

СЗГ
Ф-356



**Владимир Константинович
ФЕДЯНИН**

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

с 3 г
Ф-356

Владимир Константинович
Федянин

К 60-летию со дня рождения

741392

Дубна 1995
Объединенный институт
ядерных исследований
ИЯИ

Краткий очерк научной деятельности

*"Умоляю вас, братья,
остерегайтесь производящих разделение и соблазны...
Ибо такие люди служат своему чреву, и ласкательством,
и красноречием обольщают сердца простых душ."*

Св. апостол Павел
Первое послание к коринфянамъ.
(Извлечения)

В Лабораторию теоретической физики Владимир Константинович был приглашен весной 1974 года Н.Н.Боголюбовым и с тех пор является постоянным сотрудником ЛТФ. На время работы в ЛТФ приходится весьма плодотворный период научной деятельности В.К.Федянина. Однако и к тому времени Владимир Константинович уже был зрелым ученым, имеющим научные результаты мирового уровня.

Свой путь в науку В.К.Федянин начал в 1959 году будучи аспирантом Н.Н.Боголюбова в МИАН им. В.А.Стеклова. В период с 1959 по 1962 гг. В.К.Федяниным были получены первые существенные результаты - построена релятивистская кинематика процессов с двумя фотонами и на основе дисперсионных соотношений по одной переменной выведены точные уравнения для релятивистских амплитуд комптон-эффекта на нуклонах. Следует отметить, что в то время подобного рода программа была реализована только для мезон-нуклонного рассеяния и фоторождения Чу, Лоу, Гольдбергером и Намбу в 1956 г. Используя эти уравнения и экспериментальные данные по фоторождению до порога рождения ρ -мезона, В.К.Федянин получил численные значения "поляризуемостей протона $\alpha_i, \beta_i (i = 0, 1)$ ". Величина электрической и магнитной поляризуемости $\alpha_0 = 71,71 \cdot 10^{-44} \text{см}^3$, $\beta_0 = 6,95 \cdot 10^{-44} \text{см}^3$ были экспериментально измерены Барановым П. и др. (Батавия, США, 1973). Две другие поляризуемости, полученные В.К.Федяниным в 1962 году, $\alpha_1 = 10,43 \cdot 10^{-44} \text{см}^3$, $\beta_1 = -6,95 \cdot 10^{-44} \text{см}^3$, связанные с высшими распределениями заряда и магнитного момента, должны измеряться в поляризационных экспериментах, не проведенных до сих пор. Этот цикл исследований В.К.Федянина стал предметом его кандидатской диссертации (1962г.). В нем по существу впервые

намечен и количественно оформлен на примере протона путь теоретического исследования электромагнитной структуры адронов.

В 1967 году совместно с С.В.Тябликовым В.К.Федяниным была получена точная система алгебраических уравнений для корреляционных функций в модели Изинга (идеальных и примесных систем). Неравенства и аппроксимационные схемы получения приближенных выражений для корреляционных функций, основанные на этих уравнениях были положены в основу расчета равновесных и неравновесных характеристик магнетиков, адсорбции и абсорбции, упорядочивающихся сплавов и расслаивающихся смесей, дифракции медленных электронов поверхностью (LEED), жидкостей. Эта программа была реализована в 1968-1976 годах. В рамках подхода, развитого В.К.Федяниным, удалось объяснить многие черты данного круга физических явлений, выявленных экспериментально в конденсированном состоянии вещества, и предсказать новые особенности в поведении ряда физических характеристик. Существенно, что аппроксимации, сформулированные В.К.Федяниным, на языке корреляционных функций (равновесных средних) намного более обоснованы и допускают физически разумное объяснение, нежели процедуры расщеплений функций Грина. (Для последних они являются, по существу, предположениями об их аналитической структуре, как функций комплексных переменных). Так В.К.Федяниным показано, что известное суперпозиционное приближение Бете-Пайерлса-Гуггенгейма (для жидкости Кирквуда-Зальцбурга) для высших функций распределения через парную, точно удовлетворяет системе уравнений Тябликова-Федянина (подосновой для этой аппроксимации является требование марковости для соответствующих условных вероятностей). Следует отметить, что на основе оригинальных исследований В.К.Федянина и его ученика А.Е.Мозолькова посвященных проблеме LEED, в 1982 году написана единственная в мире монография "Дифракция медленных электронов поверхностью". Большая часть результатов данных исследований Владимира Константиновича вошла в его докторскую диссертацию (1973г.).

В 1972 году В.К.Федяниным предложен совершенно новый подход к кинетике сорбции. В основу его положено представление о переходном состоянии (активированном комплексе), как о примеси в системе многих взаимодействующих частиц. На основе полученных здесь результатов были количественно проанализированы сорбция, самодиффузия, вязкость, влияние сорбции на процессы переноса. Исследования в этой области привлекают внимание Владимира Константиновича и в настоящее время. Так, в работах В.К.Федянина 1992-1994 годов, количественно проанализировано влияние активной поверхности на концентрацию сорбируемого компонента в потоке. Поскольку учет влияния активной поверхности приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений (даже в линейном для уравнений переноса приближении), то возможны различные режимы: "плавное" тече-

ние, концентрационных волн и, при определенных предположениях о взаимодействии адатомов, странный аттрактор (не исключен и хаотический режим). А в цикле работ 1985-1994 годов на базе модифицированных модельных гамильтонианов, полученных из "первых" принципов при учете межэлектронных корреляций, В.К.Федяниным и его учениками рассчитаны все основные характеристики электронной подсистемы адсорбат-адсорбент (конкретно рассматривался водород на переходных металлах). Результаты этих исследований обосновали основные предположения подхода В.К.Федянина, который, таким образом, приобрел статус достаточно простой, конструктивной теории. Цикл исследований В.К.Федянина и его учеников по межэлектронным корреляциям в хемосорбции (1975-1990г.) был в 1990 году отмечен премией ОИЯИ.

С 1977 года В.К.Федянин выполнил во многом пионерские исследования по динамике частицеподобных возбуждений в квазиодномерных моделях теории конденсированного состояния, каналировании, прохождении поляризованного излучения в многослойных структурах планарной, сферической и цилиндрической геометрии, описываемых решениями нелинейных эволюционных уравнений. Результаты, полученные здесь В.К.Федяниным и его учениками для магнетиков, α -спирали, $(CH)_x$, АВ-полимеров, молекуле ДНК, каналированию позитронов в АВ-кристаллах, оптической бистабильности имели большой резонанс и у нас, и за рубежом. По ней В.К.Федяниным и его коллегами опубликовано несколько обзоров и большие циклы статей. Около 10 учеников В.К.Федянина защитили по ней кандидатские диссертации. Исследования эти были широко представлены докладами на Всесоюзных и Международных конференциях в 1982-1994 гг., среди которых заметное место занимают и конференции по нелинейным эволюционным уравнениям и использованию их решений для описания ситуации в физике конденсированного состояния, проводимые при участии ОИЯИ в 1985-1992 гг.

