/2+\beta$	$\gamma=\delta+1$
$i=4$	$g=1$	$\beta=1/z$	$\gamma=\delta=x/2+\beta$	
$i=5$	$g=-4$	$\beta=1/z$	$\delta=x/2+\beta$	$\gamma=\delta+1$
$i=6$	$g=5/3$	$\beta=1/z+2$	$\gamma=\delta=x/2+\beta+1$	
$i=7$	$g=2$	$\beta=1/z$	$\delta=x/2+\beta$	$\gamma=\delta+2$
$i=8$	$g=s_4/3$	$\beta=1/z+1/2$	$\gamma=\delta=x/2+\beta$	
$i=9$	$g=-2s_5/3$	$\beta=1/z+s_5/4$	$\delta=x/2+\beta$	$\gamma=\delta+1$
$i=10$	$g=2s_5/3$	$\beta=1/z+1+s_5/4$	$\gamma=\delta=x/2+\beta$	
$i=11$	$g=-s_4/3$	$\beta=1/z-s_4/2$	$\gamma=\delta=x/2+\beta+s_4$	
$i=12$	$g=-2s_5/3$	$\beta=1/z+1-s_5/4$	$\gamma=\delta=x/2+\beta+s_5/2$	
$i=13$	$g=-2s_5/3$	$\beta=1/z-s_5/4$	$\delta=x/2+\beta+s_5/2$	$\gamma=\delta+1$
$i=14$	$g=2s_4/3$	$\beta=1/z$	$\delta=x/2+\beta+1/2$	$\gamma=x/2+\beta+s_4/2.$

(C.7)

The effective triple-Pomeron coupling $G_{3P}(MN \rightarrow XN)$ for diffractive dissociation of a meson M can be calculated in a similar way assuming a Gaussian shape of the quark wave function of the meson,

$$|\Psi_{M \rightarrow \bar{q}q}(\vec{r})|^2 = \frac{1}{\pi R^2} e^{-r^2/R^2}, \quad (C.8)$$

where $R^2 = 8\langle r_M^2 \rangle_{ch}/3$. The triple-Pomeron coupling is smaller by a factor 2/3 (different number of valence quarks) and has a form similar to (C.3),

$$G_{3P}(MN \rightarrow XN) = \frac{2\alpha_s}{3(4\pi)^2} \left(\frac{9}{8}\sigma_0 \right)^2 \left[F_1^M(x, z_M) - F_2^M(x, z_M) \right], \quad (C.9)$$

but $z_M = R^2/\rho_0^2 \neq z_N$ and the functions $F_{1,2}^M$ are different too. The expression for $F_1^M(x, z_M)$ results from $F_1(x, z)$ via the replacement $s_3 \rightarrow 1$, $s_4 \rightarrow s_2$ and $z \rightarrow z_M$.

The expression for $F_2(x, z_M)$ follows from $F_2(x, z)$ after moderate modifications in (C.7): $g(1) = 1$, $g(3) = -4$, $g(6) = 2$, all $g(i) = 0$ for $i \geq 8$ and $z \rightarrow z_M$.

In the case of diffractive dissociation of a photon, the calculations are more complicated since the spatial distribution of quarks in the photon is very different from a Gaussian. Nevertheless, it can be represented as a superposition of Gaussians,

$$|\Psi_{\gamma \rightarrow \bar{q}q}(\vec{r}, \alpha)|^2 = \frac{\alpha_{em} N_c \sum Z_q^2}{2\pi} \int_0^{1/a^2(\alpha)} \frac{dR^2}{R^2} \left(\frac{1}{\pi R^2} e^{-r^2/R^2} \right). \quad (\text{C.10})$$

Then, the effective coupling $G_{3P}(\gamma N \rightarrow XN)$ takes a form similar to (C.3) and (C.9),

$$G_{3P}(\gamma N \rightarrow XN) = \frac{2\alpha_{em}\alpha_s N_c \sum Z_q^2}{6(2\pi)^3} \left(\frac{9}{8} \sigma_0 \right)^2 \left[F_1^\gamma(x, z_\gamma) - F_2^\gamma(x, z_\gamma) \right], \quad (\text{C.11})$$

where $z_\gamma = [a^2(\alpha) \rho_0^2]^{-1}$ and

$$F_{1,2}^\gamma(x, z_\gamma) = \int_0^{z_\gamma} \frac{dv}{v} F_{1,2}^M(x, v). \quad (\text{C.12})$$

References

- [1] J.B. Kogut and D.E. Soper, Phys. Rev. **D1** (1970) 2901
- [2] J.M. Bjorken, J.B. Kogut and D.E. Soper, **D3** (1971) 1382
- [3] N.N. Nikolaev and B.G. Zakharov, Z. Phys. **C49** (1991) 607
- [4] E.M. Levin, A.D. Martin, M.G. Ryskin and T. Teubner, Z. Phys. **C74** (1997) 671
- [5] A.B. Zamolodchikov, B.Z. Kopeliovich and L.I. Lapidus, Sov. Phys. JETP Lett. **33** (1981) 612
- [6] A.H. Mueller, Nucl. Phys. **B415** (1994) 373; A.H. Mueller and B. Patel, Nucl. Phys. **B425** (1994) 473
- [7] B.Z. Kopeliovich and B.G. Zakharov Phys. Rev. **D44** (1991) 3466
- [8] J. Hüfner and B. Povh, Phys. Rev. **D46** (1992) 990
- [9] L.L. Frankfurt, W. Koepf and M. Strikman, Phys. Rev. **D54** (1996) 3194
- [10] K. Golec-Biernat and M. Wüsthoff, Phys. Rev. **D59** (1999) 014017; *Saturation in Diffractive Deep Inelastic Scattering*, hep-ph/9903358
- [11] J.R. Forshaw, G. Kerley, G. Shaw, *Extracting the dipole cross-section from photo- and electro-production total cross-section data*, hep-ph/9903341
- [12] B.Z. Kopeliovich, J. Raufeisen and A.V. Tarasov, Phys. Lett. **B440** (1998) 151

- [13] J. Raufeisen, A.V. Tarasov and O. Voskresenskaya, *Eur. Phys. J. A5* (1999) 173
- [14] B.G. Zakharov, *Phys. Atom. Nucl.* **61** (1998) 838
- [15] V.M. Braun, P. Górnicki, I. Mankiewicz and A. Schäfer, *Phys. Lett.* **B302** (1993) 291
- [16] M. D'Elia, A. Di Giacomo and E. Meggiolaro, *Phys. Lett.* **B408** (1997) 315
- [17] T. Schäfer, E.V. Shuryak, *Rev. Mod. Phys.* **70** (1998) 323
- [18] N.N. Nikolaev and B.G. Zakharov, *Z. Phys.* **C64** (1994) 631; M. Genovese, N.N. Nikolaev and B.G. Zakharov, *J. Exp. Theor. Phys.* **81** (1995) 633
- [19] J. Bartels, H. Jung and M. Wüsthoff, *Quark-Antiquark-Gluon Jets in DIS diffractive dissociation*, hep-ph/9903265
- [20] B.Z. Kopeliovich, *Phys. Lett.* **B447** (1999) 308
- [21] L.V. Gribov, E.M. Levin and M.G. Ryskin, *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 555; *Phys. Rep.* **100** (1983) 1
- [22] E.M. Levin and M.G. Ryskin, *Sov. J. Nucl. Phys.* **41** (1985) 300
- [23] L.L. Frankfurt, S. Liuti and M.I. Strikman, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 1725
- [24] L. McLerran and R. Venugopalan, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 2233; **D49** (1994) 3352; **D50** (1994) 2225
- [25] A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B558** (1999) 285
- [26] A.L. Ayala, M.B. Gay Ducati and E.M. Levin, *Nucl. Phys.* **B493** (1997) 305
- [27] K.J. Eskola, J. Qiu and X.-N. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 36
- [28] K.J. Eskola, V.J. Kolhinen and P.V. Ruuskanen, *Nucl. Phys.* **B535** (1998) 351
- [29] S. Kumano and K. Umekawa, hep-ph/9803359
- [30] L.L. Frankfurt and M.I. Strikman, *Eur. Phys. J. A5* (1999) 293
- [31] L. Alvero, L.L. Frankfurt and M.I. Strikman, *Eur. Phys. J. A5* (1999) 97
- [32] G. Piller and W. Weise, *Nuclear Deep-Inelastic Lepton Scattering and Coherence Phenomena*, hep-ph/9908230
- [33] V.N. Gribov, *Sov. Phys. JETP* **29** (1969) 483; **30** (1970) 709
- [34] L. Alvero, J.C. Collins and J.J. Whitmore, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 074022
- [35] L. Alvero, J.C. Collins and J.J. Whitmore, *Tests of Factorization in Diffractive Charm Production and Double Pomeron Exchange*, hep-ph/9806340
- [36] B.Z. Kopeliovich, A. Schäfer and A.V. Tarasov, *Phys. Rev.* **C59** (1999) 1609 (extended version in hep-ph/9808378)

- [37] I. Halperin and A. Zhitnitsky, Phys. Rev. **D56** (1997) 184
- [38] R.P. Feynman and A.R. Gibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill Book Company, NY 1965
- [39] F.E. Low, Phys. Rev. **D12** (1975) 163
- [40] S. Nussinov, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 1986
- [41] B.Z. Kopeliovich and B. Povh, Mod. Phys. Lett. **A13** (1998) 3033
- [42] S. Amendolia et al., Nucl. Phys. **B277** (1986) 186
- [43] Review of Particle Physics, R.M. Barnett et al., Phys. Rev. **D54** (1996) 191
- [44] H1 Collaboration, S. Aid et al., Z. Phys. **C69** (1995) 27
- [45] ZEUS Collaboration, M. Derrick et al., Phys. Lett. **293B** (1992) 465
- [46] Yu.M. Kazarinov, B.Z. Kopeliovich, L.I. Lapidus and I.K. Potashnikova, JETP **70** (1976) 1152
- [47] J. Hüfner, B.Z. Kopeliovich and J. Nemchik, Phys. Lett. **B383** (1996) 362
- [48] The HERMES Collaboration, K. Ackerstaff et al., Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 3025
- [49] G.R. Brookes et al., Phys. Rev. **D8** (1973) 2826; E.A. Arakelian et al., Phys. Lett. **79B** (1978) 143
- [50] Y.V. Kovchegov and A.H. Mueller, Nucl. Phys. **B529** (1998) 451
- [51] U.A. Wiedemann and M. Gyulassy, Nucl. Phys. **B560** (1999) 345
- [52] B.Z. Kopeliovich, *Soft Component of Hard Reactions and Nuclear Shadowing (DIS, Drell-Yan reaction, heavy quark production)*, in proc. of the Workshop Hirscheegg'95: Dynamical Properties of Hadrons in Nuclear Matter, Hirscheegg, January 16-21, 1995, ed. by H. Feldmeier and W. Nörenberg, Darmstadt, 1995, p. 102 (hep-ph/9609385)
- [53] S.J. Brodsky, A. Hebecker and E. Quack, Phys. Rev. **D55** (1997) 2584
- [54] V. Novikov, M. Shifman, A. Veinshtein and V. Zakharov, Nucl. Phys. **B191** 301
- [55] A. Casher, H. Neubereger and S. Nussinov, Phys. Rev. **D20** (1979) 179
- [56] B. Blättel et al., Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 896
- [57] V. Barone et al., Z. Phys. **C58** (1993) 541
- [58] R.E. Cutkosky, J. Math. Phys. **1** (1960) 429
- [59] CDF Collaboration, F. Abe et al., Phys. Rev. **D50** (1994) 5535
- [60] E. Gotsman, E. Levin and U. Maor, Phys. Lett. **B438** (1998) 229

- [61] K. Goulianos and J. Montanha, Phys. Rev. **D59** (1999) 114017
- [62] T. Udem et al., Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 2646
- [63] T. Chapin et al., Phys. Rev. **D31** (1985) 17
- [64] H1 Collaboration, C. Adloff et al., Z. Phys. **C74** (1997) 221
- [65] S. Erhan and P.E. Schlein, Phys. Lett. **B427** (1998) 389
- [66] O.V. Kancheli, Sov. Phys. JETP Lett. **18** (1973) 274
- [67] A.H. Mueller and J.W. Qiu, Nucl. Phys. **B268** (1986) 427
- [68] N. Hammon, H. Stöcker and W. Greiner, Phys. Lett. **B448** (1999) 290
- [69] V. Karmanov and L.A. Kondratyuk, Sov. Phys. JETP Lett. **18** (1973) 266
- [70] P.V.R. Murthy et al., Nucl. Phys. **B92** (1975) 269
- [71] H1 Collaboration, contribution pa02-060 to ICHEP96, Warsaw, July 1996
- [72] ZEUS Collaboration, contribution N-643 to EPS97, Jerusalem, August 1997
- [73] R.J. Glauber, Phys. Rev. **100** (1955) 242; *Lectures in Theoretical Physics*, ed. W.E. Britting and D.G. Dunham, Interscience, NY, v.1 (1959) 315
- [74] B.Z. Kopeliovich and L.I. Lapidus, Sov. Phys. JETP Lett. **28** (1978) 664
- [75] B.Z. Kopeliovich, J. Raufeisen and A.V. Tarasov, paper in preparation
- [76] B.Z. Kopeliovich, J. Raufeisen and A.V. Tarasov, hep-ph/0003136
- [77] B.Z. Kopeliovich and J. Nemchik, Phys. Lett. **B368** (1996) 187
- [78] J. Hüfner and B.Z. Kopeliovich, Phys. Lett. **B445** (1998) 223
- [79] J. Huefner, Y.B. He and B.Z. Kopeliovich, Eur. Phys. J. **A7** (2000) 239
- [80] A.H. Mueller, *Parton Equilibration in Nuclear Collisions*, A RIKEN BNL Research Center Workshop on Hard Parton Physics in High Energy Nuclear Collisions, March 1 – 5, 1999, hep-ph/9906322
- [81] E. Feinberg and I.Ya. Pomeranchuk, Nuovo. Cimento. Suppl. **3** (1956) 652
- [82] M.L. Good and W.D. Walker, Phys. Rev. **120** (1960) 1857
- [83] H.I. Miettinen and J. Pumplin, Phys. Rev. **D18** (1978) 1696

Cronin Effect in Hadron Production off Nuclei *

B.Z. Kopeliovich^{1,2,3}, J. Nemchik⁴, A. Schäfer² and A.V. Tarasov^{1,2,3}

¹Max-Planck Institut für Kernphysik, Postfach 103980, 69029 Heidelberg, Germany

²Institut für Theoretische Physik der Universität, 93040 Regensburg, Germany

³Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980 Moscow Region, Russia

⁴Institute of Experimental Physics SAV, Watsonova 47, 04353 Kosice, Slovakia

Abstract

Recent data from RHIC for high- p_T hadrons in gold-gold collisions raised again the long standing problem of quantitatively understanding the Cronin effect, i.e. nuclear enhancement of high- p_T hadrons due to multiple interactions in nuclear matter. In nucleus-nucleus collisions this effect has to be reliably calculated as baseline for a signal of new physics in high- p_T hadron production. The only possibility to test models is to compare with available data for pA collisions, however, all existing models for the Cronin effect rely on a fit to the data to be explained. We develop a phenomenological description based on the light-cone QCD-dipole approach which allows to explain available data without fitting to them and to provide predictions for pA collisions at RHIC and LHC. We point out that the mechanism causing Cronin effect drastically changes between the energies of fixed target experiments and RHIC-LHC. High- p_T hadrons are produced incoherently on different nucleons at low energies, whereas the production amplitudes interfere if the energy is sufficiently high.

PACS: 24.85.+p, 13.85.Ni, 25.40.Qa

It was first observed back in 1975 [1] that high- p_T hadrons are not suppressed in proton-nucleus collisions, but produced copiously. This effect named after James Cronin demonstrates that bound nucleons cooperate producing high- p_T particles. Indeed, it has been soon realized that multiple interactions which have a steeper than linear A -dependence lead to the observed enhancement. An adequate interpretation of the Cronin effect has become especially important recently in connection with data from RHIC for high- p_T hadron production in heavy ion collisions [2, 3]. The observed suppression factor can be understood as a product of two terms. One is due to multiple interactions within the colliding nuclei, analogous to the Cronin effect. The second factor arises from final state interaction with the produced medium, the properties of which are thus probed. This second factor, the main goal of the experiment, can be extracted from data only provided that the Cronin effect for nuclear collisions can be reliably predicted. However, in spite of the qualitative understanding of the underlying dynamics of this effect, no satisfactory quantitative explanation of existing pA data has been suggested so far. Available models contain parameters fitted to the data to be explained (e.g. see [4, 5, 6]) and miss important physics. In this paper we suggest a comprehensive description of the dynamics behind the Cronin effect resulting in parameter-free predictions which agree with available data.

First of all, the mechanism of multiple interactions significantly changes with energy. At low energies a high- k_T parton is produced off different nucleons incoherently, while at high energies it becomes a coherent process. This is controlled by the coherence length

$$l_c = \frac{\sqrt{s}}{m_N k_T}, \quad (1)$$

*Phys. Rev. Lett. 88 (2002) 232303. Copyright © 2002 The American Physical Society.
Reproduced by permission of the APS.

where k_T is the transverse momentum of the parton produced at mid rapidity and then hadronizing into the detected hadron with transverse momentum p_T .

For a coherence length which is shorter than the typical internucleon separation, the projectile interacts incoherently with individual nucleons, just as for e.g. pp scattering. However, QCD factorization is violated by multiple scattering as discussed e.g. in [7]. Therefore, broadening of transverse momentum caused by initial/final interactions, should not be translated into a modification of the parton distribution of the nucleus if the coherence length is short. In the opposite limit, i.e. if the coherence length is longer than the nuclear radius R_A , factorization applies. All amplitudes interfere coherently and result in a collective parton distribution of the nucleus. This difference is present in all of the various manners in which such interactions are discussed. It is e.g. adequate to view a nucleus in the nucleus momentum frame as a cloud of partons. Those with small x overlap and are no longer associated with any individual nucleon. Small x corresponds to a long $l_c \sim 1/(xm_N)$. Again, factorization applies, but the nuclear parton distribution is modified. The mean transverse momentum of gluons increase [8] since their density saturates at small k_T [9, 10].

Short coherence length. Broadening of transverse momentum of a projectile parton propagating through a nuclear medium is quite a complicated process involving rescatterings of the parton accompanied by gluon radiation. Apparently, this process involves soft interactions and cannot be calculated perturbatively. Instead, one should rely on phenomenology. Corresponding calculations have been performed in [11] in the framework of the light-cone QCD dipole approach. The transverse momentum distribution of partons after propagation through nuclear matter of thickness $T_A(b) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho_A(z)$ (the nuclear density integrated along the parton trajectory at impact parameter b) has the form [11],

$$\frac{dN_q}{d^2k_T} = \int d^2r_1 d^2r_2 e^{i\vec{k}_T \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \Omega_{in}^q(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \times e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{q}q}^N(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, x) T_A(b)}. \quad (2)$$

Here $\Omega_{in}^q(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ is the density matrix describing the impact parameter distribution of the quark in the incident hadron,

$$\Omega_{in}^q(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\langle k_0^2 \rangle}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\vec{r}_1^2 + \vec{r}_2^2) \langle k_0^2 \rangle}, \quad (3)$$

where $\langle k_0^2 \rangle$ is the mean value of the parton primordial transverse momentum squared.

The central ingredient of Eq. (2) is the phenomenological cross section $\sigma_{\bar{q}q}^N(r_T, x)$ for the interaction of a nucleon with a $\bar{q}q$ dipole of transverse separation r_T at Bjorken x . In what follows we use the simple parametrization [12]

$$\sigma_{\bar{q}q}(r_T, x) = \sigma_0 \left[1 - e^{-\frac{1}{4} r_T^2 Q_s^2(x)} \right], \quad (4)$$

the parameters of which were fixed by DIS data: $Q_s(x) = 1 \text{ GeV} \times (x_0/x)^{\lambda/2}$ and $\sigma_0 = 23.03 \text{ mb}$; $\lambda = 0.288$; $x_0 = 3.04 \cdot 10^{-4}$.

Note that the k_T distribution of quarks from a single $q-N$ scattering process is not singular at $k_T \rightarrow 0$, but according to (4) has a Gaussian shape. The phenomenon of saturation for soft gluons [9, 13] is the driving idea of parametrization [12]. Therefore, the mean momentum transfer in each scattering is not small, but of the order of the saturation scale $Q_s(x)$.

Of course, for projectile gluons the broadening is stronger than for quarks and the dipole cross section Eq. (4) should be replaced by the glue-gluon one $\sigma_{GG}^N = \frac{9}{4}\sigma_{qq}^N$.

Besides broadening of transverse momentum, initial state interactions also lead to energy loss [15, 14]. While induced energy loss in cold nuclear medium is negligibly small [16, 15], energy loss due to hadronization in inelastic scattering reactions (which is basically the same as for hadronization in vacuum) is important. The first inelastic interaction of the incident hadron triggers energy loss and the parton participating in the high- p_T process arrives with a noticeably reduced energy [14, 15]. We fixed the energy loss ΔE to a mean value corresponding to the mean path length calculated in [15] and a rate of energy loss $dE/dz = -2.5 \text{ GeV/fm}$.

For the cross section of $pA \rightarrow hX$ at high p_T we use the standard convolution expression based on QCD factorization [17],

$$\sigma_{pA}^{l_c \ll R_A}(p_T) = \sum_{i,j,k,l} \tilde{F}_{i/p} \otimes F_{j/A} \otimes \hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl} \otimes D_{h/k}, \quad (5)$$

where $F_{i/p}$ and $F_{j/A}$ are the distributions of parton species i, j in Bjorken $x_{1,2}$ and transverse momentum in the colliding proton and nucleus respectively. However, to describe the nonfactorizable multiple interactions the beam parton distribution \tilde{F}_i^p is modified by the transverse momentum broadening Eq. (2) and by shifting x_1 to $\tilde{x}_1 = x_1 + \Delta E/(x_1 E_p)$. For $\langle k_0^2 \rangle$ in (3) we use the next-to-leading value from [5] fitted to data for hadron production in pp collisions. For the parton distribution functions in a nucleon we use the leading order GRV parametrization [18]. The nuclear parton distribution, $F_{j/A}$, is unchanged compared to a free nucleon, except at large x_2 where it is subject to medium modifications (EMC effect) which are parametrized according to [19]. For the hard parton scattering cross section [17] we use regularization masses $m_G = 0.8 \text{ GeV}$ and $m_q = 0.2 \text{ GeV}$ for gluon and quark propagators respectively. Such a large effective gluon mass was introduced to reproduce the strong nonperturbative light-cone gluon interaction [20] dictated by diffraction data. The fragmentation functions of a parton k into the final hadron h , $D_{h/k}$ are taken from [21] in leading order. We use the realistic Woods-Saxon parametrization for the nuclear density.

As far as all the parameters in (5) are fitted to data for proton target, we have no further adjustable parameters and can predict nuclear effect. The results of parameter-free calculations for the production of charged pions are compared in Fig. 1 with fixed target data. $R_{W/Bc}(p_T)$ is the ratio of the tungsten and beryllium cross sections at 200 – 400 GeV [22] and 800 GeV [23] as function of p_T .

Long coherence length. In the limit of $l_c \gg R_A$ a hard fluctuation in the incident proton containing a high- p_T parton propagates through the whole nucleus and may be freed by the interaction. Since multiple interactions in the nucleus supply a larger momentum transfer than a nucleon target, they are able to resolve harder fluctuations, i.e. the average transverse momentum of produced hadrons increases. In this case broadening looks like color filtering rather than Brownian motion.

Instead of QCD factorization we employ the light-cone dipole formalism in the rest frame of the target which leads to another factorized expression, valid at $x_2 \ll 1$,

$$\sigma_{pA}^{l_c \gg R_A}(p_T) = F_{G/p} \otimes \sigma(GA \rightarrow G_1 G_2 X) \otimes D_{h/G_1}. \quad (6)$$

We assume that high- p_T hadrons originate mainly from radiated gluons at such high energies.

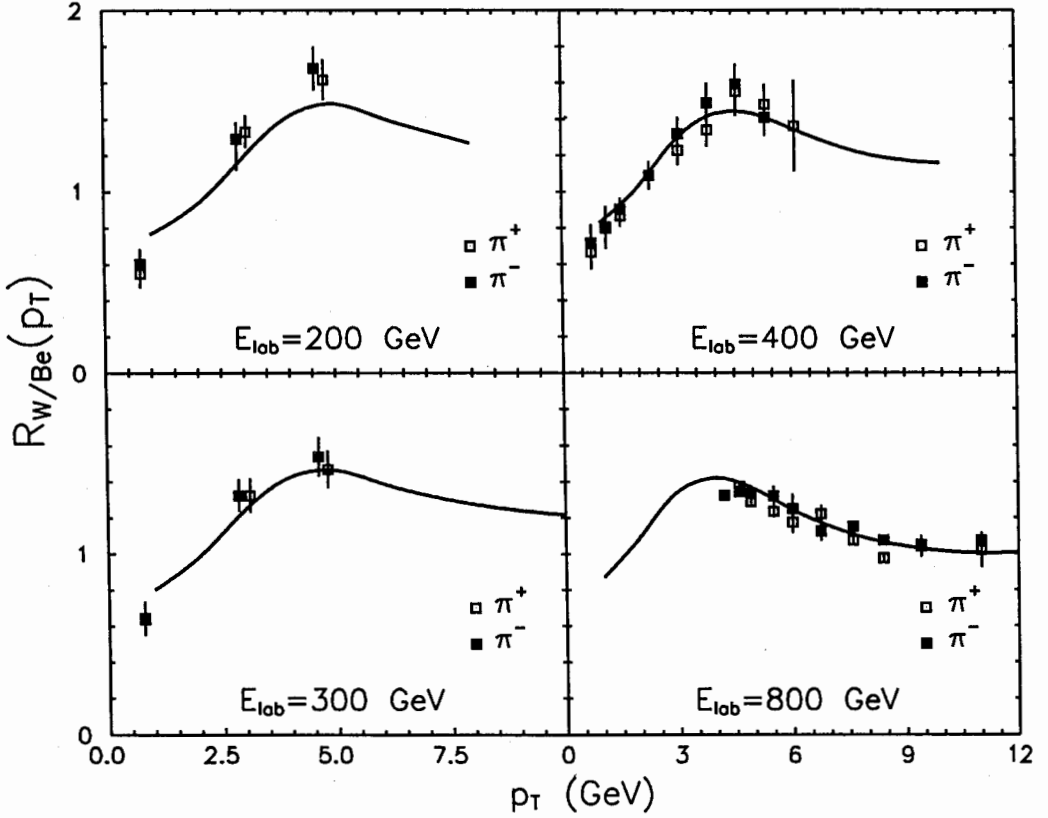


Figure 1: Ratio of the charged pion production cross sections for tungsten and beryllium function of the transverse momentum of the produced pions. The curves correspond to the parameter-free calculation Eq. (5), the data are from fixed target experiments [22, 23]

The cross section of gluon radiation reads [25, 26, 20],

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma(GA \rightarrow G_1 G_2 X)}{d^2 p_T dy_1} &= \int d^2 b \int d^2 r_1 d^2 r_2 e^{i\vec{p}_T \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \\
 &\times \overline{\Psi_{GG}^*(\vec{r}_1, \alpha) \Psi_{GG}(\vec{r}_2, \alpha)} \left[1 - e^{-\frac{1}{2} \sigma_{3G}^N(r_1, x) T_A(b)} \right. \\
 &\left. - e^{-\frac{1}{2} \sigma_{3G}^N(r_2, x) T_A(b)} + e^{-\frac{1}{2} \sigma_{3G}^N(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, x) T_A(b)} \right]. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Here $\alpha = p_+(G_1)/p_+(G)$ is the momentum fraction of the radiated gluon; $\sigma_{3G}^N(r, \alpha)$ is the dipole cross section for a three-gluon colorless system, where \vec{r} is the transverse separation of the final gluons G_1 and G_2 . It can be expressed in terms of the usual $\bar{q}q$ dipole cross sections,

$$\sigma_{3G}^N(r) = \frac{2}{9} \left\{ \sigma_{\bar{q}q}(r) + \sigma_{\bar{q}q}(\alpha r) + \sigma_{\bar{q}q}[(1 - \alpha)r] \right\}. \quad (8)$$

The light-cone wave function of the $G_1 - G_2$ Fock component of the incoming gluon including the nonperturbative interaction of the gluons reads [20],

$$\Psi_{GG}(\vec{r}, \alpha) = \frac{\sqrt{8\alpha_s}}{\pi r^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2r_0^2}\right] \left[\alpha(\vec{e}_1^* \cdot \vec{e})(\vec{e}_2^* \cdot \vec{r}) + (1 - \alpha)(\vec{e}_2^* \cdot \vec{e})(\vec{e}_1^* \cdot \vec{r}) - \alpha(1 - \alpha)(\vec{e}_1^* \cdot \vec{e}_2^*)(\vec{e} \cdot \vec{r}) \right], \quad (9)$$

where $r_0 = 0.3$ fm is the parameter characterizing the strength of the nonperturbative interaction which was fitted to data on diffractive pp scattering. The product of the wave functions is averaged in (7) over the initial gluon polarization, \vec{e} , and summed over the final ones, $\vec{e}_{1,2}$.

Expression (7) with the exponentials expanded to first order in the nuclear thickness also provides the cross section for gluon radiation in pp collisions. This cross section reproduces well the measured pion spectra in pp collisions. The results for the ratio of pion production rates in pA and pp collisions obtained using Eqs. (6)-(7) for mid rapidity at the energy of LHC, $\sqrt{s} = 5.5$ TeV are shown by curve in Fig. 2.

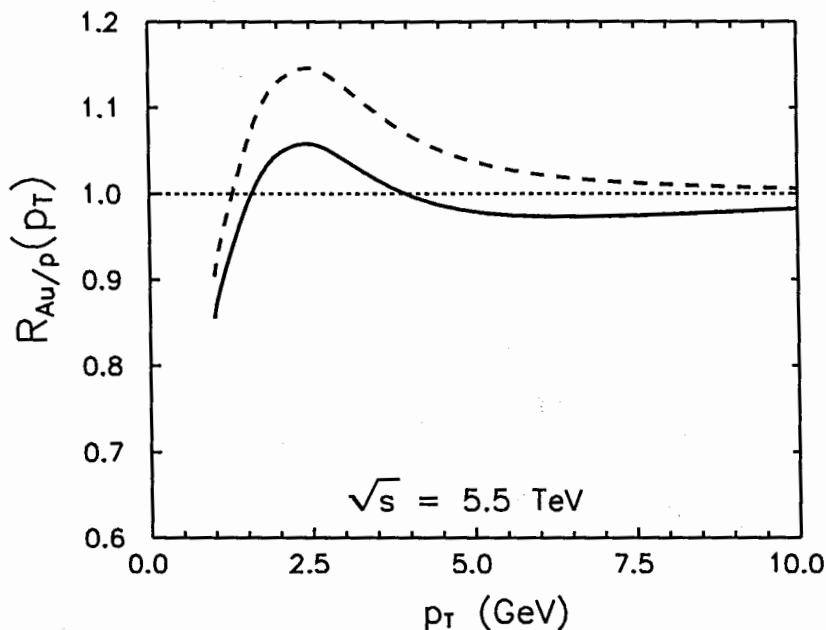


Figure 2: Ratio of $p - Au$ to pp cross sections as function of transverse momentum of produced pions at the energy of LHC calculated with Eq. (7). The dashed and solid curves correspond to calculations without and with gluon shadowing respectively.

Note that at the high LHC energy the eikonal formula Eq. (7) is not exact. The higher Fock components $|3G\rangle$, $|4G\rangle$, etc. lead to additional corrections called gluon shadowing. These fluctuations are heavier than $|2G\rangle$, correspondingly, the coherence length is shorter, and one

should sum over all different trajectories of the gluons. This problem was solved in [20, 27, 24] and a suppression factor $R_G(x, Q^2, b)$ due to gluon shadowing was derived. Here we make use of those results replacing the dipole cross sections in (7), σ_{3G} by $R_G \sigma_{3G}$. This suppression factor leads to a reduction of the Cronin effect as is demonstrated by the solid curve in Fig. 2. Note that this curve approaches unity from below at high p_T .

Predictions for RHIC. The calculations in the energy range of RHIC are most complicated since this is the transition region between the regimes of long (small p_T) and short (large p_T) coherence lengths. One can deal with this situation relying on the light-cone Green function formalism [28, 29, 27]. However, in this case the integrations involved become too complicated. Fortunately, the coherence length at the energy of RHIC is rather long, $l_c \sim 5$ fm, within the p_T -range where the Cronin effect has an appreciable magnitude. Therefore, the corrections to the asymptotic expression Eq. (6) should not be large and can be approximated by linear interpolation performed by means of the so called nuclear longitudinal formfactor $F_A(q_c, b)$ [30, 15],

$$\begin{aligned} \sigma_{pA}(p_T) &= \int d^2b \left\{ \left[1 - \langle F_A^2(q_c, b) \rangle \right] \sigma_{pA}^{l_c \ll R_A}(p_T, b) \right. \\ &\quad \left. + \langle F_A^2(q_c, b) \rangle \sigma_{pA}^{l_c \gg R_A}(p_T, b) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Here $\sigma_{pA}(p_T, b)$ is the unintegrated \vec{b} -dependent contribution to the cross section $\sigma_{pA}(p_T)$,

$$F_A(q_c, b) = \frac{1}{T_A(b)} \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho_A(b, z) e^{iq_c z}, \quad (11)$$

where $q_c = 1/l_c$. The formfactor is averaged weighted with the cross section at fixed p_T and varying initial and final parton momenta.

Expression (10) interpolates between the cross sections $\sigma_{pA}^{l_c \ll R_A}(p_T)$, (5), and $\sigma_{pA}^{l_c \gg R_A}(p_T)$, (6), which are shown in Fig. 3 by dotted and dashed curves respectively. It is interesting that the dashed curve exposes a weaker nuclear enhancement than the dotted one. This might be interpreted as Landau-Pomeranchuk suppression of the radiation spectrum compared to the Bethe-Heitler regime.

Our prediction for $\sqrt{s} = 200$ GeV calculated with Eq. (10) is depicted by the solid curve which nearly coincides with the $l_c \ll R_A$ one at $p_T < 2$ GeV and is rather close to it at higher p_T . $l_c \gg R_A$ regime at higher p_T . Eventually, all three curves approach 1 at large $p_T > 10$ GeV.

No sizeable gluon shadowing is expected at RHIC energy. The reason is that the effective coherence length for gluon shadowing evaluated in [29] is nearly an order of magnitude shorter than l_c for single gluon radiation as given by (1).

Summary: the mechanism of high- p_T hadron production has two limiting regimes. At $l_c \ll R_A$ a high- p_T particle is produced incoherently on different nucleons, and the Cronin effect is due to soft multiple initial/final state interactions which break QCD factorization. On the contrary, for $l_c \gg R_A$ the process of gluon radiation takes long time even for high transverse momenta. As a result, coherent radiation from different nucleons is subject to Landau-Pomeranchuk suppression. Using the light-cone dipole approach we provided the first

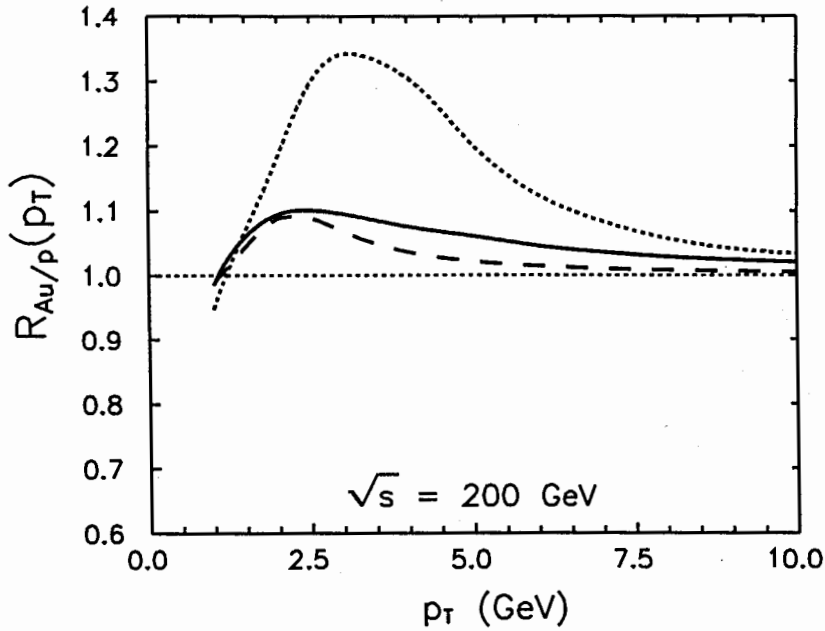


Figure 3: Predictions for RHIC. The dotted and dashed curves are calculated at $\sqrt{s} = 200$ GeV using Eqs. (5) and (6) respectively. The final prediction taking into account the coherence length is shown by the solid curve.

parameter-free calculations for the Cronin effect in pA collisions, i.e. no fit is done to the data to be described. Our results agree well with available data and we provided predictions for high- p_T pion production at RHIC and LHC.

Acknowledgment: we are grateful to Jörg Hüfner, Mikkel Johnson and Jörg Raufeisen for stimulating discussions. This work has been partially supported by a grant from the Gesellschaft für Schwerionenforschung Darmstadt (GSI), grant No. GSI-OR-SCH. The work of J.N. has been supported in part by the Slovak Funding Agency, Grant No. 2/1169 and Grant No. 6114.

References

- [1] J. W. Cronin et al., Phys. Rev. D **11**, 3105 (1975).
- [2] PHENIX Collaboration, K. Adcox et al., nucl-ex/0109003 (2001).
- [3] STAR Collaboration, J. Harris et al., nucl-ex/0105011 (2001).
- [4] T. Ochiai et al., Prog. Theor. Phys., **75**, 288 (1986).
- [5] X.-N. Wang, Phys. Rev. C **61**, 064910 (2000).

- [6] Y. Zhang et al., Phys.Rev. C **65**, 034903 (2002).
- [7] G.T. Bodwin, S.J. Brodsky, and G.P. Lepage, Phys. Rev. D **39**, 3287 (1989).
- [8] L. McLerran and R. Venugopalan, Phys. Rev. D **49**, 2233 (1994); **49**, 3352 (1994); **49**, 2225 (1994).
- [9] L.V. Gribov, E.M. Levin and M.G. Ryskin, Phys. Rep. **100**, 1 (1983).
- [10] A.H. Mueller, Nucl. Phys. B **335**, 115 (1990).
- [11] M.B. Johnson, B.Z. Kopeliovich, and A.V. Tarasov, Phys. Rev. C **63**, 035203 (2001).
- [12] K. Golec-Biernat and M. Wüsthoff, Phys. Rev. D **59**, 014017 (1999); Phys. Rev. D **60**, 114023 (1999).
- [13] A.H. Mueller, Nucl. Phys. B **558**, 285 (1999).
- [14] B.Z. Kopeliovich, F. Niedermayer, Sov. J. Nucl. Phys. **42**, 504 (1985) [Yad. Fiz. **42**, 797 (1985)].
- [15] M.B. Johnson et al., Phys.Rev.Lett. **86**, 4483 (2001); Phys. Rev. C **65**, 025203 (2002).
- [16] R. Baier et al., Nucl. Phys. B **483**, 291 (1997).
- [17] R.P. Feynman, R.D. Field, and G.C. Fox, Phys. Rev. D **18**, 3320 (1978).
- [18] M. Gluck, E. Reya, and A. Vogt, Z. Phys. C **67**, 433 (1995).
- [19] K. J. Eskola, V. J. Kolhinen, and C.A. Salgado, Eur. Phys. J. C **9**, 61 (1999).
- [20] B.Z. Kopeliovich, A. Schäfer and A.V. Tarasov, Phys. Rev. D **62**, 054022 (2000).
- [21] B.A. Kniehl, G. Kramer, and B. Pötter, B **597**, 337 (2001).
- [22] D. Antreasyan et al., Phys. Rev. D **19**, 764 (1979).
- [23] P.B. Straub et al., Phys. Rev. Lett. **68**, 452 (1992).
- [24] B.Z. Kopeliovich, J. Raufeisen, A.V. Tarasov, and M.B. Johnson, hep-ph/0110221.
- [25] Yu.V. Kovchegov and A.H. Mueller, Nucl. Phys. B **529**, 451 (1998).
- [26] B.Z. Kopeliovich, A. Schäfer and A.V. Tarasov, Phys. Rev. C **59**, 1609 (1999).
- [27] B.Z. Kopeliovich, J. Nemchik, A. Schäfer and A.V. Tarasov, Phys. Rev. C **65**, 035201 (2002).
- [28] B.Z. Kopeliovich, J. Raufeisen, A.V. Tarasov, Phys. Lett. B **440**, 151 (1998);
- [29] B.Z. Kopeliovich, J. Raufeisen, A.V. Tarasov, Phys. Rev. C **62**, 035204 (2000).
- [30] B.Z. Kopeliovich, B. Povh, Phys. Lett. B **367**, 329 (1996).

Contribution of α^2 terms to the total interaction cross sections of relativistic elementary atoms with atoms of matter*

L.Afanasyev, A.Tarasov, and O.Voskresenskaya
*Joint Institute for Nuclear Research,
141980 Dubna, Moscow Region, Russia*

It is shown that the corrections of α^2 order for the total interaction cross sections of elementary hydrogenlike atoms with target atoms, found in the previous paper [S. Mrówczyński, Phys. Rev. D36, 1520 (1987)], do not include some terms of the same order of magnitude. This results in a significant contribution of these corrections in particular cases. The full α^2 corrections have been derived and it is shown that they are really small and could be omitted for most practical applications.

The experiment DIRAC [1], which now under way at PS CERN, aims to measure the lifetime of hydrogenlike elementary atoms (EA) consisting of π^+ and π^- mesons ($A_{2\pi}$) with accuracy of 10%. The interaction of $\pi^+\pi^-$ atoms with matter is of great importance for the experiment as $A_{2\pi}$ dissociation (ionization) in such interactions is exploited to observe $A_{2\pi}$ and to measure its lifetime. In the experiment the ratio between the number of $\pi^+\pi^-$ pairs from $A_{2\pi}$ dissociation inside a target and the number of produced atoms will be measured. The lifetime measurement is based on the comparison of this experimental value with its calculated dependence on the lifetime. Accuracy of the interaction cross sections of relativistic EA with ordinary atoms, which are behind all these calculations [2], is essential for the extraction of the lifetime.

The study of interactions of fast hydrogenlike atoms with atoms has a long history starting from Bethe. One of the recent calculations for hydrogen and one-electron ions was published in [3]. Interactions of various relativistic EA consisting of e^\pm , π^\pm , μ^\pm , K^\pm were considered in different approaches [4–16]. In this paper we reconsider corrections of α^2 order to the EA total interaction cross sections obtained in [7]. (Through this paper α is the fine-structure constant.)

As shown in [7] analysis of the relativistic EA interaction with the Coulomb field of target atoms can be performed conveniently in the rest frame of the projectile EA (antilaboratory frame). As the characteristic transfer momentum is of order of the EA Bohr momentum, in this frame after the interaction EA has a nonrelativistic velocity and thus initial and final states of EA can be treated in terms of the nonrelativistic quantum mechanics. In this manner the well-known difficulties of the relativistic treatment of bound states can be get round.

As in the EA rest frame a target atom moves with the relativistic velocity its electromagnetic field is no longer pure Coulomb. It is described by the 4-vector potential $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ with components related to its rest Coulomb potential $U(r)$:

$$A_0 = \gamma U, \quad \mathbf{A} = \gamma \beta \mathbf{U}. \quad (1)$$

Here $\beta = v/c$, v is the target atom velocity in the EA rest frame and γ is its Lorentz factor.

*Phys. Rev. D65 (2002) 096001 (1–6). Copyright © 2002 The American Physical Society. Reproduced by permission of the APS.

The timelike component A_0 of the 4-potential interacts with the charges of particles forming EA and the space component with their currents.

In this paper we consider only EA consisting of spinless particles (π , K mesons, etc.) which are of interest for the DIRAC experiment. In the Born approximation the amplitudes of transition from the initial state i to the final f due to the interaction with A_μ can be written as:

$$A_{fi} = U(Q)a_{fi}(q), \quad (2)$$

$$U(Q) = 2 \int_0^\infty U(r) \frac{\sin Qr}{Q} r dr, \quad (3)$$

$$a_{fi}(q) = \rho_{fi}(q) - \beta j_{fi}(q). \quad (4)$$

The transition densities $\rho_{fi}(q)$ and transition currents $j_{fi}(q)$ are expressed via the EA wave functions ψ_i and ψ_f for the initial and final states:

$$\rho_{fi}(q) = \int \rho_{fi}(r) (e^{iq_1 r} - e^{-iq_2 r}) d^3 r, \quad (5)$$

$$j_{fi}(q) = \int j_{fi}(r) \left(\frac{\mu}{m_1} e^{iq_1 r} + \frac{\mu}{m_2} e^{-iq_2 r} \right) d^3 r, \quad (6)$$

$$\rho_{fi}(r) = \psi_f^*(r) \psi_i(r), \quad (7)$$

$$j_{fi}(r) = \frac{i}{2\mu} [\psi_i(r) \nabla \psi_f^*(r) - \psi_f^*(r) \nabla \psi_i(r)]. \quad (8)$$

The EA wave functions $\psi_{i,f}$ and the binding energies $\varepsilon_{i,f}$ obey the Schrödinger equation

$$H\psi_{i,f} = \varepsilon_{i,f} \psi_{i,f}, \quad (9)$$

$$H = -\frac{\Delta}{2\mu} + V(r)$$

with the Hamiltonian H . It is worth noting that the explicit form of the potential $V(r)$ of the interaction between the EA components have no influence on the final result of this paper.

In the above equations $m_{1,2}$ are masses of EA components, $q = (q_0, \mathbf{q})$ is the transfer 4-momentum, and all other kinematic variables are related by the following equations:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\mu}{m_1} q, \quad q_2 = \frac{\mu}{m_2} q, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2, \\ q &= (q_0, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = (q_L, \mathbf{q}_T), \\ q_0 &= \omega_{fi} + \frac{Q^2}{2M} = \beta q = \beta q_L, \quad \omega_{fi} = \varepsilon_f - \varepsilon_i, \\ Q &= \sqrt{Q^2}, \quad Q^2 = q^2 - q_0^2 = q_T^2 + q_L^2 (1 - \beta^2). \end{aligned} \quad (10)$$

The differential and integral cross sections of the EA transition from the initial state i to the final f due to interaction with the electromagnetic field of the target atom are related to the amplitudes (2):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{fi}}{dq_T} &= \frac{1}{\beta^2} |A_{fi}(q)|^2, \\ \sigma_{fi} &= \frac{1}{\beta^2} \int |A_{fi}(q)|^2 d^2 q_T. \end{aligned} \quad (11)$$

Formulae (2-11) allow to calculate the transition (partial) cross sections in the Born approximation. But for applications (for example see [2]) the total cross sections of the EA interaction with target atoms are required also. Because the Born amplitudes of the EA elastic scattering are pure real values the optical theorem can not be used to calculate the total cross sections. Thus they should be calculated as the sum of all partial cross sections:

$$\sigma_i^{\text{tot}} = \sum_f \sigma_{fi} . \quad (12)$$

Usually to get a closed expression for the sum of this infinite series (the so-called "sum rule") the transition amplitudes (2) are rewrite as:

$$A_{fi}(q) = \langle f | \hat{A}(q) | i \rangle , \quad (13)$$

where the operator $\hat{A}(q)$ does not contain an explicit dependence on the EA final state variables (for example its energy ϵ_f , see bellow). Then using of the completeness relation

$$\sum_f |f\rangle \langle f| = 1 , \quad (14)$$

the sum (12) can be written in the form:

$$\sigma_i^{\text{tot}} = \frac{1}{\beta^2} \int \langle i | \hat{A}^*(q) \hat{A}(q) | i \rangle d^2 q_T . \quad (15)$$

However one should to take some caution while going from the exact expressions (2-10) for the transition amplitudes, with explicitly dependence on the ϵ_f (through the timelike q_0 and longitudinal q_L components of 4-vector q), to the approximate one without such dependence. Otherwise, it is possible to obtain a physically improper result as it has happened to the authors of the the paper [7] at deriving of the sum rules for the total cross section of interaction of ultrarelativistic EA ($\beta = 1$) with target atoms. Below we discuss this problem in detail.

The most essential simplification, that arises in the case of $\beta = 1$ is that $Q^2 = q_T^2$. Thus $U(Q) = U(q_T)$ [see (10)] and only A_{fi} in (2) depends on ϵ_f through the exponential factors $\exp(iq_1 r)$ and $\exp(-iq_2 r)$ in (5) and (6)

$$q_{1,2} r = \frac{\mu}{m_{1,2}} q r = \frac{\mu}{m_{1,2}} (q_L z + q_T r_T) , \quad (16)$$

where $q_L = \omega_{fi} + q_T^2/2M$ if $\beta = 1$.

Now let us take into account that the typical value of z in these expressions is of order of the Bohr radius $r_B = 1/\mu\alpha$ and the typical $q_L \sim \omega_{fi} \sim \mu\alpha^2$, thus the product $q_L z$ is of order of α . Then it seems natural to neglect the q_L dependence of a_{fi} :

$$a_{fi}(q) \approx a_{fi}(q_T) . \quad (17)$$

and consider this case as the zero order approximation to the problem [7]. It corresponds to the choice of the operator \hat{A} in the form:

$$\hat{A}(q) = U(q_T) \left[e^{iq_1 r r_T} - e^{-iq_2 r r_T} - (e^{iq_1 r r_T} / m_1 + e^{-iq_2 r r_T} / m_2) \beta \hat{p} \right] . \quad (18)$$

Here $\hat{p} = -i\nabla$ is the momentum operator.

Substituting (18) in (15) results in the following sum rules [7], where the total cross sections is expressed as the sum of the "electric" σ^{el} and "magnetic" σ^{mag} cross sections:

$$\sigma^{\text{tot}} = \sigma^{\text{el}} + \sigma^{\text{mag}}, \quad (19)$$

$$\sigma^{\text{el}} = \int U^2(q_T) M(q_T) d^2 q_T, \quad (20)$$

$$M(q_T) = 2(1 - S(q_T)),$$

$$S(q_T) = \int |\psi(r)|^2 e^{iq_T r} d^3 r;$$

$$\sigma^{\text{mag}} = \int U^2(q_T) K(q_T) d^2 q_T, \quad (21)$$

$$K(q_T) = \int \left[\frac{1}{\mu^2} + \frac{2}{m_1 m_2} (e^{iq_T r} - 1) \right] |\beta \nabla \psi_i(r)|^2 d^3 r.$$

These results differ from the sum rules used in [2] by the additional term σ^{mag} . For beginning let us consider its contribution qualitatively. For this purpose the target atom potential $U(r)$ can be approximated by the screened Coulomb potential:

$$U(r) = \frac{Z\alpha}{r} e^{-\lambda r}, \quad \lambda \sim m_e \alpha Z^{1/3}, \quad (22)$$

where m_e is the electron mass and Z is the atomic number of the target. The pure Coulomb wave function can be used for ψ_i (i.e. the contribution of the strong interaction between the EA components is neglected see [17]). For the ground state it is written as:

$$\psi_i(r) = \frac{\mu\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu\alpha r}. \quad (23)$$

Under such assumptions for the ground state the following results can be easy obtained:

$$\sigma^{\text{el}} = \frac{8\pi Z^2}{\mu^2} \left[\ln \left(\frac{2\mu}{Z^{1/3} m_e} \right) - \frac{3}{4} \right], \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{mag}} &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{Z\alpha}{\lambda} \right)^2 + O(\alpha^2 \sigma^{\text{el}}), \\ &= \frac{4\pi Z^{4/3} \alpha^2}{3m_e^2} + O(\alpha^2 \sigma^{\text{el}}). \end{aligned} \quad (25)$$

It is seen that in spite of α^2 in the numerator of σ^{mag} the electron mass square in the denominator makes the contribution of the "magnetic" term in (19) not negligible with respect to the "electric" one, especially for the case of EA consisted of heavy hadrons and low Z values.

To obtain exact numerical values we have precisely repeated the calculations made in [7]. More accurate presentation of the target atom potential, namely, the Molière parameterization

of the Thomas-Fermi potential [18] was used as in [7]:

$$U(r) = Z\alpha \sum_{i=1}^3 \frac{c_i e^{-\lambda_i r}}{r}; \quad (26)$$

$$c_1 = 0.35, \quad c_2 = 0.55, \quad c_3 = 0.1;$$

$$\lambda_1 = 0.3\lambda_0, \quad \lambda_2 = 1.2\lambda_0, \quad \lambda_3 = 6\lambda_0, \quad \lambda_0 = m_e \alpha Z^{1/3} / 0.885.$$

The values of "electric" (el) and "magnetic" (mag) total cross sections (in units of cm^2) and their ratio (mag/el) are presented in Table I for various EA and target materials. The values published in [7] are given in the parentheses. It is seen that the "electric" cross sections are coincide within the given accuracy, but the "magnetic" ones are underestimated in [7]. It is worth noting that the correct values of σ^{mag} does not depend on EA masses as it follows from the simplified approximation result (25). The ratio values confirm the above estimation about the "magnetic" term contribution. Thus inaccuracy in the calculations did not allow the authors of [7] to observe so significant contribution of σ^{mag} in their results.

It is clear, that such strong enhancement of the magnetic term in (19) is the consequence of its inverse power dependence (25) on the small screening parameter λ . It is also easily to see that the origin of such unnatural dependence is in the behaviour of the factor $K(q_T)$ at small values of q_T in (21). This factor, contrary to $M(q_T)$ in (20), does not approach to zero at $q_T \rightarrow 0$. But at $\beta = 1$ such behaviour of $K(q_T)$ is in contradiction with some general properties of the transition amplitudes (4), which follow from the continuity equation:

$$\omega_{fi} \rho_{fi}(q) - q j_{fi}(q) = 0. \quad (27)$$

(The later can be derived from the Schrödinger equation (9)). Indeed, rewriting the continuity equation in the form:

$$\begin{aligned} \omega_{fi} \rho_{fi}(q) - q_L \beta j_{fi}(q) - q_T j_{fi}(q) = \\ \omega_{fi} [\rho_{fi} - \beta j_{fi}(q)] - q_T^2 \beta j_{fi}(q) / 2M - q_T j_{fi}(q) = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

it is easily obtain, that

$$\begin{aligned} a_{fi}(q) &= \rho_{fi}(q) - \beta j_{fi}(q) \\ &= \frac{1}{\omega_{fi}} [q_T^2 \beta j_{fi}(q) / 2M + q_T j_{fi}(q)]. \end{aligned} \quad (29)$$

That is all transition amplitudes become zero at $q_T = 0$. It follows, that any transition cross section (11) can depend on the screening parameter λ at least only logarithmically, but never like inverse power of this parameter. The same is valid for the sum (12) of this quantities, i.e. the total cross section.

Since the λ dependence of the magnetic term in (25) is contradictory to the general result, we must conclude that there is a fallacy in the deriving of sum rules (19) somewhere. To understand the origin of the error, made by authors of [7], let us go back to the quantities (5),(6) and expand them over powers of the longitudinal momentum transfer q_L :

$$\rho_{fi} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{fi}^{(n)}, \quad \rho_{fi}^{(n)} = \frac{q_L^n}{n!} \left(\frac{d^n}{dq_L^n} \rho_{fi} \right) \Big|_{q_L=0}, \quad (30)$$

TABLE I: The "electric" (el) and "magnetic" (mag) total cross sections in units of cm^2 and their ratio (mag/el) in % for EA consisting of π and K mesons ($A_{2\pi}$, $A_{\pi K}$, A_{2K}) and target materials with the atomic number Z . The values published in [7] are given in the parentheses.

Z		$A_{2\pi}$	$A_{\pi K}$	A_{2K}
6	el	$3.03 \cdot 10^{-22}$ ($3.1 \cdot 10^{-22}$)	$1.37 \cdot 10^{-22}$ ($1.4 \cdot 10^{-22}$)	$3.08 \cdot 10^{-23}$ ($3.0 \cdot 10^{-23}$)
6	mag	$6.73 \cdot 10^{-24}$ ($2.5 \cdot 10^{-24}$)	$6.73 \cdot 10^{-24}$ ($1.3 \cdot 10^{-24}$)	$6.73 \cdot 10^{-24}$ ($0.3 \cdot 10^{-24}$)
6	mag/el	2.22%	4.90%	21.9%
13	el	$1.33 \cdot 10^{-21}$ ($1.3 \cdot 10^{-21}$)	$6.08 \cdot 10^{-22}$ ($6.2 \cdot 10^{-22}$)	$1.37 \cdot 10^{-22}$ ($1.4 \cdot 10^{-22}$)
13	mag	$1.89 \cdot 10^{-23}$ ($0.96 \cdot 10^{-23}$)	$1.89 \cdot 10^{-23}$ ($0.55 \cdot 10^{-23}$)	$1.89 \cdot 10^{-23}$ ($0.15 \cdot 10^{-23}$)
13	mag/el	1.41%	3.10%	13.7%
29	el	$6.17 \cdot 10^{-21}$ ($6.1 \cdot 10^{-21}$)	$2.84 \cdot 10^{-21}$ ($2.9 \cdot 10^{-21}$)	$6.48 \cdot 10^{-22}$ ($6.7 \cdot 10^{-22}$)
29	mag	$5.50 \cdot 10^{-23}$ ($3.6 \cdot 10^{-23}$)	$5.50 \cdot 10^{-23}$ ($2.3 \cdot 10^{-23}$)	$5.50 \cdot 10^{-23}$ ($0.68 \cdot 10^{-23}$)
29	mag/el	0.891%	1.94%	8.49%
47	el	$1.55 \cdot 10^{-20}$ ($1.5 \cdot 10^{-20}$)	$7.15 \cdot 10^{-21}$ ($7.3 \cdot 10^{-21}$)	$1.64 \cdot 10^{-21}$ ($1.7 \cdot 10^{-21}$)
47	mag	$1.05 \cdot 10^{-22}$ ($0.79 \cdot 10^{-22}$)	$1.05 \cdot 10^{-22}$ ($0.52 \cdot 10^{-22}$)	$1.05 \cdot 10^{-22}$ ($0.17 \cdot 10^{-22}$)
47	mag/el	0.676%	1.46%	6.37%
82	el	$4.46 \cdot 10^{-20}$ ($4.4 \cdot 10^{-20}$)	$2.07 \cdot 10^{-20}$ ($2.1 \cdot 10^{-20}$)	$4.81 \cdot 10^{-21}$ ($5.1 \cdot 10^{-21}$)
82	mag	$2.20 \cdot 10^{-22}$ ($1.9 \cdot 10^{-22}$)	$2.20 \cdot 10^{-22}$ ($1.3 \cdot 10^{-22}$)	$2.20 \cdot 10^{-22}$ ($0.48 \cdot 10^{-22}$)
82	mag/el	0.493%	1.06%	4.58%

$$j_{fi} = \sum_{n=0}^{\infty} j_{fi}^{(n)}, \quad j_{fi}^{(n)} = \frac{q_L^n}{n!} \left(\frac{d^n}{dq_L^n} j_{fi} \right) \Big|_{q_L=0}. \quad (31)$$

It is easily shown that terms of these expansions obey the following estimation:

$$\rho_{fi}^{(n)} \propto \alpha^n, \quad j_{fi}^{(n)} \propto \alpha^{n+1}. \quad (32)$$

The additional power of α in the current expansion coefficients, in comparison with the density one, reflects the ordinary relation between the values of current and density in the hydrogenlike atoms.

Expanding the value (4) and taking into account (32) it seems reasonable to group terms with the same order of α rather than q_L as it was done in [7]. Then the successive terms of the

a_{fi} expansion over α powers are

$$a_{fi} = \sum_n a_{fi}^{(n)}, \quad (33)$$

$$a_{fi}^{(n)} = \rho_{fi}^{(n)} - \beta j_{fi}^{(n-1)}.$$

From above it is clear that in the "natural" approximation (17) includes $a_{fi}^{(0)}$ and the only one part of the term $a_{fi}^{(1)}$ of the expansion (33), namely:

$$\beta j_{fi}^{(0)} = -\frac{i}{\mu} \int \psi_f^* E(q_T, r_T) \frac{\partial \psi_i}{\partial z} d^3 r. \quad (34)$$

While the second one

$$\rho_{fi}^{(1)} = iq_L \int \psi_f E(q_T, r_T) z \psi_i d^3 r \quad (35)$$

was omitted according to the reasoning of the approximation (17). In the late equations (34), (35) $E(q_T, r_T)$ denotes:

$$E(q_T, r_T) = \frac{\mu}{m_1} e^{iq_1 r_T} + \frac{\mu}{m_2} e^{-iq_2 r_T}. \quad (36)$$

Let us consider this neglected part in detail. As it is proportional to $q_L = \omega_{fi} + q_T^2/2M$ and therefore explicitly depends on ε_f , one can not use completeness relation (14) to calculate its contribution to the total cross section directly. Before we need to transform it to the form free of such dependence. It can be done with help of the Schrödinger equation (9).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{fi} \int \psi_f^*(r) E(q_T, r_T) z \psi_i(r) d^3 r = \\ \int \psi_f^*(r) \{ \varepsilon_f E(q_T, r_T) z - \varepsilon_i E(q_T, r_T) z \} \psi_i(r) d^3 r = \\ \int \psi_f^*(r) [H, E(q_T, r_T) z] \psi_i(r) d^3 r. \end{aligned} \quad (37)$$

The commutator in this relation is easily calculated and after simple algebra we get the following result:

$$\rho_{fi}^{(1)}(q) = -\frac{i}{\mu} \int \psi_f^*(r) E(q_T, r_T) \frac{\partial \psi_i(r)}{\partial z} d^3 r + \Delta \rho_{fi}^{(1)}(q), \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \Delta \rho_{fi}^{(1)}(q) = \\ i \int \psi_f^*(r) \left[\frac{\mu}{m_1} e^{iq_1 r_T} \hat{O}_1 + \frac{\mu}{m_2} e^{-iq_2 r_T} \hat{O}_2 \right] z \psi_i(r) d^3 r, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\hat{O}_{1,2} = \frac{q_T^2 \pm 2q_T \hat{p}}{2m_{1,2}}, \quad \hat{p} = -i\nabla. \quad (40)$$

It is seen, that "large" (nonvanishing at $q_T = 0$) parts of two terms (34) and (38), contributing to $a_{fi}^{(1)}$, are equal and opposite in sign, so that in the resulting expression they cancel each other, leaving only the term with the "correct" behaviour at small q_T :

$$a_{fi}^{(1)} = \Delta\rho_{fi}^{(1)}(q). \quad (41)$$

The same is valid for any $a_{fi}^{(n)}$. Applying the Schrödinger equation (9) to exclude one power of q_L from the expression:

$$\rho_{fi}^{(n)}(q) = \frac{(iq_L)^n}{n!} \int \psi_f^*(r) \left[\left(\frac{\mu}{m_1} \right)^n e^{iq_1 r r_T} + (-1)^{n+1} \left(\frac{\mu}{m_2} \right)^n e^{-iq_2 r r_T} \right] z^n \psi_i(r) d^3 r, \quad (42)$$

one can represent it in the form:

$$\rho_{fi}^{(n)}(q) = \beta j_{fi}^{(n-1)}(q) + \Delta\rho_{fi}^{(n)}(q), \quad (43)$$

$$\Delta\rho_{fi}^{(n)}(q) = \frac{i(iq_L)^{n-1}}{n!} \int \psi_f^*(r) \left[\left(\frac{\mu}{m_1} \right)^n e^{iq_1 r r_T} \hat{O}_1 + \left(\frac{\mu}{m_2} \right)^n e^{-iq_2 r r_T} \hat{O}_2 \right] z^n \psi_i(r) d^3 r. \quad (44)$$

So that

$$a_{fi}^{(n)} = \Delta\rho_{fi}^{(n)}(q). \quad (45)$$

That confirms the qualitative result (29), derived with help of continuity equation (27).

The remaining ε_f dependence of right side of (44) can be removed by repeated applying of the Schrödinger equation (9), that allows to represent the transition amplitudes in the form (13).

From the z dependence of the integrand in (44) it is easily to derive, that $a_{fi}^{(2k)} = 0$ for the odd values of $\Delta l m_{fi}$, and $a_{fi}^{(2k+1)} = 0$ for even $\Delta l m_{fi}$, where $\Delta l m_{fi} = (l_f - l_i) - (m_f - m_i)$, and l_i, l_f, m_i, m_f are the values of the orbital and magnetic quantum numbers of the initial i and final f states (the quantization axis is supposed to be z -axis). Thus "odd" and "even" terms of the expansion (33) do not interfere and therefore in the expansion of the σ^{tot} over the powers of α

$$\sigma^{\text{tot}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{(n)}, \quad \sigma^{(n)} \propto \alpha^n \quad (46)$$

only even powers are present.

The structure of the zero order term of this expansion is well established [see (20)]. In view of the above discussion one may be sure that the higher order terms are numerically negligible and may not be discussed in detail. Nevertheless, for completeness of the consideration we present the expression for contribution of α^2 -term to the total cross section which includes $|a_{fi}^{(1)}|^2$ term and the interference term $a_{fi}^{(0)} a_{fi}^{(2)}$.

$$\sigma^{(2)} = - \int U^2(q_T) W(q_T) d^2 q_T + O(\alpha^4), \quad (47)$$

$$W(q_T) = \frac{1}{4m_1 m_2} \int z^2 [q^4 |\psi_i(r)|^2 - |2q_T \hat{p} \psi_i(r)|^2] e^{iqr} d^3r.$$

The "correct" q_T dependence of the last integrand excludes a possibility of arising some extra λ dependence, that could dramatically enhance the contribution of this term (like it happened to σ^{mag} term in [7]). This can be illustrated by the explicit expression for the case of the screened Coulomb potential (22) and the EA ground state (23):

$$\sigma^{(2)} = -\frac{8\pi(Z\alpha)^2}{5M\mu} \left[\ln \left(\frac{2\mu}{Z^{1/3} m_e} \right) - \frac{4}{5} \right]. \quad (48)$$

Because numerical smallness of the value α^2 this term can be successfully neglected compared to (24) in the practical applications.

This result warrants the usage of the simple expression:

$$\sigma^{\text{tot}} = 2 \int U^2(q_T) [1 - S(q_T)] d^2q_T \quad (49)$$

for the total cross section calculation in Born approximation in [2] and for the Glauber extensions in [15].

The authors express their gratitude to Professors S. Mrówczyński, L. Nemenov and D. Trautmann for helpful discussions.

- [1] B. Adeva et al., *Lifetime measurement of $\pi^+\pi^-$ atoms to test low energy QCD predictions*, Proposal to the SPSLC, CERN/SPSLC 95-1, SPSLC/P 284, Geneva, 1995.
- [2] L.G. Afanasyev and A.V. Tarasov, *Yad. Fiz.* **59**, 2212 (1996) [*Phys. Atom. Nucl.* **59**, 2130 (1996)].
- [3] G.H. Gillespie, *Phys. Rev.* **A18**, 1967 (1978); G.H. Gillespie and M. Inokuti, *Phys. Rev.* **22A**, 2430 (1980).
- [4] L.S. Dul'yan and A.M. Kotsinyan, *Yad. Fiz.* **37**, 137 (1983) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **37**, 78 (1983)].
- [5] A.S. Pak and A.V. Tarasov, *JINR-P2-85-903*, Dubna 1985.
- [6] S. Mrówczyński, *Phys. Rev.* **A33**, 1549 (1986).
- [7] S. Mrówczyński, *Phys. Rev.* **D36**, 1520 (1987); K.G. Denisenko and S. Mrówczyński, *Phys. Rev.* **D36**, 1529 (1987).
- [8] A.V. Kuptsov, A.S. Pak and S.B. Saakian, *Yad. Fiz.* **50**, 936 (1989) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **50**, 583 (1989)].
- [9] L.G. Afanasyev, *JINR-E2-91-578*, Dubna 1991.
- [10] L.G. Afanasyev and A.V. Tarasov, *JINR E4-93-293*, Dubna, 1993.
- [11] L.G. Afanasyev, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **61**, 31 (1995).
- [12] Z. Halabuka et al., *Nucl. Phys.* **554**, 86 (1999).
- [13] A.V. Tarasov and I.U. Christova, *JINR P2-91-10*, Dubna, 1991.
- [14] O.O. Voskresenskaya, S.R. Gevorkyan and A.V. Tarasov, *Yad. Fiz.* **61**, 1628 (1998) [*Phys. Atom. Nucl.* **61**, 1517 (1998)].
- [15] L. Afanasyev, A. Tarasov and O. Voskresenskaya, *J. Phys.* **G 25**, B7 (1999).
- [16] D.Yu. Ivanov and L. Szymanowski, *Eur. Phys. J.* **A5**, 117 (1999).
- [17] I. Amirkhanov et al., *Phys. Lett.* **B 452**, 155 (1999).
- [18] G. Molière, *Z. Naturforsch.* **2A**, 3 (1947).

A quantum-kinetic treatment for internal dynamics of multilevel atomic systems moving through a target matter*

A Tarasov and O Voskresenskaya†

Joint Institute for Nuclear Research, 141980 Dubna, Moscow Region, Russia

Abstract

The quantum mechanical consideration of a passage of relativistic elementary atoms (EA) through a target matter is given. A set of quantum-kinetic equations for the density matrix elements describing their internal state evolution at EA rest frame is derived.

1. Introduction

For the interpretation of the data of DIRAC experiment [1, 2, 3] which aims to measure the lifetime of hydrogenlike EA consisting of π^+ and π^- mesons ($A_{2\pi}$ atoms) one needs to have the accurate theory for the description of internal dynamics of the $A_{2\pi}$ atoms moving through a target matter.

During their passage through the target $A_{2\pi}$ (pionium atoms) interacts with the target atoms that causes the excitation, deexcitation or ionization of the $A_{2\pi}$. To describe these variations of $A_{2\pi}$ internal states the authors of [4] proposed a set of kinetic equations for the probabilities to find the pionium atom in the definite quantum state at some distance from the point of $A_{2\pi}$ production.

It is clear that such “classical” description is approximate because does not take into account the possible interference (quantum) effects. These last can be included in consideration only in the framework of a density matrix formalism.

A kinetic equation for the density matrix of fast atomic systems passing through a target matter can be given at target rest frame [5, 6], but more simple these equation can be obtained at rest frame of EA [6]. A set of quantum-kinetic equations for the density matrix elements at EA rest frame is derived in the present work. A numerically solving these equations in the first Born approximation is performed in [7].

2. Derivation of a quantum kinetic equation for the density matrix

At the EA rest frame the target moves with the velocity \vec{v}_0 , and the electromagnetic field produced by target atoms is described by 4-vector potential $A_\mu = (\Phi, \vec{A})$, $\vec{A} = (\vec{v}_0/c)\Phi$.

The scalar potential Φ interacts with the charges of mesons and the vector potential A_μ with their currents. Because the typical velocities of the particles forming EA are of order $\alpha c \ll c$ (α is the fine structure constant), we will neglect the term proportional to the current in the Hamiltonian (see [8]).

*arXiv:hep-ph/0301066 v4, Jul 2011. 7 p.

†On leave of absence from Siberian Physical Technical Institute. Electronic address: voskr@jinr.ru

Then the internal dynamics of relativistic EA (later, for definiteness, "of pionium atoms") is described by the Schrödinger equation

$$i \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H \psi(\vec{r}, t) \quad (1)$$

with the Hamiltonian of the form

$$H = H_0 + V(\vec{r}, t), \quad H_0 = T + V_0(\vec{r}) \quad (2)$$

and

$$T = -\Delta/2\mu = -(d/d\vec{r})^2/2\mu. \quad (3)$$

Here, $V_0(\vec{r})$ are the potential energy of a pion-pion interaction and $V(\vec{r}, t)$ is the potential energy of an interaction between the pionium and the target atom.

We will suppose that the positions of atoms inside the target are not varied during the interaction of target with the pionium atom (the so-called "frozen" target approximation). Then

$$V(\vec{r}) = e \sum_i [\Phi(\vec{r}_i(t) - \vec{r}/2) - \Phi(\vec{r}_i(t) + \vec{r}/2)], \quad (4)$$

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(t_0) + \vec{v}_0(t - t_0), \quad (5)$$

$$\Phi(\vec{R}) = \gamma \Phi_0 \sqrt{\vec{R}^2 + \gamma^2 (\vec{v}_0 \vec{R})^2}, \quad (6)$$

$$\vec{R} = \vec{r}_i(t) \mp \vec{r}/2, \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}. \quad (7)$$

Here, Φ_0 is the potential of the target atom at its rest frame, and we have put the origin of the coordinate system to the center-of-mass of pionium.

Thus, the solution of the Schrödinger equation (1) depends on the "frozen" positions $\vec{r}_i(t_0)$ of the target atoms

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t; \{\vec{r}_i(t_0)\}).$$

The density matrix of pionium is defined as follows:

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}'; t) = \left\langle \psi(\vec{r}, t; \{\vec{r}_i(t_0)\}) \cdot \psi(\vec{r}', t; \{\vec{r}_i(t_0)\}) \right\rangle_{\{\vec{r}_i(t_0)\}}, \quad (8)$$

where $\langle \rangle_{\{\vec{r}_i(t_0)\}}$ means the averaging over all possible positions of target atoms.

Let t_0 be the point of time when moving target meet the pionium atom, and $\psi(\vec{r}, t_0)$ is the value of pionium wave function at this time. Then at $t > t_0$

$$\psi(\vec{r}, t; \{\vec{r}_i(t_0)\}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0; \{\vec{r}_i(t_0)\}) \psi_i(\vec{r}_0, t_0) d\vec{r}_0, \quad (9)$$

where G is the Green function of Eq. (1).

According to [9], it can be expressed in terms of the path integral

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0; \{\vec{r}_i(t_0)\}) = \int D\vec{r}(t) \exp(iS), \quad (10)$$

with

$$S = S_0 + S_1, \quad (11)$$

$$S_0 = \int_{t_0}^t dt' L_0(\bar{v}(t'), \bar{r}(t')), \quad S_1 = - \int_{t_0}^t dt' V(\bar{r}(t'), t'), \quad (12)$$

$$L_0(\bar{v}(t'), \bar{r}(t')) = \mu \bar{v}^2(t')/2 - V_0(\bar{r}(t')), \quad (13)$$

$$\bar{v}(t') = d\bar{r}(t')/dt'.$$

It can be shown (see [12]) that

$$S_1 = - \sum_i \left\{ \chi(\bar{b}_i + \bar{s}(t_i)/2) - \chi(\bar{b}_i - \bar{s}(t_i)/2) \right\} \times \vartheta(t - t_i), \quad (14)$$

where

$$\chi(\bar{b}_\pm) = \frac{e}{v_0} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left(\sqrt{\bar{b}_\pm^2 + z^2} \right) dz, \quad (15)$$

$$\bar{b}_\pm = \bar{b}_i \pm \frac{\bar{s}(t_i)}{2}, \quad t_i = t_0 + \frac{\bar{v}_0 \cdot \bar{r}_i(t_0)}{v_0^2}, \quad (16)$$

$$\bar{b}_i = \bar{r}_i(t_0)_\perp = \bar{r}_i(t_0) - \frac{\bar{v}_0 \cdot \bar{r}_i(t_0)}{v_0^2} \cdot \bar{v}_0, \quad (17)$$

$$\bar{s}(t_i) = \bar{r}(t_i)_\perp = \bar{r}(t_i) - \frac{\bar{v}_0 \cdot \bar{r}_i(t_0)}{v_0^2} \cdot \bar{v}_0, \quad (18)$$

the Heavyside step function $\vartheta(t)$ is 0 for $t < 0$ and 1 for $t > 0$.

Substituting (10)-(18) into (8) and performing the averaging over the "frozen" positions of the target atoms with the help of the prescription of [10, 11], one can get the following representation for the density matrix:

$$\rho(\bar{r}, \bar{r}'; t) = \int \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}'; \bar{r}_0, \bar{r}'_0; t, t_0) \times \psi_i(\bar{r}_0, t_0) \psi_i^*(\bar{r}'_0, t_0) d\bar{r}_0 d\bar{r}'_0, \quad (19)$$

with

$$\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}'; \bar{r}_0, \bar{r}'_0; t, t_0) = \int D\bar{r}(t) D\bar{r}'(t) \exp(i\tilde{S}_0 - W), \quad (20)$$

$$\bar{S}_0 = \int_{t_0}^t dt' \{ L_0(\bar{v}(t'), \bar{r}(t')) - L_0(\bar{v}'(t'), \bar{r}'(t')) \}, \quad (21)$$

$$W = v_0 \gamma n_0 \int_{t_0}^t dt' \Omega(\bar{s}(t'), \bar{s}'(t')), \quad (22)$$

$$\Omega(\bar{s}(t'), \bar{s}'(t')) = \int d^2b \left\{ 1 - \exp \left(i\Phi(\bar{b}, \bar{s}(t'), \bar{s}'(t')) \right) \right\}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{b}, \bar{s}(t'), \bar{s}'(t')) &= \chi(\bar{b} + \bar{s}(t')/2) - \chi(\bar{b} - \bar{s}(t')/2) \\ &- \chi(\bar{b} + \bar{s}'(t')/2) + \chi(\bar{b} - \bar{s}'(t')/2). \end{aligned} \quad (24)$$

Here, n_0 is the number of atoms in the unite volume of target at it's rest frame, \bar{s} and \bar{s}' are the transverse parts of the vectors \bar{r} and \bar{r}' .

From Eqs. (19)-(22) it easily derive (see [9]) the following equation for the density matrix:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \rho(\bar{r}, \bar{r}'; t)}{\partial t} &= H_0(\bar{r}) \rho(\bar{r}, \bar{r}'; t) - H_0(\bar{r}') \rho(\bar{r}, \bar{r}'; t) \\ &- i v_0 \gamma n_0 \Omega(\bar{s}, \bar{s}') \rho(\bar{r}, \bar{r}'; t), \end{aligned} \quad (25)$$

where the last operator term describes the Coulomb interaction between EA and the target atoms with account of all multiphoton exchanges. Using a generalized optical potential of the form $V_{opt}(\bar{s}, \bar{s}') = k \Omega(\bar{s}, \bar{s}')$, where $k = -i v_0 \gamma n_0$, we can represent this term as $V_{opt} \rho(t)$.

The form of Eq. (25) is similar to the form of Eq. (116) in Ref. [13] describing the internal dynamics of multilevel atoms in laser fields, where the last term $\Gamma \rho$ describes the contribution of the spontaneous relaxation.

The equations of motion for the density matrix elements

$$\rho_{ik} = \int \psi_i^*(\bar{r}) \psi_k(\bar{r}') \rho(\bar{r}, \bar{r}') d\bar{r} d\bar{r}' \quad (26)$$

looks like as follows:

$$\frac{\partial \rho_{ik}(t)}{\partial t} = i \Delta_{ik} \rho_{ik}(t) - v_0 \gamma n_0 \sum_{l,m} \Omega_{ik,lm} \rho_{lm}(t), \quad (27)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_{ik} &= \varepsilon_k - \varepsilon_i, \\ \Omega_{ik,lm} &= \int \psi_i^*(\bar{r}) \psi_l(\bar{r}) \psi_k(\bar{r}') \psi_m^*(\bar{r}') \Omega(\bar{s}, \bar{s}') d\bar{r} d\bar{r}', \end{aligned} \quad (28)$$

the EA wave functions $\psi_{i(k)}$ and the binding energies $\varepsilon_{i(k)}$ obey the Schrödinger equation

$$H_0 \psi_{i(k)} = \varepsilon_{i(k)} \psi_{i(k)}. \quad (29)$$

Taking into account the lifetime τ_i of the EA, we can obtain

$$\frac{\partial \rho_{ik}(t)}{\partial t} = \left[i(\varepsilon_k - \varepsilon_i) - \frac{1}{2}(\Gamma_i + \Gamma_k) \right] \rho_{ik}(t) - v_0 \gamma n_0 \sum_{l,m} \Omega_{ik,lm} \rho_{lm}(t), \quad (30)$$

where $\Gamma_{i(k)} = 1/\tau_{i(k)}$ is the EA levels width (for details see [5]).

An application of the general formalism discussed here and in refs. [5, 6] to the DIRAC experiment is considered in the paper [7].

Acknowledgments

The authors are grateful to Leonid Nemenov and Leonid Afanasyev for stimulating interest to the work and useful comments.

References

- [1] Adeva B, Afanasyev L, Benayoun M *et al* *J. Phys.* 2004 **G30** 1929
Adeva B, Afanasyev L, Benayoun L *et al* *Phys. Lett.* 2005 **B619** 50
- [2] Adeva B *et al* 1995 *Lifetime measurement of $\pi^+\pi^-$ atoms to test low energy QCD predictions* (Proposal to the SPSLC, CERN/SPSLC 95-1, SPSLC/P 284, Geneva)
- [3] Nemenov L 1985 *Yad. Fiz.* **41** 980
Nemenov L 1985 *Phys. Atom. Nucl.* **41** 629
- [4] Afanasyev L G and Tarasov A V 1996 *Yad. Fiz.* **59** 2212
Afanasyev L G and Tarasov A V 1996 *Phys. Atom. Nucl.* **59** 2130
- [5] Voskresenskaya O 2003 *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **36** 3293
- [6] Tarasov A and Voskresenskaya O in: Gasser G, Rusetsky A and Schacher J (Eds.) *Proc. Int. Workshop on Hadronic Atoms "HadAtom03"* Trento Italy October 13-17 2003 ArXiv:hep-ph/0401204
- [7] Afanasyev L, Santamarina S, Tarasov A, and Voskresenskaya O 2004 *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **37** 4749
- [8] Afanasyev L, Tarasov A, and Voskresenskaya O 2002 *Phys. Rev. D* **65** 096001
- [9] Feynman R and Hibbs A 1965 *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill)
- [10] Lyuboshits V L and Podgoretsky M I 1981 *JETP* **81** 1556
- [11] Akhiezer A I and Shul'ga N F 1993 *High-Energy Electrodynamics in Matter* (Moscow: Nauka) 344
- [12] Raufeisen J, Tarasov A, and Voskresenskaya O 1999 *Eur. Phys. J.* **A5** 173
- [13] Chang S and Minogin V 2002 *Physics Reports* **365** 65

Dynamics of the Ponium with the Density Matrix Formalism*

L Afanasyev[§], C Santamarina[†], A Tarasov[§] and O Voskresenskaya[§]

[†] Institut für Physik, Universität Basel, 4056 Basel, Switzerland

[§] Joint Institute for Nuclear Research, 141980 Dubna, Moscow Region, Russia

Abstract. The evolution of ponium, the $\pi^+\pi^-$ hydrogen-like atom, while passing through matter is solved within the density matrix formalism in the first Born approximation. We compare the influence on the ponium break-up probability between the standard probabilistic calculations and the more precise picture of the density matrix formalism accounting for interference effects. We focus our general result in the particular conditions of the DIRAC experiment at CERN.

PACS numbers: 34.50.-s, 32.80.Cy, 36.10.-k, 13.40.-f

1. Introduction

The evolution of ponium, the hydrogen-like atom formed by a $\pi^+\pi^-$ pairs, in a material target has been thoroughly studied in the recent years [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] due to its crucial implications in the DIRAC-PS 212 experiment [8]. This experiment is devoted to measure the lifetime of ponium, intimately linked to the strong interaction scattering lengths, as we will see in section 2, testing the predictions of the Chiral Perturbation Theory on these magnitudes.

The transport of ponium in mater has been always treated using a classic probabilistic picture neglecting the quantum mechanics interference between degenerated states with the same energy. In the case of hydrogen-like atoms this is of particular importance since the accidental degeneracy of the hamiltonian increases the amount of states among which the interference can be significant.

In [9] the density matrix formalism has been used to propose a new set of equations for the ponium evolution accounting for the interference effects. In this work we have solved these equations and analyzed the consequences for the framework of DIRAC experiment.

2. The Problem of Ponium in Matter

Due to the short lifetime of the pion, ponium, the hydrogen-like $\pi^+\pi^-$ atom can not be produced at rest in the laboratory frame. However, ponium can be originated in collisions of high-energy projectiles with a fixed target. The production cross section is given in [10]:

$$\frac{d\sigma_i^A}{d\vec{P}} = (2\pi)^3 |\psi_i(0)|^2 \frac{E}{M} \frac{d\sigma_s^0}{d\vec{p}d\vec{q}} \Big|_{\vec{p}=\vec{q}=\vec{P}/2}, \quad (1)$$

* J. Phys. B: At. Mol. Phys. 37 (2004) 4749. Copyright © 2004 IOP Publishing Ltd. Reproduced with kind permission of IOP Publishing Ltd.

where the rightmost term accounts for the production of π^+ and π^- pairs at equal momenta ($\vec{p} = \vec{q}$).

The state of pionium is defined by the center of mass momentum \vec{P} and the eigenstate quantum numbers, n_i , l_i and m_i , of the hydrogen-like hamiltonian. For simplicity, in this work we have chosen to work with monochromatic atoms of 4.6 GeV/c, the mean value of laboratory momentum of pionium in DIRAC, moving in the z axis direction. The effect of using the experimental pionium laboratory momentum spectrum is small as shown in [7]. The yield of a particular state is proportional to its wave function squared at the origin. It has been shown [11] that the effect of the strong interaction between the two pions of the atom significantly modifies $|\psi_i(0)|$ in comparison to the pure Coulomb wave function. However, the ratio between the production rate in different states has been demonstrated to be kept as for the Coulomb wave functions [12]. Thus, considering that the Coulomb functions obey

$$|\psi_i^{(C)}(0)|^2 = \begin{cases} 0 & \text{if } l_i \neq 0, \\ \frac{(\alpha M_\pi/2)^3}{\pi n_i^3} & \text{if } l_i = 0, \end{cases} \quad (2)$$

we see that only S states are created following the $1/n_i^3$ law.

The atom moves in a fixed thickness target disposed in the Oz axis and considered infinite in the transverse (x, y) coordinates. The target is made of a chemically pure material like Nickel, Platinum or Titanium. Our goal is to know the population probability of every bound state as a function of the position in the target, z , and from this extract other results as the break-up probability. Usually a classical approach is used to solve this problem [2, 6]. It consists of considering the total σ_i^{tot} and transition between two discrete states $\sigma_{i,l}$ cross sections for a pionium-target atom scattering and apply the probabilistic evolution equation:

$$\frac{dP_i(z)}{dz} = -\frac{1}{\beta\gamma}\Gamma_i P_i(z) - n_0 \sum_l c_{i,l} P_l(z), \quad (3)$$

where $P_i(z)$ is the classical probability for the atom to be in the i state, $\beta\gamma = 16.48$ the Lorentz center of mass to laboratory factor for $P = 4.6$ GeV/c, n_0 is the number of target atoms per unit of volume, and $c_{i,l}$ are the transition coefficients.

The value of n_0 is a function of the density of the target, ρ , the Avogadro number, N_0 , and the atomic mass of the target atoms, A :

$$n_0 = \frac{\rho N_0}{A}, \quad (4)$$

while the transition coefficients depend on the pionium-target atom cross sections as:

$$c_{i,l} = \delta_{i,l} \sigma_i^{tot} - \sigma_{i,l}. \quad (5)$$

The pionium decay is strongly dominated (BR > 99% [10]) by the $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^0\pi^0$ reaction. Taking this into account, the width of the i state is proportional to the isospin 0 and isospin 2 pion-pion scattering lengths difference [14]:

$$\Gamma_i = \frac{16\pi}{9} \sqrt{\frac{M_\pi^2 - M_{\pi^0}^2 - \frac{1}{4}M_\pi^2 \alpha^2}{M_\pi}} (a_0^0 - a_0^2)^2 (1 + \delta_\Gamma) |\psi_i^{(C)}(0)|^2, \quad (6)$$

where M_π and M_{π^0} are the masses of the charged and the neutral pion and $\delta_\Gamma = 0.058$ the Next to Leading Order correction that includes the effect of the strong interaction between the two pions. Of course, the width of a state holds $\Gamma_i = \tau_i^{-1}$ where τ_i is the corresponding

lifetime of the state. Due to (2) we can see that pionium only decays from S states and the lifetime of any S state is related to the lifetime of the ground state:

$$\tau_{n00} = n^3 \tau. \quad (7)$$

The lifetime of pionium is hence the only parameter to be inputted in the evolution equation and can be related to any of its outputs. In particular we will link it to the break-up probability. The experimental result of DIRAC will be used to test with 5% accuracy the accurate Chiral Perturbation Theory prediction of $a_0^0 - a_0^2 = 0.265 \pm 0.004$ which leads to the lifetime value of $\tau = (2.9 \pm 0.1) \cdot 10^{-15}$ s [15].

3. The Density Matrix Evolution Equation

Equation (3) has been accurately solved obtaining the eigenvalues and the eigenvectors [2] and also with Monte Carlo [7] for the bound states with $n < 8$, which is enough to precisely calculate the break-up probability as explained in [7]. However, the work of Voskresenskaya [9] demonstrates that the use of the classic probabilistic picture might be inaccurate. This is because (3) neglects the quantum interference between the pionium states during their passage through the target.

A more precise description of the system dynamics is given in terms of the density matrix ρ_{ik} . The evolution equation in this formalism is given by [9]:

$$\frac{\partial \rho_{ik}}{\partial z} = \frac{1}{\beta \gamma} \left[i(\varepsilon_k - \varepsilon_i) - \frac{1}{2}(\Gamma_i + \Gamma_k) \right] \rho_{ik}(z) - n_0 \sum_{l,m} \Omega_{ik,lm} \rho_{lm}(z), \quad (8)$$

where ε_k indicates the bounding energy of the k state and $\Omega_{ik,lm}$ stands for the transition coefficients matrix. This equation reduces to (3), identifying $\rho_{ii}(z) = P_i(z)$, if the $\Omega_{ik,lm}$ crossed terms obeying $i \neq k$ or $l \neq m$ were zero.

The goal of this work is to solve this equation and determine how it corrects (3) for the particular conditions of DIRAC experiment, namely for the result of the break-up probability.

4. The Matrix Elements

To calculate the matrix elements $c_{i,l}$ and $\Omega_{ik,lm}$ we have applied the coherent pure electrostatic first Born approximation approach. Even though it is known that relativistic and multiphoton exchange must be accounted to achieve the precision of 1% [7] our goal was to check whether quantum interference is a relevant effect. For this we will show that pure electrostatic first Born approximation is enough.

The expression for the pionium-target cross sections in the electrostatic first Born approximation, used in the classical picture, was obtained by S. Mrówczyński time ago [1]:

$$\sigma_i^{tot} = \frac{2}{\beta^2} \int |U(q)|^2 [1 - F_i^i(\vec{q})] d^2q, \quad (9)$$

$$\sigma_{i,l} = \frac{1}{\beta^2} \int |U(q)|^2 \left| F_i^l \left(\frac{\vec{q}}{2} \right) - F_i^l \left(-\frac{\vec{q}}{2} \right) \right|^2 d^2q, \quad (10)$$

where q is the transferred momentum between the target and the pionic atoms. The cross section does only depend on the two transverse coordinates of the momentum due to the symmetry of the collision with respect to the scattering axis. We have chosen the Fourier transform of the

target atom potential $U(q)$ to be the Molière parameterization for the solution of the Thomas-Fermi equation [16]:

$$U(q) = 4\pi Z\alpha \left(\frac{0.35}{q^2 + q_0^2} + \frac{0.55}{q^2 + 16q_0^2} + \frac{0.10}{q^2 + 400q_0^2} \right), \quad q_0 = \frac{0.3Z^{1/3}}{0.885a_0}, \quad (11)$$

being $a_0 = 0.529 \times 10^{-28}$ cm the Bohr radius of Hydrogen, α the fine structure constant and Z the atomic number of the target atoms. The $F_i^l(q)$ are the pionium form factors:

$$F_i^l(\vec{q}) = \int \psi_i^*(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} \psi_i^*(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (12)$$

calculated in [2] and [3]. In this work we shall use the code of [17] based on the result of [2].