Используя подход Боголюбова по стохастизации поведения малой подсистемы в термостате В.К.Федянин и его ученик Г.М.Гавриленко построили оригинальную теорию каналирования легких частиц (e^\pm, μ^\pm) в кристаллах. Ими была объяснена термолизация пучка позитронов с энергиями ~ 10 Гэв при каналировании в германии и кремнии, незадолго до этого наблюдаемая в опытах Цыганова Э.И. и др. в Батавии (США), и предсказано излучение на двух частотах при каналировании e^+ в бинарных кристаллах (NaCl, KBr и т.п.) (1982г.). Это предсказание было экспериментально подтверждено Пантеллом (1983г., Стэнфорд, США). В работах В.К.Федянина и его ученика Д.Михалаке (Румыния) было предсказано явление оптической бистабильности в планарных структурах с нелинейным элементом: появление окон "непрозрачности" при изменении мощности луча лазера, пропускаемого через пластину с нелинейными свойствами. На этих результатах, вызвавших большой международный резонанс, основывается цикл исследований по

созданию нового поколения компьютеров коллаборацией IBM (США), ведущихся с 1985 г. Эта тема получила продолжение в 1985-1994 годах в работах В.К.Федянина с Л.А.Уваровой (Тверь), где исследовались явления в нелинейных структурах различной геометрии с тепловым режимом типа "обострения".

В классической задаче о поляроне В.К.Федянин совместно со своим учеником К.Родригесом получил температурную зависимость эффективной массы полярона и энергии основного состояния во всем интервале констант связи и температур T , $M(\alpha, T)$, $E_0(\alpha, T)$ (1982г.). Соответствующие формулы при $T \rightarrow 0$ и для $\alpha \leq 1$ прекрасно описали эксперименты в ионных кристаллах по $M(\alpha, T)$. Особенно детально они были проверены Иглетисом (Австралия) в 1984 году. Надо сказать, что большинство теоретических расчетов, проведенных и в СНГ и за рубежом, предсказывали уменьшение $M(\alpha \leq 1, T \rightarrow 0)$. Результаты В.К.Федянина и К.Родригеса привели к обратной ситуации - полярон "тяжелел" по вполне определенному закону. Эти результаты также вызвали большой резонанс во всем мировом сообществе, занимающемся проблемой полярона, и являются теперь общепризнанными. Цикл статей, включающий эти исследования, был удостоен первой премии ОИЯИ за 1982 год.

В.К.Федянин в своих исследованиях и в совместных исследованиях со своими учениками начиная с 1977 года стал одним из первых в мире систематически использовать солитонные решения нелинейных дифференциальных уравнений в моделях теории конденсированного состояния пространства (1+1) для интерпретации их равновесных и неравновесных характеристик на языке газа частицеподобных возбуждений. Им предложен оригинальный подход к вычислению основных термодинамических и динамических характеристик. В этих исследованиях была детально изучена ситуация в квазиодномерных магнетиках ($CsNiF_3$, $RbFeCl_3$ и др.), в Гейзенберговском магнетике, CH_x , α -спирали, АВ-полимерах, полиенах, молекуле ДНК и др. (1977-1993 гг.). Для систем с экситон-фононным взаимодействием и модели Хаббарда были получены новые классы нелинейных уравнений с совершенно необычными свойствами солитонных решений. Количественно исследованный и предсказанный В.К.Федяниным, В.Г.Маханьковым и В.Лиси вклад бризеров для $CsNiF_3$ (1982г.) был выделен в экспериментах по рассеянию нейтронов: (Кеймс, Штейнер, Какури, 1983г.).

Владимир Константинович много сил отдает работе с молодыми, начинающими исследователями. Под руководством В.К.Федянина с 1972 года защищено свыше сорока дипломных работ, двадцать кандидатских диссертаций. Шесть его учеников защитили докторские диссертации. Профессор Федянин много сил отдает преподавательской работе, читая лекции; последовательно в МГУ, МИРЭА (Дубна), ТГУ. В Тверском государственном университете В.К.Федянин работает начиная с 1986 года и до сих пор, на созданном им филиале кафедры методов математической

физики при ОИЯИ. Его приглашали для чтения лекций в университеты городов Тарту, Ярославль, Одесса. В.К.Федянина неоднократно приглашали оппонировать по докторским и кандидатским диссертациям, посвященным исследованиям по вышеочерченной тематике.

Следует отметить большой научно-организационный вклад В.К.Федянина. Владимир Константинович участвовал во многих научных конференциях СНГ и за рубежом. Он стоял у истоков организации серии международных научных конференций, проводимых ОИЯИ: конференции по статистической механике (1977-1989гг.), "Солитоны и приложения" (1986-1989гг.), NEEDS (1990,1992). В.К.Федянин участвовал в них и как председатель, и как докладчик, и как редактор трудов конференции. В конференциях приняли участие не только практически все ведущие, активно работающие по тематикам конференций исследователи СНГ, но и стран Америки, Европы, Азии. Хотелось бы также отметить его большой вклад в работу Санкт-Петербургского отделения Всероссийского Менделеевского Общества, на конференциях и семинарах которого он неоднократно выступал с приглашенными докладами.

Владимир Константинович Федянин хорошо известен в научных кругах. Известен как крупный физик-теоретик, внесший значительный, зачастую пионерский вклад в теорию элементарных частиц, теорию конденсированного состояния, теоретические аспекты химической физики и физической химии, биофизики. Для научного стиля В.К.Федянина характерно то, что на базе твердо установленных экспериментальных фактов строится теоретическая модель рассматриваемого явления, (как правило, на уровне модельного гамильтониана), которая затем используется (с применением апробированных теоретических подходов и современных методов математической физики) для объяснения поведения имеющих экспериментальных данных на максимально широком классе реально исследуемых систем, вписывающихся в данную модель, уточнения поведения физико-химических характеристик и предсказания новых черт их поведения при варьировании условий эксперимента. Очерченный выше круг исследований В.К.Федянина, его научно-организационная деятельность свидетельствуют, что Владимир Константинович Федянин является ученым мирового уровня, разносторонним физиком-теоретиком, достойно представляющим Лабораторию теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова. В.К.Федянин внес значительный вклад в те области теоретической физики, которые были предметом его исследований. Научный потенциал его высок, и он, безусловно, еще много сделает в процессе своих дальнейших исследований.