The equivalent of (5) for the $\Omega_{ik,lm}$ elements in the density matrix formalism is given by:

$$\Omega_{ik,lm} = \Omega_{ik,lm}^{(1)} - \Omega_{ik,lm}^{(2)}, \quad (13)$$

where:

$$\begin{aligned} \Omega_{ik,lm}^{(1)} = & \frac{\delta_{k,m}}{2\beta^2} \int |U(q)|^2 [2\delta_{i,l} - F_i^l(\vec{q}) - F_i^l(-\vec{q})] d^2q + \\ & + \frac{\delta_{i,l}}{2\beta^2} \int |U(q)|^2 [2\delta_{k,m} - F_k^m(\vec{q}) - F_k^m(-\vec{q})] d^2q, \end{aligned} \quad (14)$$

plays the role of the total cross section, while

$$\begin{aligned} \Omega_{ik,lm}^{(2)} = & \frac{1}{\beta^2} \int |U(q)|^2 \left[F_i^l \left(\frac{\vec{q}}{2} \right) - F_i^l \left(-\frac{\vec{q}}{2} \right) \right] \times \\ & \times \left[F_k^m \left(\frac{\vec{q}}{2} \right) - F_k^m \left(-\frac{\vec{q}}{2} \right) \right]^* d^2q, \end{aligned} \quad (15)$$

would be the analogue of the transition cross section. In fact $\Omega_{ik,lm}^{(1)}$ becomes the total cross section if $i = k = l = m$ and $\Omega_{ik,lm}^{(2)}$ the transition cross section if $i = k$ and $l = m$.

Equations (14) and (15) are our main tool for the numerical calculations and their development from the original formulas of [9] can be followed in Appendix A.

4.1. Selection Rules and Transition Elements Examples

As pointed out in [9], and due to the properties of the form factors under the parity transformation, the $\Omega_{ik,lm}$ coefficients are different from zero only if:

$$m_i - m_k - m_l + m_m = 0, \quad l_i - l_k - l_l + l_m = 2s, \quad (16)$$

where we should remember that $m_{i(k,l,m)}$ and $l_{i(k,l,m)}$ are the magnetic and orbital quantum numbers of the states $|i(k,l,m)\rangle$. The index s is an arbitrary integral number.

For the election of the Oz axis as the quantization axis the transitions between states of different z -parity are strongly suppressed [2]. This means that only states with even $l - m$ will be populated since pionium is produced in S states only. This, together with (16) means that:

$$\rho_{ik}(z) \neq 0 \quad \text{if} \quad m_i = m_k, \quad l_i = l_k + 2s. \quad (17)$$

This rule could be broken by the complex coefficient in (8):

$$i \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_i)}{\beta\gamma},$$

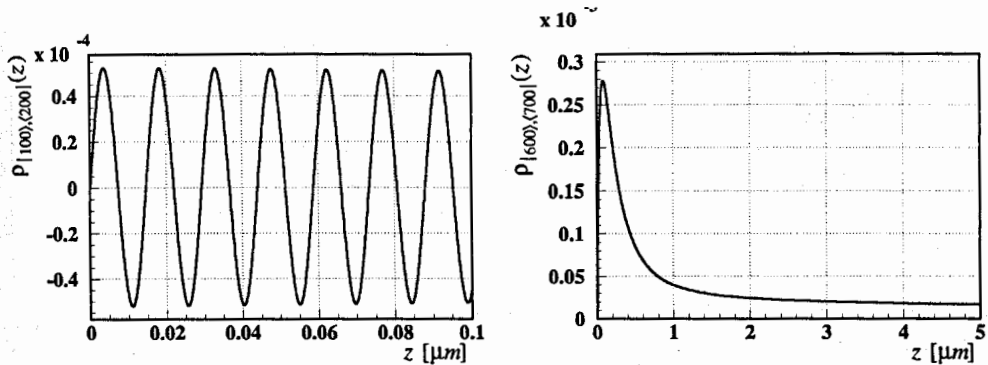


Figure 1. The plots shows the solution of (8) for $\rho_{|100\rangle\langle 200|}$, oscillating with high frequency around 0, and $\rho_{|600\rangle\langle 700|}$, constantly over 0 in a much larger range.

which produces an oscillatory term in the solutions. However, for the ground and lowest excited states the condition:

$$n_0 |\Omega_{ik,ik}| \ll \frac{|\varepsilon_k - \varepsilon_i|}{\beta\gamma}$$

holds and the $\rho_{ik}(z)$ solution oscillates many times in a small interval, compared to the electromagnetic transition range (given by $n_0 |\Omega_{ik,ik}|$) and can be considered to average as zero:

$$\rho_{ik}(z) \approx 0.$$

There is an exception if the i and k states belong to the same shell since the energy of the hydrogen-like system does only depend on the principal quantum number. In this case $\varepsilon_k - \varepsilon_i = 0$. Hence, for the low energy states, we can complete relation (17) as:

$$\rho_{ik}(z) \neq 0 \quad \text{if} \quad \varepsilon_i = \varepsilon_k (n_i = n_k), \quad m_i = m_k, \quad l_i = l_k + 2s. \quad (18)$$

On the other hand, if the principal quantum numbers of the i and k states hold $n_{i,k} \gtrsim 6$, then

$$n_0 |\Omega_{ik,ik}| \sim \frac{|\varepsilon_k - \varepsilon_i|}{\beta\gamma}$$

and the solution for $\rho_{ik}(z)$ is not zero even though i and k are not states from the same shell.

In figure 1 we can see that whereas $\rho_{|100\rangle\langle 200|}(z)$ oscillates more than six times in $0.1 \mu\text{m}$ $\rho_{|600\rangle\langle 700|}$ does not oscillate at all in a wide range.

As an example of the matrix elements we consider the subspace formed by the $|211\rangle$, $|300\rangle$ and $|320\rangle$ states. The Ω matrix restricted to this subspace is shown in table 1. We can see that at least for the $|320\rangle\langle 300|$ mixed state the matrix elements are of the same order of magnitude as for the same shell pure states.

5. Solving the System

We have numerically solved the differential equation systems (3) and (8) using the Runge-Kutta method [18]. Finding the eigenvalues, as in [2], would be too lengthy due to the size of the

Table 1. Ω matrix elements in the $|211\rangle, |300\rangle, |320\rangle$ subspace. Units are 10^{-20} barn.

$\Omega_{ i\rangle\langle k , l\rangle\langle m }$	$ 211\rangle\langle 211 $	$ 300\rangle\langle 300 $	$ 320\rangle\langle 300 $	$ 320\rangle\langle 320 $
$ 211\rangle\langle 211 $	-4.66	0.044	-0.083	0.234
$ 300\rangle\langle 300 $	0.044	-18.2	2.41	0.
$ 320\rangle\langle 300 $	-0.083	2.41	-13.7	2.41
$ 320\rangle\langle 320 $	0.234	0.	2.41	-9.10

density matrix system. The Monte-Carlo method of [6] cannot be applied to the density matrix formalism since the system (8) does not obey:

$$\Omega_{ik,ik} \geq \sum_{lm \neq ik} |\Omega_{ik,lm}|. \quad (19)$$

We have considered a Nickel 95 μm target and a monochromatic 4.6 GeV/c atom sample. The lifetime of the ground state of ponium was supposed to be $\Gamma^{-1} = 2.9 \cdot 10^{-15}$ s according to the theoretical prediction [15]. The initial conditions are given by:

$$\begin{aligned} P_i(0) = \rho_{ii}(0) &= n_i^{-3}/\zeta(3) && \text{if } l_i = 0, \\ P_i(0) = \rho_{ij}(0) &= 0 && \text{otherwise,} \end{aligned} \quad (20)$$

here $\zeta(3) = \sum n^{-3} \approx 1.202$. The system has been restricted to the bound states with $n \leq 7$. This means 84 mixed states and 353088 Ω matrix elements different from zero. Cutting the number of considered states does only slightly affect the solution of the last two cores taken into account (in this case states with $n = 6$ and $n = 7$) as shown in [6].

To achieve a very good accuracy in the final results we have considered a sequence of step lengths in the numerical integration of the system:

$$h = 2 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-3}, 0.5 \cdot 10^{-3}, 0.25 \cdot 10^{-3}, 0.1 \cdot 10^{-3} [\mu\text{m}]$$

and made a polynomial extrapolation to the limit $h = 0$ [18].

As we will explain below we are mainly interested in the averaged integrals of $\rho_{ii}(z)$ and $P_i(z)$ over the target thickness W :

$$P_{dsc}^i = \frac{\int_0^W \rho_{i,i}(z) dz}{W}. \quad (21)$$

The P picture in this equation is restored by changing $\rho_{ii}(z) \rightarrow P_i(z)$. In table 2 the P_{dsc} results are shown as a function of the principal and angular quantum number summed over the magnetic quantum number m for a 95 μm Nickel target. The differences are not very large, especially for the ground and lowest excited states. However, for some particular states the difference can be up to 20%. In figure 3 we see the discrepancy for the case of the $|320\rangle$ state.

5.1. Obtaining the Break-up Probability

Our goal is to obtain the break-up probability (P_{br}) of ponium in the target. As we have seen in the previous sections the atoms in the target can suffer transitions between bound states and annihilate. However, they can also be transferred, in a collision with a target atom, into a continuum state. The coefficients $c_{i,l}$ and $\Omega_{ik,lm}$ accounting for transitions between discrete and continuum states are more difficult to compute than the discrete-discrete ones since the

Table 2. Summed $P_{dsc}^{nl} = \sum_m P_{dsc}^{nlm}$ results in the probabilistic (P) and density matrix (ρ) pictures. The average is over $W = 95 \mu m$ and the target material is Nickel.

P_{dsc}^{nl}	P/ρ	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
n=1	P	0.072854					
	ρ	0.072860					
n=2	P	0.0050676	0.008500				
	ρ	0.0050878	0.008538				
n=3	P	0.00087163	0.0016366	0.0020617			
	ρ	0.00086909	0.0017234	0.0020250			
n=4	P	0.00024899	0.0004803	0.0006270	0.0007326		
	ρ	0.00024620	0.0005242	0.0006445	0.0007028		
n=5	P	0.000092377	0.00018015	0.00023838	0.00028247	0.00031200	
	ρ	0.000089072	0.00019899	0.00025137	0.00027925	0.00029343	
n=6	P	0.000038357	0.000075133	0.000099834	0.00011906	0.000131889	0.00014113
	ρ	0.000034640	0.000079850	0.000102429	0.00011493	0.000121041	0.00012520
n=7	P	0.000015300	0.000029939	0.000039634	0.000047316	0.000052490	0.000057376
	ρ	0.000013706	0.000031028	0.000039316	0.000043479	0.000048089	0.000045044

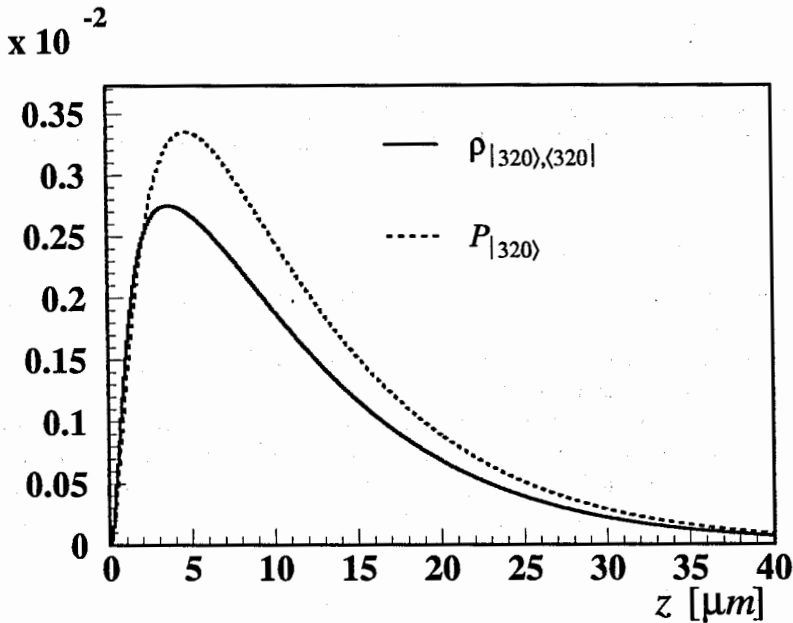


Figure 2. The solution of (3) and (8) for the $|320\rangle$ state.

atomic form factors have a more complicated expression [3]. However, as shown in [6] for the case of the probabilistic picture, the direct calculation of break-up probability from the systems solutions is not satisfactory since it decreases very slowly as a function of the principal quantum number of the broken discrete state and only a finite number of shells ($n \leq 7$) are considered when solving either (3) and (8). We would have to guess the break up probability for any shell with $n > 7$ and make a large error in the total break-up probability determination.

The standard strategy to obtain break-up probability consists of calculating the probability of the atom to leave the target in a discrete state (P_{dsc}) and the probability of annihilation

(P_{anh}) and make use of the relation:

$$1 = P_{br} + P_{dsc} + P_{anh}. \quad (22)$$

As both P_{dsc} and P_{anh} quickly decrease with n we have an accurate result taking into account only those events with $n \leq 7$. A small correction will be introduced for $P_{dsc}^{n>7}$.

In the experimental conditions the atoms are not created at the target beginning but uniformly distributed along the target thickness. The probability that the atom leaves the target in a discrete state can be however linked to the solutions under (20) initial conditions by:

$$P_{dsc} = \sum_i \frac{\int_0^W \rho_{ii}(W-z)dz}{W} = \sum_i \frac{\int_0^W \rho_{ii}(z)dz}{W}, \quad (23)$$

where W stands for the target thickness (of $95 \mu m$ in our case).

The annihilation probability is a little bit more difficult to calculate. If the atom is created in z_0 , the probability that it flies to z and annihilates is given by $\Gamma_i \rho_{ii}$. But z can be any value between z_0 and the target end W . Meanwhile, the atom is randomly created between 0 and W with uniform distribution, then the annihilation probability is given by:

$$P_{anh} = \sum_i \frac{\Gamma_i}{W} \int_0^W \int_{z_0}^W \rho_{ii}(z-z_0) dz dz_0 = \sum_i \frac{\Gamma_i}{W} \int_0^W (W-z) \rho_{ii}(z) dz. \quad (24)$$

Of course the probabilistic picture is restored by substituting $\rho_{ii}(z)$ by $P_i(z)$ in (23) and (24).

As we did in (21) for the P_{dsc}^i probability we can define the annihilation probability from a certain state as:

$$P_{anh}^i = \frac{\Gamma_i}{W} \int_0^W (W-z) \rho_{ii}(z) dz, \quad (25)$$

where again the replacement $\rho_{ii}(z) \rightarrow P_i(z)$ recovers the P picture. Of course $P_{anh}^i = 0$ for any state with $l_i \neq 0$.

The results for the annihilation probability from the S states up to $n = 7$ are shown in table 3 and complete those of the P_{dsc} in table 2.

In figure 3 we can see the dependence of P_{dsc}^n and P_{anh}^n on the principal quantum number. The results have been summed over every shell bound states. We can check that whereas P_{anh}^n quickly converges to zero, and can be neglected for $n_i > 4$, P_{dsc}^i diminishes more slowly. This leads to introduce an extrapolation for $P_{dsc}^{n \geq 7}$ [2]:

$$P_{dsc}^{n \geq 7} = \frac{a}{n^3} + \frac{b}{n^5}, \quad (26)$$

where a and b are obtained by fitting P_{dsc}^n at $n = 5$ and $n = 6$. The extrapolation is also used for $n = 7$ because not considering the next shells in the systems distorts this shell solutions.

The extrapolation results are summed over n and, together with $P_{dsc}^{n < 7}$ and P_{anh} , subtracted to one to calculate the break-up probability:

$$P_{br} = 1 - P_{anh} - P_{dsc}^{n < 7} - P_{dsc}^{n \geq 7} \quad (27)$$

obtaining, for our particular example, of 2.9×10^{-15} s lifetime atoms in a Ni $25 \mu m$ target: $P_{br} = 0.459254$ in the probabilistic picture and $P_{br} = 0.459268$ in the density matrix formalism. The other probabilities are shown in table 4.

Table 3. P_{anh}^n results in the P and ρ pictures. The average is over $W = 95 \mu\text{m}$ and the target material is Nickel. The lifetime of pionium was assumed to be 2.9×10^{-15} s.

n	P_{anh}^n	P/ρ
$n = 1$	P	0.072854
	ρ	0.072860
$n = 2$	P	0.0050676
	ρ	0.0050878
$n = 3$	P	0.00087163
	ρ	0.00086909
$n = 4$	P	0.00024899
	ρ	0.00024620
$n = 5$	P	0.000092377
	ρ	0.000089072
$n = 6$	P	0.000038357
	ρ	0.000034640
$n = 7$	P	0.000015300
	ρ	0.000013706

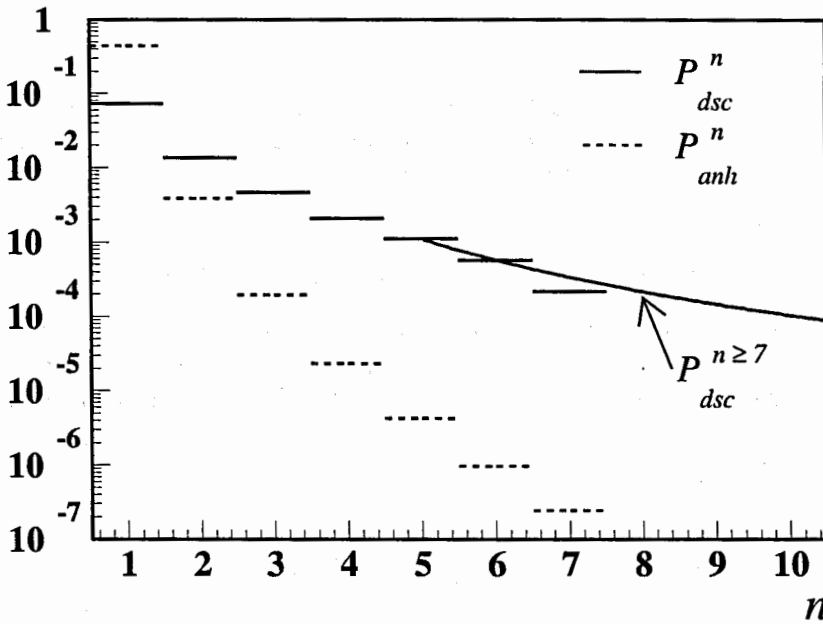


Figure 3. Dependence of P_{dsc}^i and P_{anh}^i averaged over every shell on the principal quantum number. The extrapolation of (26) is also shown.

Table 4. Probability results in the P and ρ pictures. The average is over $W = 95 \mu\text{m}$ and the target material is Nickel. The lifetime of pionium was assumed to be 2.9×10^{-15} s.

Picture	P_{br}	P_{anh}	$P_{dsc}^{n < 7}$	$P_{dsc}^{n \geq 7}$
P	0.459254	0.444536	0.0947916	0.001418
ρ	0.459268	0.444575	0.0949106	0.001245

6. Discussion and Conclusions

We have checked that in the conditions of the DIRAC experiment the effect of the quantum interference between states does not change the result of the break-up probability of pionium in the target. Hence, the results obtained in the classical picture are accurate enough to safely perform the experimental measurement.

The unchanged result of break-up result takes place despite the fact that for some discrete states, as $|320\rangle$, the effect of interference can significantly change the population of the state up to 20% levels. However, the most affected states are very unpopulated and hence not relevant for the final results.

The situation could change if the initial conditions were not that most atoms are created in the ground state. The later is non degenerated and interferences only show-up after a first transition. In any case, we have checked what would happen if the initial conditions were that all the atoms were created in the $|300\rangle$ state and neither found a significant change with the probabilistic approach. A possible explanation is that while the interference is most likely with states with the same magnetic quantum number m , and comparable with the transition cross sections, the dominant transitions are those that increase l and m in one unit, free of interference with the father state.

Acknowledgments

We would like to thank L Nemenov and L Tauscher D Trautmann for their support. We would also like to thank K Hencken for his help. L Afanasyev, A Tarasov and O Voskresenskaya would like to acknowledge the interesting discussions during the workshop HadAtom03, partially supported by the ECT.

Appendix A. The Ω matrix elements in the First Born Approximation

Let us show how to obtain the discrete matrix elements of the Ω matrix in the first Born approximation from the original equations of [9]. The Ω operator is originally defined as a function of the transverse position of the atom wave functions $\vec{s}_{1,2}$. If we split the operator in two:

$$\Omega(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \Omega^{(1)}(\vec{s}_1, \vec{s}_2) + \Omega^{(2)}(\vec{s}_1, \vec{s}_2), \quad (\text{A.1})$$

its definition will be given by:

$$\Omega^{(1)}(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \int \left[\Gamma(\vec{b}, \vec{s}_1) + \Gamma^*(\vec{b}, \vec{s}_2) \right] d^2b, \quad (\text{A.2})$$

$$\Omega^{(2)}(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = - \int \Gamma(\vec{b}, \vec{s}_1) \Gamma^*(\vec{b}, \vec{s}_2) d^2b. \quad (\text{A.3})$$

In the case of the $\pi^+\pi^-$ -atom the interaction operator of the Glauber theory is given by:

$$\Gamma(\vec{b}, \vec{s}) = 1 - \exp \left[i\chi(\vec{b} - \vec{s}/2) - i\chi(\vec{b} + \vec{s}/2) \right], \quad (\text{A.4})$$

where

$$\chi(\vec{B}) = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sqrt{B^2 + z^2}) dz, \quad (\text{A.5})$$

being $U(\tau)$ the potential of the target atoms given by the inverse Fourier transform of (11).

First of all we are going to re-write $\Omega^{(1)}(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$. For that we split $\Gamma(\vec{b}, \vec{s})$ into its real and imaginary part:

$$\Gamma(\vec{b}, \vec{s}_{1(2)}) = \text{Re } \Gamma(\vec{b}, \vec{s}_{1(2)}) + i \text{Im } \Gamma(\vec{b}, \vec{s}_{1(2)}), \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \text{Re } \Gamma(\vec{b}, \vec{s}_{1(2)}) &= 1 - \cos \left[\chi(\vec{b} - \vec{s}/2) - \chi(\vec{b} + \vec{s}/2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(\vec{b}, \vec{s}_{1(2)}) \Gamma^*(\vec{b}, \vec{s}_{1(2)}), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Im } \Gamma(\vec{b}, \vec{s}_{1(2)}) = -\sin \left[\chi(\vec{b} - \vec{s}/2) - \chi(\vec{b} + \vec{s}/2) \right], \quad (\text{A.8})$$

where the integral over the imaginary part goes to zero:

$$\int \text{Im } \Gamma(\vec{b}, \vec{s}_{1(2)}) d^2b = 0, \quad (\text{A.9})$$

due to the odd nature of the sin function and the even nature of $\chi(\vec{b} \pm \vec{s}/2)$. Taking this into account we can have:

$$\Omega^{(1)}(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{1}{2} \int \left[\Gamma(\vec{b}, \vec{s}_1) \Gamma^*(\vec{b}, \vec{s}_1) + \Gamma(\vec{b}, \vec{s}_2) \Gamma^*(\vec{b}, \vec{s}_2) \right] d^2b. \quad (\text{A.10})$$

Our final goal is to obtain the matrix elements $\Omega_{ik, lm}^{(1,2)}$ defined as:

$$\Omega_{ik, lm}^{(1,2)} = \int \psi_i^*(\vec{r}_1) \psi_l(\vec{r}_1) \psi_k(\vec{r}_2) \psi_m^*(\vec{r}_2) \Omega^{(1,2)}(\vec{s}_1, \vec{s}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2. \quad (\text{A.11})$$

In particular we can define the profile-function $\Gamma_{il}(\vec{b})$:

$$\Gamma_{il}(\vec{b}) = \int \psi_i^*(\vec{r}) \psi_l(\vec{r}) \Gamma_{il}(\vec{b}, \vec{s}) d\vec{r}, \quad (\text{A.12})$$

and its Fourier transform, the amplitude:

$$A_{il}(\vec{q}) = \frac{i}{2\pi} \int e^{i\vec{q}\vec{b}} \Gamma_{il}(\vec{b}) d^2b, \quad (\text{A.13})$$

$$\Gamma_{il}(\vec{b}) = \frac{1}{2\pi i} \int e^{-i\vec{q}\vec{b}} A_{il}(\vec{q}) d^2q. \quad (\text{A.14})$$

It is easy to check that:

$$\Omega_{ik, lm}^{(2)} = - \int \Gamma_{il}(\vec{b}) \Gamma_{km}^*(\vec{b}) d^2b = - \int A_{il}(\vec{q}) A_{km}^*(\vec{q}) d^2q. \quad (\text{A.15})$$

To obtain an analogue of (A.15) for $\Omega_{ik, lm}^{(1)}$ we have to work a little bit. Of course, by definition:

$$\begin{aligned} \Omega_{ik, lm}^{(1)} &= \frac{\delta_{km}}{2} \int \left[\int \psi_i^*(\vec{r}) \psi_l(\vec{r}) \Gamma(\vec{b}, \vec{s}) \Gamma^*(\vec{b}, \vec{s}) d\vec{r} \right] d^2b \\ &\quad + \frac{\delta_{il}}{2} \int \left[\int \psi_k^*(\vec{r}) \psi_m(\vec{r}) \Gamma(\vec{b}, \vec{s}) \Gamma^*(\vec{b}, \vec{s}) d\vec{r} \right]^* d^2b. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

To achieve the final result we will need the completeness equation in the form:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \sum_j \psi_j(\vec{r}) \psi_j^*(\vec{r}'), \quad (\text{A.17})$$

which allows to express the inner integrals in (A.16) in terms of the profile-function $\Gamma_{ij}(\vec{b})$:

$$\begin{aligned} & \int \psi_i^*(\vec{r}) \psi_l(\vec{r}) \Gamma(\vec{b}, \vec{s}) \Gamma^*(\vec{b}, \vec{s}) d\vec{r} = \int \psi_i^*(\vec{r}) \psi_l(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \Gamma(\vec{b}, \vec{s}) \Gamma^*(\vec{b}, \vec{s}') d\vec{r} d\vec{r}' \\ & = \sum_j \left[\int \psi_i^*(\vec{r}) \Gamma(\vec{b}, \vec{s}) \psi_j(\vec{r}) d\vec{r} \right] \left[\int \psi_j^*(\vec{r}') \Gamma^*(\vec{b}, \vec{s}') \psi_l(\vec{r}') d\vec{r}' \right] = \sum_j \Gamma_{ij}(\vec{b}) \Gamma_{lj}^*(\vec{b}), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

where of course we can make the substitution:

$$\int \sum_j \Gamma_{ij}(\vec{b}) \Gamma_{lj}^*(\vec{b}) d^2b = \int \sum_j A_{ij}(\vec{q}) A_{lj}^*(\vec{q}) d^2q, \quad (\text{A.19})$$

to obtain:

$$\Omega_{ik, lm}^{(1)} = \frac{\delta_{km}}{2} \int \sum_j A_{ij}(\vec{q}) A_{lj}^*(\vec{q}) d^2q + \frac{\delta_{il}}{2} \int \sum_j A_{mj}(\vec{q}) A_{kj}^*(\vec{q}) d^2q. \quad (\text{A.20})$$

In the Born approximation

$$A_{il}(\vec{q}) = \frac{1}{\beta} U(\vec{q}) \left[F_i^l \left(\frac{\vec{q}}{2} \right) - F_i^l \left(-\frac{\vec{q}}{2} \right) \right], \quad (\text{A.21})$$

where we find the form factors defined in (12).

Let us try to perform the sum:

$$\begin{aligned} \sum_j A_{ij}(\vec{q}) A_{lj}^*(\vec{q}) & = \sum_j \left[F_i^j \left(\frac{\vec{q}}{2} \right) - F_i^j \left(-\frac{\vec{q}}{2} \right) \right] \left[F_l^j \left(\frac{\vec{q}}{2} \right) - F_l^j \left(-\frac{\vec{q}}{2} \right) \right]^* \\ & = \sum_j \left[\int \psi_i^*(\vec{r}) \left(e^{i\vec{q}\vec{r}/2} - e^{-i\vec{q}\vec{r}/2} \right) \psi_j(\vec{r}) d\vec{r} \right] \left[\int \psi_j^*(\vec{r}') \left(e^{-i\vec{q}\vec{r}'/2} - e^{i\vec{q}\vec{r}'/2} \right) \psi_l(\vec{r}') d\vec{r}' \right] \\ & = \int \psi_i^*(\vec{r}) \left(e^{i\vec{q}\vec{r}/2} - e^{-i\vec{q}\vec{r}/2} \right) \left(e^{-i\vec{q}\vec{r}/2} - e^{i\vec{q}\vec{r}/2} \right) \psi_l(\vec{r}) d\vec{r} \\ & = \int \psi_i^*(\vec{r}) \left(2 - e^{-i\vec{q}\vec{r}} - e^{i\vec{q}\vec{r}/2} \right) \psi_l(\vec{r}) d\vec{r} = 2\delta_{il} - F_i^l(\vec{q}) - F_i^l(-\vec{q}). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

From equations (A.15), (A.16), (A.18), (A.19), (A.21) and (A.22) one can derive the final expressions in the Born approximation:

$$\Omega_{ik, lm} = \Omega_{ik, lm}^{(1)} + \Omega_{ik, lm}^{(2)}, \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \Omega_{ik, lm}^{(1)} & = \frac{\delta_{k,m}}{2\beta^2} \int |U(q)|^2 [2\delta_{i,l} - F_i^l(\vec{q}) - F_i^l(-\vec{q})] d^2q + \\ & + \frac{\delta_{i,l}}{2\beta^2} \int |U(q)|^2 [2\delta_{k,m} - F_k^m(\vec{q}) - F_k^m(-\vec{q})] d^2q, \end{aligned} \quad (\text{14})$$

$$\begin{aligned} \Omega_{ik, lm}^{(2)} & = \frac{1}{\beta^2} \int |U(q)|^2 \left[F_i^l \left(\frac{\vec{q}}{2} \right) - F_i^l \left(-\frac{\vec{q}}{2} \right) \right] \times \\ & \times \left[F_k^m \left(\frac{\vec{q}}{2} \right) - F_k^m \left(-\frac{\vec{q}}{2} \right) \right]^* d^2q. \end{aligned} \quad (\text{15})$$

References

- [1] Mrówczyński S 1987 *Phys. Rev.* **D 36** 1520.
- [2] Afanasyev L G and Tarasov A V 1996 *Phys. of At. Nucl.* **59** 2130.
- [3] Halabuka Z, Heim T A, Trautmann D and Baur G 1999 *Nucl. Phys.* **554** 86.
- [4] Heim T A, Hencken K, Trautmann D and Baur G 2000 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **33** 3583.
Heim T A, Hencken K, Trautmann D and Baur G 2001 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **34** 3763.
- [5] Schumann M, Heim T A, Hencken K, Trautmann D and Baur G 2002 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35** 2683.
- [6] Santamarina C, Schumann M, Afanasyev L G and Heim T A 2003 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **36** 4273.
- [7] Santamarina C 2001 *Detección e medida do tempo de vida media do pionium no experimento DIRAC* Ph. D. Thesis, Universidade de Santiago de Compostela.
- [8] Adeva B *et al* 1995 *Lifetime measurement of $\pi^+\pi^-$ atoms to test low energy QCD predictions* CERN/SPSLC 95-1 (Geneva: CERN); <http://www.cern.ch/DIRAC>
- [9] Voskresenskaya O 2003 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **36** 3293.
- [10] Nemenov L L 1985 *Sov. J. Nucl. Phys.* **41** 629.
- [11] Kuraev E A 1998 *Phys. At. Nucl.* **61** 239.
- [12] Amirkhanov I, Puzynin I, Tarasov A, Voskresenskaya O and Zeinalova O 1999 *Phys. Lett.* **B 452** 155.
- [13] Uretsky J L and Palfrey T R 1961 *Phys. Rev.* **121** 1798.
- [14] Gasser J, Lyubovitskij V E and Rusetsky A 1999 *Phys. Lett.* **B 471** 244.
- [15] Colangelo G, Gasser J and Leutwyler H 2000 *Phys. Lett.* **B 488** 261.
- [16] Molière G 1947 *Z. Naturforsch.* **2a** 133.
- [17] Santamarina C and Saborido J 2003 *Comput. Phys. Commun.* **151** 79.
- [18] Press W, Teukolsky S, Vetterling W and Flannery B 1992 *Numerical Recipes in Fortran 77* 2nd edition, Cambridge University Press.

Lepton pairs production in peripheral collisions of relativistic ions and the problem of regularization *

S.R. Gevorkyan and A.V. Tarasov

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscow Region, 141980 Russia

Abstract

The long-standing problem of multiple photons exchanges in the process of lepton pair production in the Coulomb field of two highly relativistic nuclei is considered. As was shown recently, the probability to produce n lepton pairs is completely determined by the Feynman scattering matrix in the presence of two nuclei. This matrix can be expressed through the scattering matrices associated with individual nuclei in the form of infinite Watson series.

We investigate the problem of infrared divergencies of separate terms of these series and show that for the certain sums of these terms the numerous cancelations lead to infrared stability of the scattering matrix. The prescription is proposed permitting to calculate the yield of lepton pairs with desirable accuracy.

1. Introduction

The interest to the process of lepton pairs production in the Coulomb fields of two highly relativistic ions with charge numbers Z_1 and Z_2

$$Z_1 + Z_2 \rightarrow n(e^+e^-) + Z_1 + Z_2 \quad (1)$$

is aroused mainly by operation of heavy ion colliders as RHIC (Lorentz factor $\gamma = \frac{E}{M} = 100$) and LHC ($\gamma = 3000$). At such energies the cross section of process (1) becomes huge (tens kilobarns at RHIC, hundreds kilobarns at LHC energies) so that its precise knowledge becomes a pressing [1].

For many years the process (1) was considered in lowest order in fine structure constant α i.e. Born approximation [2, 3, 4]. On the other hand in the heavy ions collisions the relevant parameter $Z\alpha$ is not small (for instance, for lead $Z\alpha \approx 0.6$), thus the multiple photons exchanges can be vital. Moreover, the multiplicity and the distribution of lepton pairs produced in the Coulomb fields of two colliding relativistic heavy ions are closely connected to the problem of unitarity which is beyond the Born approximation.

The corrections describing by disconnected vacuum-vacuum diagrams are called "unitarity corrections" because they restore the unitarity of the probability of n pairs production $P_n(b)$ at given impact parameter \vec{b} [6, 8]. As to the multiple photon exchanges between produced leptons and ions Coulomb fields, they are known as the Coulomb corrections (CC) [1].

In the last years a number of works [5–16] have been done on this issue. Very successive and completely the problem of CC and "unitarity" corrections is considered in [8] (see also [12]). It was shown that the probability to produce exactly n pairs $P_n(b)$ in the process (1) is completely determined by the Feynman scattering matrix T in presence of the two nuclei [8]). Using infinite Watson series the matrix T can be expressed through the scattering matrices T_1, T_2 of lepton scattering on individual nuclei. In the case of screened Coulomb potentials (for instance, atoms scattering) one can confined by finite number of terms from Watson expansion thus calculating

*arXiv:hep-ph/09120119.

the probabilities $P_n(b)$ with desired accuracy. Indeed, every item of Watson series begins with the higher order term in α than previous one, so one can inspect the accuracy of calculations.

Nevertheless in the case of pair production by ions, whose Coulomb fields are unscreened the problem of regularization arises. It is well known that the amplitude of lepton pair photo-production off unscreened Coulomb field [17] doesn't depend on the regularization parameter.¹ In perturbation theory [13, 16] the regularization parameter canceled in every term of certain order in fine structure constant. Unfortunately this nice property of perturbation theory is lost, when amplitude of (1) is cast in the form of Watson series. Every term of this series depends on regularization parameter in his own way, so that approaching the parameter to zero leads to the oscillations making the Watson expansion meaningless. On the other hand our experience from perturbation theory gives hope that the full Watson series must be infrared stable, i.e. doesn't depend on the regularization parameter.

We investigate this problem and show how to deal with it. Considering the specific sets of Watson expansion corresponding to finite number of photons exchanges attached to one of the ions (any number exchanges with another ion), we show that as a result of complex cancelations the relevant amplitudes does not depend on regularization parameter. The prescription is proposed, which allows one to calculate the scattering matrix on any two Coulomb centers and thus the full probability with desirable accuracy.

The following notations are used in the paper: e , m are the electron charge and mass; $A_\mu^j(p)$ is the electromagnetic vector potential created by nucleus; γ_μ are Dirac matrices and $\gamma_\pm = \gamma_0 \pm \gamma_z$. We use the light-cone definition of four momenta and coordinates $k_\pm = k_0 \pm k_z$, $x_\pm = x_0 \pm x_z$. Throughout the paper the transverse components of momenta and coordinates are defined as two dimensional vectors. For instance, \vec{b}_j are the impact parameters of ions whereas \vec{x}_i, \vec{k}_i are transverse coordinates and momenta of leptons. The index $j = 1, 2$ is reserved for quantities attached to relevant ions Z_1, Z_2 .

2. Scattering matrix in the presence of two nuclei

As was shown in [8] the probability of n lepton pairs production in the process (1) $P_n(b)$ is completely determined by Feynman scattering matrix T in presence of two nuclei. This matrix can be expressed through the operators relevant to lepton scattering off separate nuclei T_1, T_2 and free Feynman propagator G_F with the help of Watson series.² In short notation the Watson series for scattering on two centers reads

$$T = T_1 + T_2 - T_1 \otimes G_F \otimes T_2 - T_2 \otimes G_F \otimes T_1 + T_1 \otimes G_F \otimes T_2 \otimes G_F \otimes T_1 + T_2 \otimes G_F \otimes T_1 \otimes G_F \otimes T_2 + \dots \quad (2)$$

In Fig. 1 we depicted the possible exchanges in lepton pair production in accordance with various terms of the Watson expansion.³ The thick lines attached to ions Z_1, Z_2 represent the full set of photon exchanges between the lepton (electron or positron) and the ion.

¹The amplitude of lepton scattering in the Coulomb field depends on the regularization parameter in the form of phase factor.

²For detailed discussion of Watson series and difference between retarded and Feynman propagators see [8].

³Later on we begin the numbering from the third term in (2), because in process (1) the two first terms do not contribute.

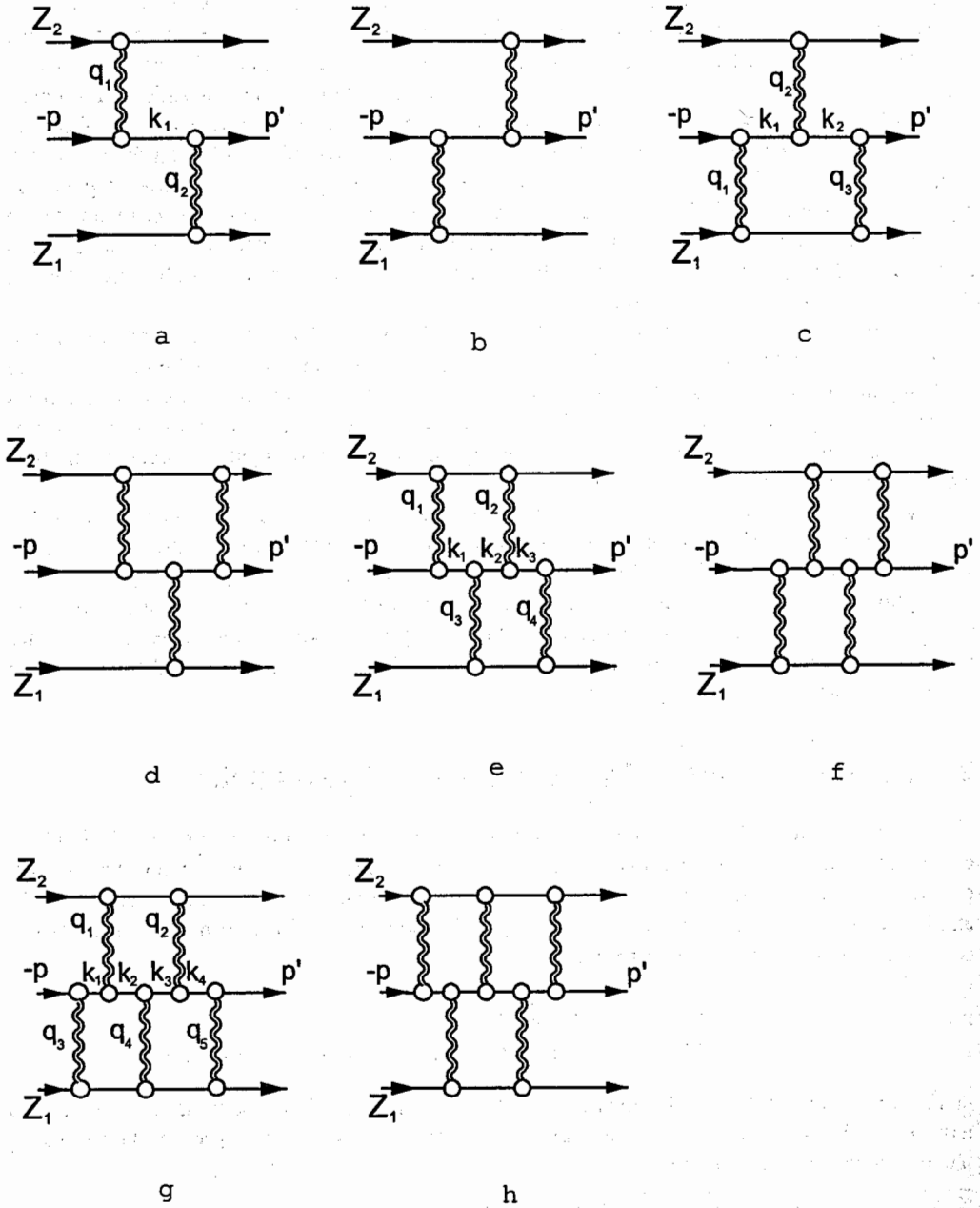


Figure 1: The diagrams relevant to first terms of Watson series.

The single amplitudes $T_j(p', p)$ satisfy the well-known (see e.g. [18]) operator equations

$$T_j = V_j - V_j \otimes G \otimes T_j; \quad V_j(p, p') = e\gamma_\mu A_\mu^j(p - p') \quad (3)$$

These equations can be solved in the case of ultra-relativistic energies. At high energies due to Lorentz contraction the Coulomb field of the nucleus looks like very thin disc, for which the Coulomb potential in moving system takes a simple form. The solution of equation (3) for the Feynman propagators reads [8]:

$$\begin{aligned} T_1(p, p') &= (2\pi)^2 \delta(p_+ - p'_+) [\theta(p_+) f_1^+(\vec{p} - \vec{p}') - \theta(-p_+) f_1^-(\vec{p} - \vec{p}')] \gamma_+; \\ T_2(p, p') &= (2\pi)^2 \delta(p_- - p'_-) [\theta(p_-) f_2^+(\vec{p} - \vec{p}') - \theta(-p_-) f_2^-(\vec{p} - \vec{p}')] \gamma_-; \end{aligned} \quad (4)$$

$$f_j^\pm(\vec{q}) = \frac{i}{2\pi} \int d^2x e^{i\vec{q}\vec{x}} [1 - S_j^\pm(\vec{x}, \vec{b}_j)]; \quad S_j^\pm(\vec{x}, \vec{b}_j) = \exp(\pm i\chi(\vec{x}, \vec{b}_j));$$

$$\chi_j(\vec{x}, \vec{b}_j) = e \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(\sqrt{(\vec{x} - \vec{b}_j)^2 + z^2}) dz. \quad (5)$$

Substituting these expressions in the Watson expansion (2), one can calculate the scattering matrix in the presence of two centers and therefore the probability of process (1). Every consequent term in the Watson series begins with higher order in the parameter $Z\alpha$, which allows one to obtain the probabilities with a desirable precision. This is true for the screened Coulomb potential, for instance in the case of interaction of relativistic atoms. But heavy ion colliders deal with ions, whose Coulomb fields are unscreened and for which the problem of regularization demands special consideration.

3. The regularization of Watson series

The integrals (5) defining the phase shifts χ_j are divergent in the case of unscreened Coulomb potential which is relevant to ion scattering. Let us consider the case of screened potentials with regularization parameter (screening radius)¹, which goes to zero in the final expressions

$$\Phi_j(r) = \lim_{\lambda_j \rightarrow 0} \frac{eZ_j \exp(-\lambda_j r)}{r}. \quad (6)$$

The relevant Coulomb phases reads

$$\chi_j(b) = e \int \Phi_j(\sqrt{b^2 + z^2}) dz = 2Z_j\alpha K_0(b\lambda_j) \rightarrow -2Z_j\alpha(\ln(b\lambda_j) + C). \quad (7)$$

Substitution of the above expressions in the Watson expansion (2) leads to the products of S^\pm -matrix elements some of which do not depend on the regularization parameter, for instance

$$S_j^+(\vec{x}) S_j^-(\vec{x}') = \exp\left(2iZ_j\alpha \ln \frac{|\vec{x}' - \vec{b}_j|}{|\vec{x} - \vec{b}_j|}\right). \quad (8)$$

¹The regularization parameters can vary for different ions thus for every ion we introduce the relevant λ_j .

However the majority of obtained products are oscillating functions of λ_j , which makes the Watson expansion meaningless. On the other hand, our experience from pair photoproduction in Coulomb field [17] and perturbation theory [13, 16] tells us that the amplitude of the process (1) must be infrared stable, so all oscillating products have to be canceled in the full amplitude.

To follow these cancelations, consider firstly the case where one of the ions, for instance Z_2 , is light so that one can expand the amplitude in the parameter $Z_2\alpha$. In general case Watson series (2) is infinite and there are no reasons to truncate it. However it is automatically cut off if one considers the finite number of exchanged photons attached to one of the nuclei (with any number of exchanges with another nuclei).

Denoting the transverse momenta of leptons in intermediate states by \vec{k}_i and the transverse momenta of exchanged photons by \vec{q}_i (see Fig.1) it is convenient to introduce the following notations:

$$\begin{aligned}\Omega_j(\vec{q}, \vec{q}') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x d^2x' \exp(i\vec{q}\vec{x} + i\vec{q}'\vec{x}') (1 - S_j^+(\vec{x})S_j^-(\vec{x}')) ; \\ &= f_j^+(\vec{q})f_j^-(\vec{q}') - 2\pi i\delta(\vec{q})f_j^+(\vec{q}) - 2\pi i\delta(\vec{q}')f_j^-(\vec{q}') ;\end{aligned}\quad (9)$$

$$f_j^+ = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{n!} f_j^{(n)}; \quad f_j^- = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n+1}}{n!} f_j^{(n)}; \quad (10)$$

$$f_j^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int d^2x e^{i\vec{q}\vec{x}} \chi^n(\vec{b}_2 - \vec{x}). \quad (11)$$

The expressions (10) are nothing else as the expansion of amplitudes from (5). Notice that the combinations $\Omega_j(\vec{q}, \vec{q}')$ are independent from regularization parameters.

To obtain the sum of terms from Watson expansion (2) relevant to the first order exchange in $Z_2\alpha$ and all exchanges with Z_1 , one has to calculate the terms which are linear in T_2 . These terms correspond to the first three diagrams of Fig.1, with obvious replacement of the thick line attached to the ion Z_2 by a single photon exchange.

Using the above expressions after a lengthy, but well known algebra, we get:

$$\begin{aligned}T^{(1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(1)} = \frac{i}{8\pi} \int \frac{\gamma_+ \nu_1 \gamma_- \nu_2 \gamma_+}{\mu_1 p_+ + \mu_2 p'_+} f_2^{(1)}(q_2) \Omega_1(q_1, q_3) d^2k_1 d^2k_2 ; \\ \nu_i &= m - \vec{k}_i \vec{\gamma}; \quad \mu_i = m^2 + \vec{k}_i^2.\end{aligned}\quad (12)$$

This matrix does not depend on the regularization parameter λ_1 , which is a result of nontrivial cancelations among the different terms of the Watson series. Passing in this expression to the impact parameter representation upon the relevant Fourier transformations, it can be shown that it is in accordance with the results obtained in [15, 19].

As a next example of the λ_2 independence we consider the set of terms from the Watson series corresponding to two photons attached to the ion Z_2 and any number of exchanged photons with Z_1 . This contribution is provided by the first four diagrams of Fig.1, with obvious replacement of a set of photon exchanges attached to ion Z_2 by one and two photon exchanges. The result of our calculations can be cast in the form

$$T^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(2)} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \int \frac{\gamma_+ \nu_1 \gamma_- \nu_2 \gamma_+}{\mu_1 p_+ + \mu_2 p'_+} f_2^{(2)}(q_2) \Omega_1(q_1, q_3) \ln \left(\frac{\mu_1 p_+}{\mu_2 p'_+} \right) d^2k_1 d^2k_2$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{i}{(4\pi)^3} \int \frac{\gamma_+ \nu_1 \gamma_- \nu_2 \gamma_+ \nu_3 \gamma_-}{\mu_1 \mu_3 + \mu_2 p'_+ p_-} f_2^{(1)}(q_2) f_2^{(1)}(q_4) \Omega_1(q_1, q_3) \\
& \times \left[\ln \left(\frac{\mu_1 \mu_3}{\mu_2 p'_+ p_-} \right) + i\pi \right] d^2 k_1 d^2 k_2 d^2 k_3 - \frac{i}{(4\pi)^3} \int \frac{\gamma_- \nu_1 \gamma_+ \nu_2 \gamma_- \nu_3 \gamma_+}{\mu_1 \mu_3 + \mu_2 p'_- p_+} \\
& \times f_2^{(1)}(q_1) f_2^{(1)}(q_3) \Omega_1(q_2, q_4) \left[\ln \left(\frac{\mu_1 \mu_3}{\mu_2 p'_- p_+} \right) + i\pi \right] d^2 k_1 d^2 k_2 d^2 k_3. \quad (13)
\end{aligned}$$

As in the previous case this expression does not depend on the regularization parameter λ_1 .

We do not cite here the next sets of Watson terms corresponding to three and four photons attached to the ion Z_2 in view of their inconvenience, but we verified that they also do not depend on the regularization parameter λ_1 .

It is obvious that operating in the same way one obtains the independence from λ_2 choosing the sets relevant to finite number of photons exchanges with ion Z_1 .

To investigate the problem of regularization in the general case, we consider the first six terms of Watson expansion (2) (diagrams a-f in Fig.1). This set consists of the infrared stable term T_s and the term T_u depending on λ_j

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} T_n^m = T_s + T_u \quad (14)$$

We calculated the stable part T_s with the following result

$$\begin{aligned}
T_s = & \frac{i}{(4\pi)^3} \int d^2 k_1 d^2 k_2 d^2 k_3 \left[\gamma_+ \nu_1 \gamma_- \nu_2 \gamma_+ \nu_3 \gamma_- \Omega_1(q_1, q_3) \Omega_2(q_2, q_4) \frac{\ln \left(\frac{\mu_1 \mu_3}{\mu_2 p'_+ p_-} \right) + i\pi}{\mu_1 \mu_3 + \mu_2 p'_+ p_-} \right. \\
& \left. + \gamma_- \nu_1 \gamma_+ \nu_2 \gamma_- \nu_3 \gamma_+ \Omega_2(q_1, q_3) \Omega_1(q_2, q_4) \frac{\ln \left(\frac{\mu_1 \mu_3}{\mu_2 p'_- p_+} \right) + i\pi}{\mu_1 \mu_3 + \mu_2 p'_- p_+} \right]. \quad (15)
\end{aligned}$$

As to the unstable part T_u it turns out to be of order $(Z_1 Z_2 \alpha^2)^3$, i.e. a higher order in fine structure constant than the stable one. This unstable part has to be exactly canceled, when one considers the next terms of the Watson series.

4. Conclusions

The problem of multiple photons exchanges in the process of lepton pair production in the Coulomb field of two highly relativistic nuclei turns out to be enough complex and thus discrepancies on this issue existing in literature are not surprising. The progress in this area due to recent investigation [8], stimulated us to consider the important problem of Watson series regularization, the issue always arises, when one consider the interaction with unscreened Coulomb potential.

The Feynman scattering matrix in the presence of two ion can be constructed in the form of infinite Watson series. We show that the specific sets of Watson series corresponding to finite number of photon exchanges with one of the ions and all possible exchanges with another ion do not depend on regularization parameter relevant to the ion with infinite exchanges. Moreover it is shown that the first six terms of Watson series can be presented as infrared stable part and

unstable part which is higher order in parameter $Z_1 Z_2 \alpha^2$ than stable part. This observation allows one to construct the infrared stable sets from Watson series and therefore calculate the full probability of any number pairs production in peripheral collisions of relativistic ions with high accuracy.

We would like to thank E.A.Kuraev for valuable discussions and collaboration on this subject.

References

- [1] C.A.Bertulani and G.Baur, *Phys.Rep.* 163 (1988) 299
- [2] L.D.Landau and E.M.Lifshitz, *Phys.Z.Sowjet.* 6 (1934) 244
- [3] G.Racah, *Nuovo Cim.* 14 (1937) 93.
- [4] C.Bottcher and M.R.Strayer, *Phys.Rev.* D39 (1989) 1330
- [5] B.Segev and J.C.Wells, *Phys.Rev.* A57 (1998) 1849; *Phys.Rev.* C59 (1999) 2753
- [6] G.Baur, *Phys.Rev.* D41 (1990) 3535; A42 (1990) 5736
- [7] A.J.Baltz and L.McLerran, *Phys.Rev.* C 58 (1998) 1679
- [8] A.J.Baltz, F.Gelis, L.McLerran, and A.Peshier, *Nucl.Phys.* A695 (2001) 395
- [9] U.Eichmann, J.Reinhardt, S.Schramm, and W.Greiner, *Phys.Rev.* A59 (1999) 1223; *Phys.Rev.* A61 (2000) 062710
- [10] D.Yu.Ivanov, A.Schiller, and V.G.Serbo, *Phys.Lett.* B454 (1999) 155
- [11] R.N.Lee and A.I.Milstein, *Phys.Rev.* A61 (2000) 032103; *Phys.Rev.* A64 (2001) 032106
- [12] A.Aste, G.Baur, K.Hencken, D.Trautmann, and G.Scharf, *Eur.Phys.J.* C23 (2002) 545
- [13] E.Bartoš, S.R.Gevorkyan, E.A.Kuraev, and N.N.Nikolaev, *Phys.Rev.* A66 (2002) 042720
- [14] E.Bartoš, S.R.Gevorkyan, E.A.Kuraev, and N.N.Nikolaev, *Phys.Lett.* B538 (2002) 45.
- [15] S.R.Gevorkyan and E.A.Kuraev, *J.Phys.* G29 (2003) 1
- [16] E.Bartoš, S.R.Gevorkyan, E.A.Kuraev, and N.N.Nikolaev, *JETP* 100 (2005) 645
- [17] H.A.Bethe and L.Maximon, *Phys. Rev.* 93 (1954) 788
- [18] J.R.Taylor, *Scattering theory*, John Wiley and Sons (1972)
- [19] J.M.Bjorken, J.B.Kogut, and D.E.Soper, *Phys.Rev.* D3 (1971) 1382

Electromagnetic corrections to final state interactions in $K \rightarrow 3\pi$ decays *

S.R. Gevorkyan, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscow Region, 141980, Russia

Abstract

The final state interactions of pions in decays $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \pi^0$ are considered using the methods of quantum mechanics. We show how to incorporate the electromagnetic effects in the amplitudes of these decays and to work out the relevant expressions valid above and below the two charged pions production threshold $M_c = 2m$. The electromagnetic corrections are given as evaluated in a potential model.

During the last years essential progress has been achieved in $\pi\pi$ scattering lengths determination from experimental data [1, 2, 3]. The precise knowledge of these quantities is an important task, since at present the Chiral Perturbation Theory (ChPT) predicts their values with very high accuracy [4].

The high quality data on $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \pi^0$ decays have been obtained recently in the NA48/2 experiment at CERN SPS [3]. Dependence of the decay rate on the invariant mass of neutral pions $M^2 = (p_1 + p_2)^2$ reveals a prominent anomaly (cusp) at the threshold, relevant to the production of two charged pions $M_c^2 = 4m^2$ (see Fig.1).

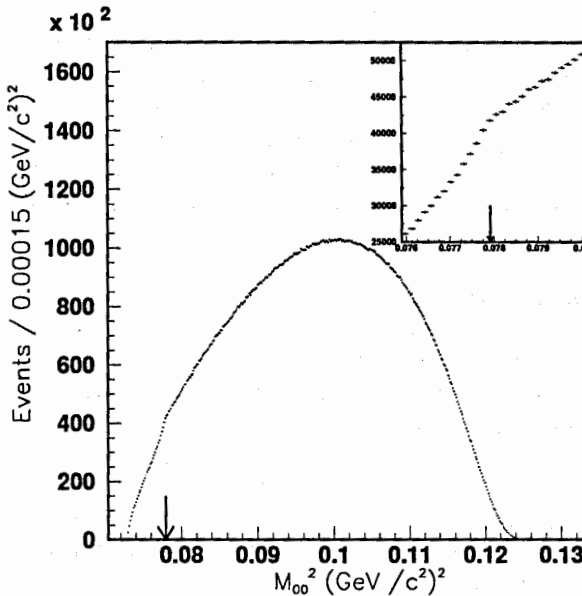


Figure 1: Distribution of M^2 , the square of the $\pi^0 \pi^0$ invariant mass. The insert is an enlargement of a narrow region centered at $M^2 = (2m_+)^2$ (this point is indicated by the arrow).

*Phys. Lett. B649 (2007) 159. © 2007 Elsevier B.V. Reproduced by permission of Elsevier B.V.

The phenomenon of cusp in elastic scattering at the threshold relevant to inelastic channel is known for many years and was widely discussed in the framework of non-relativistic quantum mechanics [5, 6, 7]. For the elastic process $\pi^0\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ this anomaly at the $\pi^+\pi^-$ threshold was firstly discussed in the framework of ChPT in [8].

The theoretical investigations of the decays

$$K^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^0\pi^0, \quad (1)$$

$$K^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^+\pi^- \quad (2)$$

have been carried out many years ago [9, 10, 11]. New experimental data of high accuracy [3] lead to great activity on this issue [12, 13, 14].

As was explained by N. Cabibbo, the cusp in the experimental decay distribution is the result of the charge exchange scattering process $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^0\pi^0$ in the decay (2). He proposed a simple re-scattering model [12], in which the amplitude of decay (1) consists of two terms

$$T = T_0 + 2ika_x T_+, \quad (3)$$

where T_0 , T_+ are so called [12, 13] “unperturbed” amplitudes for decays (1) and (2), which are functions of kinematic invariants of corresponding decays and $k = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - 4m^2}$ is the momentum of the charged pion. The second term in (3) is proportional to the difference of scattering lengths $a_x = (a_0 - a_2)/3$ and flips from dispersive to absorptive at the threshold M_c . As a result the decay probability under the threshold linearly depends on a_x allowing this difference to be extracted from experimental data with high accuracy.

The next important step was done in [13], where the amplitude T was obtained accounting the second order in scattering lengths terms using analyticity and unitarity of the S matrix. The results of [13] were supported using the methods of effective field theory [14] and ChPT [15], whose authors calculated all re-scattering processes in two-loop approximation. The results from [13] were used in the fit of experimental data [3], allowing extraction of the difference $a_0 - a_2$ with high accuracy.

Nevertheless the decay rate behavior near threshold cannot be provided solely by strong interaction of pions in the final state. As was widely discussed (see e.g. [16, 17]), the tiny discrepancy between theoretical predictions and experimental data in the vicinity of threshold [3] is a result of disregarding electromagnetic effects in final state interaction. In view of importance of the knowledge of the scattering lengths with the most possible accuracy, the consideration of electromagnetic corrections in decay (1) becomes a pressing issue.

Later on we discuss the problem of Coulomb interaction among charged pions using methods of non-relativistic quantum mechanics, which are completely suitable for the considered case[†]. We obtain compact expressions for the amplitude [‡] of decay (1) with regard to the electromagnetic corrections, which are valid below and above the charged pions production threshold $M_c = 2m$.

Leaving the strict derivation for a separate publication, we shortly discuss how to involve the electromagnetic effects in the considered problem and relevant modifications, which have to be done in the amplitude of decay (1).

[†]The effects of radiation of real photons are beyond the scope of our consideration and will be treated elsewhere.

[‡]As the K^- decays are counterparts to the K^+ decays, they are not treated separately.

With the methods of non-relativistic quantum mechanics it can be shown that the result of N. Cabibbo [12] can be generalized accounting the $\pi\pi$ scattering to all orders in scattering lengths

$$\begin{aligned} T &= T_0 + 2ikf_x T_+, \quad f_x = a_x/D, \\ D &= (1 - ik_1 R_{11})(1 - ik_2 R_{22}) + k_1 k_2 R_{12}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Here $k_1 = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - 4m_0^2}$; $k_2 = k = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - 4m^2}$ are the momenta of neutral and charged pions respectively. The elements of the R matrix are real and can be expressed in isospin symmetry limit through the combinations of the scattering lengths [13, 14] $a_x = (a_2 - a_0)/3$; $a_{00} = (a_0 + 2a_2)/3$; $a_{+-} = (2a_0 + a_2)/6$ corresponding to inelastic and elastic pion-pion scattering as

$$R_{12} = \sqrt{2}a_x; \quad R_{11} = a_{00}; \quad R_{22} = 2a_{+-}. \quad (5)$$

The expression (4) is relevant to the sum of all simple sequential loops, therefore the dependence of "unperturbed" amplitudes T_0, T_+ on kinematic variables is the same as in the one-loop approximation [12].

The replacement $a_x \rightarrow f_x$ has a small numerical impact on the results of the previous calculations done according [13, 14] in the dominant part of phase space, but, as we will see later, is very crucial for inclusion of the electromagnetic interactions under the threshold, where formation of bound states ($\pi^+\pi^-$ atoms) take place.

Due to the fact that our consideration of higher order terms is confined to the case relevant to simple sequential loops the scattering lengths dependence on the invariant mass M^2 are the same as in [13, 14].

The next step of our prescription is inclusion of electromagnetic effects in expression (4). The general recipe is known for many years (see for instance the textbook [19]) and implies replacement of charged pion momenta k by a logarithmic derivative of the pion wave function in the Coulomb potential at the boundary of the strong field r_0 i.e.

$$ik \rightarrow \tau = \left. \frac{d \log[G_0(kr) + iF_0(kr)]}{dr} \right|_{r=r_0}. \quad (6)$$

Here F_0, G_0 are the regular and irregular solutions of the Coulomb problem. In the region $kr_0 \ll 1$ where the electromagnetic effects can be significant the above replacement gives

$$\begin{aligned} \tau &= ik - \alpha m [\log(-2ikr_0) + 2\gamma + \psi(1 - i\xi)] \\ &= Re \tau + i Im \tau, \\ Re \tau &= -\alpha m [\log(2kr_0) + 2\gamma + Re \psi(1 - i\xi)], \\ Im \tau &= kA^2, \quad A = \exp\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) |\Gamma(1 + i\xi)|, \quad \xi = \frac{\alpha m}{2k}, \end{aligned} \quad (7)$$

where $\gamma = 0.5772$, $\alpha = 1/137$ are the Euler and fine structure constants, whereas $\psi(\xi) = \frac{d \log \Gamma(\xi)}{d\xi}$ is the digamma function.

To go under the threshold, it is enough to make the common replacement $k \rightarrow i\kappa$ in the above expression

$$\tau = -\kappa - \alpha m \left[\log(2\kappa r_0) + 2\gamma + \psi\left(1 - \frac{m\alpha}{2\kappa}\right) \right]. \quad (8)$$

At $\kappa_n = \alpha m / (2n)$, where n is an integer, τ goes to infinity, which corresponds to Coulombic bound states in the considered approach. On the other hand, the product κf_x defining the amplitude behavior under the threshold, remains finite due to dependence on τ in the denominator D in expression (4). This explains why electromagnetic effects can be included only after summing up all terms of the infinite series in the perturbation expansion.

The product κf_x possesses a resonance structure placed at the positions

$$\begin{aligned} M_n &= 2m - \frac{\bar{\kappa}_n^2}{m}, \quad \bar{\kappa}_n = \frac{\alpha m}{2(n - \delta)}, \\ \delta &= \frac{1}{\pi} \arctan \Delta, \quad \Delta = \alpha m \left[R_{22} - \frac{k_1^2 R_{11} R_{12}^2}{1 + k_1^2 R_{11}^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

with the relevant width

$$\Gamma_n = \frac{4\pi k_1 R_{12}^2 \bar{\kappa}_n^3}{m(1 + k_1^2 R_{11}^2)}. \quad (10)$$

The physical reason of resonance origin is transparent. Due to the charge exchange process $\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^0 \pi^0$ the Coulombic bound states of the $\pi^+ \pi^-$ system ($A_{2\pi}$ atoms) becomes unstable[§].

The considered effect of the creation of $A_{2\pi}$ atoms in decay (1) is not the only contribution from electromagnetic interaction of pions. Outside the resonance region the Coulomb interaction leads to the essential difference between the τ values calculated with electromagnetic corrections and without them. In particular, the nonzero contribution of the Coulomb corrections to the $Re \tau$ above the threshold leads to the interference term in the decay rate provided by "direct" and "charge-exchange" contributions from (4). Thus above the threshold the interference is nonzero even at the lowest order in scattering lengths, unlike the original approach proposed by N. Cabibbo [12].

Further improvement of the theory consists in taking account of final state interactions in the "direct" term from (4). This can be done by simple substitution

$$T_0 \rightarrow T_0(1 + ik_1 f_{00}), \quad (11)$$

where f_{00} is the full amplitude of $\pi^0 \pi^0$ scattering.

It can be shown that

$$1 + ik_1 f_{00} = \frac{1 - \tau R_{22}}{(1 - ik_1 R_{11})(1 - \tau R_{22}) - ik_1 \tau R_{12}^2}. \quad (12)$$

These higher order corrections to "direct" term are numerically small, but taking in account the precision of experimental data, have to be included in the fit procedure.

To estimate the contribution from electromagnetic effects to the decay rate of process (1), we introduce the ratio $R(\%) = \frac{|T_e|^2 - |T|^2}{|T|^2}$ where the amplitude T is given by expression (4), while the amplitude T_e taking account of electromagnetic effects is given by expressions (4,11,12) with relevant modifications discussed above. The dotted line in Fig.2 shows the contribution of electromagnetic effects without bound state corrections. The dashed line represents

[§]We do not discuss here the instability of excited states caused by their transition to the ground state, as this effect is very small and can safely be neglected.

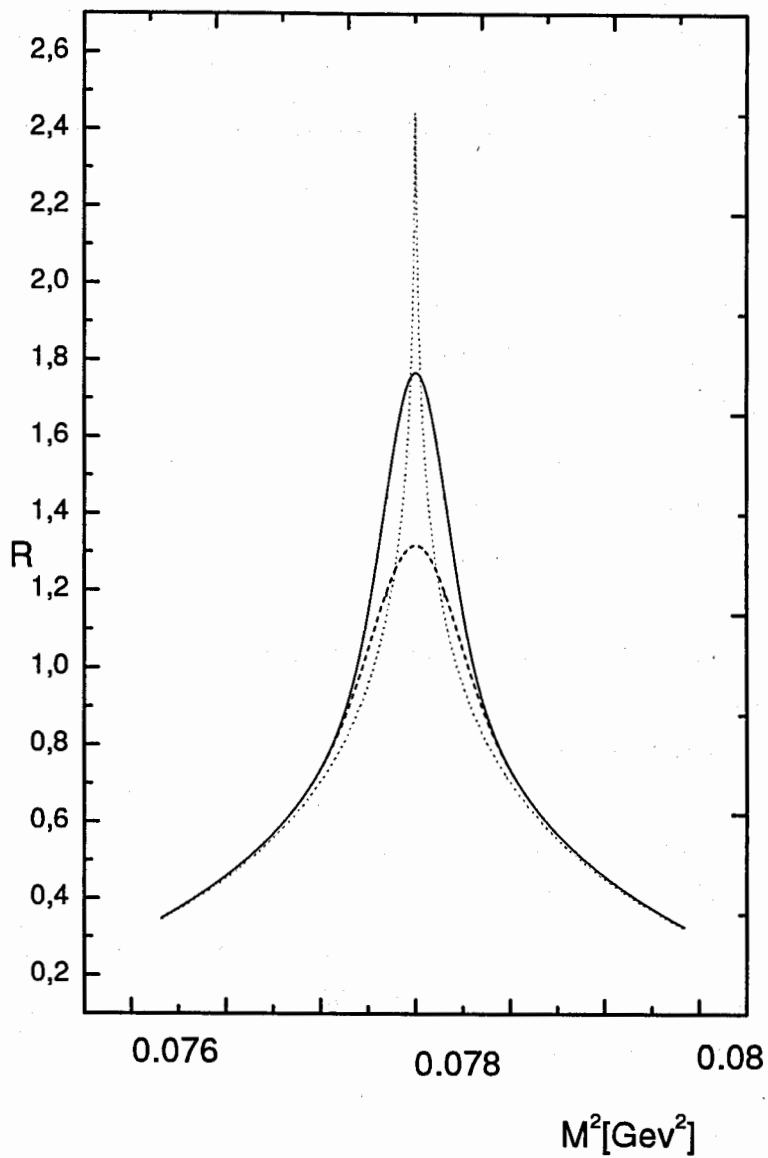


Figure 2: Electromagnetic corrections contribution to decay rate as a function of invariant mass of neutral pions.

the same quantity, but with the corresponding average with the gaussian distribution [3] and the expected mass resolution near the threshold $r.m.s. = 0.56$ MeV. The solid line gives the contribution of all electromagnetic effects (bound states included) averaged as in the previous case with the gaussian distribution. From this plot one concludes that the essential contribution to the decay rate in the vicinity of the threshold comes from the electromagnetic interactions that do not lead to bound states.

The developed approach allows one to take into account electromagnetic effects in decay (1) and to estimate their impact on decay rate of the process under consideration.

We are grateful to V. Kekelidze and J. Manjavidze who draw our attention to the problem and supported during the work. We would also like to thank D. Madigozhin for many stimulating and useful discussions.

References

- [1] B. Adeva et al., Phys. Lett. B 619 (2005) 50.
- [2] S. Pislak et al., Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 221801.
- [3] J.R. Batley et al., Phys. Lett. B 633 (2006) 173.
- [4] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B 603 (2001) 125.
- [5] E. Wigner, Phys. Rev. 73 (1948) 1002.
- [6] G. Breit, Phys. Rev. 107 (1957) 1612.
- [7] A. Baz, ZhETF 33 (1957) 923.
- [8] Ulf-G. Meißner, G. Müller, and S. Steininger, Phys. Lett. B 406 (1997) 154.
- [9] V.N. Gribov, Nucl. Phys. 5 (1958) 653.
- [10] V.N. Gribov, ZhETF 41 (1961) 1221.
- [11] V.V. Anisovich and A.A. Ansel'm, Sov. Phys. Uspekhi 9 (1966) 117.
- [12] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 121801.
- [13] N. Cabibbo and G. Isidori, JHEP 0503 (2005) 021.
- [14] G. Colangelo, J. Gasser, B. Kubis, and A. Rusetsky, Phys. Lett. B 638 (2006) 187.
- [15] E. Gamiz, J. Prades, and I. Scimemi, hep-ph/0602023.
- [16] N. Cabibbo and G. Isidori, in: hep-ph/0610201, p. 52.
- [17] J. Gasser, talk at V Kaon Mini Workshop, CERN, December 12, 2006 (<http://indico.cern.ch>).
- [18] A. Gashi, G. Oades, G. Rasche, and W. Woolcock, Nucl. Phys. A 699 (2002) 732.
- [19] A.I. Baz, Ya.B. Zeldovich, and A.M. Perelomov, Scattering, reactions and decays in nonrelativistic quantum mechanics, Nauka, Moscow, 1971.

Структура амплитуды процесса $Z_1 Z_2 \rightarrow l^+ l^- Z_1 Z_2$ вне рамок борновского приближения *

О.О.Воскресенская, А.Н.Сисакян, А.В.Тарасов, Г.Т.Торосян

Объединенный Институт Ядерных Исследований, Дубна, Московская область, 141980, Россия

Аннотация

Проведено ресуммирование ряда теории возмущений для амплитуды образования лептонных пар в ядро-ядерных соударениях на основе теоремы Ватсона и гипотезы инфракрасной стабильности. Получено явное выражение для этой амплитуды, справедливое с точностью до величин девятого порядка по постоянной тонкой структуры.

PACS: 12.20-m, 13.85.Lg, 25.75.Dw

Наблюдаемый в последнее время рост интереса к процессу образования лептонных пар в ядро-ядерных соударениях в значительной мере связан с вводом в действие ускорительного комплекса тяжелых ионов RHIC и ожидаемым вскоре вводом LHC.

Известно [1,2], что при высоких энергиях основной вклад в полное сечение взаимодействия тяжелых ядер вносит процесс

$$Z_1 + Z_2 \rightarrow Z_1 + Z_2 + e^+ + e^-, \quad (1)$$

описание которого вне рамок борновского приближения остаётся одной из важнейших нерешенных задач КЭД. Попыткам решить эту проблему посвящена серия работ нескольких групп авторов [3-18]. Однако, несмотря на значительные затраченные усилия, достигнутый в этой области прогресс является более, чем скромным.

Прежде всего, оказались безуспешными попытки полностью пертурбативного решения проблемы, предпринятые авторами [3-6]. Последовательный же анализ поправок к результатам борновского приближения в рамках пертурбативной КЭД начатый авторами [14-18], находится пока что в начальной стадии. Причиной тому является необходимость систематизации и расчета огромного числа фейнмановских диаграмм (ФД) в рамках этого подхода.

Намного более экономным с вычислительной точки зрения является "полупертурбативный" подход [19], опирающийся на ватсоновское представление оператора рассеяния T задачи двух центров в терминах операторов рассеяния $T_{1(2)}$ одноцентровых задач

$$T = T_1 + T_2 - T_1 \otimes G \otimes T_2 - T_2 \otimes G \otimes T_1 + T_1 \otimes G \otimes T_2 \otimes G \otimes T_1 + T_2 \otimes G \otimes T_1 \otimes G \otimes T_2 \dots, \quad (2)$$

$$T_k = V_k - V_k \otimes G \otimes T_k, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

В развернутом виде последние уравнения переписываются следующим образом:

$$T_k(x_2, x_1) = V_k(x_2, x_1) - \int d^4 x'_1 d^4 x'_2 V_k(x_2, x'_2) G(x'_2 - x'_1) T_k(x'_1, x_1), \quad (4)$$

*Phys. Part. Nucl. Lett. 4 (2007) 18-21; Pisma Fiz. Elem. Chast. Atom. Yadra 4 (2007) 36-41.

где

$$V_k(x_2, x_1) = e\gamma_\mu A_{\mu k}(x_1)\delta(x_2 - x_1), \quad (5)$$

$A_{\mu k}$ — 4-потенциал электромагнитного поля, создаваемого ионом Z_k ($k = 1, 2$), $G(x - x')$ — свободная причинная функция распространения фермиона.

Амплитуда M процесса (1) связана с оператором рассеяния (2) соотношением

$$M = \bar{u}(p_2) \int d^4x_1 d^4x_2 \exp(ip_1x_1 + ip_2x_2) T(x_2, x_1) u(p_1), \quad (6)$$

где $u(p_2)$, $\bar{u}(p_2)$ — биспиноры, описывающие состояния свободных электрона и позитрона с 4-импульсами p_2 и p_1 соответственно.

Решения уравнений (4) более просто выглядят в импульсном представлении:[†]

$$T_1(p, p') = \int d^4x d^4x' \exp(ipx - ip'x') T_1(x, x') \quad (7)$$

$$= (2\pi)^2 \delta(p_+ - p'_+) \gamma_+ [\theta(p_+) f_1^{(+)}(p_T - p'_T) - \theta(-p_+ f_1^{(-)}(p_T - p'_T))];$$

$$T_2(p, p') = \int d^4x d^4x' \exp(ipx - ip'x') T_2(x, x') \quad (8)$$

$$= (2\pi)^2 \delta(p_- - p'_-) \gamma_- [\theta(p_-) f_2^{(+)}(p_T - p'_T) - \theta(-p_-) f_2^{(-)}(p_T - p'_T)],$$

$$f^{(\pm)}(\vec{q}) = \frac{i}{2\pi} \int d^2x \exp[iq\mathbf{x}] \left(1 - S_k^{(\pm)}(\mathbf{x})\right), \quad k = 1, 2, \quad (9)$$

$$S_k^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \exp[\pm i\chi_k(\mathbf{x} - \mathbf{b}_k)], \quad (10)$$

$$\chi_k(\mathbf{b}) = e \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k(\sqrt{b^2 + z^2}) dz, \quad e = \sqrt{\alpha}. \quad (11)$$

Выше \mathbf{b}_k — прицельные параметры сталкивающихся ионов в их системе центра масс (СЦМ), $\Phi_k(r)$ — их кулоновские потенциалы в системах покоя. Световые компоненты a_\pm 4-вектора $a_\mu = (a_0, a_z, \mathbf{a}_T)$, ($a = \gamma, p, p'$), определены обычным образом ($a_\pm = a_0 \pm a_z$), ось z выбрана в направлении движения ядра Z_2 .

Соотношениями (2)-(11) решается проблема частичного ресуммирования (эйконализации) ряда теории возмущений, обсуждавшегося в работах [14-18]. Поскольку фазовые сдвиги (11), отвечающие незранированным кулоновским потенциалам, бесконечны, то сконструированные из них величины (7)-(10), строго говоря, бессмысленны.

Для придания им смысла на промежуточном этапе рассмотрения задачи необходимо ввести "инфракрасную регуляризацию" величин $\Phi_k(r)$ и рассматривать их как предельные значения "слегка" экранированных потенциалов

$$\Phi_k(r) = \lim_{\lambda_k \rightarrow 0} Z_k \cdot e \cdot \exp(-\lambda_k \cdot r) / r. \quad (12)$$

[†]Выражения (7), (8) справедливы в ультррелятивистском пределе $\gamma_{1,2} \rightarrow \infty$ ($\gamma_{1,2}$ — Лоренц-факторы сталкивающихся ядер в их СЦМ) при выполнении условий $p_\pm(p'_\pm) \ll m\gamma_{1,2}$, то есть в области пионизации.

При этом

$$\chi_k(\mathbf{b}) = 2Z_k \alpha K_0(\lambda_k \cdot b) \xrightarrow{\lambda_k \rightarrow 0} -2Z_k \alpha [\ln(\lambda_k b) + C]. \quad (13)$$

Эта процедура абсолютно идентична инфракрасной регуляризации фотонных пропагаторов (путем введения фиктивной бесконечно малой массы фотона λ), обычно предпринимаемой для обеспечения конечности вкладов отдельных петлевых ФД в амплитуду процесса (1) (равно как и других электродинамических процессов) в пертурбативной КЭД.

Наблюдаемые величины, пропорциональные квадратам модулей амплитуд, представляемых суммой бесконечного числа диаграмм Фейнмана, не должна зависеть от величины нефизической “массы фотона” λ . При $\lambda \rightarrow 0$ они должны стремиться к конечным и однозначным предельным значениям. Такое свойство физических величин называется “инфракрасной стабильностью” (ИКС).

Механизм инфракрасной “стабилизации” физических величин разнообразен. Наиболее известный из них состоит в том, что инфракрасные расходимости отдельных ФД складываются в общий фазовый множитель (с расходящимся при $\lambda_k \rightarrow 0$ значением фазы) перед инфракрасностабильной частью амплитуды, не влияющей на значение наблюдаемой величины.

Таким свойством в пертурбативной КЭД обладают, например, амплитуды упругого рассеяния заряженных частиц. Этим же свойством обладает и амплитуда процесса $eZ_1 Z_2 \rightarrow eZ_1 Z_2$, кроссинг-сопряженного процессу (1).

Амплитуда же процесса (1) сама по себе (вместе с фазовыми множителями) является ИКС величиной. В пертурбативной КЭД это обеспечивается полным взаимным сокращением логарифмически расходящихся (при $\lambda_k \rightarrow 0$) вкладов отдельных петлевых диаграмм в амплитуду этого процесса.

В рамках нашего “полупертурбативного” подхода аналогами петлевых ФД являются “парциальные” амплитуды, под которыми мы будем подразумевать величины, получаемые подстановкой в правую часть соотношения (6) отдельных членов операторного разложения (2).

Хотя при $\lambda_k \rightarrow 0$ эти величины остаются конечными (ограниченными по модулю) они все же не стремятся к определенным предельным значениям, а становятся бесконечноосциллирующими функциями своих аргументов (подобно, например, амплитудам eZ -рассеяния).

Величины такого рода будем называть инфракраснестабильными (ИКНС). Простейшие из них — это S -операторы $e^\pm Z_k$ -рассеяния $S_k^{(\pm)}(\vec{x})$, являющиеся, наряду с функциями распространения $G(x-x')$, основными структурными элементами “парциальных” амплитуд. Последние же, очевидно, представимы в виде суперпозиции произведений величин $S_k^{(\pm)}(\mathbf{x})$.

Подавляющее большинство этих произведений, как и сами S -операторы $S_k^{(\pm)}(\vec{x})$, являются ИКНС величинами. Исключение составляют лишь произведения вида

$$\prod_i S_1^{(+)}(\mathbf{x}_i) S_1^{(-)}(\mathbf{x}'_i) \prod_j S_2^{(+)}(\mathbf{x}_j) S_2^{(-)}(\mathbf{x}'_j), \quad (14)$$

являющиеся ИКС в силу соотношений

$$\lim_{\lambda_k \rightarrow 0} S_k^{(+)}(\mathbf{x}) S_k^{(-)}(\mathbf{x}') = \exp \left[2i Z_k \alpha \cdot \ln \left(\frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{b}_k|}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}_k|} \right) \right] = \text{const}(\lambda_k). \quad (15)$$

В силу свойства ИКС амплитуды (6) в целом, ИКНС компоненты отдельных "парциальных" амплитуд взаимно сокращаются, приводя к окончательному ИКС результату для этой амплитуды. Проследить это сокращение удастся лишь после явного выполнения интегрирований по световым компонентам всех промежуточных 4-импульсов в выражениях для "парциальных" амплитуд.

Поскольку вклады "инфракраснонеустойчивого большинства" аннулируются, окончательное выражение для амплитуды (6), вопреки прогнозам авторов [14-18], оказывается сравнительно простым и обладающим следующими свойствами:

(i) амплитуда (6) является функционалом следующей ИКС комбинации величин $S_k^{(\pm)}(\mathbf{x})$:

$$\Omega_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2) = \Omega_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1)\Omega_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2), \quad (16)$$

$$\Omega_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 1 - S_k^{(+)}(\mathbf{x})S_k^{(-)}(\mathbf{x}'), \quad k = 1, 2;$$

(ii) она представима в виде бесконечной суммы

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \{\Omega_{12}\}, \quad (17)$$

слагаемые которой при $Z_1\alpha \ll 1$, $Z_2\alpha \ll 1$ пропорциональны $(Z_1 Z_2 \alpha^2)^{2n-1}$;

(iii) величины $M_n \{\Omega_{12}\}$ являются "полиномами" n -ой степени от Ω_{12} , не содержащими свободных членов.

Явные выражения для $M_1 \{\Omega_{12}\}$, $M_2 \{\Omega_{12}\}$ следующие:

$$M_1 = \frac{i}{(4\pi)^3} \bar{u}(p_2) \left[\int \prod_{i=1}^3 d^2 k_i R_1 \right] v(p_1), \quad (18)$$

$$M_2 = \frac{i}{(4\pi)^3} \bar{u}(p_2) \left[\int \prod_{i=1}^3 d^2 k_i R_2 \right] v(p_1) + \frac{i}{(4\pi)^7} \bar{u}(p_2) \left[\int \prod_{i=1}^7 d^2 k_i \tilde{R}_2 \right] v(p_1), \quad (19)$$

$$R_1 = \gamma_+ \nu_1 \gamma_- \nu_2 \gamma_+ \nu_3 \gamma_- \Omega_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \Omega_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) (L_b + i\pi)(a+b)^{-1} + \gamma_- \nu_1 \gamma_+ \nu_2 \gamma_- \nu_3 \gamma_+ \Omega_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \Omega_1(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) (L_c + i\pi)(a+c)^{-1}, \quad (20)$$

$$R_2 = \gamma_+ \nu_1 \gamma_- \nu_2 \gamma_+ \nu_3 \gamma_- \Omega_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \Omega_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) (L_b/3)(L_b^2 + \pi^2)(a+b)^{-1} + \gamma_- \nu_1 \gamma_+ \nu_2 \gamma_- \nu_3 \gamma_+ \Omega_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \Omega_1(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) (L_c/3)(L_c^2 + \pi^2)(a+c)^{-1}, \quad (21)$$

$$L_b = \ln(a/b), \quad L_c = \ln(a/c), \quad (22)$$

$$a = \mu_1 \mu_3, \quad b = \mu_2 p_{2+} p_{1-}, \quad c = \mu_2 p_{2-} p_{1+}, \quad (23)$$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_{2T} - \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3, \quad \mathbf{q}_4 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_{1T}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_2 = & \gamma_+ \nu_1 \gamma_- \nu_2 \gamma_+ \nu_3 \gamma_- \nu_4 \gamma_+ \nu_5 \gamma_- \nu_6 \gamma_+ \nu_7 \gamma_- \\ & \times \Omega_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \Omega_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \Omega_1(\mathbf{q}_5, \mathbf{q}_7) \Omega_2(\mathbf{q}_6, \mathbf{q}_8) \\ & \times (L_{\bar{b}}^2 + \pi^2) (L_{\bar{b}}/3 + i\pi) (\bar{a} + \bar{b})^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & + \gamma_- \nu_1 \gamma_+ \nu_2 \gamma_- \nu_3 \gamma_+ \nu_4 \gamma_- \nu_5 \gamma_+ \nu_6 \gamma_- \nu_7 \gamma_+ \\ & \times \Omega_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \Omega_1(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \Omega_2(\mathbf{q}_5, \mathbf{q}_7) \Omega_1(\mathbf{q}_6, \mathbf{q}_8) \\ & \times (L_{\bar{c}}^2 + \pi^2) (L_{\bar{c}}/3 + i\pi) (\bar{a} + \bar{b})^{-1}, \end{aligned}$$

$$L_{\bar{b}} = \ln(\bar{a}/\bar{b}), \quad L_{\bar{c}} = \ln(\bar{a}/\bar{c}), \quad (26)$$

$$\nu_i = m - \gamma_T \mathbf{k}_i, \quad \mu_i = m^2 + \mathbf{k}_i^2, \quad (27)$$

$$\bar{a} = \mu_1 \mu_3 \mu_5 \mu_7, \quad \bar{b} = \mu_2 \mu_4 \mu_6 p_{2+} p_{1-}, \quad \bar{c} = \mu_2 \mu_4 \mu_6 p_{2-} p_{1+}, \quad (28)$$

$$\mathbf{q}_1 = p_{2T} - \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3, \quad \mathbf{q}_4 = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4, \quad (29)$$

$$\mathbf{q}_5 = \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5, \quad \mathbf{q}_6 = \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_6, \quad \mathbf{q}_7 = \mathbf{k}_6 - \mathbf{k}_7, \quad \mathbf{q}_8 = \mathbf{k}_7 + p_{1T},$$

$$\Omega_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 x d^2 x' \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x} + i\mathbf{q}'\mathbf{x}') \Omega_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad j = 1, 2, \quad (30)$$

где m – масса электрона.

Выражение для M_3 уже достаточно громоздко и поэтому не приводится. К тому же, в этом нет практической необходимости, поскольку простые оценки показывают, что относительный вклад интерференции амплитуд M_1 и M_3 в сечение процесса (1) является величиной порядка $(Z_1 Z_2 \alpha^2)^4 L^{-1}$, $L = \ln \gamma_1 \cdot \ln \gamma_2$, что даже при “низких” энергиях $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim 10$ намного меньше 1% при реалистичных значениях Z_1, Z_2 .

Таким образом, приведенные выше выражения для амплитуд M_1 и M_2 решают (с оговоренной выше точностью) проблему выхода за рамки борновского приближения в описании процесса (1).

Проблема унитарных (то есть связанных с множественным образованием пар) поправок к этому результату, а также вопросы соотношения между амплитудами кроссинг-сопряженных процессов

$$Z_1 + Z_2 \rightarrow Z_1 + Z_2 + e^+ + e^-,$$

$$e^\pm + Z_1 + Z_2 \rightarrow e^\pm + Z_1 + Z_2$$

будут освящены отдельно.

Авторы благодарят за обсуждения вопросов, затронутых в работе, Э.А. Курасва и С.Р. Геворкяна.

-
1. L.D. Landau and E.M. Lifshits, Phys. Z. Sowjet. 6, 244 (1934).
 2. G. Racah, Nuovo Cimento 14, 93 (1937).
 3. B. Segev and J.C. Wells, Phys. Rev. A 57, 1849 (1998).
 4. A.J. Baltz and L. McLerran, Phys. Rev. C 58, 1679 (1998).
 5. B. Segev B. and J.C. Wells, Phys. Rev. C 59, 2753 (1999).
 6. U. Eichmann, G. Reinhardt, S. Schramm et al., Phys. Rev. A 59, 1223 (1999).

7. D.Yü. Ivanov, A. Schiller and V.G. Serbo, *Phys. Lett. B* **454**, 155 (1999).
8. U. Eichmann, G. Reinhardt and W. Greiner, *Phys. Rev. A* **61**, 062710 (2000).
9. R.N. Lee and A.I. Miltsein, *Phys. Rev. A* **61**, 032103 (2000).
10. R.N. Lee, A.I. Miltsein and V.G. Serbo, hep-ph/0108014.
11. R.N. Lee and A.I. Miltsein, *Phys. Rev. A* **64**, 032106 (2001).
12. A.J. Baltz, F. Gelis, L. McLerran et al., *Nucl. Phys. A* **695**, 395 (2001).
13. A.J. Baltz, nucl-th/0305083.
14. E. Bartos, S.R. Gevorkyan, E.A. Kuraev et al., *Phys. Rev. A* **66**, 042720 (2002).
15. E. Bartos, S.R. Gevorkyan, E.A. Kuraev et al., *Phys. Lett. B* **538**, 45 (2002).
16. S.R. Gevorkyan and E.A. Kuraev, *J. Phys. G* **29**, 1227 (2003).
17. E. Bartos, S.R. Gevorkyan, E.A. Kuraev, *Yad. Fiz.* **67**, 1945 (2004).
18. E. Bartos, S.R. Gevorkyan and E.A. Kuraev, hep-ph/0410263.
19. A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, H.T. Torosyan et al., JINR E2-2004-192 (2004).
20. K.M. Watson, *Phys. Rev.* **89**, 575 (1953).

The isospin-symmetry-breaking effects in K_{e4} decays *

S.R.Gevorkyan, A.N.Sissakian, A.V.Tarasov, H.T.Torosyan and O.O.Voskresenskaya

Joint Institute for Nuclear Research, 141980 Dubna, Russia

Abstract

The final state interaction of pions in K_{e4} decay allows one to obtain the value of the isospin and angular momentum zero $\pi\pi$ scattering length. We have shown that the electromagnetic interaction of pions and isospin symmetry breaking effects caused by different masses of neutral and charged pions, have an essential impact on the procedure of scattering length extraction from K_{e4} decays.