**Список избранных научных работ
Федянина Владимира Константиновича**

Статьи

1. Частицы. Поля. Математическая физика

- Радиационные поправки в дисперсионных соотношениях для $(\pi N) \rightarrow (\pi' N')$. ЖЭТФ, 33, вып.5(11), 1957, с.1301-1303.
- Приближенные уравнения для амплитуды рассеяния фотонов на нуклонах. ДАН, 119, вып.4, 1958, с. 690-693. (совместно с А.Н.Тавхелидзе).
- Дисперсионные соотношения для комптон-эффекта на нуклонах. ДАН, 140, вып.2, 1961, с. 347-350.
- Комптон-эффект на протоне в дипольном приближении. ЖЭТФ, 42, вып.4, 1962, с.1038-1046.
- Применение дисперсионных соотношений к комптон-эффекту на протоне. ЖЭТФ, 44, вып.2, 1963, с. 633-648.
- Зависимость между некоторыми электро-энцефальграфическими показателями и ее значение в оценке тяжести повреждений мозга при оживлении после прекращения кровообращения. Паталогическая физиология и экспериментальная терапия АМН СССР, 1972, с.8. (совместно с А.М.Гурвич и Е.А.Мутускиной).
- Аппроксимация спектральной плотности в модели Андерсона. ТМФ, 25, вып.1, 1975, с. 80-86. (совместно с Г.М.Гавриленко).
- Асимптотически точные методы в зонной теории ферромагнетизма. ТМФ, 23, вып.3, 1975, с.419-424. (совместно с Б.В.Мощинским).
- Асимптотика модели Гейзенберга с дальним действием. ТМФ, 31, 1977, с.101-106. (совместно с Б.В.Мощинским).
- Асимптотика модели Дикке. ТМФ, 32, 1977, с. 96-101. (совместно с Б.В.Мощинским).
- К вопросу об экситон-фононном взаимодействии в молекулярных кристаллах. Линейное приближение. ТМФ, 30, 1977, с.133-138. (совместно с Л.В.Якушевич).

- Элементарные возбуждения в одномерных системах с резонансным взаимодействием. ТМФ, 37, 1978, с.371-382. (совместно с Л.В.Якушевич).
- Exciton-Phonon Interaction in Long-Wave Approximation. Phys.Lett., 61A, 1977, p.256-258. (совместно с В.Г.Маханьковым и Л.В.Якушевич).
- Солитоноподобные решения уравнений, описывающих возбуждения в одномерных молекулярных кристаллах. ДАН, 236, 1977, с.838-841. (совместно с В.Г.Маханьковым).
- Soliton-Like Solution of S3-Equation with Resonant Interaction. Phys.Lett., 68A, 1978, p.169-173. (совместно с В.Г.Маханьковым).
- Новый вид коллективных частицеподобных возбуждений в одномерных системах с резонансным взаимодействием. ТМФ, 39, 1979, с.381-392. (совместно с В.Г.Маханьковым).
- Soliton-Like Solutions in One-Dimensional Systems With Resonant Interaction. Physica Scripta, 20, 1979, p.552-557. (совместно с В.Г.Маханьковым).
- Solitons in a One-Dimensional Modified Hubbard Model. phys.stat.sol.(b), 89, 1978, p.123-129. (совместно с У.Линднер).
- Solitary Solutions in a Modified Hubbard Chain. Phys.stat.sol.(b), 95, 1979, p.K83-K85. (совместно с У.Линднер).
- Частицеподобные возбуждения в системах, описываемых моделью Хаббарда без условия киральности. ТМФ, 46, 1981, с.86-90.
- Солитонные возбуждения в модели полярона большого радиуса. ТМФ, 35, 1978, с.240-245. (совместно с В.Ю.Юшанхаем).
- One-Dimensional Anisotropic Magnet in the Long-Wavelength Approximation. Phys.Lett., 70A, 1979, p.459-461. (совместно с В.Ю.Юшанхаем).
- Солитонный вклад в динамический структурный фактор неаксиального ферромагнетика. ФНТ, 7, 1981, с.176-180. (совместно с В.Ю.Юшанхаем).
- Neutron Scattering on Solitons in the Quasi-One-Dimensional Systems. Physica 120, 3, 1983, p.255
- Производящий функционал и функциональный аналог вариационного принципа Н.Н.Боголюбова. ТМФ, 45, 1980, с.251-280. (совместно с Б.В.Мощинским и К.Родригесом).

- Коноидальные волны в модели ϕ^4 с самодействием токов. ТМФ, 54, 1982, с.469-476. (совместно с В.Е.Гришиным).
- Интегрирование модели ϕ^4 в эллиптических функциях Якоби и исследование их методом фазовой плоскости. ТМФ, 59, 1984, с.440-452. (совместно с В.Е.Гришиным).
- "Spectrum" of Special Solutions for a Complex Field Massive Model of Born-Infeld Type. JINR Rapid Comm., N 10, p.36-44, Dubna, 1985. (совместно с В.Е.Гришиным).
- Fractional Charges at Finite Temperature and Chemical Potential. Sol.St.Comm. 59, 1986, p.629-631. (совместно с В.А.Осиповым).
- Эффекты, обусловленные конечными значениями температуры и химического потенциала, в некоторых двумерных полевых моделях. ТМФ, 73, 1987, с.393-401. (совместно с В.А.Осиповым).
- Finite-Band Continuum Scheme for Solitons in Linear Polymers. In "Soliton and Applications", World Scientific, 1990, p.345-355. Ed. Makhankov V.G., Fedyanin V.K., Pashaev O.K. (совместно с В.А.Осиповым).
- Вклад бионов в равновесные и динамические характеристики в квазиодномерных системах. ФНТ, 11, 1985, с.305-314. (совместно с В.Лисы).
- Неравенство Н.Н.Боголюбова в моделях статистической механики. Proc. of Steklov Inst. of Math., Issue 2, 1978, p.415-425. (совместно с Б.И.Садовниковым).
- Квантование электромагнитного поля при учете его взаимодействия и поля материи. Изд-во УДН, "Дискуссионные вопросы квантовой физики" (Сборник памяти В.В. Курышкина), 1993, с. 133-147. (совместно с В.Б. Роганковым).

2. Модель Изинга

- Метод корреляционных функций в модели Изинга. ФММ, 23, 1967, с.193-199. (совместно с С.В.Тябликовым).
- Примеси в задаче Изинга. ФММ, 23, 1967, с.205-212. (совместно с С.В.Тябликовым).
- Влияние примесей на температуру Кюри в магнитной задаче Изинга. ФММ, 26, 1968, с.589-594. (совместно с С.В.Тябликовым).
- О расцеплении корреляций в модели Изинга. ФММ, 26, 1968, с.968-972.

- К вопросу о получении неравенств для корреляционных функций в модели Изинга. ФММ, 28, 1969, с.217-222.
- The use of Bogolubov Inequalities in the Ising Model. Phys.Lett., 29A, 1969, p.40.
- О критических индексах в модели Изинга. ТМФ, 7, 1971, с.241-249.
- An Inequality for the Heat Capacity by Constant Magnetization in the Ising Model. Phys.Lett. 34A, 1971, p.323-324.
- Спин-фононное взаимодействие в модели Изинга. ТМФ, 10, 1972, с.127-139. (совместно с В.А.Загребновым).
- Расщепление корреляций в модели Изинга. Плоская гексагональная решетка. ТМФ, 24, 1975, с.129-136. (совместно с Ю.К.Товбиным).

3. Поверхностные явления

- Об одной задаче теории упругости. ДАН, 164, 1968, с.1253-1256.
- Оценка неоднородности концентрации в бинарных сплавах. КК, 9, 1968, с.205-206.
- К вопросу о теплоте абсорбции при учете взаимодействия между молекулами I. КК, 10, 1969, с.1391-1392,
- К вопросу о теплоте абсорбции при учете взаимодействия между молекулами II. КК, 12, 1971, с.1353-1355.
- Учет взаимодействия между молекулами в задачах абсорбции и адсорбции. ЖФХ, 44, 1970, с.495-503.
- Учет взаимодействия между молекулами в задачах абсорбции и адсорбции II. Диссоциация на адатомы, эффекты межэлектронного взаимодействия. ЖФХ, 45, 1971, с.2867-2875.
- Учет взаимодействия между молекулами в задачах абсорбции и адсорбции III. Абсорбция кислорода на переходных металлах и золоте. ЖФХ, 46, 1972, с.119-127.
- Об эффективном взаимодействии между адатомами. ЖФХ, 48, 1974, с.1287-1295.
- Хемосорбция взаимодействующих молекул при взаимодействии между молекулами и топохимическими примесями. ДАН, 119, 1971, с.156-158.

- К электронной теории тонких металлических пленок. ФММ, 30, 1970, с.713-721. (совместно с С.Ф.Тимашевым).
- К модели поверхностного электронного газа М.И.Темкина. ДАН, 191, 1970, с.6. (совместно с С.Ф.Тимашевым).
- К вопросу о динамическом экранировании в металлической пленке. ФТТ, 13, 1971, с.1196-1198. (совместно с С.Ф.Тимашевым).
- Равновесные характеристики хемосорбции при учете взаимодействия между молекулами. КК, 13, 1972, с.1018-1081. (совместно с Ю.К.Товбиным).
- О логарифмической изотерме при учете взаимодействия между адатомами. КК, 25, 1974, с.524-527. (совместно с Ю.К.Товбиным).
- Учет взаимодействия между молекулами в задачах абсорбции и адсорбции IV. Притяжение между атомами. ЖФХ, 47, 1973, с.2886-2894. (совместно с Ю.К.Товбиным).
- Влияние структурного фактора и коллективизации электронов на равновесные характеристики адсорбции. ЖФХ, 50, 1976, с.209-213. (совместно с Ю.К.Товбиным).
- Хемосорбция в системах барий и калий на вольфраме при взаимодействии между адатомами. ФТТ, 17, 1975, с.1511-1515. (совместно с Ю.К.Товбиным).
- Фраунгоферова диффракция медленных электронов в модели решеточного газа. ДАН, 219, 1974, с.393-396. (совместно с А.Е.Мозольковым).
- On Hydrogen Chemisorption on Metals. Surf. Sci., 203, 1988, p.212-226. (совместно с Г.М.Гавриленко, Е.Таранко и Р.Таранко).
- The Hemisorption Hydrogen-Like Atoms on Metal. Phys.stat.sol.(b), 155, 1989, p.481-489. (совместно с Г.М.Гавриленко, Е.Таранко и Р.Таранко).
- Electron Correlation in the Chemisorption Theory: Self-Consistent Calculations of the Adatom Charge. Surf.Sci., 230, 1990, p.329-334. (совместно с Г.М.Гавриленко, Е.Таранко и Р.Таранко).
- Chemisorption theory at submonolayer coverages. Influence of the dynamic hopping on the electronic characteristic. Acta Phys. Polonica A, 80, 1991, p.731-743. (совместно с Г.М.Гавриленко, Е.Таранко и Р.Таранко).
- A model for Chemisorption at Finite Submonolayer Coverages. Phys.Lett., 131A, 1988, p.404-406. (совместно с Г.М.Гавриленко и Р.Карденасом).

- On Coverage Dependence of Chemisorption Characteristics on Metals. Surf. Sci., 217, 1989, p.468-488. (совместно с Г.М.Гавриленко и Р.Карденасом).
- On Hydrogen Chemisorption on Metals.: The Electron Correlation Effects. Internal Report ICTP, IC/89/47, Trieste, 14p, 1989. (совместно с Р.Таранко, Р.Карденасом и Е.Таранко).
- Chemisorption at Finite Submonolayer Coverages: Influence of the Electron Correlation Effects. Surf. Sci., 238, 1990, p.293-304. (совместно с Р.Таранко, Р.Карденасом и Е.Таранко).

4. Кинетика. Каналирование. Перенос

- Adsorption and Desorption Kinetics With Regard for Interacting Among adatoms. Chemical Physics Letters, 22, 1973, p.99-100.
- Кинетика хемосорбции в системе взаимодействующих молекул. I. Общие формулы для скоростей адсорбции и десорбции. КК, 19, 1978, с.989-996. (совместно с Ю.К.Товбиным).
- Кинетика хемосорбции в системе взаимодействующих молекул. II. Скорости адсорбции и десорбции в разных приближениях учета взаимодействия. КК, 19, 1978, с.1202-1207. (совместно с Ю.К.Товбиным).
- Кинетика адсорбции диссоциирующихся молекул с учетом взаимодействия между адатомами. ФТТ, 22, 1980, с.1599-1605. (совместно с Ю.К.Товбиным).
- Моделирование процессов переноса в бинарной конденсированной среде. I. Скорость обмена положениями разных молекул. ЖФХ, 54, 1980, с.3127-3131. (совместно с Ю.К.Товбиным).
- Моделирование процессов переноса в бинарной конденсированной среде. II. Коэффициенты самодиффузии и вязкости. ЖФХ, 54, 1980, с.3132-3136. (совместно с Ю.К.Товбиным).
- Динамико-статистический подход к описанию движения быстрых частиц сквозь кристалл. ДАН, 245, 1979, с.1091-1094. (совместно с Г.М.Гавриленко).
- On a Derivation of the Fokker-Plank Equation for a System Weakly Interacting With the Heat Bath. Physica A, 99, 1979, p.34-46. (совместно с Г.М.Гавриленко).
- Termolization of High Energy Beams of Charged Particles Channeling Through Crystal. Phys.Lett. 73A, 1979, p.420-422. (совместно с Г.М.Гавриленко).