1. Introduction

For many years the decay

$$K^\pm \rightarrow \pi^+ \pi^- e^\pm \nu \quad (1)$$

was considered as the cleanest method to determine the isospin and angular momentum zero scattering length a_0 [1]. At present the value of a_0 is predicted by Chiral Perturbation Theory (ChPT) with high precision [2] ($\sim 2\%$) and its measurement with relevant accuracy can provide useful constraints on the ChPT Lagrangian. The appearance of new precise experimental data [3, 4] requires approaches taking into account the effects, which have been neglected up to now in extracting the scattering length from experimental data on K_{e4} decays.

The common way to get the scattering length a_0 from the decay probability is based on the classical works [5, 6]. The transition amplitude for decay (1) can be written as the product of the lepton and hadronic currents:

$$A = \frac{G_F \sin \theta_c}{\sqrt{2}} \langle \pi^+ \pi^- | J_{had}^\mu | K^+ \rangle \langle e^+ \nu_e | J_{lep}^\mu | 0 \rangle. \quad (2)$$

The leptonic part of this matrix element is known exactly, while the hadronic part can be described by three form factors F, G, H [6]. Making the partial-wave expansion of the hadronic current with respect to the angular momentum of the dipion system and taking only s and p waves,¹ the hadronic form factors can be written in the following form:

$$\begin{aligned} F &= f_s e^{i\delta_0^0(s)} + f_p e^{i\delta_1^1(s)} \cos \theta_\pi, \\ G &= g_p e^{i\delta_1^1(s)}; \quad H = h_p e^{i\delta_1^1(s)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Here $s = M_{\pi\pi}^2$ is the square of dipion invariant mass; θ_π is the polar angle of the pion in the dipion rest frame measured with respect to the flight direction of dipion in the K meson rest frame. The coefficients f_s, f_p, g_p, h_p can be parameterized as functions of pion momenta q in the dipion rest system and of the invariant mass of lepton pair $s_{e\nu}$ in the known way [8].

* Physics of Atomic Nuclei, 73:6 (2010) 961–964. © 2010 MAIK Наука/Interperiodika Publishing. Reproduced with kind permission of Pleiades Publishing, Ltd.

¹As was shown in [7], the contribution of higher waves are small and can be safely neglected.

The phases δ_l^I relevant to isospin I and orbital momenta l of the dipion system due to Fermi–Watson theorem [9] coincide with the corresponding phase shifts in elastic $\pi\pi$ scattering. From the other hand the phases can be related to the scattering lengths by the set of Roy equations [10].

Recently, the experiment NA-48/2 at CERN [11] has observed the anomaly (cusp) at the two charged pions production threshold in the neutral pions mass distribution from the decays $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \pi^0$. As N. Cabibbo pointed [12, 13], this is a result of isospin breaking in the final state due to the difference of masses of neutral and charged pions in the reaction $^2 \pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^0 \pi^0$.

The final state interaction of pions in K_{e4} decay is usually considered using the Fermi–Watson theorem valid only in the isospin symmetry limit i.e. at $m_c = m_0$. According to [16], the distinction in masses of neutral and charged pions leads to breaking of this theorem³ and results in the corrections which are not small even far from the production threshold.

In the present paper we consider all isospin symmetry breaking effects including the electromagnetic interaction in the dipion system and calculate their impact on the value of scattering length a_0 extracted from K_{e4} decay rates.

2. Isospin symmetry breaking due to pions mass difference

The phase shift δ_0^0 relevant to scattering length a_0^0 , has an impact only on hadronic form factor F , whereas the form factors G and H depend only on p -wave phase shift δ_1^1 . If to consider only S and P waves, the inelastic process $\pi^0 \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ and the reversed one are forbidden due to identity of neutral pions in $l = 1$ state. Thus, inelastic transitions can change only the first term in the form factor F , relevant to production of s -wave pions in the state with isospin $I = 0$.

It can be shown that in one loop approximation of nonperturbative effective field theory (see e.g. [19]), the decay amplitude M relevant to dipion in the state with $I = l = 0$

$$M = M_1(1 + ik_2 a_{+-}) + ik_1 a_x M_2. \quad (4)$$

Here M_1, M_2 are the so called “unperturbed” amplitudes [12] corresponding to the decays with charged and neutral dipions in the final state; $k_1 = \sqrt{M_{\pi\pi}^2 - 4m_0^2}/2$ and $k_2 = \sqrt{M_{\pi\pi}^2 - 4m_c^2}/2$ are the relative momenta in the $\pi^0 \pi^0$ and $\pi^+ \pi^-$ systems with the same invariant mass $M_{\pi\pi}$, and a_{+-}, a_x are the s -waves amplitudes of the elastic scattering $\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ and charge exchange reaction $\pi^0 \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$.

As discussed in [19], these amplitudes are related with scattering lengths a_0, a_2 through the following relations⁴:

$$\begin{aligned} a_{+-} &= \frac{2a_0 + a_2}{3}(1 + \epsilon); \\ a_x &= \frac{\sqrt{2}}{3}(a_0 - a_2)(1 + \epsilon/3); \quad \epsilon = \frac{m_0^2 - m_c^2}{m_c^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

²The possibility of cusp in $\pi^0 \pi^0$ scattering due to different pion masses in charge exchange reaction $\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^0 \pi^0$ was firstly predicted in [14].

³The breakdown of Fermi–Watson theorem in photoproduction has been discussed in [15].

⁴Our definition of amplitudes coincide with the one adopted in [20], and differs from the accepted definition in [19, 13].

A simple relation between the “unperturbed” amplitudes $M_1 = \sqrt{2}M_2$, follows from the rule $\Delta I = 1/2$ for semi-leptonic decays. Thus, in the isospin symmetry limit ($m_0 = m_c$)⁵:

$$M = M_1(1 + ik_1 a_0) = M_1 \sqrt{1 + k_1^2 a_0^2} e^{i\delta_0^0}. \quad (6)$$

This equation is nothing else than the Fermi–Watson theorem for the $\pi\pi$ interaction in the final states.

The considered picture can be generalized to higher orders [17]. Summing all subsequent loops of $\pi\pi$ scattering, we obtain the following:

$$\begin{aligned} M &= \frac{M_1(1 - ik_1 a_{00}) + ik_1 a_x M_2}{D}; \\ D &= (1 - ik_1 a_{00})(1 - ik_2 a_{+-}) + k_1 k_2 a_x^2, \end{aligned} \quad (7)$$

where the $\pi^0\pi^0$ elastic amplitude $a_{00} = (a_0 + 2a_2)(1 - \epsilon)/3$.

It is convenient to rewrite this equation in the following form:

$$\begin{aligned} M &= \frac{M_1 \sqrt{1 + k_1^2 (a_{00} - a_x^2)/\sqrt{2}}}{|D|} e^{i\delta_{+-}}, \\ \delta_0^0 &= \arctan \frac{k_1 a_{00} + k_2 a_{+-}}{1 + k_1 k_2 (a_x^2 - a_{00} a_{+-})}, \\ &- \arctan k_1 (a_{00} - a_x/\sqrt{2}). \end{aligned} \quad (8)$$

Thus, unlike to isospin symmetry limit the decay amplitude also depends on a_2 .

The expression (8) is the generalization of Fermi–Watson theorem for the case of the isospin symmetry breaking in the strong phase relevant to the s -wave $\pi\pi$ scattering.

Another effect which can be important in the procedure of the scattering lengths extraction from the experimental data on K_{e4} decay, is the Coulomb interaction among the charged pions. The widely spread wisdom is that in order to take the electromagnetic effects into account it is sufficient to multiply the square of matrix element (2) by Gamov factor

$$G = \frac{2\pi w}{1 - e^{-2\pi w}}; \quad w = \frac{\alpha}{v}. \quad (9)$$

Here v is the relative velocity in the dipion system and $\alpha = e^2/(4\pi)$ is fine structure constant.

Now let us show that besides this multiplier the electromagnetic interaction between pions also change the expression (8) for the S -wave phase and P -wave phase δ_0^1 , whose difference is extracted from experimental data.

3. Electromagnetic interaction in $\pi\pi$ system

In order to take into account the electromagnetic interactions between pions, we take an advantage of the trick successfully used in [17]. To switch on the electromagnetic interaction,

⁵In this limit the scattering lengths a_I corresponding to $\pi\pi$ states with isospin $I = 0, 2$ are connected with elements of K -matrix by the relation $e^{2i\delta_I} = (1 + ik_I a_I)/(1 - ik_I a_I)$.

one has to replace the charged pion momenta k_1 by a logarithmic derivative of the pion wave function in the Coulomb potential at the boundary of the strong field r_0 :

$$ik_1 \rightarrow \tau = \frac{d \log[G_0(kr) + iF_0(kr)]}{dr} \Big|_{r=r_0}. \quad (10)$$

Here F_0 and G_0 are the regular and irregular solutions of the Coulomb problem.

In the region $kr_0 \ll 1$, where the electromagnetic effects are significant, this expression can be simplified:

$$\begin{aligned} \tau &= ik - \alpha m [\log(-2ikr_0) + 2\gamma + \psi(1 - i\xi)] \\ &= \text{Re} \tau + i \text{Im} \tau, \\ \text{Re} \tau &= -\alpha m [\log(2kr_0) + 2\gamma + \text{Re} \psi(1 - i\xi)], \\ \xi &= \frac{\alpha m}{2k}, \quad \text{Im} \tau = kA^2, \\ A &= \exp\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) |\Gamma(1 + i\xi)|, \end{aligned} \quad (11)$$

where Euler constant $\gamma = 0.5772$ and digamma function $\psi(\xi) = d \log \Gamma(\xi) / d\xi$.

Substituting these expressions in (8) one can express the modified phase for $\pi^+\pi^-$ state ($I = l = 0$) $\tilde{\delta}_0^0$ through the standard phases [15] δ_0^0, δ_0^2 relevant to exact isospin symmetry limit.

Dividing the modified phase as a sum of strong δ_s and electromagnetic δ_{em} terms, we obtain:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_0^0 &= \delta_s + \delta_c; \\ \delta_s &= \arctan(A \tan \delta_0^0 + B \tan \delta_0^2); \\ \delta_c &= \arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right); \quad \beta = \frac{\sqrt{1-4u}}{1-2u}; \\ A &= \frac{2G(1+\epsilon) + \lambda(1+\epsilon/3)}{3}; \\ B &= \frac{G(1+\epsilon) - \lambda(1+\epsilon/3)}{3}; \\ \lambda &= \sqrt{\frac{1-4u_0}{1-4u_c}}; \quad u_c = \frac{m_c^2}{s}; \quad u_0 = \frac{m_0^2}{s}. \end{aligned} \quad (12)$$

Let us note that, whereas the electromagnetic phase δ_{em} has a common textbook form [18], the strong phase is essentially modified by electromagnetic effects (the Gamov factor in δ_s) as well as by isospin symmetry breaking effects provided by pions mass difference.

Using the same approach one can show that the modified P -wave phase becomes as follows:

$$\tilde{\delta}_1^1 = \arctan \left[G \left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \tan \delta_1^1 \right]. \quad (13)$$

In the limit of exact isospin symmetry ($m_c = m_0$; $\alpha = 0$) the above expressions become well known, whose values can be obtained by using the Roy equations [10].

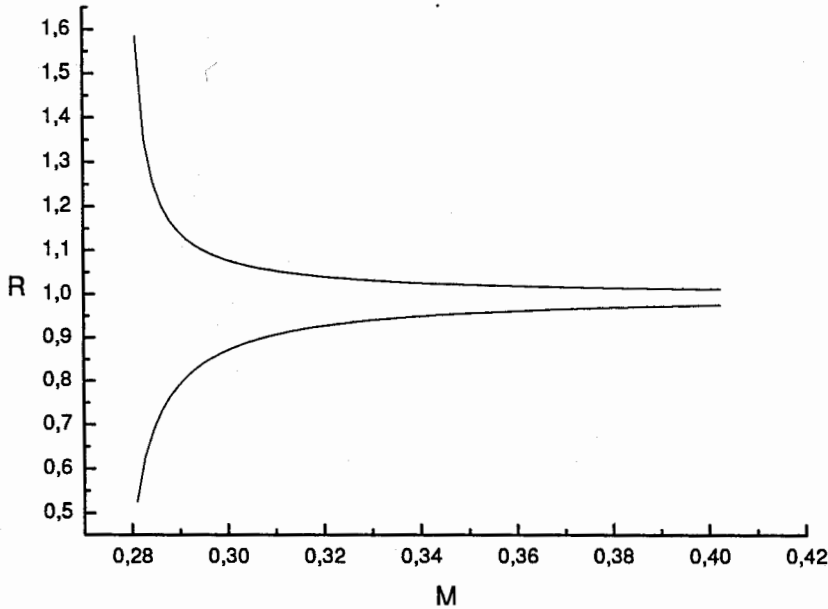


Figure 1: The dependence of $\delta = \delta_0^0 - \delta_1^1$ on dipion invariant mass in the exact isospin symmetry case (dashed line) and with all isospin symmetry breaking corrections taken into account (solid line).

Setting in accordance with ChPT $a_0 = 0.225$ and using the relevant phases δ_0^0, δ_1^1 from Appendix D of [1], we have calculated the modified phases differences $\delta = \delta_0^0 - \delta_1^1$ as a function of the invariant mass of dipion $M_{\pi\pi}$.

Fig. 1 shows these dependencies in the two limiting cases. The dashed line corresponds to exact isospin symmetry limit $m_0 = m_c; \alpha = 0$. To get $\delta = \delta_0^0 - \delta_1^1$ we use the phases values from Appendix D of work [1]. The solid line is the result of all the isospin breaking effects, calculated by obtained above expressions. The experimental data are from [4]. This figure demonstrates agreement between experimental data and the predictions of ChPT, if isospin symmetry breaking corrections are taken into account.

In Table 1 we cite δ as a function of dipion invariant mass $M_{\pi\pi}$ in respect to different isospin breaking corrections. This allows one to estimate separately the contribution of considered above effects.

4. Conclusions

All the isospin symmetry breaking corrections considered above increase the phase difference δ . Their contribution is the largest near the threshold, but even far from it, they are essential.

The K_{e4} decay amplitude if to take the isospin symmetry breaking effects into account depends on scattering length a_2 unlike the common approach. The proposed approach allows one to extract the values of scattering lengths with much higher accuracy than in standard approximation.

Table 1: *The impact of considered corrections on phase difference $\delta = \delta_0^0 - \delta_1^1$: 1) standard case [1] with $a_0 = 0.225$; $a_2 = -0.037$; 2) with charge exchange process $\lambda = \sqrt{(1 - 4u_0)/(1 - 4u_c)}$; 3) with parameter ϵ (expression (5)); 4) with electromagnetic interaction; 5) with the additional Coulomb phase (13)*

$M_{\pi\pi}$	1	2	3	4	5
0.285	0.048	0.059	0.061	0.063	0.082
0.300	0.096	0.103	0.108	0.110	0.122
0.315	0.134	0.140	0.147	0.149	0.159
0.330	0.170	0.175	0.184	0.186	0.195
0.345	0.205	0.210	0.220	0.223	0.231
0.360	0.239	0.244	0.256	0.259	0.267
0.375	0.274	0.279	0.292	0.296	0.304
0.390	0.309	0.314	0.328	0.333	0.340

The authors are grateful to V.D. Kekelidze and D.T. Madigozhin for useful discussions and support.

References

- [1] B. Ananthanarayan, G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, Phys. Rept. 353 (2001) 207; B 603 (2001) 125.
- [2] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B 603 (2001) 125.
- [3] S. Pislak et al., Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 221801; Phys. Rev. D 67 (2003) 072004.
- [4] B. Bloch-Devaux, talk given at KAON 2007 conference, Frascati, May, 2007
- [5] N. Cabibbo and A. Maksymowicz, Phys. Rev. B 137 (1965) 438.
- [6] A. Pais and S. Treiman, Phys. Rev. 168 (1968) 1858.
- [7] G. Colangelo, M. Knecht, and J. Stern, hep-ph/9406211.
- [8] G. Amoros and J. Bijnens, J. Phys. G 25 (1999) 1607.
- [9] E. Fermi, Prepared for 4th Annual Rochester Conference on High Energy and Nuclear Physics, Rochester, New York, 1954; K. Watson, Phys. Rev. 88 (1952) 1163.
- [10] S. Roy, Phys. Lett. B 353 (1971) 36.
- [11] J.R. Batley et al., Phys. Lett. B 633 (2006) 173.
- [12] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 121801.
- [13] N. Cabibbo and G. Isidori, JHEP 0503 (2005) 021.

- [14] Ulf-G. Meissner, G. Müller, and S. Steininger, *Phys. Lett. B* 406 (1997) 154.
- [15] B. Ananthanarayan, *Phys. Lett. B* 643 (2006) 391.
- [16] S. Gevorkyan, A. Sissakian, H. Torosyan, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya, arXiv:0704.2675 [hep-ph].
- [17] S.R. Gevorkyan, A.V. Tarasov and O.O. Voskresenskaya, *Phys. Lett. B* 649 (2007) 159.
- [18] L. Landau and E. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Moscow: Nauka, 1974.
- [19] G. Colangelo, J. Gasser, B. Kubis, and A. Rusetsky, *Phys. Lett. B* 638 (2006) 187.
- [20] A. Gashi, G. Oades, G. Rasche, and W. Woolcock, *Nucl. Phys. A* 699 (2002) 73.

Formation of $\pi\mu$ atoms in $K_{\mu 4}$ decay *

S.R. Gevorkyan, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya

Joint Institute for Nuclear Research, 141980, Dubna, Russia

Abstract

We have derived the decay rate of $\pi\mu$ atom formation in $K_{\mu 4}$ decay. Using the obtained expressions the decay rate of the atom formation has been calculated and it was shown that the considered decay could give a noticeable contribution as a background to the fundamental decay $K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}$.

1. Introduction

The elementary atom formation in particle collisions and decays can give unique information on strong interaction dynamics. The determination of the pionium atom lifetime [1] allows one to get information on $\pi\pi$ scattering lengths, whose knowledge is crucial to verify of the predictions of Chiral Perturbation Theory [2]. The accuracy of scattering lengths determination from non-leptonic decays [3] $K^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^0\pi^0$ also depends on the effects caused by a possibility of $\pi\pi$ bound state formation [4, 5]. The production of positronium atoms in π^0 Dalitz decay [6] or its photoproduction on the extended target [7, 8], can give information on dependence of interactions on the spin state of the system and on the mechanism of the bound state formation.

The basic work by L. Nemenov [9] stimulated the search for elementary atoms and the $\pi\mu$ atom was discovered [10, 11] in the decays of neutral kaons $K_L \rightarrow \pi^+\mu^-\nu$.

In the present work we show the importance of investigations of the $\pi\mu$ atom formation in the decay

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \mu^+ + \nu \quad (1)$$

($K_{\mu 4}$ decay). The motivation of this is follows. Recently great efforts have been done [12] for the experimental study of the rare decay $K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}$ aimed at determining the value of V_{st} , which is unequally predicted by the theory [13, 14, 15]. At present the experiment NA62 [16] at CERN SPS is in progress, which plans to collect ≈ 80 events of this rare decay¹.

Below we will calculate the probability of $\pi\mu$ atom formation in the $K_{\mu 4}$ decay and show that the branching rate of the atom formation in decay (1) is not much smaller than the branching ratio of fundamental process

$$K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}. \quad (2)$$

As a result the process of the $\pi\mu$ atom formation can give a certain contribution as a background to the basic decay (2) in the relevant kinematical regions of experiment NA62.

*Phys. Lett. B 688 (2010) 192. © 2010 Elsevier B.V. Reproduced by permission of Elsevier B.V.

¹At the moment the six events are reported by CKM collaboration [12].

2. The decay rate of the $\pi\mu$ atom formation

To obtain the decay rate of the $\pi\mu$ atom formation in $K_{\mu 4}$ decay

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + A_{\pi\mu} + \nu, \quad (3)$$

we begin from the well known [17, 18] matrix element of the decay (1) written in the form of the product of the lepton and hadron currents

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* j_\lambda J^\lambda = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* \bar{u}(k_1) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) v(k_2) (V^\lambda - A^\lambda), \quad (4)$$

where the axial A^λ and vector V^λ hadronic currents:

$$\begin{aligned} A^\lambda &= -\frac{i}{m_K} ((p_1 + p_2)^\lambda F + (p_1 - p_2)^\lambda G + (k_1 + k_2)^\lambda R); \\ V^\lambda &= -\frac{H}{m_K^3} \epsilon^{\lambda\nu\rho\sigma} (k_1 + k_2)_\nu (p_1 + p_2)_\rho (p_1 - p_2)_\sigma. \end{aligned} \quad (5)$$

Here and later on k, p_1, p_2, k_1, k_2 are the invariant momenta of kaon, pions, muon and neutrino; m_K, m_π, m_μ are the relevant masses.

Confining as usually by s and p waves and assuming the same p-wave phase δ_p for different form factors, one has

$$F = F_s e^{i\delta_s} + F_p e^{i\delta_p}; \quad G = G_p e^{i\delta_p}; \quad H = H_p e^{i\delta_p}; \quad R = R_p e^{i\delta_p}. \quad (6)$$

The main goal of the experimental investigation [19, 20, 21] is to measure quantities F_s, F_p, G_p, H_p, R_p , and $\delta = \delta_s - \delta_p$ as functions of three invariant combinations of pions and leptons momenta $s_\pi = (p_1 + p_2)^2$, $s_l = (k_1 + k_2)^2$ and $\Delta = -k(p_1 + p_2)$ [18].

From the other hand, to make up the $\pi\mu$ atom in the decay (1), the negative pion and muon should have similar velocities. For such kinematics only two variables are at work, which we have chosen as s_π, s_l .

Since the binding energy of the ground state of $\pi\mu$ atom is small [22] $\epsilon = 1.6\text{KeV}$, the atom is a nonrelativistic system. According to the general rules of quantum mechanics, the amplitude of the decay (3) can be written as the product of the matrix element of the decay (1) taken at equal velocities of muon and negative pion and the square of the Coulomb wave function at the origin

$$M(K^+ \rightarrow \pi^+ A_{\pi\mu} \nu) = \frac{\Psi(r=0)}{\sqrt{2\mu}} M(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \mu^+ \nu)_{v_\pi=v_\mu}. \quad (7)$$

The square of the Coulomb wave function evaluated at the origin and summed over the principal quantum number [11]

$$|\Psi(r=0)|^2 = \sum_{n=1} |\Psi_n(r=0)|^2 = \frac{1.2}{\pi} (\alpha\mu)^3 \quad (8)$$

with the fine structure constant $\alpha = \frac{1}{137}$ and reduced mass $\mu = \frac{m_\pi m_\mu}{m_\pi + m_\mu}$.

Using the well known rules for the decay rate of (3) we obtain

$$\Gamma = \frac{1}{(4\pi)^3 m_\pi m_K} |\Psi(r=0)|^2 \int |M(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \mu^+ \nu)_{v_\pi=v_\mu}|^2 dE_\nu dE_\pi. \quad (9)$$

Integrations in this expression are going over neutrino E_ν and positive pion E_π energies.

To calculate the square of the matrix element in (9), we take an advantage of the fact that the bilinear form of lepton current $t_{\alpha\beta} = j_\alpha j_\beta^\dagger$ can be written in the well known form (see e.g. [23])

$$t^{\alpha\beta} = 8 \left(k_1^\alpha k_2^\beta + k_2^\alpha k_1^\beta - (k_1 k_2) g^{\alpha\beta} + i \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma \right). \quad (10)$$

This expression has to be contracted with the relevant form of hadronic current $T_{\alpha\beta}$. As an example let us consider the convolution of lepton tensor (10) with the square of the first term of the axial hadronic current in (5)

$$\sum t^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = \frac{8}{m_K^2} (2(p_1 k_1 + p_2 k_1)(p_1 k_2 + p_2 k_2) - (p_1 + p_2)^2 (k_1 k_2)) |F|^2. \quad (11)$$

Accounting that the muon and negative pion which compose this atom should have equal velocities, let us express their momenta through the atom momentum p_a and mass m_a : $p_2 = \frac{m_\pi}{m_a} p_a$; $k_1 = \frac{m_\mu}{m_a} p_a$, and introduce the following Lorentz invariant combinations:

$$\begin{aligned} q_1 &= 2p_1 k_2 = m_K^2 + m_a^2 - m_\pi^2 - 2m_K E_a; \\ q_2 &= 2p_1 p_a = m_K^2 - m_a^2 - m_\pi^2 - 2m_K E_\nu; \\ q_3 &= 2p_a k_2 = m_K^2 - m_a^2 + m_\pi^2 - 2m_K E_\pi. \end{aligned} \quad (12)$$

As the atom energy in the kaon rest frame is $E_a = m_K - E_\pi - E_\nu$, the decay (3) is described by two independent variables, which in our case are the positive pion energy E_π and neutrino energy E_ν .

The expression (11) can be rewritten by means of the above invariants:

$$\sum t^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = \frac{4m_\mu}{m_a m_K^2} q_1 (q_2 + 2m_\pi m_a) |F|^2. \quad (13)$$

Calculating all terms in the contraction of the square of the axial and vector form factors with the lepton part, we obtain the following expression for the atom formation decay rate in (2)

$$\begin{aligned} \Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ A_{\pi\mu\nu}) &= \frac{G_F^2 V_{us}^2}{m_\pi (4\pi m_K)^3} \frac{1.2\alpha^3 \mu^3}{\pi} \int \Phi(E_\pi, E_\nu) dE_\pi dE_\nu, \\ \Phi(E_\pi, E_\nu) &= q_1 (q_2 + 2m_\pi m_a) |F|^2 + q_1 (q_2 - 2m_\pi m_a) |G|^2 + m_\nu^2 q_3 |R|^2 \\ &+ 2(q_1 q_2 - 2m_\pi^2 q_3) \text{Re}(FG^*) + 2m_\mu (m_a q_1 + m_\pi q_3) \text{Re}(FR^*) \\ &+ 2m_\mu (m_a q_1 - m_\pi q_3) \text{Re}(RG^*) + \frac{m_\pi^2}{m_a^2} (4E_\nu E_\pi q_1 - q_1^2 - 4m_\pi^2 E_\nu^2) \\ &\times \left(\frac{q_3}{m_\pi^2} |H|^2 - 2\frac{m_a}{m_\pi} \text{Re}(GH^* + FH^*) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

The integration here is going in the following limits:

$$\frac{m_K^2 + m_\pi^2 - m_a^2 - 2m_K E_\pi}{2(m_K - E_\pi + \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2})} \leq E_\nu \leq \frac{m_K^2 + m_\pi^2 - m_a^2 - 2m_K E_\pi}{2(m_K - E_\pi - \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2})},$$

$$m_\pi \leq E_\pi \leq \frac{m_K^2 + m_\pi^2 - m_a^2}{2m_K}. \quad (15)$$

The expression (14) is the main result of the present work. It allows one to calculate not only the decay rate of the atom formation in $K_{\mu 4}$ decay, but also the differential decay rate $\frac{d\Gamma}{dE_\pi dE_\nu}$, whose knowledge is important to estimate the background in the basic decay $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$.

3. Numerical analysis

To calculate the atom formation decay rate using expression (14), one has to know the hadronic form factors. Since the hadronic form factors in $K_{\mu 4}$ and $K_{e 4}$ decays are the same, for three form factors F , G and H we take the standard parametrization [19, 20, 21] with parameters² from [20].

The axial hadronic form factor R can not be extracted from the experimental data on $K_{e 4}$ decay³. For this quantity we use the theoretical prediction from [24, 25]. Substituting these parameterizations in (14) and using the value of $K_{\mu 4}$ decay rate from [26], we obtain for the probability of atom formation in the $K_{\mu 4}$ decay $\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ + A_{\pi\mu} + \nu)/\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \mu^+ + \nu) \approx 3.7 \times 10^{-6}$. This probability could be compared with the probability of $\pi\mu$ atom formation in $K_{\mu 3}$ decay [11] $\sim 4 \times 10^{-7}$ and $\pi\pi$ atom formation in the non-leptonic decay [27] $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- \sim 8 \times 10^{-6}$.

As it is mentioned above, the atom formation in $K_{\mu 4}$ decay can serve as background to the rare decay $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ in the relevant kinematical region. For the branching decay rate (see e. g. [28]) the Standard Model predicts $Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}) \approx (0.85 \pm 0.07) \times 10^{-10}$, whereas the branching ratio for the $\pi\mu$ atom formation considered in the present work, turns out to be $Br(K^+ \rightarrow \pi^+ A_{\pi\mu} \nu) \approx 0.5 \times 10^{-10}$. Thus, the branching ratio of the decay (3) considered in this work is comparable with the branching ratio of the basic decay $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ and so it should be considered as a possible background for this decay.

The main contribution from the decay (3) is located at the pion energies E_π confined by threshold condition $M^2 = (k - p_1)^2 = m_K^2 + m_\pi^2 - 2m_K E_\pi \geq m_a^2$. From the other hand in the real experiment one tries to cut off the energy of the detected pion to avoid the background from non-leptonic decays $K^\pm \rightarrow 3\pi$ to the basic process (2). Keeping this in mind and using expression (14) we calculated the contribution from the decay (3) relevant to the interval from $\pi\mu$ atom production threshold up to the threshold of three charged pion production in the decay $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$. This part of the decay (3) which can be potentially dangerous as the undesirable background to the basic process (2), composes $\sim 15\%$ of the total decay rate of (3). If one cuts off the pion energy in the decay (3) in accordance with restriction dictated by non-leptonic decay $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0$, the relevant contribution makes up only $\sim 6.6\%$ of the total decay rate. Thus the large background from the decay (3) can be significantly suppressed

²The precision of the experimental data [21] is better than in [20] but, unfortunately, only relative parameters determining form factors, are cited.

³The term with R in $K_{e 4}$ decay rate is proportional to the square of the electron mass and can be neglected.

imposing the relevant cuts on pion detection. Certainly, the mentioned estimates are enough raw and for real experiments the calculations should be done accounting the efficiency of pion registration and characteristics of a specific set-up. Such consideration for the kinematic range relevant to the experiment NA62 at CERN will be done elsewhere.

The authors are grateful to V. Kekelidze, D. Madigozhin and Yu. Potrebenikov for permanent support and useful discussions.

References

- [1] B. Adeva et al., *J. Phys. G* 30, 1929 (2004);
B. Adeva et al., *Phys. Lett.*, B619, 50 (2005)
- [2] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, *Nucl. Phys.* B603, 125 (2001)
- [3] J.R. Batley et al., *Eur. Phys. J.* C64, 589 (2009)
- [4] S.R. Gevorkyan, A.V. Tarasov, O.O. Voskresenskaya, *Phys.Lett.* B649, 159 (2007)
- [5] S.R. Gevorkyan, D.T. Madigozhin, A.V. Tarasov, ad O.O. Voskresenskaya, *Phys. Part. Nucl. Lett.*, 5, 85 (2007)
- [6] L.G. Afanasyev et al., *Phys. Lett.* B236, 116 (1990)
- [7] L.L. Nemenov, *Yad. Phys.* 34, 1308 (1981)
- [8] S.R. Gevorkyan and S.S. Grigoryan, *Phys. Rev.* 65A, 022505 (2002)
- [9] L.L. Nemenov, *Sov. J. Nucl. Phys.* 16, 67 (1973);
JINR Preprint P2-5941 (1971)
- [10] R. Coombes et al., *Phys. Rev. Lett.* 37, 249 (1976)
- [11] S.H. Aronson et al., *Phys. Rev.* 33, 3180 (1986)
- [12] A.Artamonov et al., hep-ex 0903.0030;
V.V. Anisimovsky et al., *Phys. Rev. Lett.* 93, 031801 (2004)
- [13] G. Buchalla and A.J. Buras, *Nucl.Phys.* B548, 309 (1999)
- [14] G. Isidori, eConf C0304052, WG304 (2003)
- [15] A.J. Buras, F. Schwab, and S. Uhlig, *Rev. Mod. Phys.* 80, 965 (2008)
- [16] G. Anelli et al., Proposal CERN-SPSC-2005-013
- [17] N. Cabibbo and A. Maksymowicz, *Phys. Rev.* 137, 438 (1965)
- [18] A. Pais and S. Treiman, *Phys. Rev.* 168, 1858 (1968).
- [19] L. Rosselet et al., *Phys. Rev.* D15, 574 (1977)
- [20] S. Pislak et al., *Phys. Rev.* D67, 072004 (2003)

- [21] J.R. Batley et al., Eur. Phys. J. C 54, 411 (2008)
- [22] R. Staffin, Phys. Rev. D16, 726 (1977)
- [23] L.B. Okun, "Weak interactions of elementary particles" Israel Program Sci. Translations, 1965
- [24] M. Knecht, H. Sazdjian, J. Stern, and N.M. Fuchs, Phys. Lett. B313, 229 (1993)
- [25] J. Bijnens, G. Colangelo, and J. Gasser, Nucl. Phys. B427, 427 (1994)
- [26] C. Amsler et al.(PDG), Phys. Lett. B667, 1 (2008)
- [27] Z.K. Silagadze, JETP Lett. 60, 689 (1994)
- [28] J. Brod and M. Gorbahn, Phys. Rev. D78, 034006 (2008)

A Complete Version of the Glauber Theory for Elementary Atom – Target Atom Scattering and Its Approximations*

Alexander Tarasov and Olga Voskresenskaya[§]

[§] Joint Institute for Nuclear Research, 141980 Dubna, Moscow Region, Russia

Abstract. A general formalism of the Glauber theory for elementary atom (EA) – target atom (TA) scattering is developed. A second-order approximation of its complete version is considered within the optical-model perturbative approach. The accuracy of the eikonal approximation for target-elastic EA–TA scattering neglecting the excitation effects of TA is evaluated in the framework of the second-order optical model of the complete version of the theory for collisions of atomic systems.

PACS numbers: 11.80.Fv, 34.50.-s, 36.10.-k

1. Introduction

The experiment DIRAC, now under way at PS CERNs [1], aims to observe the relativistic hydrogen-like EA [2]† consisting of π^\pm and/or π^\mp/K^\mp mesons ('dimesoatoms') and measure their lifetime with a high precision. The interaction of relativistic dimesoatoms with ordinary target atoms is of great importance for this experiment as the accuracy of the EA–TA interaction cross sections is essential for the extraction of the dimesoatoms lifetime.

So it was shown that for the success of the DIRAC experiment it is essential that the excitation and ionization cross sections of the ponium ($A_{2\pi}$) are known to 1% or better, and it was found that only using the Glauber cross sections one will be able to reach the desired 1% level in accuracy for the target atom charge $Z > 60$.

Originally, applications of the Glauber theory confined were to high energy nuclear and fundamental particle physics [3]. The use of Glauber approximation in 'atomic collisions', i.e. in intermediate- and high-energy scattering of structureless charged particles (electrons, positrons, and protons) by neutral atoms (H, He, and alkali target atoms) reviews the paper [4] (see also, e.g., [5]).

Only one of the works reflected these papers [4, 5] is devoted to atom–atom collisions [6]. The authors of [6] have attempted to infer the cross section for H(2s) quenching in the H(2s)–He(1s²) interaction. The desired quenching cross section is found by applying the optical theorem to their computed Glauber amplitudes. The general formalism of the Glauber theory for atom–atom collisions has not been developed in this work.

* arXiv:1108.4151 [nucl-th] v3, Nov 2012. 10 p.

† Elementary atoms A_{ab} are the Coulomb bound states of two elementary particles. One can enumerate here A_{2e} , $A_{e\mu}$, $A_{2\mu}$, $A_{e\pi}$, $A_{\mu\pi}$, $A_{2\pi}$, $A_{\pi K}$, A_{KK} .

In the series of papers [7], developed was a Glauber approximation for the calculations of the total excitation cross sections for the hydrogen-like relativistic dimesoatoms ($A_{2\pi}$, $A_{\pi K}$, A_{KK}) interacting with a screened Coulomb potential of ordinary target atom (Ti, Ta, etc.). These EA excitation cross sections for the Coulomb interaction with the TA in the eikonal approximation takes into account all multiphoton EA-TA exchange processes.

However, in this approximation all possible excitations of TA in intermediate and/or finale states are completely neglected. In other words, this theory is essentially based on the assumption that the Coulomb potential, created by TA, does not change during the EA-TA interaction. As a result, the calculated cross sections of the coherent interaction σ_{coh}^{tot} within this 'potential' approximation, has been identified with the total cross sections σ^{tot} .

The incoherent part of the total cross sections σ_{incoh}^{tot} , in the context of the DIRAC experiment, correspond to scattering with excitations of the TA electrons from the ground state to all possible excited states. Nuclear excitations of the TA will not considered here, because much larger excitation energy is required (typically on the order of MeV) that exceeds the energy range relevant for the application to the dimesoatom-atom scattering [8, 9].

Some estimations of the ratio $\sigma_{incoh}^{tot}/\sigma_{coh}^{tot}$ for the EA-TA scattering were performed in the papers [8, 9]. The detailed study of the influence of the target electrons on the EA scattering and the evaluation of the incoherent contributions to the coherent scattering in the first-order Born approximation carry out in [9]. In ref. [10], announced were the simplest results concerning the role of multiphoton exchanges in the incoherent interaction of dimesoatoms with atoms of matter within an approximation which corresponds, as shown further, to the second-order optical-model approximation for a complete version of the Glauber EA-TA scattering theory.

In the present work, the eikonal approximation for target-elastic scattering of EA neglecting all possible excitations of TA [7] has been extended valid for account these effects within the framework of this complete version. The paper is organized as follows. In sec. 2, we develop a general formalism of the Glauber theory [3] for the EA-TA interactions. In sec. 3, we consider the second-order perturbation approximation of its complete version. Sec. 4 is devoted to the estimation of accuracy of 'potential' approximation for target-elastic EA-TA scattering [7] within the second-order optical model. In sec. 5, we reconsider the second-order model in another terms and establish the relationship between the developed formalism and the results of refs. [7]. We also consider results of our analysis in the context of the DIRAC experiment. In conclusion, we short summarize our findings.

We would like to note that while the theory developed in this work is motivated by concrete experiment, it is also of general interest for high energy physics and atomic physics.

This work is devoted to the memory of my friend, the husband and co-author, a remarkable human being and scientist Alexander Tarasov, who untimely passed away on March 19th, 2011.

2. Complete version of the Glauber theory for EA-TA scattering

The complete Glauber approximation for the amplitude $A_{i+I \rightarrow f+F}(\vec{q})$ of the EA-TA interactions may be given by

$$A_{i+I \rightarrow f+F}(\vec{q}) = \frac{i}{2\pi} \int d^2b \exp(i\vec{q}\vec{b}) \Gamma_{i+I \rightarrow f+F}(\vec{b}), \quad (1)$$

where \vec{q} is the three dimension momentum transverse to the target; the integration is carried out over a plane perpendicular to the direction of incidence; \vec{b} is an impact-parameter vector in this plane; $\Gamma_{i+I \rightarrow f+F}(\vec{b})$ is the so-called profile function.

We may formulate the problem in a general way by considering the EA scattering on a system of Z constituents with the coordinates $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_Z$ and the projections on the plane of the impact parameter $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_Z$.

If we introduce the configuration spaces for the EA wave functions $\psi_i(\vec{r}), \psi_f(\vec{r})$ and the wave functions $\Psi_I(\{\vec{r}_k\}), \Psi_F(\{\vec{r}_k\})$ of the TA constituents in the initial i, I and the final f, F states, we may write the profile function as

$$\Gamma_{i+I \rightarrow f+F}(\vec{b}, \{\vec{s}_k\}) = \int d^3r \psi_f^*(\vec{r}) \psi_i(\vec{r}) \int \prod_{k=1}^Z d^3r_k \Psi_F^*(\{\vec{r}_k\}) \Psi_I(\{\vec{r}_k\}) \times \Gamma(\vec{b}, \vec{s}, \{\vec{s}_k\}), \quad (2)$$

with the interaction operator

$$\Gamma(\vec{b}, \vec{s}, \{\vec{s}_k\}) = 1 - \exp[i\Phi(\vec{b}, \vec{s}, \{\vec{s}_k\})] \quad (3)$$

and the phase-shift function

$$\Phi(\vec{b}, \vec{s}, \{\vec{s}_k\}) = Z\Delta\chi(\vec{b}, \vec{s}) - \Delta\chi(\vec{b}, \vec{s}, \{\vec{r}_k\}), \quad (4)$$

in which the total phase difference for two EA constituents may be written as a sum of the form

$$\Delta\chi(\vec{b}, \vec{s}, \{\vec{r}_k\}) = \sum_{k=1}^Z \Delta\chi(\vec{b} - \vec{s}_k, \vec{s}), \quad (5)$$

and the simple phase difference $\Delta\chi(\vec{b}, \vec{s})$ in (4) one can represent as follows:

$$\Delta\chi(\vec{b}) = \frac{\alpha}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[|\vec{R} + \vec{r}/2|^{-1} - |\vec{R} - \vec{r}/2|^{-1} \right], \quad (6)$$

$$\vec{R} = (\vec{b}, z), \quad \vec{r} = (\vec{s}, z), \quad \vec{r}_k = (\vec{s}_k, z_k). \quad (7)$$

Here, Z denotes the TA nuclear charge, α is the fine structure constant, $\beta = v/c = 1$, v is the velocity of the scattering EA in the laboratory frame, z is the direction of incidence; \vec{R} is the radius-vector from the center mass of the target atom to the center mass of EA, \vec{r} is the radius-vector from one EA constituent to another.

The amplitude $A_{i+I \rightarrow f+F}(\vec{q})$ (1) is normalized by the relations:

$$4\pi\Im A_{i+I \rightarrow i+I}(0) = \sigma^{tot}(i, I), \quad |A_{i+I \rightarrow f+F}(\vec{q})|^2 = d\sigma_{i+I \rightarrow f+F}/dq_{\perp}, \quad (8)$$

where

$$\sigma^{tot}(i, I) = \sigma_{coh}^{tot}(i, I) + \sigma_{incoh}^{tot}(i, I) = \sum_f \sum_F \sigma_{i+I \rightarrow f+F}, \quad (9)$$

‡ For the energy range relevant to the mesoatom-atom scattering, \vec{r}_k ($k = \overline{1, Z}$) is the position vector of an electron in the TA.

$$\sigma_{coh}^{tot}(i, I) = \sum_f \sigma_{i+I \rightarrow f+I}, \quad \sigma_{incoh}^{tot}(i, I) = \sum_f \sum_{F \neq I} \sigma_{i+I \rightarrow f+F}, \quad (10)$$

$$\sigma_{i+I \rightarrow f+F} = \int d^2q \, d\sigma_{i+I \rightarrow f+F}/dq_{\perp}. \quad (11)$$

To find the total cross sections for all types of collisions in which EA and TA begins in the states i and I , we must sum (10) over all states f and F . The summation is easily carried out by using the completeness relations:

$$\sum_f \psi_f(\vec{r}) \psi_f^*(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (12)$$

$$\sum_F \Psi_F(\{\vec{r}_k\}) \Psi_F^*(\{\vec{r}'_k\}) = \prod_{k=1}^Z \delta(\vec{r}_k - \vec{r}'_k). \quad (13)$$

Taking into account the expression

$$\begin{aligned} & \sum_{f,F} \frac{1}{2\pi} \int d^2q_1 A_{i_1+I_1 \rightarrow f+F}(\vec{q}_1) A_{i_2+I_2 \rightarrow f+F}^*(\vec{q}_1 + \vec{q}) \\ & = -i [A_{i_1+I_1 \rightarrow i_2+I_2}(\vec{q}) - A_{i_2+I_2 \rightarrow i_1+I_1}^*(-\vec{q})] \end{aligned} \quad (14)$$

and abbreviated $\mathbb{S} \equiv \exp[i\Phi]$, so that we find:

$$\sigma^{tot}(i, I) = 2\Re \int d^2b \langle 1 - \langle\langle \mathbb{S} \rangle\rangle \rangle, \quad (15)$$

$$\sigma_{coh}^{tot}(i, I) = \int d^2b \langle 1 - 2\Re \langle\langle \mathbb{S} \rangle\rangle + |\langle\langle \mathbb{S} \rangle\rangle|^2 \rangle, \quad (16)$$

$$\sigma_{incoh}^{tot}(i, I) = \int d^2b \langle 1 - |\langle\langle \mathbb{S} \rangle\rangle|^2 \rangle, \quad (17)$$

where the double brackets $\langle\langle \rangle\rangle$ signify that an overage is be taken over all configurations of EA and TA in i -th and I -th states.

In so doing, the following expressions for the EA and TA form factors take place:

$$\langle \tilde{f} \rangle = \int d^3r |\psi_i(\vec{r})|^2 \tilde{f}(\vec{r}), \quad (18)$$

$$\langle \langle \tilde{F} \rangle \rangle = \int \prod_{k=1}^Z d^3r_k |\Psi_I(\{\vec{r}_k\})|^2 \tilde{F}(\{\vec{r}_k\}). \quad (19)$$

The relation defining the $\langle\langle \mathbb{S} \rangle\rangle$ can be in abbreviated form written down as

$$\langle\langle \mathbb{S} \rangle\rangle = \exp(i\bar{\Phi}), \quad (20)$$

where $\bar{\Phi}(\vec{b}, \vec{s})$ is an effective ('optical') phase-shift function in the optical model for the complete version of the Glauber theory.