- Inelastic Scattering of Channeling Charged Particles by Phonon Excitations. Nucl. Instr. and Methods, 194, 1982, p.147-152. (совместно с Г.М.Гавриленко).
- Fokker-Plank Equation for the Description of the Thermolization of Beams of Energetic Charged Particles Channeled Through Crystal. Physica A, 109, 1981, p.305-316. (совместно с Г.М.Гавриленко и Д. Михалаке).
- The Characteristics of the Radiation from Planar Channeled Positrons Through Crystals Such as NaCl and CaF₂. Nucl.Inst. and Meth., 194, 1982, p.247-249. (совместно с Г.М.Гавриленко и Д.Михалаке).
- P-Polarized Nonlinear Surface Polaritons in Layered Structures. Z.Phys.B.- Condensed Matter, 47, 1982, p.167-173. (совместно с Д.Михалаке).
- Р-поляризованные нелинейные поверхностные связанные волны в слоистых структурах. ТМФ, 54, 1983, с.443-455. (совместно с Д.Михалаке).
- A New Type of Optic Hysteresis. JINR Rapid Comm., N6-85, 1985, p.5-10. (совместно с Д.Михалаке).
- P-Polarized Nonlinear Surface Waves in Symmetric Layered Structures. Physica Scripta, 29, 1984, p.269-275. (совместно с Д.Михалаке и Р.Назмитдиновым).
- Nonlinear TE-Polarized Surface-Guided Waves in Dielectric "Antiwaveguide". Sol. State. Comm., 66, 1988, p.517-520. (совместно с Д.Михалаке).
- A Mathematical Model of Heat Transmission in Essentially Nonlinear Conjugate Mediums. Mathematical Modelling, 2, 1990, p.40. (совместно с Л.А.Уваровой).
- Heat Transfer Through Thin Films With Nonlinear Properties. JINR Rapid. Comm., 2[59]-93, 1993, p.16-20. (совместно с Л.А.Уваровой).
- The Dynamic of Sorption of Interacting Particles. JINR Rapid. Comm., 4[61]-93, Dubna, 1993.
- A mathematical model of heat transition in essentially nonlinear conjugate media. Matem. modelirov. 2, 1990, p.40-54. (совместно с Л.А.Уваровой).
- Dynamic of sorption of interacting particles. JINR Rapid Comm., 2[59]-93, Dubna, 1993, p.16-20.

5. Жидкости

- On the Lattice Theory of Classical Fluids. Leningrad University, Trudi III Conference on Surface Phenomena, 1975, p.232-239.

- О самосогласованной решеточной теории жидкости. ЖФХ, 53, 1979, с.3020-3023. (совместно с О.Ю.Баталиным и Ю.К.Товбиным).
- Простейшая модель кристаллизации. ЖФХ, 59, 1985, с.507-509.
- State Equation for the System of Hard Discs Near the Liquid-Solid Phase Transition. JINR Rapid Comm., N3[29]-88, 1988, p.41-46. (совместно с И.Н.Зряковым).
- State Equation in the Lattice Model of τ -mer Mixture with Contact Part of Various Types. Z.Phys.Chemie 268, 1987, p.424-434. (совместно с О.Ю.Баталиным).
- Scaling Equation of the Thermodynamical Surface of a Fluid. I. Close Vicinity of the Equilibrium State. Phys.Lett. A, (1991) p.274-278. (совместно с В.Б.Роганковым).
- Флуктуационная теория сред с выраженной пространственно-временной неоднородностью. ТМФ, 97, 1993, с. 53-67. (совместно с В.Б.Роганковым).

6. Полярон Боголюбова-Пекара-Фрелиха

- Характеристики боголюбовского полярона при конечных температурах. ДАН, 259, 1981, с.1088-1093. (совместно с К.Родригесом).
- Path Integral Approach to Polaron Mass and Radius at Finite Temperature. Physica A, 112, 1982, p.615-630. (совместно с К.Родригесом).
- Temperature and Coupling Strength Dependence of Polaron Effective Mass and Radius. Phys.stat.sol.(b), 110, 1982, p.105-113. (совместно с К.Родригесом).
- Континуальный подход к электропроводности полярона. ТМФ, 56, 1983, с.467-475. (совместно с С.Н.Горшковым и К.Родригесом).
- Об обобщенном функциональном подходе к проблеме полярона. ДАН, 278, 1984, с.1343-1347. (совместно с С.Н.Горшковым, В.Д.Лажно и К.Родригесом).
- Representación del operador estadístico de sistemas en no equilibrio mediante integrales funcionales. Revista Cubana De Fisica, 4, 1984, p.3-8. (совместно с К.Родригесом).
- К вопросу о фейнмановском вариационном принципе для полярона в магнитном поле. ТМФ, 62, 1985, с.304-311. (совместно с С.Н.Горшковым, К.Родригесом и А.В.Забродиным).

- A Numerical Study of the Nonlinear Self-Consistent Eigenvalue Problem in a Generalized Polaron Model. In "Excited Polaron States in Condensed Media" ed. V.D.Lakhno, Manchester Univ.Press, 1991, p.85-104. (совместно с И.В.Амирхановым, И.В.Пузыниным, Т.А.Стриж, и В.Д.Лахно)

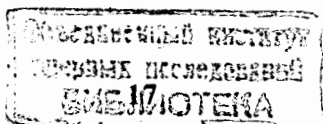
7. Квазиодномерные конденсированные среды

- The possibility of Observing a Soliton Mode in $[(CH_3)_4][NiCl_3]$ by Neutron Scattering Experiments. Phys.Lett. 85A, 1981, p.100-102. (совместно с В.Ю.Юшанхаем).
- The Neutron Scattering and Excitation Spectrum Due to Impurities in the Molecular Crystal With Resonance Interaction. Solid St.Comm., 27, 1978, p.383-388. (совместно с Л.В.Якушевич).
- Energy Migration in One-Dimensional Structures With Resonance Interaction. Intern. J. of Quantum Chemistry, 16, 1979, p.215-222. (совместно с Л.В.Якушевич).
- Particle-Like Excitations in the Polypeptide Chain Model. Intern. J. of Quantum Chemistry, 21, 1982, p.1019-1028. (совместно с Л.В.Якушевич).
- "Spectrum" excitations of alpha-string. J.Theor.Biol. 91, 1981, p.1-11. (совместно с Л.В.Якушевич).
- Scattering of Neutrons and Light by DNA Solitons. Studia Bioph., 103, 1984, p.171-178. (совместно с Л.В.Якушевич).
- Nonlinear Dynamics of Bounds in a Continual Model of DNA Double Helices. Studia Bioph., 116, 1986, p.59-64. (совместно с И.Гочевым и В.Лисы).
- Soliton Conformational Excitations in DNA. Studia Bioph., 116, 1986, p.65-71. (совместно с В.Лисы).
- Dynamical Structure Factors of Solitons in a Continuous Model of DNA Double Helices. Studia Bioph., 121, 1987, p.125-133. (совместно с В.Лисы).
- On the Dynamic Plane Base-Rotator Models of DNA: Base-Base Interaction and Dissipation. J. of Biol.Phys., 18, 1991, p.127-136. (совместно с В.Лисы).
- Dynamical Structure Factors of the Magnet $CsNiF_3$ and the Continuous Sine-Gordon Model. JINR P17-85-410, Dubna, 1985. (совместно с В.Г.Маханьковым и В.Лисы).

- 14139a2
- On the scattering of solitons at the interface of two Sine-Gordon systems. In: Solitons and Appl., World Scientific, 1990, p.322-327. (совместно с В.Лисы).
 - The Dynamical Effects in the Gross-Neveu and Polyacetylene Models. JINR Rapid Comm., N15-86, 1986, p.19-24. (совместно с В.А.Осиповым и И.Стояновой).
 - Dynamical Corrections to the Physical Characteristics of Solitons in Polyacetylene. phys.stat.sol. (b), 137, 1976, p.547-554. (совместно с В.А.Осиповым и И.Стояновой).
 - On the Theory of Linear Diatomic Polymers. phys.stat.sol. (b), 147, 1988, p.199-209. (совместно с В.А.Осиповым).
 - Polaron States in Linear Polymers. In: Excited Polaron States in Condensed Media, Manchester Univ. Press, ed. Lakhno, 1991, p.129-140. (совместно с В.А.Осиповым).
 - Non-linear Excitations of a Diatomic Polymer. J.Phys.: Condens. Matter, 1, 1989, p.2951-2958. (совместно с В.А.Осиповым и И.Малеком).
 - Polarons in Trans-Polyacetylene and Polyynes Chains. phys.stat.sol.(b), 153, 1989, p.207-213. (совместно с В.А.Осиповым Г.Бохнацкой и И.Малеком).
 - Polarons in the Finite-Band Continuum Model of Diatomic Polymers. phys.stat.sol. (b), 155, 1989, p.K29-K31. (совместно с Г.Бохнацкой и В.А.Осиповым).
 - Polaron States of the Linear Diatomic Polymer. phys.stat.sol.(b), 160, 1990, p.K29-K32. (совместно с Г.Бохнацкой и В.А.Осиповым).

Книги и обзоры

- Электромагнитная структура ядер и нуклонов. "Высшая школа", 1967.
- О взаимосвязи термодинамических величин в регулярных ансамблях. Физика и химия твердого тела, т.1, 1971, с.3-28.
- Метод корреляционных функций в модели Изинга. Изд-во ТГУ, 1971.
- Применение функций Грина и корреляционных функций к изучению модели Изинга. В книге: "Статистическая физика и квантовая теория поля", ред. Н.Н.Боголюбов, Наука, 1973.



- Уравнение состояния частиц, адсорбированных на поверхности жидкости или твердого тела, с учетом взаимодействия между ними. ЛГУ, Труды I-го Всесоюзного Симпозиума по поверхностным явлениям в жидкостях и жидких растворах, 1972, с.27-41.
- Равновесные характеристики в конденсированном состоянии с взаимодействием ближайших соседей. Атомиздат, ЭЧАЯ, т.9, вып.4, 1978, с.658-695.
- Неравенства Н.Н.Боголюбова в системах взаимодействующих многих частиц с нарушенной симметрией. ТМФ, 16, 1973, с.368-393. (совместно с Б.И.Садовниковым).
- Современные методы квантовой теории в модели Изинга. Спин-фононное взаимодействие в модели Изинга. ИТФ, Киев, 73-156Р, 1973. (совместно с В.А.Загребновым).
- Современные методы квантовой теории в модели Изинга. Критические индексы в модели Изинга. ИТФ, Киев, 73-158Р, 1973. (совместно с В.А.Загребновым).
- Phase Transitions in Two-Dimensional Systems, In: Collective Effects In Condensed Media, Part II - General, Wroclaw, 1978, p.176-191. (совместно с А.Е.Мозольковым).
- Дифракция медленных электронов поверхностью. Энергоиздат, Москва, 1982. (совместно с А.Е.Мозольковым).
- О формировании высокоэнергетических пучков заряженных частиц кристаллами. Энергоиздат, ЭЧАЯ, 12, 1981, с.221-263. (совместно с Г.М.Гавриленко).
- Path Integral Method in Polaron Theory. Энергоиздат, ЭЧАЯ, 15, 1984, с. 870-934. (совместно с К.Родригесом).
- Nonlinear Effects in Quasi-One-Dimensional Models of Condensed Matter Theory. Phys.Reports, v.104, 1984, p.1-86. (совместно с В.Г.Маханьковым).
- Полиацетилен и двумерные модели квантовой теории поля. Лекции для молодых ученых, ОИЯИ, P17-85-809, Dubna, 1985. (совместно с В.А.Осиповым).
- Nonlinear Optical Waves In Layered Structures. Энергоиздат, ЭЧАЯ, 20, 1989, с.86-126. (совместно с Д.Михалаке и Р.Г.Назмитдиновым).
- Нелинейные направляемые волны в планарных структурах. Энергоиздат, ЭЧАЯ, 23, 1992, с.52-75. (совместно с Д.Михалаке и Р.Г.Назмитдиновым и Р.П.Уанг).

О подстановке Коула–Хопфа

В.К. Федянин

*Лаборатория теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна*

1. Будем исходить из уравнения переноса в его общей форме:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

здесь $\rho(x, t)$ – плотность на единицу длины, $q(x, t)$ – расход в единицу времени (чего конкретно зависит от проблематики задачи). И $\rho(x, t)$, и $q(x, t)$ полагаем дифференцируемыми функциями, хотя (1) очевидным образом обобщается и на случай разрывных функций [1].

Центральным моментом для дальнейшего использования (1) является предположение о выборе $q(x, t)$, как функционала плотности:

$$q = Q(\rho) \quad (2)$$

приводит к известному, вообще говоря нелинейному уравнению

$$\partial_t \rho + C(\rho) \rho_x = 0, \quad C(\rho) = Q_\rho \quad (3)$$

допускающему общее исследование поведения решений на (x, t) – плоскости, давая полную картину диаграмм характеристик для нелинейных волн. Можно показать, что начиная с определенного момента времени t_B , возникает опрокидывание [1]. Предположение (2) является и не обязательным, и не физическим.