3. Second-order approximation for the complete version of the theory

In the so-called optical-model perturbative approximation of the Glauber theory, the expansion, which we find for the 'optical' phase-shift function $\bar{\Phi}(\vec{b})$, may be written as

$$\bar{\Phi}(\vec{b}, \vec{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \Phi_n, \quad (21)$$

where

$$\Phi_1 = \langle\langle \Phi \rangle\rangle, \quad \Phi_2 = \langle\langle (\Phi - \Phi_1)^2 \rangle\rangle, \quad (22)$$

$$\Phi_3 = \langle\langle (\Phi - \Phi_1)^3 \rangle\rangle, \quad \Phi_4 = \langle\langle (\Phi - \Phi_1)^4 \rangle\rangle - 3\Phi_2^2, \quad \dots$$

$$\Phi_n \sim Z \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^n.$$

The first order of the expression for $\bar{\Phi}(\vec{b}, \vec{s})$ is the double average of the phase-shift function $\Phi(\vec{b}, \vec{s}, \{\vec{s}_k\})$ over all configurations of EA and TA in i - and I -states. The second-order term of $\bar{\Phi}(\vec{b}, \vec{s})$ is purely absorptive in character and is equal in order of magnitude to the $Z\alpha^2$.

When in the expansion (21) the sum

$$\bar{\Phi}_{tail}(\vec{b}, \vec{s}) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \Phi_n \ll 1, \quad (23)$$

it seems natural to neglect the $\bar{\Phi}_{tail}(\vec{b}, \vec{s})$ and consider the following approximation:

$$\bar{\Phi}(\vec{b}, \vec{s}) \approx \Phi_1(\vec{b}, \vec{s}) + \frac{i}{2} \Phi_2(\vec{b}, \vec{s}) \quad (24)$$

with

$$\begin{aligned} \Phi_1(\vec{b}, \vec{s}) &= \frac{\alpha}{\pi\beta} \int \frac{d^2q}{q^2} \left[Z - \tilde{F}(\vec{q}) \right] \\ &\times \left\{ \exp \left[i\vec{q} \left(\vec{b} + \frac{\vec{s}}{2} \right) \right] - \exp \left[i\vec{q} \left(\vec{b} - \frac{\vec{s}}{2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\vec{b}, \vec{s}) &= \left(\frac{\alpha}{\pi\beta} \right)^2 \int \frac{d^2q_1 d^2q_2}{q_1^2 q_2^2} \left[\tilde{F}(\vec{q}_1 - \vec{q}_2) - \frac{1}{Z} \tilde{F}(\vec{q}_1) \tilde{F}(\vec{q}_2) \right] \\ &\times \left\{ \exp \left[i\vec{q} \left(\vec{b}_1 - \vec{b}_2 \right) \right] \right\} \left\{ \exp \left(\frac{i\vec{q}_1 \vec{s}}{2} \right) - \exp \left(\frac{-i\vec{q}_1 \vec{s}}{2} \right) \right\} \\ &\times \left\{ \exp \left(\frac{-i\vec{q}_2 \vec{s}}{2} \right) - \exp \left(\frac{i\vec{q}_2 \vec{s}}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

The last term in (24) correspond to incoherent scattering.

Accounting the relations

$$\sigma_{coh}^{tot}(i, I) = \langle \sigma_{coh}^{tot}(\vec{s}) \rangle, \quad \sigma_{incoh}^{tot}(i, I) = \langle \sigma_{incoh}^{tot}(\vec{s}) \rangle, \quad (27)$$

$$\sigma^{tot}(i, I) = \langle \sigma^{tot}(\vec{s}) \rangle,$$

we found for all type of the 'dipole total cross sections' $\sigma_{coh(incoh)}^{tot}(\vec{s})$, depending only from properties of a target matter, the following expressions:

$$\sigma^{tot}(\vec{s}) = 2 \int d^2b \left(1 - \cos \Phi_1 e^{-\Phi_2/2}\right), \quad (28)$$

$$\sigma_{coh}^{tot}(\vec{s}) = \int d^2b \left(1 - 2 \cos \Phi_1 e^{-\Phi_2/2} + e^{-\Phi_2}\right), \quad (29)$$

$$\sigma_{incoh}^{tot}(\vec{s}) = \int d^2b \left(1 - e^{-\Phi_2/2}\right). \quad (30)$$

4. 'Potential' approximation for the second-order optical model and its accuracy

The eikonal approximation for EA-TA scattering neglecting effects of the intermediate excitations of TA ('potential' approximation) [7] one can represent as follows:

$$[\sigma_{incoh}^{tot}(i, I)]_{pot} \approx 0, \quad [\sigma^{tot}(i, I)]_{pot} \approx [\sigma_{coh}^{tot}(i, I)]_{pot}. \quad (31)$$

If we define the absolute correction to this approximation as

$$\Delta\sigma_{coh}^{tot}(i, I) \equiv \sigma_{coh}^{tot}(i, I) - [\sigma_{coh}^{tot}(i, I)]_{pot} = \langle \Delta\sigma_{coh}^{tot}(\vec{s}) \rangle,$$

with

$$\begin{aligned} \sigma_{coh}^{tot} &= \sigma^{tot} - \sigma_{incoh}^{tot} = \sum_f \sum_F \sigma_{i+I \rightarrow f+F} - \sum_f \sum_{F \neq I} \sigma_{i+I \rightarrow f+F}, \\ [\sigma_{coh}^{tot}(i, I)]_{pot} &\approx [\sigma^{tot}(i, I)]_{pot} = \sum_f \sigma_{i+I \rightarrow f+I}, \end{aligned} \quad (32)$$

we get in terms of total dipole cross sections within the second-order perturbation theory the following expression for its calculation:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{coh}^{tot}(\vec{s}) &= \sigma_{coh}^{tot}(\vec{s}) - [\sigma_{coh}^{tot}(\vec{s})]_{pot} \\ &= \int d^2b \left(e^{-\Phi_2} - 1 + 2(1 - \cos \Phi_1) e^{-\Phi_2/2} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

To estimate the relative correction, we use the given bellow evaluation formulae:

$$\int \Phi_1^2(\vec{b}, \vec{s}) d^2b \sim (Z\alpha)^2 s^2 L, \quad \int \Phi_1^{2k}(\vec{b}, \vec{s}) d^2b \sim (Z\alpha)^{2k} s^2, \quad (34)$$

$$\int \Phi_2(\vec{b}, \vec{s}) d^2b \sim (Z\alpha^2) s^2 L, \quad \int \Phi_2^2(\vec{b}, \vec{s}) d^2b \sim (Z\alpha^2)^2 \frac{s^4}{R_+^2} L^2, \quad (35)$$

$$\int \Phi_1^2(\vec{b}, \vec{s}) \Phi_2(\vec{b}, \vec{s}) d^2b \sim (Z^3\alpha^4) \frac{s^4}{R_+^2} L^2, \quad (36)$$

$$\int \Phi_1^{2k}(\vec{b}, \vec{s}) \Phi_2(\vec{b}, \vec{s}) d^2b \sim (Z\alpha)^{2k} (Z\alpha^2) \frac{s^4}{R_+^2} L \quad (37)$$

with

$$L = \ln \frac{R_+^2}{s^2}, \quad \bar{R}_+ = \bar{R} + \frac{\bar{r}}{2}, \quad k \geq 1. \quad (38)$$

Using also the definition

$$\bar{L} = \ln \frac{R_+^2}{\langle s^2 \rangle}, \quad (39)$$

we finally obtain the following estimation for the relative correction to the dipole total cross sections of the coherent scattering:

$$\frac{\Delta \sigma_{coh}^{tot}(\vec{s})}{[\sigma_{coh}^{tot}(\vec{s})]_{pot}} = \frac{\sigma_{coh}^{tot}(\vec{s}) - [\sigma_{coh}^{tot}(\vec{s})]_{pot}}{[\sigma_{coh}^{tot}(\vec{s})]_{pot}} = O\left(Z\alpha^2 \frac{\langle s^2 \rangle}{R_+^2} \bar{L}\right). \quad (40)$$

For the cross sections of a 'elastic scattering'

$$\sigma_{i+I \rightarrow i+I}^{el}(i, I) = \int d^2q |A_{i+I \rightarrow i+I}(\vec{q})|^2, \quad (41)$$

where

$$A_{i+I \rightarrow i+I}(\vec{q}) = \frac{i}{4\pi} S_1(\vec{q}) [\sigma_{coh}^{tot}(i, I) + \sigma_{incoh}^{tot}(i, I) S_2(\vec{q})], \quad (42)$$

$$S_2(\vec{q}) \approx \frac{1}{Z} \bar{F}(\vec{q}), \quad (43)$$

we also obtain the following relation to its 'potential' approximation:

$$\sigma_{i+I \rightarrow i+I}^{el} = [\sigma_{i+I \rightarrow i+I}^{el}]_{pot} \left(1 + \frac{1}{Z} \frac{\langle s^2 \rangle}{R_+^2} \bar{L}\right). \quad (44)$$

Similarly, for the cross sections of EA inelastic scattering, we get:

$$\sigma_{i+I \rightarrow f+I}^{inel} = [\sigma_{i+I \rightarrow f+I}^{inel}]_{pot} \left(1 + \frac{1}{Z} \frac{\langle s^2 \rangle}{R_+^2} \bar{L}\right). \quad (45)$$

The relative correction to the 'potential' approximation for the elastic and inelastic cross sections can be then estimated by:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^{el} - [\sigma^{el}]_{pot}}{[\sigma^{el}]_{pot}} &\equiv \frac{\Delta \sigma_{i+I \rightarrow i+I}^{el}}{[\sigma_{i+I \rightarrow i+I}^{el}]_{pot}} = \frac{1}{Z} \frac{\langle s^2 \rangle}{R_+^2} \bar{L}. \\ \frac{\sigma^{inel} - [\sigma^{inel}]_{pot}}{[\sigma^{inel}]_{pot}} &\equiv \frac{\Delta \sigma_{i+I \rightarrow f+I}^{inel}}{[\sigma_{i+I \rightarrow f+I}^{inel}]_{pot}} = \frac{1}{Z} \frac{\langle s^2 \rangle}{R_+^2} \bar{L}. \end{aligned} \quad (46)$$

Finally, we find the following relation between the total cross sections of incoherent scattering in the Glauber and Born approximations:

$$\sigma_{incoh}^{tot} = [\sigma_{incoh}^{tot}]_{Born} \left[1 + O\left(Z\alpha^2 \frac{\langle s^2 \rangle}{R_+^2} \bar{L}\right)\right], \quad (47)$$

where

$$[\sigma_{incoh}^{tot}]_{Born} = \left\langle \int d^2b \Phi_2(\vec{b}, \vec{s}) \right\rangle. \quad (48)$$

The difference between the first-order and the second-order total cross section of the incoherent scattering normalized to the first-order cross section, in agreement with [10], is given by

$$\frac{\sigma_{incoh}^{tot}}{[\sigma_{incoh}^{tot}]_{Born}} - 1 \equiv \frac{\Delta \sigma_{incoh}^{tot}}{[\sigma_{incoh}^{tot}]_{Born}} = O\left(Z\alpha^2 \frac{\langle s^2 \rangle}{R_+^2} \bar{L}\right). \quad (49)$$

5. Another formulation for the second-order model of the complete theory

To establish a connection between the findings of the present work and the refs. [7], we rewrite the simplest results concerning the total cross sections of the EA-TA interactions

$$\sigma^{tot} = \sigma_{coh}^{tot} + \sigma_{incoh}^{tot} \quad (50)$$

in terms of the interaction operators $\Gamma_{coh(incoh)}(\vec{b}, \vec{s})$, according to [10]:

$$\sigma_{coh(incoh)}^{tot} = \int d^3r |\Psi_{i(I)}(\vec{r})|^2 d^2b \Gamma_{coh(incoh)}(\vec{b}, \vec{s}), \quad (51)$$

where $\sigma_{coh(incoh)}^{tot}$ are the total cross sections of EA-TA interaction without or with excitation of the target atom.

In (51), we used the abbreviation $\int \prod_{k=1}^Z d^3r_k |\Psi_I(\{\vec{r}_k\})|^2 = \int d^3r |\Psi_I(\vec{r})|^2$ and operators who are looking like:

$$\Gamma_{coh}(\vec{b}, \vec{s}) = 1 - 2 \cos [\Delta\chi(\vec{b}, \vec{s})] \exp [-\Phi(\vec{b}, \vec{s})/2] + \exp [-\Phi(\vec{b}, \vec{s})], \quad (52)$$

$$\Gamma_{incoh}(\vec{b}, \vec{s}) = 1 - \exp [-\Phi(\vec{b}, \vec{s})]. \quad (53)$$

For $\Delta\chi(\vec{b}, \vec{s}) = \Phi_1$ and $\Phi(\vec{b}, \vec{s}) = \Phi_2$, the following expressions take place:

$$\Delta\chi(\vec{b}, \vec{s}) = \frac{2Z\alpha}{\beta} \int \frac{d^2q}{q^2} \left(e^{i\vec{q}\vec{b}_+} - e^{i\vec{q}\vec{b}_-} \right) [1 - S_1(\vec{q})], \quad (54)$$

$$\Phi(\vec{b}, \vec{s}) = \frac{4Z\alpha^2}{\beta^2} \int \frac{d^2q_1}{q_1^2} \frac{d^2q_2}{q_2^2} \left(e^{i\vec{q}_1\vec{b}_+} - e^{i\vec{q}_1\vec{b}_-} \right) \left(e^{-i\vec{q}_2\vec{b}_+} - e^{-i\vec{q}_2\vec{b}_-} \right) \times W(\vec{q}_1, \vec{q}_2), \quad (55)$$

where $\vec{b}_\pm = \vec{b} \pm \vec{s}/2$, the form factor $S_1(\vec{q})$ can be given by

$$S_1(\vec{q}) = \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} \rho_1(\vec{r}), \quad \int d^3r \rho_1(\vec{r}) = 1, \quad (56)$$

and the function W is characterized by the equations:

$$W(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = S_1(\vec{q}_1 - \vec{q}_2) - S_1(\vec{q}_1)S_1(\vec{q}_2) + (Z - 1) \times [S_2(\vec{q}_1, \vec{q}_2) - S_1(\vec{q}_1)S_1(\vec{q}_2)], \quad (57)$$

$$W(\vec{q}, \vec{q}) = S_{incoh}(\vec{q}). \quad (58)$$

For the last expression, $S_2(\vec{q}_1, \vec{q}_2)$ can be calculated through the formula

$$S_2(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = \int d^3r_1 d^3r_2 e^{i\vec{q}_1\vec{r}_1 - i\vec{q}_2\vec{r}_2} \rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \quad (59)$$

in which

$$\int d^3r_2 \rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \rho_1(\vec{r}_1), \quad (60)$$

and ρ_1, ρ_2 are the one-particle and two-particle electron densities of the target atom.

The function $\Phi(\vec{b}, \vec{s})$ in the above equations accounts the target atom excitation both in the intermediate and in the final states. If one put $\Phi = 0$, then eqs. (50)–(53) turns to the corresponding relations of refs. [7]. In particular, in this limit $\sigma_{incoh} = 0$.

From (36), it follows that a full relative correction to $\sigma_{coh}^{tot}(i, I)$ caused by including the multiphoton EA-TA exchange effects, on the one hand, and the intermediate

incoherent effects, on the other hand, is of order $Z^3\alpha^4 \ll 1$, and can be successfully neglected. The same is also true for all partial coherent cross sections. This result indicates that the theory of refs. [7] provides quite accurate description of the coherent sector for EA-TA interactions.

As for incoherent interactions, it follows from eq. (49) that they can be described by the Born approximation with the relative accuracy of order $Z\alpha^2$. More precisely, they can be presented in the form:

$$Z\alpha^2 \frac{\langle s^2 \rangle}{R_+^2} \ln \frac{R_+^2}{\langle s^2 \rangle} \quad (61)$$

or, which is equivalent, in terms of radii of the interacting objects:

$$Z\alpha^2 \frac{\langle r^2 \rangle_{EA}}{\langle r^2 \rangle_{TA}} \ln \frac{\langle r^2 \rangle_{TA}}{\langle r^2 \rangle_{EA}}, \quad (62)$$

where $\langle r^2 \rangle_{EA}$ and $\langle r^2 \rangle_{TA}$ are the average constituent-to-constituent distances in EA and TA, correspondingly.

The results of the performed analysis can be summarized as follows: (i) for the description of the coherent EA-TA interactions it is enough to use the simplified version of the Glauber theory neglecting effects of the intermediate excitations of the TA; (ii) for the description of the incoherent EA-TA interactions it is enough to use the Born approximation. Just such prescriptions based on an intuitive consideration have been proposed by authors of [9].

6. Conclusion

In the present work, the simplified Glauber approximation for target-elastic EA-TA scattering neglecting the excitation effects of the TA [6] is extended to account these effects within the second-order optical-model perturbative approximation of the Glauber theory for atom-atom collisions, according to simplest results of [9]. The complete nonperturbative version of the Glauber theory for EA-TA scattering accounting all possible excitations of EA and TA in intermediate and/or final states is formulated.

References

- [1] B. Adeva et al., *Lifetime measurement of $\pi^+\pi^-$ atoms to test low energy QCD predictions* (Proposal to the SPSLC, CERN/SPSLC 95-1, SPSLC/P 284, Geneva), 1995.
B. Adeva, L. Afanasyev, M. Benayoun et al., *Phys. Lett.* **B619** (2005) 50.
L. Afanasyev, A. Dudarev, O. Gorchakov et al., *Phys. Lett.* **B674** (2010) 11.
B. Adeva, L. Afanasyev, M. Benayoun et al., *Phys. Lett.* **B704** (2011) 24.
see also <http://www.cern.ch/DIRAC/>
- [2] L.L. Nemenov, *Yad. Fiz.* **15** (1972) 1047; *ibid.* **16** (1972) 125; *ibid.* **41** (1985) 980.
S. Mrówczyński, *Phys. Rev.* **D36** (1987) 1520; K.G. Denisenko and S. Mrówczyński, *ibid.* **D36** (1987) 1529.
S.H. Aronson et al., *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1078.
J. Kapusta and A. Mocsy, *arXiv:nucl-th/9812013*.
- [3] R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **100** (1955) 242.
R.J. Glauber, in: *Lectures in Theoretical Physics*, v.1, ed. W. Brittain and L.G. Dunham. Interscience Publ., N.Y., 1959, 315 p.
V. Franco and R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **142** (1966) 1195.
R.J. Glauber, in: *High Energy Physics and Nuclear Structure*, ed. G. Alexander, North-Holland Publ. Company, Amsterdam, 1967, 310 p.
A.V. Tarasov, *Fiz. Elem. Chast. Atom. Yadra*, **7** (1976) 771-815.

- [4] G. Gerjuoy and B.K. Thomas, *Rep. Progr. Phys.* **37** (1974) 1347.
- [5] B.K. Thomas and V. Franco, *Phys. Rev.* **A13** (1976) 2004.
B.K. Thomas, *Phys. Rev.* **A18** (1978) 452.
- [6] F.R.Jr. Byron, R.V. Krotkov, and J.A. Medeiros, *Phys. Rev. Lett.* **24** (1970) 83.
- [7] A.V. Tarasov and I.U. Christova, *JINR Communication* P2-91-10, Dubna, 1991.
S.R. Gevorkyan, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya, *Phys. At. Nuclei* **61** (1998) 1517.
L. Afanasyev, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya, *J. Phys.* **G25** (1999) B7.
M. Schumann, T. Heim, K. Henken et al., *J. Phys.* **B35** (2002) 2683.
- [8] A.S. Pak and A.V. Tarasov, *JINR-E2-85-882*, Dubna, 1985.
A.S. Pak and A.V. Tarasov, *JINR-E2-85-903*, Dubna, 1985.
- [9] T.A. Heim, K. Henken, D. Trautmann et al., *J. Phys.* **B33** (2000) 3583.
- [10] A. Tarasov and O. Voskresenskaya, in: *Proc. Int. Workshop on Hadronic Atoms, "HadAtom02"*,
ArXiv:hep-ph/0301266.

An improvement of the Molière–Fano multiple scattering theory* †

Alexander Tarasov and Olga Voskresenskaya‡

Joint Institute for Nuclear Research, 141980 Dubna, Russia

Abstract

In the framework of unitary Glauber approximation for particle-atom scattering, we develop the general formalism of the Molière–Fano multiple scattering theory (M–F theory) on the basis of reconstruction of the generalized optical theorem in it. We present the rigorous relations between the exact and first-order parameters of the Molière multiple scattering theory instead of the approximate one obtained in the original paper of Molière. We estimate the relative unitarity and Coulomb corrections to the parameters of the M–F theory and examine their Z -dependence in the range of nuclear charge from $Z = 4$ to $Z = 82$. We show that the relative accuracy of the Molière’s theory in determining the screening angle for heavy atoms of the target material ($Z \sim 80$) is about 30%.

PACS: 11.80.La, 11.80.Fv, 32.80.Wr

Keywords: multiple scattering, Glauber approximation, Coulomb corrections, screening

1 Introduction

The Molière–Fano multiple scattering theory of charged particles’ [1–3] is the most used tool for the multiple scattering effects accounting at experimental data processing. The experiment DIRAC [4, 5] like many others [6] (MuScat [7], MUCOOL [8] experiments, etc.) meets the problem of the excluding of multiple scattering effects in matter from obtained data.

The standard theory of multiple scattering [4, 6, 7], proposed by Molière [1, 2] and Fano [3], and some its modifications [7–12] are used for this aim. The modifications, developed in Refs. [7–9], are motivated by experiments [7, 8] and are connected with the inclusion to Molière theory of analogues of Fano corrections, as well as the determining their range of applicability [7–10]. In Ref. [11] is presented a modified transport equation whose solution is applicable over the range of angles, from 0 to 180° . In [12] results of experiments [13] are qualitatively explained within the framework of the theory allowing for pair correlations in the spatial distribution of scatterers.

Estimation of the theory accuracy is of especial importance in the case of DIRAC experiment for it’s high angular resolution. One possible source of the inaccuracy of the M–F theory is use in [1–3] an approximate expression for the amplitude of target-elastic scattering of charged particle by atom which violates the generalized optical theorem

$$\Im f_{el}(0) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot} = \frac{k}{4\pi} (\sigma_{el} + \sigma_{in})$$

*ArXiv:1107.5018 [hep-ph] v2, Jun 2012. 27 p.

†The given work is dedicated to the 70th Anniversary of Alexander Tarasov.

‡On leave of absence from Siberian Physical Technical Institute. Electronic address: voskr@jinr.ru

or, in other words, unitarity condition. Another possible source of inaccuracy is using in calculations an approximate relation for the exact and the Born values of the screening angle (χ'_a)

$$\chi'_a \approx (\chi'_a)^B \sqrt{1 + 3.34 (Z\alpha)^2}$$

obtained in the original paper Molière [1]. Therefore, the problem of estimating the M-F theory accuracy and an improvement of this theory becomes important.

In the present work, we have estimated the relative unitarity corrections to the parameters of the Molière-Fano theory, resulting from a reconstruction of the unitarity in the particle-atom scattering theory, and found that they are of order $Z\alpha^2$. We have also received rigorous relations between the exact and first-order parameters of the Molière multiple scattering theory, instead of the approximate one obtained in the original paper by Molière. Additionally, we evaluated absolute and relative accuracies of the Molière theory in determining the screening angle and have concluded that for heavy atoms of the target material they become significant.

The paper is organized as follows. In Section 2, we consider the approximations of the M-F theory. In Section 3, we obtain the analytical and numerical results for the unitarity and the Coulomb corrections to the parameters of the M-F theory. In Conclusion, we briefly summarize our results. The some preliminary results of this work were announced in Refs. [14].

2 Approximations of the M-F theory

2.1 Small-angle approximation

Let all scattering angles are small $\theta \ll 1$ so that $\sin \theta \sim \theta$, and the scattering problem is equivalent to diffusion in the plane of θ . Now let $\sigma_{el}(\chi)$ be the elastic differential cross section for the single scattering into the angular interval $\vec{\chi} = \vec{\theta} - \vec{\theta}'$, and $W_M(\theta, t)\theta d\theta$ is the number of scattered particles in the interval $d\theta$ after traversing a target thickness t . Then the transport equation is

$$\frac{\partial W_M(\theta, t)}{\partial t} = -n_0 W_M(\theta, t) \int \sigma_{el}(\chi) d^2\chi + n_0 \int W_M(\vec{\theta} - \vec{\chi}, t) \sigma_{el}(\chi) d^2\chi, \quad (1)$$

where $n_0 = N_A/A$ is the number of the scattering atoms per cm^3 , N_A is the Avogadro number, and A is the atomic weight of the target atoms.

Molière solved this equation for the determination of the spatial-angle distribution function $W_M(\theta, t)$ by the Fourier-Bessel method and gets to her a general expression

$$W_M(\theta, t) = \int_0^\infty J_0(\theta\eta) g(\eta, t) \eta d\eta, \quad (2)$$

in which

$$g(\eta, t) = \exp[N(\eta, t) - N_0(0, t)], \quad (3)$$

θ is the polar angle of the track of a scattering particle, measured with respect to the initial direction z ; η is the Fourier transform variable corresponding to θ ; and the Bessel function J_0

of order 0 is an approximate form for the Legendre polynomial appropriate to small scattering angles [2, 15].

In the notation of Molière

$$N(\eta, t) = 2\pi n_0 t \int_0^\infty \sigma_{el}(\chi) J_0(\chi\eta) \chi d\chi, \quad (4)$$

and N_0 is the value of (4) for $\eta = 0$, i.e. the total number of collisions

$$N_0(0, t) = 2\pi n_0 t \int_0^\infty \sigma_{el}(\chi) \chi d\chi. \quad (5)$$

The magnitude of $N_0 - N$ is much smaller than N_0 for values η , which are important, and may be called the 'effective number of collisions'.

Inserting Eqs. (3)-(5) back into (2), we have

$$W_M(\theta, t) = \int_0^\infty \eta d\eta J_0(\theta\eta) \exp \left[-2\pi n_0 t \int_0^\infty \sigma_{el}(\chi) \chi d\chi [1 - J_0(\chi\eta)] \right]. \quad (6)$$

This equation is exact for any scattering law, provided only the angles are small compared with a radian.

At $g(\eta, 0) = 1$ for all η the expressions (2)-(5) can be rewritten as follows:

$$W_M(\theta, t) = \int_0^\infty J_0(\theta\eta) e^{-n_0 t Q_{el}(\eta)} \eta d\eta, \quad (7)$$

where

$$Q_{el}(\eta) = 2\pi \int_0^\infty \sigma_{el}(\chi) [1 - J_0(\chi\eta)] \chi d\chi. \quad (8)$$

This result is mathematically identical with result of Snyder and Scott for the distribution of projected angles [16].

2.2 Approximate solution of the transport equation

One of the most important results of the Molière's theory is that the scattering is described by a single parameter, the so-called 'screening angle' (χ_a or χ_a'):

$$\chi_a' = \sqrt{1.167} \chi_a = [\exp(C_E - 0.5)] \chi_a \approx 1.080 \chi_a, \quad (9)$$

where $C_E = 0.57721$ is the Euler's constant.

More precisely, the angular distribution $W_M(\theta)\theta d\theta$ depends only on the ratio of the 'characteristic angle' χ_c , which describes the foil thickness, to the 'screening angle' which describes the scattering atom:

$$b_{el} = \ln \left(\frac{\chi_c}{\chi_a'} \right)^2 \equiv \ln \left(\frac{\chi_c}{\chi_a} \right)^2 + 1 - 2C_E \sim \ln N_0. \quad (10)$$

The screening angle χ_α can be determined approximately by the relation

$$\chi_\alpha^2 \approx \chi_0^2 (1.13 + 3.76 a^2) = (\chi_\alpha^B)^2 (1 + 3.34 a^2) \quad (11)$$

with the so-called 'Born parameter'

$$a = \frac{Ze^2}{\hbar v} = \frac{Z\alpha}{\beta}. \quad (12)$$

The second term in (11) represents the deviation from the Born approximation. If the value of this term is 0, the value of the screening angle is $\chi_\alpha = \chi_\alpha^B = \chi_0 \sqrt{1.13}$.

The angle χ_0 is defined by

$$\chi_0 = 1.13 \frac{Z^{1/3} m_e}{137 p} = \frac{Z^{1/3} m_e \alpha}{0.885 p}, \quad (13)$$

where $p = m_e v$ is momentum of incident particle and v is its velocity in the laboratory frame.

The characteristic angle is defined as

$$\chi_c^2 = 4\pi n_0 t \left(\frac{Z\alpha}{\beta p} \right)^2. \quad (14)$$

Its physical meaning is that the total probability of single scattering through an angle greater than χ_c is exactly one.

Putting $\chi_c \eta = y$ and setting $\theta/\chi_c = u$, for the most important values of η of order $1/\chi_c$, we get Molière's transformed equation

$$W_M(\theta) \theta d\theta = u du \int_0^\infty y dy J_0(uy) \exp \left\{ -\frac{y^2}{4} \left[b_{el} - \ln \left(\frac{y^2}{4} \right) \right] \right\}, \quad (15)$$

which is very much simpler in form than (6).

In order to obtain a result valid for large all angles, Molière defines the new parameter B by the transcendental equation

$$B - \ln B = b_{el}. \quad (16)$$

The angular distribution function can be written then as

$$W_M(\theta, B) = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\infty y dy J_0(\theta y) e^{-y^2/4} \exp \left[\frac{y^2}{4B} \ln \left(\frac{y^2}{4} \right) \right]. \quad (17)$$

The presented expansion method is to consider the term $[y^2 \ln(y^2/4)]/4B$ as a small parameter. Then the W_M is expanded in a power series in $1/B$:

$$W_M(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{B^n} W_n(\theta, t) \quad (18)$$

with

$$W_n(\theta, t) = \frac{1}{\bar{\theta}^2} \int_0^\infty y dy J_0\left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} y\right) e^{-y^2/4} \left[\frac{y^2}{4} \ln\left(\frac{y^2}{4}\right)\right]^n, \quad (19)$$

$$\bar{\theta}^2 = \chi_c^2 B = 4\pi n_0 t \left(\frac{Z\alpha}{pv}\right)^2 B(t).$$

This method is valid for $B \geq 4.5$ and $\bar{\theta}^2 < 1$.

The first function $W_0(\theta, t)$ have simple analytical form:

$$W_0(\theta, t) = \frac{2}{\bar{\theta}^2} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\bar{\theta}^2}\right), \quad (20)$$

$$\bar{\theta}^2 \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t \ln t. \quad (21)$$

For small angles, i.e. $\theta/\bar{\theta} = \theta/(\chi_c \sqrt{B}) = \Theta$ less than about 2, the Gaussian (20) is the dominant term. In this region, $W_1(\theta, t)$ is in general less than $W_0(\theta, t)$, so that the corrections to the Gaussian is of order of $1/B$, i.e. of order of 10%.

2.3 Born approximation

On the one hand, Molière writes the elastic Born cross section for the fast charged particle scattering in the atomic field as follows:

$$\sigma_{el}^B(\chi) = \sigma^R(\chi) \left(1 - \frac{F_A(p\chi)}{Z}\right)^2 = \sigma_{el}^R(\chi) q_{el}^B(\chi). \quad (22)$$

For angles χ small compared with a radian the exact Rutherford formula has a simple approximation:

$$\sigma_{el}^B(\chi) = \frac{\chi_c^2}{4\pi n_0 t (1 - \cos \chi)^2} q_{el}^B(\chi) \quad (23)$$

$$\approx \frac{\chi_c^2}{\pi n_0 t \chi^4} q_{el}^B(\chi). \quad (24)$$

Here, F_A is the atomic form factor and $q_{el}^B(\chi)$ is the ratio of actual to the Rutherford scattering cross sections in the Born approximation.

Then the screening angle χ_a^B in the Born approximation one can represent via F_A or $q_{el}^B(\chi)$ by the equations

$$-\ln(\chi_a^B) = \lim_{\varsigma \rightarrow \infty} \left[\int_0^\varsigma \left(1 - \frac{F_A(p\chi)}{Z}\right)^2 \frac{d\chi}{\chi} + \frac{1}{2} - \ln \varsigma \right] \quad (25)$$

$$= \lim_{\varsigma \rightarrow \infty} \left[\int_0^\varsigma \frac{q_{el}^B(\chi) d\chi}{\chi} + \frac{1}{2} - \ln \varsigma \right] \quad (26)$$

with an angle ζ such as

$$\chi_0 \ll \zeta \ll 1/\eta \sim \chi_c \quad (27)$$

and the angle $\chi_0 \sim m_e \alpha Z^{1/3}/p$.

Molière approximation for the Thomas—Fermi form factor $F_{T-F}(q)$ with momentum transfer q can be written as

$$F_{T-F}(q)^M = \sum_{i=1}^3 \frac{c_i \lambda_i^2}{q^2 + \lambda_i^2}, \quad (28)$$

in which

$$c_1 = 0.35, \quad c_2 = 0.55, \quad c_3 = 0.10, \\ \lambda_1 = 0.30\lambda, \quad \lambda_2 = 4\lambda_1, \quad \lambda_3 = 5\lambda_2.$$

In the case where the Born parameter $a = 0$, the equation (25) for the screening angle can be evaluated directly, using the facts that $q(0) = 0$ and $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} q(\zeta) = 1$. Then with use of (22) and (28) can also be obtained the following approximation for $(\chi'_a)^B$ [1, 16]:

$$(\chi'_a)^B = [\exp(C_B - 0.5)] \frac{\lambda}{p} A = \sqrt{1.174} \chi_0 A, \quad (29)$$

where $\lambda = m_e \alpha Z^{1/3}/0.885$. We should note that in Refs. [1, 16] admitted a misprint, namely, the factor $A = 1.0825$ in Eq. (29) should be replaced by $A = 1.065 = \sqrt{1.13}$.

On the other hand, Molière writes the nonrelativistic Born cross section in the form

$$\sigma_{el}^B(\chi) = k^2 \left| \int_0^\infty \rho d\rho J_0 \left(2k\rho \sin \frac{\chi}{2} \right) \Phi_M^B(\vec{\rho}) \right|^2 \quad (30)$$

where the Born phase shift is given in units of $\hbar = c = 1$ by

$$\Phi_M^B(\vec{\rho}) = -\frac{2}{v} \int_\rho^\infty \frac{U_\lambda(r) r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^\infty U_\lambda \left(r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \right) dz. \quad (31)$$

Here, k is the wave number of the incident particle, the variable ρ corresponds to the impact parameter of the collision, and $U_\lambda(r)$ is the screened Coulomb potential of the target atom

$$U_\lambda(r) = \pm Z \frac{\alpha}{r} \Lambda(\lambda r) \quad (32)$$

with a screening function $\Lambda(\lambda r)$. The screening radius $\lambda^{-1} = r_{sc}$ is frequently taken to be the Thomas—Fermi (T-F) radius $r_{sc} = 0.885/m_e \alpha Z^{1/3}$.

Snyder and Scott [16] have used the simplest form of (32) with a pure exponential factor $\Lambda(\lambda r) = \exp(\lambda r)$:

$$U_\lambda(r) = \pm Z \frac{\alpha}{r} e^{\lambda r}. \quad (33)$$

Molière in his detailed study of single scattering [1] approximated the T-F screening function by a sum of three exponentials:

$$\Lambda(\lambda r) \simeq 0.1e^{-6\lambda r} + 0.55e^{-1.2\lambda r} + 0.35e^{-0.3\lambda r}. \quad (34)$$

For the Born target-elastic single cross section have a place the following relations:

$$\frac{d\sigma_{el}^B}{d\Omega} = |f_{el}(\theta)|^2, \quad (35)$$

$$\Im f_{el}(0) = \frac{k}{4\pi}\sigma_{el}^B \neq \frac{k}{4\pi}\sigma_{tot}^B. \quad (36)$$

The Born approximation result for the amplitude f_{el} of elastic scattering of charged particle by atom reads

$$f_{el}(\theta) = ik \int_0^\infty J_0(\rho q) [1 - e^{i\Phi_M(\vec{\rho})}] \rho d\rho, \quad (37)$$

$$q = k\theta.$$

2.4 Approximate relation for the quantities χ_a and χ_a^B

In order to obtain a result valid for large a (i.e. not restricted to the Born approximation), Molière uses in his calculations of the screening angle a WKB technique.

The exact formulas for the WKB differential cross section $\sigma_{el}(\chi)$ and corresponding $q_{el}(\chi)$ in terms of an integral are given in Molière's paper [1] as follows:

$$\sigma_{el}(\chi) = k^2 \left| \int_0^\infty \rho d\rho J_0(k\chi\rho) \left\{ 1 - \exp [i\Phi_M(\vec{\rho})] \right\} \right|^2, \quad (38)$$

$$q_{el}(\chi) = \frac{(k\chi)^4}{4a^2} \left| \int_0^\infty \rho d\rho J_0(k\chi\rho) \left\{ 1 - \exp [i\Phi_M(\vec{\rho})] \right\} \right|^2 \quad (39)$$

with the phase shift given by

$$\Phi_M(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^\infty [k_r(r) - k] dz, \quad (40)$$

where $k_r(r)$ is the relativistic wavenumber for the particle at a distance r from the nucleus, and the quantity ρ is seen to be impact parameter of the trajectory or 'ray'. As before, k is the initial or asymptotic value of the wavenumber.

When $k_r(r)$ is expanded as a series of powers of $U_\lambda(r)/k$, then the first-degree term yields the same expression for $\Phi_M(\bar{\rho})$ as Eq. (31). The Born approximation for (38) is obtained by expanding the exponential in (38) to first order in parameter a (12).

Relations (24) and (26) between the quantities $\sigma_{el}^B(\chi)$, $q_{el}^B(\chi)$, and χ_a^B remain valid also for $\sigma_{el}(\chi)$, $q_{el}(\chi)$, and χ_a .

Despite the fact that the formulas (38), (39) are exact, evaluation of these quantities was carried out by Molière only approximately.

To estimate (39), Molière used the first-order Born shift (31) with (32) and (34), what is good only to terms of first order in a , and found

$$q_{el}(\chi) \approx \left| 1 - \frac{4ia(1-ia)^2}{(\chi/\chi_0)^2} \left\{ -0.81 + 2.21 \left[-\Re[\psi(ia)] - \frac{1}{1-ia} + \frac{1}{2ia} + \lg \frac{\chi}{2\chi_0} \right] \right\} \right|^2. \quad (41)$$

Here, ψ is the so-called 'digamma function', i.e. the logarithmic derivative of the Γ -function $\psi(x) = d \ln \Gamma(x) / dx$.

He has fitted a simple formula to the function $\Re[\psi(ia)]$ in Eq. (41)

$$\Re[\psi(ia)] \approx \frac{1}{4} \lg \left(a^4 + \frac{a^2}{3} + 0.13 \right). \quad (42)$$

Using (42) in Eq. (41) and expanding with neglect of higher orders in a^2 and $(\chi/\chi_0)^{-2}$, he got

$$q_{el}(\chi) \approx 1 - \frac{8.85}{(\chi/\chi_0)^2} \left[1 + 2.303 a^2 \lg \frac{7.2 \cdot 10^{-4} (\chi/\chi_0)^4}{(a^4 + a^2/3 + 0.13)} \right]. \quad (43)$$

Molière has calculated $q_{el}(\chi)$ for different values of a and as a result has devised an interpolation scheme, based on a linear relation between $(\chi/\chi_0)^2$ and a^2 for fixed q_{el} :

$$(\chi/\chi_0)^2 \approx A_q + a^2 B_q. \quad (44)$$

Calculating the screening angle defined by

$$-\ln(\chi_a) = \frac{1}{2} + \lim_{\varsigma \rightarrow \infty} \left[\int_0^\varsigma \frac{q_{el}(\chi) d\chi}{\chi} - \ln \varsigma \right] = \frac{1}{2} - \ln \chi_0 - \int_0^1 dq \ln \left(\frac{\chi}{\chi_0} \right) \quad (45)$$

and assuming a linear relation between χ_a^2 and a^2 , Molière writes finally the following interpolating formula:

$$\chi_a \approx \chi_0 \sqrt{1.13 + 3.76 a^2}. \quad (46)$$

Critical remarks to his conclusion see in the review of V.T. Scott [16].

2.5 Fano approximation

To estimate a contribution of incoherent scattering on atomic electrons is often [2, 3, 15, 17] replaced the squared nuclear charge Z^2 with the sum of the squares of the nuclear and electronic

charges $Z(Z+1)$ in basic relations (for differential cross-section, some parameters of the theory, etc.).

This procedure would be accurate if the single-scattering cross sections were the same for nucleus and electron targets. Besides, the actual cross sections are different at small and large angles. Fano modified the multiple scattering theory taking into account above differences.

For this purpose Fano separates the elastic and inelastic contributions to the cross sections

$$\sigma(\chi) = \sigma_{el}(\chi) + \sigma_{in}(\chi). \quad (47)$$

For the inelastic components of the single scattering differential cross sections, the Fano approximation reads

$$\frac{d\sigma_{in}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{in}^B}{d\Omega}. \quad (48)$$

Since the Born single-scattering amplitudes are pure real, the generalized optical theorem cannot be used to calculate the total cross section in the framework of this approximation.

Fano sets the task of comparing the contribution of $\sigma_{in}^B(\chi)$ to the exponent of the Goudsmit—Saunderson distribution¹ [18] for total scattering angle:

$$W(\theta, t) = 2\pi \sum_l \left(l + \frac{1}{2} \right) P_l(\theta) \exp \left\{ -n_0 t \int \sigma^B(\chi) \sin \chi d\chi [1 - P_l(\chi)] \right\}, \quad (49)$$

where P_l is the Legendre polynomial. If we replace in (49) the sum over l by an integral over η , $(l + \frac{1}{2})$ by η , P_l by the well-known formula $P_l(\theta) = J_0((l + \frac{1}{2})\theta)$, and $\sin \chi$ by χ , the expression (49) goes over into small-angle distribution (6) of Molière and Lewis.

To achieve the mentioned goal in the small-angle approximation, we determine in accordance with [15] and [9] similarly to (23) and (25) the corresponding expressions for the inelastic cross section

$$\sigma_{in}^B(\chi) = \sigma^R(\chi) q_{in}^B(\chi) = \frac{\chi_c^2}{4\pi n_0 t Z (1 - \cos \chi)^2} q_{in}^B(\chi) \quad (50)$$

$$\approx \frac{\chi_c^2}{\pi n_0 t Z \chi^4} q_{in}^B(\chi) \quad (51)$$

and the 'inelastic cut-off angle' χ_{in}^B

$$-\ln(\chi_{in}^B) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[\int_0^\zeta \frac{q_{in}^B(\chi) d\chi}{\chi} + \frac{1}{2} - \ln \zeta \right]. \quad (52)$$

Then, with the use of (23) and (50), angular distribution (17) can be rewritten as follows

$$W_{M-F}(\Theta, B) = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\infty y dy J_0(\Theta y) e^{-y^2/4} \exp(Y_{el} + Y_{in}) \quad (53)$$

¹The Goudsmit—Saunderson theory is valid for any angle, small or large, and do not assume any special form for the differential scattering cross section.

with

$$Y_{el} = \frac{y^2}{4B} \ln \left(\frac{y^2}{4} \right), \quad Y_{in} = \frac{2y^2}{(Z+1)B} \int_{\zeta}^{\infty} [1 - J_0(\Theta)] \Theta^{-3} d\Theta, \quad (54)$$

where the parameter B is defined by equation

$$B - \ln B = b_{el} + b_{in}, \quad (55)$$

in which

$$b_{el} = \ln \left(\frac{\chi_c}{\chi_a^B} \right)^2 + 1 - 2C_B, \quad b_{in} = \frac{1}{Z+1} \ln \left(\frac{\chi_a^B}{\chi_{in}^B} \right)^2. \quad (56)$$

Numerical estimation of the $-u_{in} = -\ln(\chi_{in}^B)^2$ value from the T-F model yields $(-u_{in})_{T-F} = 5.8$ for all Z . The value of $-u_{in}$ should not vary greatly from one material to another.

For sufficiently large angles, with the use of exact Rutherford formulas (23) and (50), the correct angular distribution $W(\theta, t)$ may be estimated according to the formula

$$W_{corr}(\theta, t) = W(\theta, t) [\sigma_{exact}^B(\chi) / \sigma^R(\chi)], \quad (57)$$

as suggested by Bethe [15] and Fano [3].

3 An improvement of the M-F theory

3.1 Glauber approximation

The Glauber approximation [19] for the amplitude $F_{if}(\vec{q})$ of the multiple scattering at small angles is given by

$$F_{if}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2\rho \exp(i\vec{q}\vec{\rho}) \Gamma_{if}(\vec{\rho}), \quad (58)$$

where $\Gamma_{if}(\vec{\rho})$ is so-called 'profile function'.

We may formulate the problem in a general way by considering the scattering of a pointlike projectile on a system of Z constituents with the coordinates $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_Z$ and the projections on the plane of the impact parameter $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_Z$. Then we may write the total phase shift as a sum of the form

$$\bar{\chi}(\vec{\rho}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_Z) = \sum_{k=1}^Z \bar{\chi}_k(\vec{\rho} - \vec{s}_k). \quad (59)$$

If we introduce the configuration space of the wave functions ψ_i and ψ_f for the initial and final constituents states, we may write the profile function as

$$\Gamma_{if}(\vec{\rho}) = \int \prod_{k=1}^Z d^3r_k \psi_f^*(\{\vec{r}_k\}) \psi_i(\{\vec{r}_k\}) \Gamma(\vec{\rho}, \{\vec{s}_k\}) \quad (60)$$

with the interaction operator

$$\Gamma(\vec{\rho}, \{\vec{s}_k\}) = 1 - \exp[i\Phi(\vec{\rho}, \{\vec{s}_k\})] \quad (61)$$

and the phase-shift function

$$\tilde{\Phi}(\vec{\rho}, \{\vec{s}_k\}) = Z\tilde{\chi}(\vec{\rho}) - \sum_{k=1}^Z \tilde{\chi}(\vec{\rho} - \vec{s}_k). \quad (62)$$

When the interaction is due to a potential $V(\vec{r})$, the phase function $\tilde{\chi}(\vec{\rho})$ is given by

$$\tilde{\chi}(\vec{\rho}) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} V(\sqrt{\rho^2 + z^2}) dz. \quad (63)$$

with the potential of an individual constituent's

$$V(r) = \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\alpha}{r} e^{-\lambda r}, \quad \lambda \sim m_e \alpha Z^{1/3}. \quad (64)$$

The multiple-scattering amplitude $F_{if}(\vec{q})$ (58) is normalized by the relations:

$$4\pi \Im F_{ii}(0) = \sigma(i)_{tot}, \quad |F_{if}(\vec{q})|^2 = d\sigma_{if}/dq_T, \quad (65)$$

where

$$\sigma(i)_{tot} = \sigma(i)_{el} + \sigma(i)_{in}, \quad \sigma_{if} = \int |d\sigma_{if}/dq_T|^2 d^2 q, \quad (66)$$

$$\sigma(i)_{tot} = \sum_f \sigma_{if}. \quad (67)$$

In terms of $e^{i\tilde{\Phi}}$, where the phase-shift function $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\vec{\rho}, \{\vec{s}_k\})$ is given by (62), the cross sections $\sigma(i)_{tot}$, $\sigma(i)_{el}$, $\sigma(i)_{in}$ could be written as follows:

$$\sigma(i)_{tot} = 2\Re \int \langle 1 - \langle e^{i\tilde{\Phi}} \rangle \rangle d^2 \rho, \quad (68)$$

$$\sigma(i)_{el} = \int \langle 1 - 2\Re \langle e^{i\tilde{\Phi}} \rangle + \left| \langle e^{i\tilde{\Phi}} \rangle \right|^2 \rangle d^2 \rho, \quad (69)$$

$$\sigma(i)_{in} = \int \langle 1 - \left| \langle e^{i\tilde{\Phi}} \rangle \right|^2 \rangle d^2 \rho. \quad (70)$$

The brackets $\langle e^{i\tilde{\Phi}} \rangle$ signify that an overage is be taken over all configurations of the target constituents in i -th state.

3.2 Reconstruction of unitarity conditions

To reduce the many-body problem to the consideration of an effective one-body problem and to establish the relationship between the Glauber and the Molière theories, we introduce the abbreviation

$$\langle e^{i\bar{\Phi}} \rangle = e^{i\bar{\Phi}} \quad (71)$$

and consider for the effective ('optical') phase shift function $\bar{\Phi}(\vec{\rho})$ the expansion

$$\bar{\Phi}(\vec{\rho}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \Phi_n, \quad (72)$$

where

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \langle \Phi \rangle, & \Phi_2 &= \langle (\Phi - \Phi_1)^2 \rangle, \\ \Phi_3 &= \langle (\Phi - \Phi_1)^3 \rangle, \dots, & \Phi_n &\sim Z\alpha^n/\beta. \end{aligned} \quad (73)$$

The first order of the expression for $\bar{\Phi}(\vec{\rho})$ is simply the average of the function $\tilde{\Phi}(\vec{\rho}, \{\vec{s}_k\})$ and correspond to the first-order Born approximation. The second order term of $\bar{\Phi}(\vec{\rho})$ is purely absorptive (i.e., positive imaginary) in character and is equal in order of magnitude to the $Z\alpha^2/\beta$.

When in the expansion (72)

$$\bar{\Phi}_{tail}(\vec{\rho}) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \Phi_n \ll 1, \quad (74)$$

it seems natural to neglect the $\bar{\Phi}_{tail}(\vec{\rho})$ and consider the following approximation:

$$\bar{\Phi}(\vec{\rho}) \approx \Phi_1(\vec{\rho}) + \frac{i}{2} \Phi_2(\vec{\rho}), \quad (75)$$

in which we let $\Phi_1(\vec{\rho}) = \Phi_M(\vec{\rho})$ and $\Phi_2(\vec{\rho}) = 2\Phi_{in}(\vec{\rho})$. The last term correspond to target-elastic scattering, also referred to as incoherent scattering or 'antiscreening' [5].

This leads to the following improvement of the Molière-Fano theory:

$$\Phi_M(\vec{\rho}) \Rightarrow \Phi_M(\vec{\rho}) + i\Phi_{in}(\vec{\rho}) \quad (76)$$

with

$$2\Phi_{in}(\vec{\rho}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} Z \left\{ \int |\tilde{\chi}_\lambda(\vec{\rho} - \vec{r}_T)|^2 \varrho(\vec{r}) d^3r - \left| \int \tilde{\chi}_\lambda(\vec{\rho} - \vec{r}_T) \varrho(\vec{r}) d^3r \right|^2 \right\}, \quad (77)$$

where

$$\tilde{\chi}_\lambda(\vec{\rho}) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} V_\lambda(\sqrt{\rho^2 + z^2}) dz, \quad V_\lambda(r) = \mp \frac{\alpha}{r} e^{-\lambda r}, \quad (78)$$

$$\varrho(\vec{r}) = \psi_f^*(\vec{r}) \psi_i(\vec{r}). \quad (79)$$

For the cross sections

$$\sigma_{tot} = \langle \sigma(i)_{tot} \rangle, \quad \sigma_{in} = \langle \sigma(i)_{in} \rangle, \quad \sigma_{el} = \langle \sigma(i)_{el} \rangle, \quad (80)$$

takes place the unitarity condition

$$\Im f_{el}(0) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot} = \frac{k}{4\pi} (\sigma_{el} + \sigma_{in}) \quad (81)$$

with

$$f_{el}(\theta) = F_{ii}(\vec{q}), \quad \Im F_{ii}(0) = \frac{k}{4\pi} \sum_f \int |F_{if}(\vec{q})|^2 d\Omega, \quad (82)$$

$$\frac{d\sigma_{in}}{d\Omega} = \sum_{f \neq i} |F_{if}(\vec{q})|^2, \quad F_{if}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2\rho \exp(i\vec{q}\vec{\rho}) \Gamma_{if}(\vec{\rho}), \quad (83)$$

$$\Gamma_{if}(\vec{\rho}) = 1 - \exp(-2\Phi_{in}), \quad (84)$$

$$q = k\theta.$$

Using (81), we found for the cross sections the following expressions:

$$\sigma_{tot} = 4\pi \int \left(1 - \cos \Phi_M(\vec{\rho}) e^{-\Phi_{in}(\vec{\rho})} \right) \rho d\rho, \quad (85)$$

$$\sigma_{in} = 2\pi \int \left(1 - e^{-2\Phi_{in}(\vec{\rho})} \right) \rho d\rho, \quad (86)$$

$$\sigma_{el} = 2\pi \int \left(1 - 2 \cos \Phi_M(\vec{\rho}) e^{-\Phi_{in}(\vec{\rho})} + e^{-2\Phi_{in}(\vec{\rho})} \right) \rho d\rho. \quad (87)$$

3.3 Unitarity corrections to the Born approximation

With the use of the evaluation formula

$$\int [2\Phi_{in}(\vec{\rho})] d^2\rho \sim Z\alpha^2/\beta \quad (88)$$

and the exact contributions have been calculated in [20], we obtain the following unitarity relative correction ($\delta_{unit} \equiv \delta_{unit}^{(2)}$) to the first-order Born cross section of the inelastic scattering σ_{in}^B :

$$\delta_{unit} = \frac{\Delta \sigma_{in}}{\sigma_{in}^B} = \frac{\sigma_{in} - \sigma_{in}^B}{\sigma_{in}^B} = \frac{\sigma_{in}}{\sigma_{in}^B} - 1 \sim Z\alpha^2/\beta \quad (89)$$

with

$$\sigma_{in}^B = \left\langle \int \Phi_{in}(\vec{\rho}) d^2\rho \right\rangle. \quad (90)$$

The corresponding angular distribution reads

$$W_{in}(\theta) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(\theta\eta) e^{-Q_{in}(\eta)} \eta d\eta, \quad (91)$$

$$Q_{in}(\eta) = 2\pi \int \sigma_{in}(\theta) [1 - J_0(\theta\eta)] \theta d\theta. \quad (92)$$

Inserting Eq. (92) back into (91), we get the equation of the form:

$$W_{in}(\theta) = 2\pi \int_0^{\infty} \eta d\eta J_0(\theta\eta) \exp \left[-2\pi \int_0^{\infty} \sigma_{in}(\theta') \theta' d\theta' [1 - J_0(\theta'\eta)] \right]. \quad (93)$$

With the use of

$$\int \eta J_0(\theta\eta) J_0(\theta'\eta) d\eta = \frac{1}{\theta} \delta(\theta - \theta') = 0 \quad (94)$$

and

$$\int_0^{\infty} d\eta \eta J_0(\theta\eta) = 2a^{-2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)} = 0, \quad \int_0^{\infty} d\eta \eta J_0(\theta\eta) J_0(\theta'\eta) = 0, \quad (95)$$

according to [21], the integration of Eq. (93) yields the following result:

$$W_{in}(\theta) = -(2\pi)^2 \int_0^{\infty} \eta J_0(\theta\eta) J_0(\theta'\eta) d\eta \cdot \sigma_{in}(\theta') \theta' d\theta' = -(2\pi)^2 \sigma_{in}(\theta). \quad (96)$$

In Eqs. (94) and (95) δ is the Dirac delta function and Γ is the Euler Gamma function.

Finally, taking into account the relations (89) and (96), we can estimate the unitarity correction to the angular distribution function (91):

$$\delta_{unit} = \frac{\Delta W_{in}(\theta)}{W_{in}^B(\theta)} = \frac{W_{in}(\theta)}{W_{in}^B(\theta)} - 1 = \frac{\sigma_{in}(\theta)}{\sigma_{in}^B(\theta)} - 1 = \frac{\sigma_{in}}{\sigma_{in}^B} - 1 \sim Z\alpha^2/\beta. \quad (97)$$

3.4 Rigorous relations between the exact and Born results

To obtain an exact correction to the Born screening angle $(\chi'_a)^B$ in small-angle approximation, we will carry out our analytical calculation in terms of the function $Q_{el}(\eta)$ (8):

$$Q_{el}(\eta) = 2\pi \int_0^{\infty} \sigma_{el}(\chi) [1 - J_0(\chi\eta)] \chi d\chi \equiv \int d^2\rho [1 - \cos[\Delta\Phi(\vec{\rho}, \vec{\eta})]], \quad (98)$$

where the phase shift is determined by the equation

$$\Delta\Phi(\vec{\rho}, \vec{\eta}) = \Phi(\rho_+) - \Phi(\rho_-), \quad \vec{\rho}_{\pm} = \vec{\rho} \pm \vec{\eta}/2p. \quad (99)$$

Substituting the expression for the cross section

$$\sigma_{el}(\chi) = \frac{\chi_c^2}{\pi n_0 t \chi^4} q_{el}(\chi) \quad (100)$$

into (98), we rewrite it in the form:

$$n_0 t Q_{el}(\eta) = 2\chi_c^2 \int_0^{\infty} [1 - J_0(\chi\eta)] q_{el}(\chi) \chi^{-3} d\chi. \quad (101)$$

For the important values of η of order $1/\chi_c$ or less, it is possible to split the last integral at the angle ς (27) into two integrals:

$$\begin{aligned} I(\eta) &= \int_0^{\infty} [1 - J_0(\chi\eta)] q_{el}(\chi) \chi^{-3} d\chi \\ &= \int_0^{\varsigma} [1 - J_0(\chi\eta)] q_{el}(\chi) \chi^{-3} d\chi + \int_{\varsigma}^{\infty} [1 - J_0(\chi\eta)] q_{el}(\chi) \chi^{-3} d\chi \\ &= I_1(\varsigma\eta) + I_2(\varsigma\eta). \end{aligned} \quad (102)$$

For the part from 0 to ς , we may write $1 - J_0(\chi\eta) = \chi^2 \eta^2 / 4$, and the integral I_1 reduces to a universal one, independently of η :

$$I_1(\varsigma\eta) = \frac{\eta^2}{4} \int_0^{\varsigma} q_{el}(\chi) d\chi / \chi. \quad (103)$$

For the part from ς to infinity, the quantity $q_{el}(\chi)$ can be replaced by unity, and the integral I_2 can be integrated by parts. This leads to the following result for I_2 :

$$I_2(\varsigma\eta) = \frac{\eta^2}{4} \left[1 - \ln(\varsigma\eta) + \ln 2 - C_E + O(\varsigma\eta) \right]. \quad (104)$$

Integrating (103) with the account (45), substituting obtained solutions back into (101), and also using definition

$$\ln(\chi_c/\chi_a)^2 + 1 - 2C_E = \ln(\chi_c/\chi_a')^2,$$

as a result for $Q_{el}(\eta)$, we obtain:

$$\begin{aligned} Q_{el}(\eta) &= -\frac{(\chi_c\eta)^2}{2n_0 t} \left[\ln\left(\frac{\chi_c^2\eta^2}{4}\right) - \ln\left(\frac{\chi_c}{\chi_a'}\right)^2 \right] \\ &= -\frac{(\chi_c\eta)^2}{2n_0 t} \ln\left(\frac{\eta^2(\chi_a')^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (105)$$

Finally, considering definition of χ_c (14), we can represent $Q_{el}(\eta)$ by the following expression:

$$Q_{el}(\eta) = -2\pi \left(\frac{Z\alpha}{\beta p} \right)^2 \eta^2 \ln \left(\frac{\eta^2 (\chi'_a)^2}{4} \right). \quad (106)$$

Then, the screening angle χ'_a can be determined via $Q_{el}(\eta)$ by a linear equation:

$$-\ln(\chi'_a)^2 = \ln \left(\frac{\eta^2}{4} \right) + \left[2\pi\eta^2 \left(\frac{Z\alpha}{\beta p} \right)^2 \right]^{-1} Q_{el}(\eta). \quad (107)$$

Let us present the quantity $Q_{el}(\eta)$ in the form:

$$Q_{el}(\eta) = Q_{el}^B(\eta) + \Delta_{CC}[Q_{el}(\eta)]. \quad (108)$$

Then, on the one hand, using (106), the difference $\Delta_{CC}[Q_{el}(\eta)] < 0$ between the Born approximate $Q_{el}^B(\eta)$ and exact in the Born parameter values of the quantity $Q_{el}(\eta)$ can be reduced to a difference in the quantities $\ln(\chi'_a)$ and $\ln(\chi'_a)^B$:

$$\begin{aligned} -\Delta_{CC}[Q_{el}(\eta)] &\equiv -[Q_{el}(\eta) - Q_{el}^B(\eta)] \\ &= 4\pi\eta^2 \left(\frac{Z\alpha}{\beta p} \right)^2 [\ln(\chi'_a) - \ln(\chi'_a)^B] \equiv 4\pi\eta^2 \left(\frac{Z\alpha}{\beta p} \right)^2 \Delta_{CC}[\ln(\chi'_a)]. \end{aligned} \quad (109)$$

On the other hand, this difference can be reduced to a difference $\Delta q_{el}(\chi) = q_{el}(\chi) - q_{el}^B(\chi)$:

$$\Delta_{CC}[Q_{el}(\eta)] = 2\pi \int_0^\infty \chi d\chi \Delta\sigma_{el}(\chi) [1 - J_0(\chi\eta)] = \frac{2\chi_c^2}{n_0 t} \int_0^\infty \frac{d\chi}{\chi^3} \Delta q_{el}(\chi) [1 - J_0(\chi\eta)],$$

and for (39) with (99), as a result of integration, (109) becomes

$$\begin{aligned} -\Delta_{CC}[Q_{el}(\eta)]_{\eta \rightarrow 0} &= 4\pi\eta^2 \left(\frac{Z\alpha}{\beta p} \right)^2 \left[\frac{1}{2}\psi\left(i\frac{Z\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{2}\psi\left(-i\frac{Z\alpha}{\beta}\right) - \psi(1) \right] \\ &= 4\pi\eta^2 \left(\frac{Z\alpha}{\beta p} \right)^2 \left\{ \Re \left[\psi\left(1 + i\frac{Z\alpha}{\beta}\right) \right] + C_E \right\}, \end{aligned} \quad (110)$$

where

$$\begin{aligned} \Re[\psi(1 + ia)] &= \Re[\psi(1 - ia)] = \Re[\psi(ia)] = \Re[\psi(-ia)] \\ &= -C_E + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + a^2)} = -C_E + f(a), \end{aligned} \quad (111)$$

$$-\infty < a < \infty,$$

$\psi(1) = -C_E$, and $f(a) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} [n(n^2 + a^2)]^{-1}$ is an 'universal function of $a = Z\alpha/\beta$ '.²

²This result can also be obtained in other ways, with use of the technique developed in [24].

As consequence, we can get the following rigorous relations between the quantities $\ln(\chi'_a)$ and $\ln(\chi'_a)^B$:

$$\ln(\chi'_a) - \ln(\chi'_a)^B = \Re[\psi(1+ia) - \psi(1)], \quad (112)$$

$$\Delta_{CC}[\ln(\chi'_a)] = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} [n(n^2 + a^2)]^{-1}. \quad (113)$$

We point out that the relations (110), (112), and (113) are independent on the form of electron distribution in atom and are valid for any atomic model.

From (110) also follows an expression for the correction to the exponent of (6). Since $\ln[g(\eta)] = -n_0 t Q$, we get:

$$\Delta_{CC}[\ln g(\eta)] \equiv \ln[g(\eta)] - \ln[g^B(\eta)] \quad (114)$$

$$= 4\pi\eta^2 n_0 t \left(\frac{Z\alpha}{\beta p} \right)^2 f(a).$$

For the specified value of $\eta^2 = 1/\chi_c^2$, using the definition of χ_c (14), we can evaluate this correction:

$$\Delta_{CC}[\ln g(\chi_c)] = \frac{4\pi n_0 t}{\chi_c^2} \frac{\chi_c^2}{4\pi n_0 t} f(a) = f(a). \quad (115)$$

The formulas for the so-called 'Coulomb correction' (CC), defined as a difference between the exact and the Born approximate results, are known as the Bethe—Bloch formulas for the ionization losses [22] and the formulas for the Bethe—Heitler cross section of bremsstrahlung [23].

The similar expression was found for the total cross section of the Coulomb interaction of compact hadronic atoms with ordinary target atoms [24]. Were also obtained CC to the cross sections of the pair production in nuclear collisions [25, 26] and the spectrum of bremsstrahlung [27, 28].

Specificity of the expressions received in the present work is that they define the CC to the screening angle $(\chi_a)^B$, the exponential part $g(\eta, t)$ of the distribution function W , and the angular distribution. A characteristic feature of these corrections is their positive value, in contrast to the negative value of CC to the cross sections and the energy spectrum in the high energy region.

3.5 Relative Coulomb corrections to the Born approximation

Let us write (113) in the following way

$$(\chi'_a) = (\chi'_a)^B \exp \left[f \left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right) \right]. \quad (116)$$

The exact (Coulomb) relative corrections to the Born screening angle $(\chi'_a)^B$ can be then represented as follows

$$\delta_{CC}(\chi'_a) = \frac{\chi'_a - (\chi'_a)^B}{(\chi'_a)^B} = \frac{\Delta_{CC}(\chi'_a)}{(\chi'_a)^B} = \exp \left[f \left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right) \right] - 1. \quad (117)$$

The relative CC to the exponent $g^B(\eta)$ at $\eta^2 = 1/\chi_c^2$, as follows from (115), is also determined by this quantity: $\delta_{CC}(\chi'_a) = \delta_{CC}[g(\chi_c)]$. Moreover, because

$$\Delta W(\chi_c, t) \equiv W_M - W_M^B = \int_0^\infty J_0(\theta\eta) \Delta g(\chi_c) \eta d\eta, \quad (118)$$

accounting $\int_0^\infty d\eta \eta J_0(\theta\eta) = 0$, we get

$$\delta_{CC}[W_M(\chi_c, t)] = \frac{\Delta W(\chi_c, t)}{W_M^B(\chi_c, t)_M} = \frac{\Delta g(\chi_c)}{g^B(\chi_c)} = \exp \left[f \left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right) \right] - 1. \quad (119)$$

Thus,

$$\delta_{CC} \equiv \delta_{CC}(\chi'_a) = \delta_{CC}[g(\chi_c)] = \delta_{CC}[W_M(\chi_c, t)].$$

To compare the second-order relative corrections to the first-order results, which correspond to Eqs. (116) and (11), respectively, we first present these equations in the following approximate form:

$$(\chi'_a) \approx (\chi'_a)^B \left[1 + 1.204 \left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right)^2 + O \left(\left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right)^4 \right) \right], \quad (120)$$

$$(\chi'_a) \approx (\chi'_a)^B \left[1 + 1.670 \left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right)^2 + O \left(\left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right)^4 \right) \right]. \quad (121)$$

The last expression follows from

$$\chi_a \approx \chi_a^B \sqrt{1 + 3.34 \left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right)^2} \approx \chi_a^B \left[1 + 1.670 \left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right)^2 + O \left(\left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right)^4 \right) \right],$$

where $\chi_a = (\chi'_a)/1.080$ and $\chi_a^B = (\chi'_a)^B/1.080$. Then, (120) and (121) becomes

$$\delta_{CC}^{(2)}(\chi'_a) = \frac{\Delta_{CC}^{(2)}(\chi'_a)}{(\chi'_a)^B} \approx 1.204 \left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right)^2 + O \left(\left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right)^4 \right), \quad (122)$$

$$\delta_M^{(2)}(\chi'_a) = \frac{\Delta_M^{(2)}(\chi'_a)}{(\chi'_a)^B} \approx 1.670 \left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right)^2 + O \left(\left(\frac{Z\alpha}{\beta} \right)^4 \right). \quad (123)$$

Additionally, in order to assess the accuracy of the Molière theory in determining the screening angle χ'_a , we also define the absolute and relative differences between the values of $\delta_M^{(2)}(\chi'_a)$ and $\delta_{CC}^{(2)}(\chi'_a)$ as well as between the $\delta_M^{(2)}(\chi'_a)$ and $\delta_{CC}(\chi'_a)$ by the relations

$$\delta_{CCM}^{(2)}(\chi'_a) = \frac{\Delta_{CCM}^{(2)}(\chi'_a)}{\delta_M^{(2)}} = \frac{\delta_M^{(2)} - \delta_{CC}^{(2)}}{\delta_M^{(2)}} = 1 - \frac{\delta_{CC}^{(2)}}{\delta_M^{(2)}}, \quad (124)$$

$$\delta_{CCM}(\chi'_a) = \frac{\Delta_{CCM}(\chi'_a)}{\delta_M^{(2)}} = \frac{\delta_M^{(2)} - \delta_{CC}}{\delta_M^{(2)}} = 1 - \frac{\delta_{CC}}{\delta_M^{(2)}}. \quad (125)$$

Table 1 presents the Z dependence of the second-order corrections to the first-order results. It shows that the values of the relative corrections $\delta_{CC}^{(2)}$ for heavy target atoms with $Z \sim 80$ does reach 40%. From it is also obvious that with the rise in the nuclear charge the absolute inaccuracy $\Delta_{CCM}^{(2)}(\chi'_a)$ of the Moliere's theory in determining the screening angle χ'_a increases to approximately 16%, and the corresponding relative error $\delta_{CCM}^{(2)}(\chi'_a)$ does not depend on Z and is about 28%.

Table 1. The Z dependence of the second-order and exact corrections defined by Eqs. (97), (113), (117), (122)–(125), and (129) for $\beta = 1$

M	Z	$10 \delta_{unit}$	$\delta_M^{(2)}$	$\delta_{CC}^{(2)}$	$\Delta_{CCM}^{(2)}$	$\delta_{CCM}^{(2)}$	$f(Z\alpha)$	δ_{CC}	Δ_{CCM}	δ_{CCM}
Be	4	0.002	0.001	0.001	0.000	0.286	0.001	0.001	0.000	0.286
Al	13	0.007	0.015	0.011	0.004	0.280	0.011	0.011	0.004	0.280
Ti	22	0.012	0.043	0.031	0.012	0.280	0.031	0.031	0.012	0.280
Ni	28	0.015	0.070	0.050	0.020	0.286	0.049	0.050	0.020	0.287
Mo	42	0.022	0.157	0.113	0.044	0.280	0.105	0.110	0.047	0.297
Sn	50	0.027	0.222	0.160	0.062	0.279	0.144	0.154	0.068	0.306
Ta	73	0.039	0.474	0.342	0.132	0.278	0.276	0.318	0.157	0.330
Pt	78	0.041	0.541	0.390	0.150	0.279	0.307	0.359	0.182	0.336
Au	79	0.042	0.554	0.400	0.154	0.278	0.313	0.367	0.187	0.337
Pb	82	0.044	0.598	0.431	0.166	0.279	0.332	0.393	0.205	0.342

To estimate the exact ('Coulomb') corrections $\Delta_{CC}[\ln(\chi'_a)] = \Delta_{CC}[\ln g(\chi_c)] = f(a) > 0$ and $\delta_{CC} \equiv \delta_{CC}(\chi'_a) = \delta_{CC}[g(\chi_c)] = \delta_{CC}[W_M(\chi_c, t)] > 0$, according to the formulas (113) and (117), we must first calculate the values of the function $f(a) = \Re[\psi(1+ia)] + C_E$.

From the digamma series [29]

$$\psi(1+a) = 1 - C_E - \frac{1}{1+a} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n [\zeta(n-1)] a^{n-1}, \quad |a| < 1, \quad (126)$$

where ζ is the Riemann zeta function, leads the corresponding power series for $\Re[\psi(1+ia)] = \Re[\psi(ia)]$

$$\Re[\psi(ia)] = 1 - C_E - \frac{1}{1+a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} [\zeta(2n+1)] a^{2n}, \quad |a| < 2, \quad (127)$$

and the function $f(a) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} [n(n^2+a^2)]^{-1}$ can be represented as follows:

$$f(a) = 1 - \frac{1}{1+a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} [\zeta(2n+1)] a^{2n}, \quad |a| < 2, \quad (128)$$

$$= 1 - \frac{1}{1+a^2} + 0.2021 a^2 - 0.0369 a^4 + 0.0083 a^6 - \dots \quad (129)$$

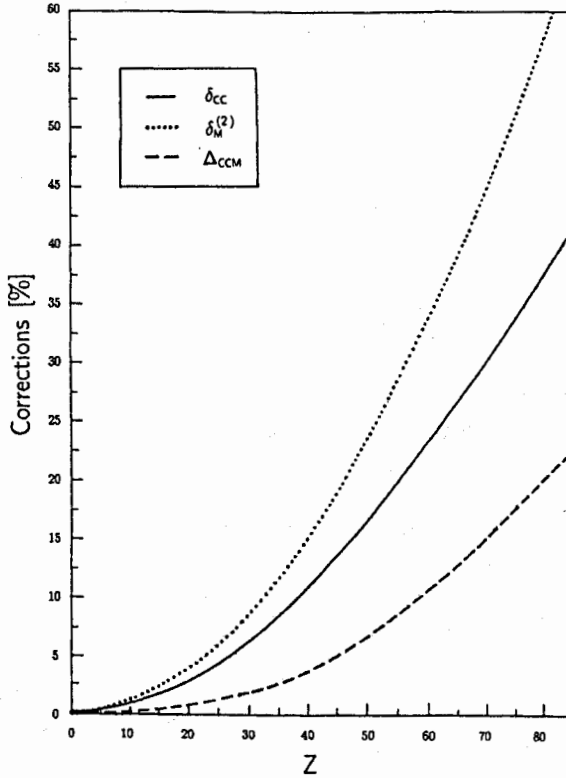


Figure 1: The dependence of the relative Coulomb (δ_{CC}) and Molière ($\delta_M^{(2)}$) corrections and also their difference (Δ_{CCM}) from nuclear charge Z .

The calculation results for Z dependence of (128), the exact corrections and their difference with the Molière correction $\delta_M^{(2)}$ as well as the unitarity correction (97) are also presented in Table 1. Some results from Table 1 illustrates Figure 1.

The Table 1 shows that while the values of relative unitarity corrections $\delta_{unit} \equiv \delta_{unit}(\sigma) = \delta_{unit}(W)$ for heavy atoms of the target material does not reach 0.5%, the maximum value of the difference $\Delta_{CC} [\ln(\chi'_a)] = f(Z\alpha)$ is close to 33%, and the magnitude of the corresponding relative Coulomb correction δ_{CC} is reached for $Z \sim 80$ the value of order of 40%.

For the light elements up to $Z = 28$, all the exact corrections coincide with the second-order corrections. Beginning with $Z = 42$, the relative CC are lower than the second-order corrections, $\delta_{CC}^{(2)}(\chi'_a) > \delta_{CC}(\chi'_a)$, and this discrepancy increases approximately to 10% for the heavy elements with $Z \sim 80$.

From Table 1 and Figure 1 is also obvious that the absolute inaccuracy Δ_{CCM} of the Molière's theory in determining the screening angle χ'_a with the rise of Z increases to 20% and the corresponding relative inaccuracy δ_{CCM} is about 34 percent.

Thus, in the case of scattering on targets with large Z the such corrections as Δ_{CCM} and δ_{CCM} become significant and should be taken into account in determining the lifetimes of relativistic elementary atoms in experiments with nuclear targets.

4 Conclusion

1. Within the framework of unitary Glauber approximation for particle-atom scattering, we develop the general formalism of the Molière–Fano multiple scattering theory.
2. We have estimated the relative unitarity corrections to the parameters of the M–F theory $\delta_{unit} \equiv \delta_{unit}(\sigma) = \delta_{unit}(W)$, resulting from a reconstruction of its unitarity in second-order optical model of the Glauber theory and found that they are of order $Z\alpha^2$.
3. We have also received the rigorous relations for the exact and the Born values of the quantities $Q_{el}(\eta)$, $\ln[g(\eta)]$, and χ'_a , which do not depend on the shape of the electron density distribution in the atom and are valid for any atomic model.
4. We have calculated the Coulomb corrections $\Delta_{CC} \equiv \Delta_{CC}[\ln(\chi'_a)] = \Delta_{CC}[\ln g(\chi_c)]$ and relative Coulomb corrections $\delta_{CC} \equiv \delta_{CC}(\chi'_a) = \delta_{CC}[g(\chi_c)] = \delta_{CC}[W_M(\chi_c, t)]$ with nuclear charge ranged from $Z = 2$ to $Z = 82$ and showed that for $Z \sim 80$ these corrections comprise the order of 30% and 40%, correspondingly.
5. Additionally, we evaluated the absolute and relative inaccuracies of the Molière's theory in determining the screening angle and found that for heavy atoms of the target material ($Z \sim 80$) they are about 20% and 30%, respectively.

References

- [1] G. Molière, *Z. Naturforsch.*, **2A** (1947) 133
- [2] G. Molière, *Z. Naturforsch.*, **3A** (1948) 78, **10A** (1955) 177
- [3] U. Fano, *Phys. Rev.*, **93** (1954) 117
- [4] DIDAC-Collaboration: B. Adeva, L. Afanasyev, M. Benayoun et al., *Phys. Lett.*, **B704** (2011) 24, **B619** (2005) 50; A. Dudarev et al., *DIRAC note 2005-02*
- [5] T.A. Heim, K. Henken, D. Trautmann et al., *J. Phys.*, **B33** (2000) 3583
- [6] N.O. Elyutin et al., *Instrum. Exp. Tech.*, **50** (2007) 429; *J. Surf. Invest.*, **4** (2010) 908
- [7] MuScat Collaboration: D. Attwood et al. *Nucl. Instrum. Meth.*, **B251** (2006) 41; A. Tollestrup and J. Monroe, *NFMCC technical note MC-176*, September 2000
- [8] R.C. Fernow, *MUC-NOTE-COOLTHEORY-336*, April 2006; A. Van Ginneken, *Nucl. Instr. Meth.*, **B160** (2000) 460; C.M. Ankebrandt et al. Proposal of the MUCOOL Collaboration, April 2012
- [9] S.I. Striganov, *Radiat. Prot. Dosimetry*, **116** (2005) 293
- [10] A.V. Butkevich, R.P. Kokoulin, G.V. Matushko et al. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res.*, **A488** (2002) 282
- [11] V.I. Yurchenko, *JETP*, **89** (1999) 223

- [12] F.S. Dzheparov et al., *JETP Lett.*, **72** (2000) 518, **78** (2003) 1011; *J. Surf. Invest.*, **3** (2009) 665
- [13] A.P. Radlinski, E.Z. Radlinska, M. Agamalian et al., *Phys. Rev. Lett.*, **82** (1999) 3078; H. Takeshita, T. Kanaya, K. Nishida et al., *Phys. Rev.*, **E61** (2000) 2125; M. Hainbuchner, M. Baron, F. Lo Celso et al., *Physica (Amsterdam)*, **A304** (2002) 220
- [14] O. Voskresenskaya, A. Sissakian, A. Tarasov et al., JINR P2-97-308, Dubna, 1997; L. Afanasyev and A. Tarasov, in: arXiv:hep-ph/0401204; S. Bakmaev, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya, in: arXiv:hep-ph/0508193
- [15] H.A. Bethe, *Phys. Rev.*, **89** (1953) 1256
- [16] H. Snyder and W.T. Scott, *Phys. Rev.*, **76** (1949) 220; W.T. Scott, *ibid.*, **85** (1952) 245
- [17] L.A. Kulchitsky and G.D. Latyshev, *Phys. Rev.*, **61** (1942) 254
- [18] S.A. Goudsmit and J.L. Saunderson, *Phys. Rev.*, **57** (1940) 24, **58** (1940) 36
- [19] R.J. Glauber, in: *Lectures in Theoretical Physics*, v.1, ed. W. Brittain and L.G. Dunham. Interscience Publ., N.Y., 1959, 315 p.; A.V. Tarasov, *Fiz. Elem. Chast. Atom. Yadra*, **7** (1976) 771-815
- [20] A. Tarasov and O. Voskresenskaya, ArXiv:1107.5018, hep-ph (2011)
- [21] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Nauka Publication, Moscow, 1971
- [22] H.A. Bethe, *Z. Phys.*, **76** (1932) 293; F. Bloch, *Ann. Phys.*, **5** (1933) 285
- [23] H.A. Bethe and W. Heitler, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **146A** (1934) 83
- [24] A.V. Tarasov, S.R. Gevorkyan, and O.O. Voskresenskaya, *Phys. Atom. Nucl.*, **61** (1998) 1517; O.O. Voskresenskaya, Thesis, Dubna, JINR, 2003
- [25] H.A. Bethe and L.C. Maximon, *Phys. Rev.*, **93** (1954); D. Ivanov and K. Melnikov, *ibid.*, **D57** (1998) 4025; D.Y. Ivanov, E.A. Kuraev, A. Schiller et al., *Phys. Lett.*, **B442** (1998) 453; D. Ivanov, A. Schiller, and V. Serbo, *ibid.*, **B454** (1999) 155
- [26] A.J. Baltz, F. Gelis, L. McLerran et al., *Nucl. Phys.*, **A695** (2001) 395; U. D. Jentschura, K. Hencken, and V.G. Serbo, ArXiv:ArXiv:0808.1350, hep-ph (2008); R.N. Lee and A.I. Milstein, *JETP*, **109** (2009) 968
- [27] H. Davies, H.A. Bethe, and L.C. Maximon, *Phys. Rev.*, **93** (1954) 788; I. Øverbø, K.J. Mork, and H.A. Olsen, *ibid.*, **175** (1968) 1978, **A8** (1973) 668; I. Øverbø, *Phys. Lett.*, **B71** (1977) 412; J.H. Hubbell, H.A. Gimm, and I.Øverbø, *J. Phys. Chem. Rev. Data*, **9** (1980) 1023
- [28] A.I. Milstein and V.M. Strakhovenko, *JETP*, **76** (1993) 775; R.N. Lee, A. I. Milstein, and V.M. Strakhovenko, *Phys. Rev.*, **A69** (2004) 022708; A. Di Piazza and A.I. Milstein, *ibid.*, **A82** (2010) 042106
- [29] *Handbook of Mathematical Functions*, Eds. M. Abramowitz and I.A. Stegun, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 1964

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ А.В. ТАРАСОВА*

- 1 *A.V. Tarasov*. Three photon decay of neutral pions // *Sov. J. Nucl. Phys.*, 5:445, 1967 [*Yad. Phys.*, 5:626–630, 1967; *JINR Preprint*, P2-2763, Янв 1966. 8 p.].
- 2 *А.В. Тарасов*. Схема реконструкции амплитуды процессов $eN \rightarrow e\pi N$, $\pi N \rightarrow Ne^-e^+$ из экспериментальных данных // *ЯФ*, 6:1076–1079, 1967 [Препринт ОИЯИ, P2-3062, янв. 1966. 11 с.].
- 3 *А.В. Тарасов*. Теорема Лоу для наблюдаемых величин. Препринт ОИЯИ, P2-3851, май 1968. 13 с.
- 4 *А.В. Тарасов, Л.И. Липидус*. СРТ и эксперимент // *Вопросы теории элементарных частиц: Тр. междунар. семинара. Варна, Болгария, май 1968, с. 69* [Препринт ОИЯИ, P2-4050, Дубна, 1968].
- 5 *А.В. Тарасов*. Наблюдаемые величины в тормозном излучении в приближении Лоу // *ЯФ*, 8:1191–1200, 1968 [Препринт ОИЯИ, P2-3830, янв. 1968. 18 с.].
- 6 *А.В. Тарасов*. Об амплитуде тормозного излучения при соударении нуклонов // *ЯФ*, 8:992–998, 1968 [Препринт ОИЯИ, P2-3803, апр. 1968. 19 с.].
- 7 *А.В. Тарасов*. О немассовых эффектах в амплитуде тормозного излучения // *ЯФ*, 9:400–408, 1969 [Препринт ОИЯИ, P2-4010, июль 1968. 18 с.].
- 8 *А.В. Тарасов, Л.Г. Ткачев*. О влиянии электромагнитной структуры адронов на величину сечения процесса $\pi^- p \rightarrow Ne^+e^-$. Препринт ОИЯИ, P2-4970, март 1970. 18 с.
- 9 *Л.И. Липидус, А.В. Тарасов, Ч. Цэрэн*. О процессах с двойным изменением странности K -мезонов. Препринт ОИЯИ, P2-5028, янв. 1970. 18 с.
- 10 *A.V. Tarasov, Ch. Tseren*. Quasi-elastic interaction of π -mesons with deuterons. NASA-TT-F-13384 Preprint, Nov 1970. 12 p. [Препринт ОИЯИ, P2-5078, янв. 1970. 14 с.].
- 11 *Л.И. Липидус, А.В. Тарасов, Ч. Цэрэн*. О сечении процесса $\bar{K}d \rightarrow KY_1Y_2$. Препринт ОИЯИ, P2-5231, янв. 1970. 9 с.
- 12 *А.В. Тарасов, Ч. Цэрэн*. Квазиупругое рассеяние частиц на дейтронах. Препринт ОИЯИ, P2-5343, январь 1970. 13 с.
- 13 *А.В. Тарасов, Ч. Цэрэн*. К выводу формулы Глаубера в рамках теории Ватсона // *ЯФ*, 12:978–981, 1970 [Препринт ОИЯИ, P2-4994, март 1970. 10 с.].
- 14 *А.В. Тарасов, Ч. Цэрэн*. О процессах типа двойной перезарядки на легких ядрах // *ЯФ*, 13:727–733, 1971 [Препринт ОИЯИ, P2-5286, янв. 1970. 14 с.].
- 15 *С.Р. Геворкян, А.В. Тарасов, Ч. Цэрэн*. Амплитуда и сечение когерентного рождения стабильных и нестабильных частиц с ядрами. Препринт ОИЯИ, P2-5604, янв. 1971. 15 с.

*Библиографический список составлен О.О. Воскресенской.

- 16 А.П. Ванжа, А.В. Тарасов. О структуре амплитуды ep -рассеяния в e^2 - и s^4 -приближениях. Препринт ОИЯИ, P2-5629, янв. 1971. 11 с.
- 17 С.Р. Геворкян, А.В. Тарасов. Эффекты многократного перерассеяния в процессах типа перезарядки. Препринт ОИЯИ, P2-5752, янв. 1971. 16 с.
- 18 С.Р. Геворкян, А.В. Тарасов. Некогерентное фоторождение векторных мезонов на ядрах при больших передачах. Препринт ОИЯИ, P2-5864, июнь 1971. 9 с.
- 19 С.Р. Геворкян, А.В. Тарасов. Эффекты кратных столкновений в процессах взаимодействия быстрых частиц с ядрами. // Междунар. конф. по физике высоких энергий и структуре ядра, 4-я, Дубна, 1971, ОИЯИ, Д1-5988, с. 71.
- 20 А.С. Пак, А.В. Тарасов. Об учете поглощения в процессах когерентного фоторождения нейтральных пионов на ядрах. Препринт ОИЯИ, P2-6539, июнь 1972. 8 с.
- 21 А.П. Ванжа, А.С. Пак, А.В. Тарасов. О вкладе излучения жестких фотонов протонами в радиационные поправки к сечению ep -рассеяния на малые углы. Препринт ОИЯИ, P2-6540, янв. 1972. 8 с.
- 22 О.А. Займидорога, С.Р. Геворкян, А.В. Тарасов. Когерентное и некогерентное рождение частиц на ядрах в теории многократного рассеяния. Препринт ОИЯИ, P2-6581, янв. 1972. 22 с.
- 23 Б.М. Головин, Г.И. Лыкасов, А.М. Розанова, А.В. Тарасов. Эффекты перерассеяния в реакции $pd \rightarrow ppp$ // ЯФ, 16:1096–1101, 1972 [Препринт ОИЯИ, P2-6376, Дубна, 1972, 16 с.; Междунар. конф. по физике высоких энергий и структуре ядра, 4-я, Дубна, 1971, ОИЯИ, с. 61].
- 24 А.П. Ванжа, Л.И. Липидус, А.В. Тарасов. Электромагнитные эффекты в поляризации нуклонов при мезон-нуклонном рассеянии // ЯФ, 16:1023–1034, 1972.
- 25 С.Р. Геворкян, А.В. Тарасов, Ч. Цэрэн. О двойной перезарядке π -мезонов на ядрах при высоких энергиях // ЯФ, 15:55–61, 1972 [Препринт ОИЯИ, P2-5865, янв. 1971. 13 с.].
- 26 С.Р. Геворкян, А.В. Тарасов. Некогерентное фоторождение векторных мезонов на ядрах при больших передачах // ЯФ, 15:248–250, 1972.
- 27 А.П. Ванжа, А.С. Пак, А.В. Тарасов. Радиационные поправки к сечению ep -рассеяния на малые углы при детектировании протона отдачи // ЯФ, 16:358–361, 1972 [Препринт ОИЯИ, P2-6309, Дубна, 1972].
- 28 S.R. Gevorkyan and A.V. Tarasov. Possibility to studying the interaction of longitudinally polarized v^0 meson with nucleons in the $\pi^- a \rightarrow v^0 a'$ reaction // JETP Lett., 15 N11:485–486, 1972 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz., 15:684–686, 1972].
- 29 S.R. Gevorkyan and A.V. Tarasov. Photoproduction of charge pions on nuclei and violation of the vector dominance model // JETP Lett., 16 N7:296–298, 1972 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz., 16:418–420, 1972].

- 30 *А.В. Тарасов, Л.Г. Ткачев.* Когерентное и некогерентное взаимодействие частиц высоких энергий с атомными ядрами // Межд. симпоз. по физике выс. энергий и элем. частиц, 2-й. Штрбске Плесо, 1972. Дубна, 1973, с. 298–308.
- 31 *Г.И. Лыкасов, А.В. Тарасов.* Спиновые эффекты в теории $P^4\text{He}$ -рассеяния // ЯФ, 17:301–308, 1973 [Препринт ОИЯИ, P2-6562, Дубна, 1972. 17 с.].
- 32 *Г.И. Лыкасов, А.В. Тарасов.* Упругое $P^3\text{He}$ -рассеяние в модели Глаубера со спином // ЯФ, 18:1209, 1973 [Препринт ОИЯИ, P2-7089, Дубна, 1973. 10 с.].
- 33 *G.I. Lykasov and A.V. Tarasov.* Charge exchange of fast nucleons on deuterons in the Glauber theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 19:421, 1974 [*Yad. Fiz.*, 19:825–829, 1974; Препринт ОИЯИ, P2-7324, Дубна, 1973. 12 с.].
- 34 *Г.Б. Алавердян, А.В. Тарасов, В.В. Ужинский.* Структура инклюзивных спектров протонов в протон-ядерных столкновениях в теории Глаубера. Препринт ОИЯИ, P2-7875, апр. 1974. 8 с.
- 35 *А.С. Пак, А.В. Тарасов.* Структура сечений некогерентного рождения частиц на ядрах в недифракционных процессах. Препринт ОИЯИ, P2-8132, июль 1974. 16 с.
- 36 *A.P. Vanzha, L.I. Lapidus, and A.V. Tarasov.* Primakoff effect and polarization effects in coherent unstable particle production // *Sov. J. Nucl. Phys.*, 20:223–225, 1974 [*Yad. Fiz.*, 20:416–421, 1974; Препринт ОИЯИ, P2-7578, нояб. 1973. 13 с.].
- 37 *Г.И. Лыкасов, А.В. Тарасов.* Эффекты отдачи и перезарядки в упругих рассеяниях протонов на легких ядрах ^3He , ^4He // ЯФ, 20 N3:489–496, 1974.
- 38 *С.Р. Геворкян, В.М. Жамкочан, А.В. Тарасов.* Промежуточные каналы в процессах некогерентного рождения частиц на ядрах // ЯФ, 21 N2:288–291, 1975.
- 39 *А.С. Пак, Л. Поч, А.В. Тарасов.* О структуре амплитуды $A(x \rightarrow x + n)B$ реакций // ЯФ, 21:520–522, 1975 [ОИЯИ, P2-7989, май 1974. 7 с.].
- 40 *А.С. Пак, А.В. Тарасов.* Об учете нестабильности в реакциях некогерентного рождения резонансов на ядрах // ЯФ, 22 N1:91–96, 1975.
- 41 *А.П. Ванжа, Л.И. Липидус, А.В. Тарасов.* Электромагнитные эффекты в барион-ядерном рассеянии. Препринт ОИЯИ, P2-8623, февр. 1975. 18 с.
- 42 *В.Г. Аблеев, С.Г. Басиладзе, В.А. Бодягин и др.* Исследование рассеяния альфа-частиц при 16,8 ГэВ/с на протонах и ядрах // Материалы XVII Межд. конф. по физике выс. энергий, Тбилиси, 1976. Доклады 448/A6-5, A6-6, A1-27. ОИЯИ, Дубна, 1977. 30 с.
- 43 *G.V. Alaverdian, A.V. Tarasov, and V.V. Uzhinsky.* Mass number dependence of proton spectra with large transverse momentum in proton-nucleus collisions. *JINR Preprint*, E2-9606, Mar 1976. 9 p.
- 44 *А.С. Пак, А.В. Тарасов.* Когерентное рождение нестабильных частиц со спином на ядрах. Препринт ОИЯИ, P2-9685, апр. 1976. 21 с.
- 45 *А.С. Мартынов, А.И. Салтыков, А.В. Тарасов, В.В. Ужинский.* Поиски распадов $\eta^0 \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ и $x^0 \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ // ЯФ, 23:93–99, 1976.