Представляется естественным выбрать $q(x, t)$ в виде

$$q(x, t) = Q(\rho) - Re^{-1} \rho_x - \delta \rho_{xx} - \dots \quad (4)$$

”добавленные” слагаемые диффузионно–дисперсионного типа ”размажут фронт” вертикальной характеристики, с которой начинается опрокидывание и приведут к уравнению

$$\partial_t \rho + C(\rho) \rho_x = Re^{-1} \rho_{xx} + \delta \rho_{xxx}, \quad (Re, \delta) > 0 \quad (5)$$

(В принципе можно было бы брать и высшие производные, но для наших целей можно ограничиться разложением (4)). Коэффициент при ρ_{xx} , $Re^{-1} = \nu/vL$ – обратное число Рейнольдса. Соответствующее слагаемое описывает процесс диссипации, обусловленный диффузией (ν – кинематическая вязкость; v, L – характерные

скорость и размер). Слагаемое $\delta\rho_{xxx}$ описывает дисперсию. Естественно, остается решить вопрос о выборе $Q(\rho)$. В принципе его можно взять в самом общем виде: например,

$$Q(\rho) = \sum_0^n a_k \frac{\rho^k}{k} \quad (6)$$

Однако, из соображений что уже случай $n = 2$ приводит к достаточно сложной и в общем случае нерешаемой задаче мы возьмем его в виде

$$Q(\rho) = \frac{\epsilon}{2}\rho^2 + b\rho + c \quad , \quad \epsilon > 0 \quad (7)$$

что дает для уравнения (5)

$$\partial_t \rho + (\epsilon\rho + b)\rho_x = Re^{-1}\rho_{xx} + \delta\rho_{xxx} \quad (8)$$

Преобразованием $\rho' = \rho + b/\epsilon$ уравнение (8) переводится в "стандартную" форму [2] (штрих мы опустим)

$$\partial_t \rho + \epsilon\rho\rho_x = Re^{-1}\rho_{xx} + \delta\rho_{xxx} \quad (9)$$

Нелинейное уравнение (9) описывает и диссипацию и дисперсию. Заметим, что до сих пор не делалось каких-либо предположений о величинах ϵ , Re^{-1} , δ : амплитуде нелинейности, вязкости, коэффициенте дисперсии.

Детальное исследование поведения нелинейных волн малой амплитуды ϵ , что позволяет стартовать с решения линейной задачи и проследить поведение нелинейных волн на интервалах $t_\epsilon \sim 1/\epsilon$ проведено в работе [2]. При этом пренебрегая диссипацией $Re^{-1} \ll \delta$ мы приходим к уравнению КдВ, сыгравшему главную роль в формулировке метода обратной задачи рассеяния [4]. Если дисперсией можно пренебречь $Re^{-1} \gg \delta$, то мы приходим к уравнению Бюргерса [5]:

$$\partial_t \rho + \epsilon\rho\rho_x = Re^{-1}\rho_{xx} \quad (10)$$

которое и будет предметом нашего дальнейшего рассмотрения.

2. Масштабным преобразованием

$$t = a\tau \quad , \quad x = bz \quad ; \quad a = (Re^{-1})^{1/2}\epsilon^{-1} \quad , \quad b = \sqrt{Re^{-1}}$$

можно "убрать" параметры ϵ и Re^{-1} из уравнения (10), которое перейдет в уравнение

$$\partial_\tau \rho + \rho\rho_x = \rho_{xx} \quad (11)$$

но для удобства сопоставления с предыдущими работами [1] избавимся от параметра ϵ ; то-есть масштабом амплитуды будет являться $\rho'(x, t)$. Переходя от t к τ по формуле $t = a\tau$ имеем следующую форму уравнения Бюргерса

$$\partial_{\tau}\rho + \rho\rho_x = \nu\rho_{xx}, \quad \nu = \frac{Re^{-1}}{\epsilon}, \quad a = \frac{1}{\epsilon} \quad (12)$$

Для этого уравнения практически независимо Коул [6] и Хопф [7] предложили нелинейную замену переменной, позволившую свести (12) к линейному уравнению теплопроводности, а именно

$$\rho = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} [\ln \varphi(x, t)] \quad (13)$$

Подстановку эту удобно проводить в два этапа

$$\rho = \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t). \quad (14)$$

Заметим, что

$$\psi(x, t) = \int_0^x \rho(x, t) + \rho_0(t) \quad (15)$$

удовлетворяет (14); последнее нигде явно не подчеркивалось. Подстановка (14) в (12) дает

$$\psi_{\tau x} + \psi_x \psi_{xx} - \nu \psi_{xxx} = 0 \quad (16)$$

или

$$\left(\psi_{\tau} + \frac{1}{2} \psi_x^2 - \nu \psi_{xx} \right)_x = 0 \quad (17)$$

Уравнение (17) интегрируется тривиально и мы имеем в итоге

$$\psi_{\tau} + \frac{1}{2} \psi_x^2 - \nu \psi_{xx} = f(\tau) \quad (18)$$

где $f(\tau)$ некоторая функция "τ". Заметим, что при стандартном изложении [1, 2] ее полагают равной нулю. Ниже будет пояснено для какого круга задач это возможно. Далее полагая

$$\psi = -2\nu \ln \varphi, \quad \varphi = \exp\left(-\frac{1}{2\nu} \psi\right), \quad (19)$$

после несложных вычислений производных, фигурирующих в (18) и подстановки их в (18) имеем

$$\varphi_{\tau} = \nu \varphi_{xx} - \frac{1}{2\nu} f(\tau) \varphi \quad (20)$$

Нелинейное уравнение Бюргерса (12) свелось к линейному уравнению теплопроводности (диффузии), но возникло дополнительное слагаемое с $f(\tau)$ – функцией заданной на характеристике уравнения параболического типа. Если рассматривать данную замечательную подстановку как чисто методический прием сведения нелинейного уравнения к уравнению теплопроводности, то в приложение к конкретным задачам [1] при $f(\tau) = 0$ можно решить только начальную задачу: задав $\rho(x, 0) =$

$F(x)$ – физической величиной является именно $\rho(x, t)$, фигурирующая в (12) и, воспользовавшись функцией источника для (20) – получить достаточно сложное выражение для $\rho(x, t)$. Именно так и делается в [1, 2].