- 46 *A.B. Tarasov*. Когерентное и некогерентное рождение частиц на атомных ядрах в теории многократного рассеяния // ЭЧАЯ, 7:771–815, 1976.
- 47 *G.B. Alaverdian, A.V. Tarasov, and V.V. Uzhinsky*. A-Dependence of inclusive spectra of protons with large transverse momenta in proton-nucleus collisions // Sov. J. Nucl. Phys., 25:354–357, 1977 [Yad. Phys., 26:666–669, 1977].
- 48 *L. Azhgirei et al.* Structure of the high momentum parts of the deuteron spectra from *dd*-collisions at 4.3, 6.3 and 8.9-GeV/c // Sov. J. Nucl. Phys., 28:62–67, 1978 [Yad. Phys., 28:124–129, 1978; JINR Preprint, E1-11206, Dec 1977. 12 p.].
- 49 *G.V. Badalian, Yu.M. Kazarinov, V.S. Kiselev, V.S. Pogosov, and A.V. Tarasov*. On the processing of elastic *ed* small angle scattering data. EFI Preprint, 305-30-78, Yerevan, Mar 1978. 16 p.
- 50 *A.S. Pak, A.V. Tarasov, Ch. Tseren et al.* The phase functions in the nucleus-nucleus scattering. JINR Preprint, E2-11939, Oct 1978. 18 p.
- 51 *L.S. Azhgirei et al.* The structure of the high momentum parts of the deuteron spectra from *dd*-collisions at 4.3-GeV/c, 6.3-GeV/c, and 8.9-GeV/c // Nucl. Phys., A305:397–403, 1978.
- 52 *A.C. Пак, A.B. Тарасов, В.В. Уэжинский, Ч. Цэрэн*. К теории ядро-ядерных взаимодействий при высоких энергиях // Письма в ЖЭТФ, 28:314–318, 1978.
- 53 *G.B. Alaverdian, A.S. Pak, A.V. Tarasov, Ch. Tseren, and V.V. Uzhinsky*. The correlation of $(n(s), n(g))$ -particles in hadron-nucleus interactions. JINR Preprint, E2-12825, Oct 1979. 18 p.
- 54 *A.S. Pak, A.V. Tarasov, V.V. Uzhinskii, and Ch. Tseren*. Contribution to the theory of nuclear-nuclear interactions at high energies // JETP Lett., 28 N5:288, 1979.
- 55 *A.C. Пак, A.B. Тарасов, В.В. Уэжинский, Ч. Цэрэн*. Фазовая функция в ядерно-ядерном рассеянии при высоких энергиях // ЯФ, 30:102–111, 1979.
- 56 *A.C. Пак, A.B. Тарасов, В.В. Уэжинский, Ч. Цэрэн*. О взаимодействии ядер с ядрами при высоких энергиях // ЯФ, 30:343, 1979 [JINR Preprint, E1-11206, Dec 1977. 12 p.].
- 57 *L.S. Azhgirei et al.* Nuclear scattering of deuterons at 4.3, 6.3 and 8.9-GeV/c. // Sov. J. Nucl. Phys., 30:818, 1979 [ЯФ, 30:1578–1589, 1979].
- 58 *G.B. Alaverdian, A.V. Tarasov, Ch. Tseren et al.* Momentum losses spectra in the $pA \rightarrow pX$ reaction at 19.2 GeV/c // Proc. 8th Intern. Conf. on High Energy Phys. and Nucl. Structure. Vancouver, Canada, 1979, p. 177.
- 59 *G.B. Alaverdian, A.V. Tarasov, Ch. Tseren, V.V. Uzhinsky, and A.S. Pak*. Multiparticle production in the hadron-nucleus interaction in the leading particle cascaded model // Proc. 8th Intern. Conf. on High Energy Phys. and Nucl. Structure. Vancouver, Canada, 1979, p. 176.
- 60 *L.S. Azhgirei, A.V. Tarasov, Ch. Tseren et al.* // Proc. 8th Intern. Conf. on High Energy Phys. and Nucl. Structure, Vancouver, 1979, p. 170.

- 61 *A.S. Pak, A.V. Tarasov, Ch. Tseren, and V.V. Uzhinsky.* Elastic and inelastic scattering α -particles from ^{12}C , ^{40}Ca isotopes theory // Proc. 8th Intern. Conf. on High Energy Phys. and Nucl. Structure, Vancouver, 1979, p. 165.
- 62 *A.S. Pak, A.V. Tarasov, Ch. Tseren, and V.V. Uzhinsky.* Nucleus-nucleus scattering phase shift in the optical limit of the eikonal theory // Proc. 8th Intern. Conf. on High Energy Phys. and Nucl. Structure, Vancouver, 1979, p. 164.
- 63 *G. Alaverdian, A. Pak, A. Tarasov, Ch. Tseren, and V. Uzhinsky.* Rapidity distributions of secondary particles in hadron-nucleus collisions. JINR Preprint, E2-12822, Oct 1979. 14 p.
- 64 *G. Alaverdian, A. Pak, A. Tarasov, Ch. Tseren, and V. Uzhinsky.* KNO scaling in hadron-nucleus interactions. JINR Preprint, E2-12823, Oct 1979. 18 p.
- 65 *L.S. Azhgirei, S.V. Razin, A.V. Tarasov, and V.V. Uzhinsky.* On the momentum distributions of deuterons from quasielastic scattering at high-energies. JINR Preprint, E2-12683, Jul 1979. 18 p.
- 66 *A.M. Kotsinian and A.V. Tarasov.* Exotic atoms production in eN - and μN -interactions. EFI Preprint, 380-38-79, Yerevan, Aug 1979. 9 p.
- 67 *G.B. Alaverdian, A.S. Pak, A.V. Tarasov, and Ch. Tseren.* Hadron-nucleus deep inelastic scattering and the "bare" particle problem // Sov. J. Nucl. Phys., 31:402, 1980 [ЯФ, 31:771-775, 1980; JINR Preprint, E2-12535, Jun 1979. 24 p.].
- 68 *G.B. Alaverdian, A.S. Pak, A.V. Tarasov, and Ch. Tseren.* Average multiplicity of secondary particles in hadron-nucleus interactions // Sov. J. Nucl. Phys., 31:402, 1980 [ЯФ, 31:776-786, 1980].
- 69 *G.B. Alaverdian, A.S. Pak, A.V. Tarasov et al.* Secondary particles average multiplicity in hadron-nucleus interactions // Sov. J. Nucl. Phys., 31:692, 1980 [Yad. Phys., 31:1342-1349, 1980; JINR Preprint, E2-12799, Sep 1979. 15 p.].
- 70 *И.У. Христова, З. Омбоо, А.С. Пак, А.В. Тарасов.* О влиянии когерентных рассеяний на угловую зависимость сечения квазиупругого α -рассеяния. Препринт ОИЯИ, P2-80-52, янв. 1980. 4 с.
- 71 *И.У. Христова, З. Омбоо, А.С. Пак, А.В. Тарасов.* Об одном методе оценки точности приближения жесткого налетающего ядра. Препринт ОИЯИ, P2-80-53, янв. 1980. 4 с.
- 72 *И.У. Христова, З. Омбоо, А.В. Тарасов и др.* О кулоновских эффектах в адрон-ядерном рассеянии. Сообщения ОИЯИ, P2-80-278, апр. 1980. 13 с.
- 73 *И.У. Христова, З. Омбоо, А.В. Тарасов, В.В. Ужинский.* α -ядерное рассеяние в оптическом приближении эйкональной теории. Сообщение ОИЯИ, P2-80-304, апр. 1980. 10 с.
- 74 *И.У. Христова, З. Омбоо, А.В. Тарасов, В.В. Ужинский.* Сечение квазиупругого ядро-ядерного рассеяния в оптическом приближении // Письма в ЖЭТФ, 31 N8:495-498, 1980 [Препринт ОИЯИ, P2-80-54, янв. 1980. 4 с.].

- 75 Z. Omboo, A.S. Pak, S.B. Saakian, A.V. Tarasov, and V.V. Uzhinsky. Taking account of the center-of-mass correlations of target nucleus in inclusive reaction cross-section calculations // *JETP Lett.*, 33:670–672, 1981 [Препринт ОИЯИ, P2-81-310, май 1981. 3 с.]
- 76 З. Омбоо, А.С. Пак, С.Б. Саакян, А.В. Тарасов, В.В. Ужинский. Характеристическая функция инклюзивных процессов с участием легких ядер. Препринт ОИЯИ, P2-81-335, май 1981. 9 с.
- 77 Z. Omboo, A.S. Pak, S.B. Saakian, A.V. Tarasov et al. Allowance for the correlation of the center of mass of the target nucleus in the calculations of the cross sections for inclusive reactions. *JETP Lett.*, 33 N12:657, 1981 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 33:670–672, 1981].
- 78 З. Омбоо, А. Пак, С. Саакян, А. Тарасов. Упругое пр-рассеяние в кварковой модели в формализме Глаубера. Препринт ОИЯИ, P2-82-75, Дубна, 1982. 3 с.
- 79 Z. Omboo, N.O. Sadykov, and A.V. Tarasov. The hN total cross-sections in the double gluon exchange approximation. *JINR Preprint*, E2-82-429, Jun 1982. 2 p. [Proc. 21th Intern. Conf. on High Energy Physics, Paris, France, Jul 26–31, 1982].
- 80 K.G. Gulamov, N.O. Sadykov, and A.V. Tarasov. Binary diffractive reactions in QCD Born approximation. *JINR Preprint*, E2-82-501, Jun 1982. 2 p. [Proc. 21th Intern. Conf. on High Energy Physics, Paris, France, Jul 26–31, 1982].
- 81 В.Г. Аблеев и др. Рассеяние α -частиц с импульсом 17,9 ГэВ/с на ядрах углерода, алюминия и меди // *ЯФ*, 36:1197–1206, 1982 [Препринт ОИЯИ, P1-82-74, Дубна, 1982; “Berkeley 1980”, Proc., Nucl. Phys., Vol. 1, p. 71].
- 82 V. Ableev et al. α -nuclear differential cross-sections at 4.45-GeV/c per nucleon // *Acta Phys. Polon.*, B16:913–929, 1985. [Proc. X Intern. Conf. on Particles and Nuclei, Heidelberg, Jul 30 – Aug 3, 1984, Book of Abstracts, vol. II, J-2; Препринт ОИЯИ, P1-85-924, дек. 1985. 18 с.]
- 83 A.S. Pak and A.V. Tarasov. Total cross section for relativistic positronium interaction with atom. *JINR Preprint*, E2-85-882, Dec 1985. 3 p.
- 84 А.С. Пак, А.В. Тарасов. Сечения возбуждения и ионизации релятивистских позитрониев при взаимодействии с атомами. Препринт ОИЯИ, P2-85-903, дек. 1985. 6 с.
- 85 A.S. Pak, N.O. Sadykov, and A.V. Tarasov. Relations between total hadron cross-sections in two quark models // *Sov. J. Nucl. Phys.*, 42 N4:619, 1985 [*Yad. Fiz.* 42:975–983, 1985; Препринт ОИЯИ, P2-84-616, сент. 1984. 12 p.]
- 86 K.G. Gulamov, A.S. Pak, N.O. Sadykov, and A.V. Tarasov. Factorization relations for hadron diffraction cross-sections at 0 angle in two gluon exchange approximation // *Sov. J. Nucl. Phys.*, 42:464, 1985 [*Yad. Fiz.* 42:732–738, 1985].
- 87 A.S. Pak and A.V. Tarasov. Inelastic screening influence on probability of passing ultrarelativistic positronia through matter // *Sov. J. Nucl. Phys.*, 45:92, 1987 [*Yad. Fiz.*, 45:145–147, 1987; Препринт ОИЯИ, P2-85-907, дек. 1985. 3 с.]

- 88 *A.V. Tarasov*. On interpretation of cumulative processes in the “gathering” model // *Acta Phys. Polon.*, B19:1001–1009, 1988 [Препринт ОИЯИ, P1-87-672, сент. 1987. 10 с.].
- 89 *A.B. Тарасов, И.У. Христова*. Формфакторы перехода водородоподобных атомов между состояниями дискретного и непрерывного спектра. Препринт ОИЯИ, P2-91-3, январь 1991. 4 с.
- 90 *A.B. Тарасов, И.У. Христова*. Эффекты многофотонных обменов в сечениях фоторождения атомов пара- и ортопозитрония. Препринт ОИЯИ, P2-91-4, янв. 1991. 6 с.
- 91 *A.B. Тарасов, И.У. Христова*. Эйкональная теория взаимодействия релятивистских димезоатомов с атомами вещества. Препринт ОИЯИ, P2-91-10, янв. 1991. 12 с.
- 92 *G. Czapek et al.* Lifetime measurement of $\pi^+\pi^-$ -atoms to test low-energy QCD predictions: Letter of intent. CERN-SPSLC-92-44, CERN-SPSLC-I-191, Aug 1992. 23 p.
- 93 *Е. Кузьмин, А. Тарасов*. Черенковское излучение пучка тяжелых заряженных частиц в толстом радиаторе. Сообщения ОИЯИ, P1-92-525, дек. 1992. 11 с.
- 94 *E.S. Kuzmin and A.V. Tarasov*. Diffractionlike effects in angular distribution of cherenkov radiation from heavy ions // *JINR Rapid Commun.*, 1993, 4[61]-93, p. 64–69.
- 95 *L.G. Afanasyev and A.V. Tarasov*. Elastic form factors of hydrogenlike atoms in nS -states. JINR Preprint, E4-93-293, Jul 1993. 4 p.
- 96 *B. Adeva et al.* Lifetime measurement of $\pi^+\pi^-$ -atoms to test low-energy QCD predictions: Proposal to the SPSLC. (CERN-SPSLC-95-1, CERN-SPSLC-P-284. Dec 1994). Geneva, 1995. 130 p.
- 97 *L.G. Afanasev and A.V. Tarasov*. Passage of atoms formed by π^+ - and π^- -mesons through a matter. JINR Preprint, E4-95-344, Jul 1995. 15 p.
- 98 *A.B. Arbuzov, E.A. Kuraev, N.P. Merenkov, D.Yu. Peresunko, and A.V. Tarasov*. One spin asymmetries in pair production and bremsstrahlung processes // *Phys. Atom. Nucl.*, 59:841–847, 1996 [*Yad. Phys.*, 59 N5: 878–885, 1996].
- 99 *S.R. Gevorkian and A.V. Tarasov*. Hadronic part of photon-photon total cross-section in perturbative QCD // *Phys. Atom. Nucl.*, 59:501-504, 1996 [*Yad. Phys.*, 59 N3:529–532, 1996; JINR Preprint, E2-94-465, Dec 1994. 7 p.].
- 100 *L.G. Afanasev and A.V. Tarasov*. Breakup of relativistic $\pi^+\pi^-$ -atoms in matter // *Phys. Atom. Nucl.*, 59:2130-2136, 1996 [*Yad. Phys.*, 59:2212-2218, 1996; Proc. 3th Intern. Conf. on Nucleon – Anti-nucleon Physics (NAN’95), Moscow, Russia, 11–16 Sep 1995].
- 101 *F.W. Hersman, I. The, A. Tutein et al.* Study of the dd -dibaryon with dd -scattering // Proc. of the 3rd Intern. Sympos. “Dubna Deuteron-95”, Dubna, Jul 4–7, 1995. JINR, E2-96-100, p. 274–280, Dubna, 1996.
- 102 *O.O. Voskresenskaya, A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, and G.T. Torosian*. Expression for the Mott corrections to the Bethe–Bloch formula in terms of the Mott partial amplitudes // *JETP Lett.*, 64:648–651, 1996.

- 103 *О. Воскресенская, А. Сисакян, А. Тарасов, Г. Торосян.* Дисперсия, асимметрия и эксцесс энергетического распределения тяжелых ионов в борновском и моттовском приближениях. Препринт ОИЯИ, P2-96-436, нояб. 1996. 6 с.
- 104 *О.О. Воскресенская, А.Н. Сисакян, А.В. Тарасов, Г.Т. Торосян.* Теория эффекта Ландау–Померанчука для мишеней конечных размеров. Препринт ОИЯИ, P2-97-308, окт. 1997. 8 с.
- 105 *О.О. Voskresenskaya, S.R. Gevorkian, and A.V. Tarasov.* The total cross-sections for interaction of hydrogen-like atoms with the atoms of matter // *Phys. Atom. Nucl.*, 61:1517–1519, 1998 [*Yad. Phys.*, 61 N9:1628–1630, 1998].
- 106 *L.G. Afanasev, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya.* Sum rules for total cross sections of relativistic elementary atoms of matter up to terms of order α^2 // *Proc. Intern. Workshop “Hadronic Atoms and Positronium in the Standard Model”*, Dubna, May 26–31, 1998 (E2-98-254, Dubna, 1998), p. 139–141 [e-Print: hep-ph/9810250, Oct 1998. 3 p.].
- 107 *L.G. Afanasev, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya.* The eikonal approach to calculation of the multiphoton exchange contributions to the total cross sections of atom interaction with ordinary atoms // *Proc. Intern. Workshop “Hadronic Atoms and Positronium in the Standard Model”*, Dubna, May 26–31, 1998 (E2-98-254, Dubna, 1998), p. 142–144.
- 108 *I. Amirkhanov, I. Puzynin, A. Tarasov, O. Voskresenskaya, and O. Zeinalova.* The influence of strong interaction on the pionium wave functions at small distances // *Phys. Lett.*, B452:155–158, 1999 [*Proc. Intern. Workshop “Hadronic Atoms and Positronium in the Standard Model”*, Dubna, May 26–31, 1998 (E2-98-254, Dubna, 1998), p. 135–138; e-Print: hep-ph/9810251, Oct 1998. 4 p.].
- 109 *I. Amirkhanov, I. Puzynin, A. Tarasov, O. Voskresenskaya, and O. Zeinalova.* A method for research on behaviour of a dimesoatomic wave functions at small distances. JINR Preprint, E2-98-386, 1998 [e-Print: hep-ph/9812293, Dec 1998. 7 p.].
- 110 *S.R. Gevorkian, E.A. Kuraev, A. Schiller, V.G. Serbo, and A.V. Tarasov.* Production of relativistic positronium in collisions of photons and electrons with nuclei and atoms // *Phys. Rev.*, A58:4556–4564, 1998.
- 111 *B.Z. Kopeliovich, J. Raufeisen, and A.V. Tarasov.* Challenges of nuclear shadowing in DIS // *Phys. Lett.*, B440:151–156, 1998 [MPIH-V30-1998 Preprint, Jul 1998. 11 p.; e-Print: hep-ph/9807211, Jul 1998. 11 p.].
- 112 *B.Z. Kopeliovich, A.V. Tarasov, and A. Schafer.* Bremsstrahlung of a quark propagating through a nucleus // *Phys. Rev.*, C59:1609–1619, 1999 [e-Print: hep-ph/9808378, Aug 1998. 20 p.].
- 113 *J. Raufeisen, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya.* Nuclear shadowing in DIS at moderately small $x(B)$ // *Eur. Phys. J.*, A5:173–182, 1999 [e-Print: hep-ph/9812398, Dec 1998. 11 p.].
- 114 *L. Afanasyev, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya.* Total interaction cross sections of relativistic $\pi^+\pi^-$ -atoms with ordinary atoms in the eikonal approach // *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, 25:B7–B10, 1999.

- 115 *DIRAC Collaboration (A. Lanaro et al.)*. Detection of pionium with DIRAC // Proc. 8th Intern. Sympos. on Meson-Nucleon Physics and the Structure of the Nucleon (MENU 99), Zuz, Switzerland, 16–20 Aug 1999, PiN Newslett. 15:270–275, 1999 [arXiv:hep-ex/9912029, Dec 1999. 4 p.].
- 116 *DIRAC Collaboration (M. Pentia et al.)*. DIRAC experiment and test of low-energy QCD // Proc. Intern. Sympos. on Advances in Nuclear Physics, Bucharest, Romania, 9–10 Dec 1999 “Bukarest 1999, Advances in nuclear physics”, p. 407–416 [IFA-HEP-12-25, Dec 1999. 10 p.; arXiv:hep-ph/0001279, Jan 2000. 10 p.].
- 117 *L. Afanasyev, M. Jabitski, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya*. Calculation of the breakup probability of $\pi^+\pi^-$ -atom in a target with a high accuracy // Proc. Intern. Workshop on Hadronic Atoms “HadAtom99”, Bern, Oct 14–15, 1999 (BUTP-99/26, BUHE-99-08, Bern, 1999), p. 14 [arXiv:hep-ph/9911339, Nov 1999].
- 118 *A. Tarasov and O. Voskresenskaya*. Analytical approach to calculation of the $\pi^+\pi^-$ -atom production rate in different quantum states // Proc. Intern. Workshop on Hadronic Atoms “HadAtom99”, Bern, Oct 14–15, 1999 (BUTP-99/26, BUHE-99-08, Bern, 1999), p. 8 [arXiv:hep-ph/9911339, Nov 1999].
- 119 *B.Z. Kopeliovich, A. Schafer, and A.V. Tarasov*. Nonperturbative effects in gluon radiation and photoproduction of quark pairs // Phys. Rev., D62:054022, 2000 [e-Print: hep-ph/9908245, Aug 1999. 65 p.].
- 120 *B. Adeva et al.* First observation of πK -atom and its lifetime measurement. CERN-SPSC-2000-032, CERN-SPSC-P-284-ADD-1, Aug 2000. 74 p.
- 121 *P. Gianotti et al.* Test of chiral perturbation theory with DIRAC at CERN // Acta Phys. Polon., B31:2571–2579, 2000 [Prepared for Meson 2000 Workshop, Cracow, Poland, 19–23 May 2000].
- 122 *J. Hüfner, Yu.P. Ivanov, B.Z. Kopeliovich, and A.V. Tarasov*. Photoproduction of charmonia and total charmonium proton cross-sections // Phys. Rev., D62:094022, 2000 [e-Print: hep-ph/0007111, Jul, 2000. 32 p.].
- 123 *B.Z. Kopeliovich, J. Raufeisen, and A.V. Tarasov*. Nuclear shadowing and coherence length for longitudinal and transverse photons // Phys. Rev., C62:035204, 2000 [e-Print: hep-ph/0003136, Mar 2000. 31 p.].
- 124 *M.B. Johnson, B.Z. Kopeliovich, and A.V. Tarasov*. Broadening of transverse momentum of partons propagating through a medium // Phys. Rev., C63:035203, 2001 [e-Print: hep-ph/0006326, Jun 2000. 26 p.].
- 125 *B.Z. Kopeliovich and A.V. Tarasov*. The Coulomb phase revisited // Phys. Lett., B497:44–48, 2001 [e-Print: hep-ph/0010062, Oct 2001. 8 p.].
- 126 *B.Z. Kopeliovich, J. Raufeisen, and A.V. Tarasov*. The color dipole picture of the Drell–Yan process // Phys. Lett., B503:91–98, 2001 [e-Print: hep-ph/0012035, Dec 2000. 10 p.].
- 127 *B. Kopeliovich, A. Tarasov, and J. Hüfner*. Coherence phenomena in charmonium production off nuclei at the energies of RHIC and LHC // Nucl. Phys., A 696:669–714, 2001 [e-Print: hep-ph/0104256, Apr 2001. 50 p.].

- 128 *B.Z. Kopeliovich, J. Raufeisen, and A.V. Tarasov.* The Color dipole approach to the Drell-Yan process in pA collisions // LA-UR-01-1457 Preprint, Apr 2001. 6 p. Talk given at 36th Rencontres de Moriond on QCD and Hadronic Interactions, Les Arcs, France, 17–24 Mar 2001 [e-Print: hep-ph/0104155, Apr 2001. 6 p.].
- 129 *B.Z. Kopeliovich, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya.* Long range Coulomb forces in DIS: Missed radiative corrections? // Eur. Phys. J., A11:345–356, 2001.
- 130 *J. Hüfner, Yu. Ivanov, B. Kopeliovich, and A. Tarasov.* Photoproduction of charmonia // 29th Intern. Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations, Hirschegg, Austria, 14–20 Jan 2001, “Hirschegg 2001, Structure of hadrons”, p. 284–289.
- 131 *B.Z. Kopeliovich, J. Nemchik, A. Schafer, and A.V. Tarasov.* Color transparency versus quantum coherence in electroproduction of vector mesons off nuclei // Phys. Rev., C65:035201, 2002 [e-Print: hep-ph/0107227, Jul 2002. 57 p.].
- 132 *B. Kopeliovich, J. Raufeisen, A. Tarasov, and M. Johnson.* Nuclear effects in the Drell-Yan process at very high-energies // Phys. Rev., C67:014903, 2003 [LA-UR-01-5770 Preprint, Oct 2001. 44 p.; e-Print: hep-ph/0110221, Oct 2001].
- 133 *L. Afanasyev, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya.* Spectrum of pions from $\pi^+\pi^-$ -atom breakup (Born and Glauber approximations) // Proc. Intern. Workshop on Hadronic Atoms “HadAtom01”, Bern, October 11–12, 2001 (BUTP-2001/23, BUHE-2001-07, Bern, 2001), p. 7 [arXiv:hep-ph/0112293, Dec 2001].
- 134 *J. Hüfner, Yu. Ivanov, B. Kopeliovich, and A. Tarasov.* Photoproduction of charmonia and total charmonium proton cross sections // Workshop on Quark Matter in Astrophys. and Part. Phys., Rostock, Germany, 27–29 Nov 2000, “Rostock 2000/Trento 2001, Exploring quark matter”, p. 95–105 [arXiv:nucl-th/0111014, Nov 2001].
- 135 *DIRAC Collaboration (F. Gomez et al.)* Dirac experiment // Intern. Euroconf. in Quantum Chromodynamics: 15 Years of the QCD – Montpellier Conf. (QCD 00), Montpellier, France, 6–13 Jul 2000, “Montpellier 2000, Quantum chromodynamics”, p. 259–266.
- 136 *DIRAC Collaboration (A.M. Rodriguez Fernandez et al.)* The DIRAC experiment at CERN: Current status and future perspectives // 9th Intern. Sympos. on Meson-Nucleon Physics and the Structure of the Nucleon (MENU 2001), Washington, District of Columbia, 26–31 Jul 2001, PiN Newslett., 16:352–354, 2002.
- 137 *B.Z. Kopeliovich, J. Nemchik, A. Schafer, and A.V. Tarasov.* Cronin effect in hadron production off nuclei // Phys. Rev. Lett., 88:232303, 2002 [e-Print: hep-ph/0201010, Jan 2002. 4 p.].
- 138 *Yu.P. Ivanov, B.Z. Kopeliovich, A.V. Tarasov, and J. Hüfner.* Electroproduction of charmonia off nuclei // Phys. Rev., C66:024903, 2002.
- 139 *B.Z. Kopeliovich and A.V. Tarasov.* Gluon shadowing and heavy flavor production off nuclei // Nucl. Phys., A710:180–217, 2002 [NSF-ITP-02-40 Preprint, May 2002. 52 p.; e-Print: hep-ph/0205151, May 2002].

- 140 *L. Afanasyev, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya.* Contribution of α^2 -terms to the total interaction cross sections of relativistic elementary atoms with atoms of matter // *Phys. Rev.*, D65:096001-1 – 096001-5, 2002 [e-Print: hep-ph/0109208, Sep 2001].
- 141 *A. Tarasov and O. Voskresenskaya.* About the role of multiphoton exchanges in the dimesoatom's incoherent interaction with atoms of a medium // *Proc. Intern. Workshop on Hadronic Atoms "HadAtom 02"*, Geneva, 2002 (BUTP-2002/26, BUHE-2002-08), p. 32–33 [arXiv:hep-ph/0301266, Jan 2003].
- 142 *DIRAC Collaboration (L. Afanasev et al.)* Detection of atoms consisting of π^+ - and π^- -mesons at PS CERN // *AIP Conf. Proc.*, 619:745–748, 2002.
- 143 *B. Adeva, L. Afanasev, M. Benayoun et al.* Di-meson lifetime measurement with DIRAC // C02-05-24 Conference, p. 301–310, 2002.
- 144 *B.Z. Kopeliovich, J. Nemchik, A. Schafer, and A.V. Tarasov.* High-p(T) hadrons: From SPS via LHC to RHIC // 30th Intern. Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitation "Hirscheegg 2002, Ultrarelativistic heavy-ion collisions", Austria, p. 313–319.
- 145 *Yu.P. Ivanov, B.Z. Kopeliovich, A.V. Tarasov, and J. Hüfner.* Electroproduction of charmonia off protons and nuclei // 2nd Intern. Workshop on Hadron Physics: Effective Theories of Low-Energy QCD, Coimbra, Portugal, 25–29 Sep 2002, *AIP Conf. Proc.*, 660:283–295, 2003 ["Coimbra 2002, Effective theories of low energy QCD", p. 283–295; e-Print: hep-ph/0212322, Dec 2002. 13 p.].
- 146 *L. Afanasyev and A. Tarasov.* Moliere – scattering theory revisited // *Proc. Intern. Workshop on Hadronic Atoms, ECT-04-01, HISKP-TH-04/02, Trento, 2003*, p. 12 [ArXiv:hep-ph/0401204, Jan 2004].
- 147 *A. Tarasov and O. Voskresenskaya.* A quantum-kinetic treatment for internal dynamics of multilevel atomic systems moving through a target matter. e-Print: hep-ph/0301066, Mar 2003. 5 p.
- 148 *A. Tarasov and O. Voskresenskaya.* The quantum-mechanical treatment of pionium internal dynamics in matter // *Proc. Intern. Workshop on Hadronic Atoms, ECT-04-01, HISKP-TH-04/02, Trento, 2003*, p. 16. [e-Print: hep-ph/0401204, Jan 2004].
- 149 *L. Afanasyev, C. Santamarina, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya.* Dynamics of the pionium with density matrix formalism // *J. Phys.*, B37 N24:4749–4761, 2004 [e-Print: physics/0407110, Jul 2004. 14 p.].
- 150 *B. Adeva, L. Afanasyev, M. Benayoun et al.* Detection of $\pi^+\pi^-$ -atoms with the DIRAC spectrometer at CERN // *J. Phys.*, G30:1929–1946, 2004 [e-Print: arXiv:hep-ex/0409053, Sep 2004. 19 p.].
- 151 *B. Adeva, L. Afanasyev, M. Benayoun et al.* Lifetime measurement of $\pi^+\pi^-$ - and $\pi^\pm K^\mp$ -atoms to test low energy QCD. Addendum to the DIRAC proposal, 04/2004. 12 p.
- 152 *B. Adeva, L. Afanasyev, M. Benayoun et al.* DIRAC: a high resolution spectrometer for pionium detection // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.*, A515:467–496, 2004.

- 153 *A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, H.T. Torosyan, and O.O. Voskresenskaya.* The e^+e^- -pair production in relativistic ions collision and its correspondence to electron-ion scattering. JINR Preprint, E2-2004-192, Dec 2004. 5 p. [e-Prints: hep-ph/0412217, nucl-th/0408030, Aug 2004. 5 p.].
- 154 *A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, H.T. Torosyan, and O.O. Voskresenskaya.* The amplitude of lepton-pair production in relativistic ion collisions beyond the perturbative theory. e-Print: hep-ph/0504249, Apr 2005. 6 p.
- 155 *S. Bakmaev, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya.* Production of pioniums in the coherent nuclear-nuclear collisions // Proc. Intern. Workshop on Hadronic Atoms, Bern, 2005, p. 26 [arXiv:hep-ph/0508193, Aug 2005].
- 156 *S. Bakmaev, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya.* The unitarity correction to the Molière–Fano multiple scattering theory // Proc. Intern. Workshop on Hadronic Atoms, Bern, 2005, p. 25 [arXiv:hep-ph/0508193, Aug 2005].
- 157 *L. Afanasyev, A. Dudarev, O. Gorchakov et al.* The DIRAC experiment at CERN // Proc. Intern. Workshop on Hadronic Atoms, Bern, 2005, p. 7 [arXiv:hep-ph/0508193, Aug 2005].
- 158 *L. Afanasyev, A. Dudarev, O. Gorchakov et al.* DIRAC latest results // Proc. EXA05 Intern. Conf. on Exotic Atoms and related Topics, 2005, p. 155–164.
- 159 *B. Adeva, L. Afanasyev, M. Benayoun et al.* First measurement of $\pi^+\pi^-$ -atom lifetime // Phys. Lett., B619:50–60, 2005 [e-Print: hep-ex/0504044, May 2005].
- 160 *S.R. Gevorkyan and A.V. Tarasov.* Challenge of lepton pair production in peripheral collisions of relativistic ions. e-Print: hep-ph/0512098, Dec 2005. 9 p.
- 161 *B.Z. Kopeliovich, I.K. Potashnikova, I. Schmidt, and A.V. Tarasov.* Unusual features of Drell–Yan diffraction // Phys. Rev., D74:114024, 2006 [USM-TH-185 Preprint, May 2006. 16 p.; e-Print: hep-ph/0605157, May 2006. 16 p.].
- 162 *B.Z. Kopeliovich, I. Schmidt, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya.* Dipole description of inclusive particle production // J. Phys., G34:335, 2007 [USM-TH-196 Preprint, Oct 2006. 11 p.; e-Print: hep-ph/0610041, Oct 2006].
- 163 *S.R. Gevorkyan, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya.* Electromagnetic effects in the $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^0$ decay. e-Print: hep-ph/0612129, Dec 2006. 5 p.
- 164 *O.O. Voskresenskaya, A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, and G.T. Torosian.* Watson representation for the amplitude of lepton-pair production in nucleus-nucleus collisions // Phys. Part. Nucl. Lett., 3:246–248, 2006 [Pisma Fiz. Elem. Chast. Atom. Yadra, 3:43–47, 2006].
- 165 *B.Z. Kopeliovich, I.K. Potashnikova, I. Schmidt, and A.V. Tarasov.* Diffractive excitation of heavy flavors: Leading twist mechanisms // Phys. Rev., D76:034019, 2007 [e-Print: hep-ph/0702106, Feb 2007. 19 p.].
- 166 *E. Pozdeeva and A. Tarasov.* Darboux transformation of boundary conditions of regular Dirac Sturm–Liouville problem. e-Print: arXiv:0711.1675 [hep-th], Nov 2007. 6 p.

- 167 S.R. Gevorkyan, D.T. Madigozhin, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya. Electromagnetic effects and scattering lengths extraction from experimental data on $K \rightarrow 3\pi$ decays // Phys. Part. Nucl. Lett., 5:85–87, 2008 [e-Print: arXiv:0702154 [hep-ph], Feb 2007. 5 p.].
- 168 O.O. Voskresenskaya, A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, and G.T. Torosian. The structure of the $Z_1 Z_2 \rightarrow l^+ l^- Z_1 Z_2$ amplitude process outside the Born approximation framework // Phys. Part. Nucl. Lett., 4:18-21, 2007 [Pisma Fiz. Elem. Chast. Atom. Yadra, 4:36–41, 2007; JINR, P2-2005-194, Dec 2005. 8 p.].
- 169 S.R. Gevorkian, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya. Electromagnetic corrections to final state interactions in $K \rightarrow 3\pi$ decays // Phys. Lett., B649:159–161, 2007.
- 170 S.R. Gevorkyan, A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, H.T. Torosyan, and O.O. Voskresenskaya. The impact of isospin breaking effects on the scattering lengths extracted from the K_{e4} -decay. e-Print: arXiv:0711.4618 [hep-ph], Nov 2007. 9 p.
- 171 L.S. Azhgirey, Yu.V. Gurchin, A.Yu. Isupov et al. Observation of spin alignment of deuterons traveling through matter // Proc. Advanced Research Workshop on High Energy Spin Physics (DSPIN-07), Dubna, JINR, 2008, V.1, p. 205–210.
- 172 L. Afanasyev, A. Dudarev, O. Gorchakov et al. Measurement of the pionium lifetime // Proc. 34th Intern. Conf. on High Energy Physics (ICHEP 2008), Princeton Univ. and the Univ. of Pennsylvania, IUPAP, Philadelphia, USA. <http://arxiv.org/abs/0809.4963>.
- 173 L. Azhgirey, Yu. Gurchin, A. Isupov et al. Observation of tensor polarization of deuteron beam traveling through matter // Phys. Part. Nucl. Lett., 5 N5:432–436, 2008.
- 174 L. Azhgirey and A.V. Tarasov. Calculation of spin alignment of deuterons traveling through matter // Phys. Part. Nucl. Lett., 5 N5:714–719, 2008.
- 175 B.Z. Kopeliovich, H.-J. Pirner, I.K. Potashnikova, I. Schmidt, and A.V. Tarasov. Perturbative fragmentation // Phys. Rev., D77:054004, 2008 [e-Print: arXiv:0801.0251 [hep-ph], Jan 2008. 10 p.].
- 176 B.Z. Kopeliovich, H.-J. Pirner, I.K. Potashnikova, I. Schmidt, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya. Quantum-mechanical description of in-medium fragmentation // Phys. Rev., C78:055204, 2008.
- 177 S.R. Gevorkyan, A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, H.T. Torosyan, and O.O. Voskresenskaya. The electromagnetic effects in K_{e4} -decays // Phys. Atom. Nucl., 73:937, 2010 [Yad. Fiz., 73 N1:135–142, 2010; JINR Preprint, E2-2008-201, Dubna, 2008].
- 178 S.R. Gevorkyan, A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, H.T. Torosyan, and O.O. Voskresenskaya. The isospin symmetry breaking effects in K_{e4} -decays // Phys. Atom. Nucl., 73:961, 2010 [Yad. Fiz., 73 N1:125–134, 2010].
- 179 S.R. Gevorkyan, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya. Final state interaction in kaons decays // Eur. Phys. J., 67:143–147, 2010 [e-Print: arXiv:0910.3904 [hep-ph], Oct 2009. 8 p.].

- 180 *L. Afanasyev, A. Dudarev, O. Gorchakov et al.* Evidence for πK -atoms with DIRAC // Phys. Lett., B674 N1:11–16, 2010.
- 181 *S.R. Gevorkyan, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya.* Formation of $\pi\mu$ -atoms in $K_{\mu 4}$ -decay // Phys. Lett., B688:192–194, 2010. [e-Print: arXiv:0912.4950 [hep-ph], Dec 2009. 9 p.].
- 182 *S.R. Gevorkyan, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya.* Final state interaction of pions in kaon decays // Proc. Intern. Conf. “New trends in high-energy physics (experiment, phenomenology, theory)”, Alushta, Crimea, Ukraine, Sept 3 – 10, 2011 [Proc. XV Intern. Conf. “Symmetry methods in physics”, Dubna, Jul 12–16, 2011].
- 183 *A. Tarasov and O. Voskresenskaya.* An improvement of the Molière–Fano multiple scattering theory. e-Print: ArXiv:1107.5018 [hep-ph] v2, Jun 2012. 27 p.
- 184 *A. Tarasov and O. Voskresenskaya.* A full Glauber theory for elementary atom – target atom scattering and its approximations. e-Print: arXiv:1108.4151 [hep-ph], Aug 2011. 12 p.
- 185 *B. Adeva, L. Afanasyev, M. Benayoun et al.* Determination of scattering lengths from measurement of $\pi^+\pi^-$ -atom lifetime // Phys. Lett., B704: 24, 2011 [arXiv:1109.0569 [hep-ex], Sep 2011. 6 p.].
- 186 *A. Tarasov, H.T. Torosyan, and O. Voskresenskaya.* A quasiclassical approximation in the theory of the Landau–Pomeranchuk effect. e-Print: ArXiv: 1203.4853 [hep-ph], Mar 2012. 9 p.
- 187 *A. Tarasov and O. Voskresenskaya.* Molière multiple scattering theory revisited. e-Print: ArXiv:1204.3675 [hep-ph], Apr 2012. 17 p.

СОДЕРЖАНИЕ

От составителей	3
-----------------------	---

ВОСПОМИНАНИЯ УЧЕНИКОВ И КОЛЛЕГ

<i>С.Р. Геворкян</i> Памяти Учителя	4
<i>Г.И. Лыкасов</i> Об А.В. Тарасове	7
<i>А.С. Пак</i> Физик Божьей милостью	8
<i>Л.Л. Неменов</i> А.В. Тарасов и физика релятивистских атомов	11
<i>Л.Г. Афанасьев</i> Работа с Александром Васильевичем Тарасовым	12
<i>Б.З. Копелиович</i> Воспоминания о Саше	14
<i>О.О. Воскресенская</i> Краткий очерк жизни и деятельности Александра Тарасова	16

ВОСПОМИНАНИЯ ДРУЗЕЙ И РОДНЫХ

<i>Г.Л. Бочек</i> Студенческий период	25
<i>Л.Г. Ткачев</i> А.В. Тарасов: несколько эпизодов промелькнувшей жизни	28
<i>Б.М. Старченко</i> Друг и напарник	31
<i>Е.С. Кузьмин</i> Памяти друга	32
<i>С.С. Шиманский</i> “Большой человек” — рыцарь науки	33
<i>Э.А. Кураев</i> Александр Васильевич Тарасов	34
<i>В.А. Теперин</i> Памяти Александра	35
<i>Вера Тарасова</i> Мой дедушка	36
<i>Ю.П. Иванов</i> О Саше	37

<i>Герхард и Ирмтрауд Веферинг</i> Замечательная дружба	38
<i>Д.В. Антонов</i> Остывающая Вселенная	39
<i>М.Н. Мнатцаканова, Ю.С. Вернов</i> Недолгая дружба	40
<i>К.О. Поздеева</i> Последняя ученица	41
<i>Т.В. Ведерникова</i> О Саше Тарасове	42

ИЗБРАННЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

<i>А.В. Тарасов</i> Когерентное и некогерентное рождение частиц на атомных ядрах в теории многократного рассеяния	45
<i>L.G. Afanasyev and A.V. Tarasov</i> Elastic form factors of hydrogenlike atoms in nS -states	90
<i>L.G. Afanasyev and A.V. Tarasov</i> Breakup of relativistic $\pi^+\pi^-$ atoms in matter	94
<i>О.О. Воскресенская, С.Р. Геворкян и А.В. Тарасов</i> Полные сечения взаимодействия водородоподобных атомов с атомами вещества	106
<i>B.Z. Kopeliovich, J. Raufeisen, and A.V. Tarasov</i> Challenges of nuclear shadowing in DIS	110
<i>L. Afanasyev, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya</i> Total interaction cross sections of relativistic $\pi^+\pi^-$ -atoms with ordinary atoms in the eikonal approach	118
<i>B.Z. Kopeliovich, A. Schäfer, and A.V. Tarasov</i> Bremsstrahlung of a Quark Propagating through a Nucleus	124
<i>B.Z. Kopeliovich, A. Schäfer, and A.V. Tarasov</i> Nonperturbative Effects in Gluon Radiation and Photoproduction of Quark Pairs	145
<i>B.Z. Kopeliovich, J. Nemchik, A. Schäfer, and A.V. Tarasov</i> Cronin Effect in Hadron Production off Nuclei	199
<i>L. Afanasyev, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya</i> Contribution of α^2 -terms to the total interaction cross sections of relativistic elementary atoms with atoms of matter	207
<i>A. Tarasov and O. Voskresenskaya</i> A quantum-kinetic treatment for internal dynamics of multilevel atomic systems moving through a target matter	216

<i>L. Afanasyev, C. Santamarina, A. Tarasov, and O. Voskresenskaya</i> Dynamics of the Pionium with the Density Matrix Formalism	221
<i>S.R. Gevorkyan and A.V. Tarasov</i> Lepton pairs production in peripheral collisions of relativistic ions and the problem of regularization	234
<i>S.R. Gevorkyan, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya</i> Electromagnetic corrections to final state interactions in $K \rightarrow 3\pi$ decays	241
<i>O.O. Воскресенская, А.Н. Сисакян, А.В. Тарасов и Г.Т. Торосян</i> Структура амплитуды процесса $Z_1 Z_2 \rightarrow l^+ l^- Z_1 Z_2$ вне рамок борновского приближения	247
<i>S.R. Gevorkyan, A.N. Sissakian, A.V. Tarasov, H.T. Torosyan, and O.O. Voskresenskaya</i> The isospin-symmetry-breaking effects in K_{e4} decays.....	253
<i>S.R. Gevorkyan, A.V. Tarasov, and O.O. Voskresenskaya</i> Formation of $\pi\mu$ atoms in $K_{\mu 4}$ decay	260
<i>A. Tarasov and O. Voskresenskaya</i> A complete version of the Glauber theory for elementary atom - target atom scattering and its approximations	266
<i>A. Tarasov and O. Voskresenskaya</i> An improvement of the Molière—Fano multiple scattering theory.....	276
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ А.В. ТАРАСОВА.....	298

Научное издание

Александр Васильевич Тарасов

К 70-летию со дня рождения

Редактор *А. И. Петровская*

Компьютерная верстка *Л. Г. Афанасьева*

Подписано в печать 30.10.2012

Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 25,3. Уч.-изд. л. 30,3. Тираж 130 экз. Заказ № 57813.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/