Но нам представляется что дополнительное слагаемое с $f(\tau)$ в (20) позволит решать реалистические краевые задачи для уравнений (8),(9). Конечно можно ставить краевые задачи для (20) при $f(\tau) = 0$, как первого рода $\varphi(0, t) = \varphi_0(t)$, так и второго рода $\varphi_x(0, t) = \varphi_1(t)$ [9, 10] и пользоваться апробированными методами [8, 9, 10]. Но надо иметь в виду, что как функция $\psi(x, t)$ в (14), так и функция $\varphi(x, t)$ в (19) суть вспомогательные функции и стартовать надо от условий на реальную плотность $\rho(x, t)$, подчиняющуюся (11); то-есть ставить как начальные так и краевые условия именно для нее задавая $\rho(0, t) = \rho_0(t)$, $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$, $\rho_x(0, t) = \rho_1(t)$ с различными комбинациями краевых условий [8, 9] и ”исковеркав” их подстановкой Коула–Хопфа решать (20) уже не с произвольной $f(\tau)$, а определяемой этими заданными функциями.

Эта программа и будет реализованна ниже. Заметим, что при использовании (12),(20) в конкретных задачах надо учитывать, что мы ”убирали” постоянную в (8), переходя от плотности в уравнении (1) ρ к $\rho' = \rho + b/\epsilon$, события развивались во времени $\tau = \epsilon t$ и коэффициент диффузии в (12) $\nu = Re^{-1}\epsilon$. Заметим также, что и число Рейнольдса Re и амплитуда нелинейности отличны от нуля, но в принципе могут иметь любые значения.

3. Воспользуемся теперь теми возможностями, которые возникают из-за появления функционального произвола (18) для решения уравнения (12) на полуограниченной прямой: $t \geq 0$, $0 \leq x < \infty$. С учетом (15) получаем

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\psi_\tau(x, \tau) + \frac{1}{2} \psi_x^2(x, \tau) - \nu (\psi_x)_x \right] = \\ &= \rho'_0(\tau) + \frac{1}{2} \rho_0^2(\tau) - \nu \rho_x(\tau) \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\rho_0(\tau) = \rho(x = 0, \tau) \quad , \quad \rho_x(\tau) = \rho_x(0, \tau) \quad (22)$$

известные функции, задаваемые, как краевые условия уравнения Бюргерса (12). Дополнительно для полного определения задачи нахождения решений в области $0 \leq x < \infty$, $t \geq 0$ уравнения (12) необходимо задать $\rho_0(x) = \rho(x, \tau = 0)$. В выписанных ниже интегралах будем маркировать пространственные координаты символами (x, ξ, z) , а временные (τ, μ, λ) . Используя подстановку

$$\varphi = \chi(\tau)R(x, \tau) \quad (23)$$

несложно показать, что функция $R(x, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$R_\tau(x, \tau) = \nu R_{xx}(x, \tau) \quad (24)$$

если

$$\begin{aligned} \chi &= \exp\left(-\frac{1}{2\nu} \int_0^\tau f(\mu) d\mu\right) = \chi_0 e^{\frac{1}{2}\rho_0(0)} e^{-\tau}, \\ r &= \frac{1}{2\nu} \left[\rho_0(\tau) + \int_0^\tau \left(\frac{1}{2}\rho_0^2(\mu) - \nu\rho_1(\mu)\right) d\mu \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$\chi_0, \rho_0(0)$ – константы, выбираемые из физических соображений. Поскольку налицо связь (19), то

$$\begin{aligned} R(x, \tau) &= R_0^{-1} \exp\left(r - \frac{1}{2\nu} \psi(x, \tau)\right) \equiv \\ &\equiv R_0^{-1} \exp\frac{1}{2\nu} \left[\int_0^\tau \left(\frac{1}{2}\rho_0^2(\mu) - \nu\rho_1(\mu)\right) d\mu - \int_0^x \rho(\xi, \tau) d\xi \right] \end{aligned} \quad (26)$$

$$R_0 = \chi_0 e^{\frac{1}{2}\rho_0(0)}$$

мы воспользовались (15), (19). Из выражения (25) следует

$$\begin{aligned} R_1(x) &\equiv R(x, 0) = R_0^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2\nu} \int_0^x \rho(\xi, 0) d\xi\right] \\ R_2(x) &\equiv R(0, \tau) = R_0^{-1} \exp\frac{1}{2\nu} \left[\int_0^\tau \left(\frac{1}{2}\rho_0^2(\mu) - \nu\rho_1(\mu)\right) d\mu \right] \end{aligned}$$

Таким образом мы полностью определили первую краевую задачу [3, 9] для вспомогательного уравнения диффузионного типа (24). Несложно формулируются вторая и третья краевые задачи для (24); (наряду с $R_1(x)$ задается либо $R_3(\tau) \equiv \partial_x R(0, \tau)$, либо $\partial_x R(0, \tau) = \lambda [R(0, \tau) - \theta(\tau)]$) а также задача без начальных условий ($R_1(x) = 0$), различные комбинации краевых задач. Могут решаться и задачи на отрезке $0 \leq x \leq l$ [3]. Для последних, естественно, необходимо задание $R(l, \tau)$, $R_x(l, \tau)$, альтернативно, $\rho(l, \tau)$, $\rho_x(l, \tau)$ это приведет к более громоздким формулам, но трудности носят чисто вычислительный характер.

Заметим, что в (21) первое слагаемое можно было бы выразить через $\rho_0(x)$, $(\rho_0)_x$, $(\rho_0)_{xx}$ воспользовавшись уравнением (12):

$$\rho_0'(\tau) = -\rho_0(\tau)\rho_x(\tau) + \nu\rho_{xx}(0, \tau) \quad (27)$$

Но, имея в виду подстановку (23) с последующим представлением (25) для $\chi(\tau)$ мы этого не сделали.

Первая краевая задача для (24) решается стандартным способом [3, 9]. Решение ее дается формулами

$$R(x, \tau) = R_1(x, \tau) + R_2(x, \tau); \quad (28)$$

$$R(x, \tau) = \int_0^\infty [G_-(x, \xi, \tau) - G_+(x, \xi, \tau)] R_1(\xi) d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + 2\nu \int_0^\tau \frac{\partial G(x, 0, \tau - \lambda)}{\partial \xi} R_2(\lambda) d\lambda \\
R_1(\xi) & = R_0^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2\nu} \int_0^\xi \rho_0(\xi) d\xi \right) \\
R_2(\lambda) & = R_0^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2\nu} \int_0^\lambda \left(\nu \rho_1(\mu) - \frac{1}{2} \rho_0^2(\mu) \right) d\mu \right] \\
G_\pm(x, \xi, \tau) & = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \exp \left(-\frac{h_\pm^2}{2d} \right), \quad h_\pm = x \pm \xi, \quad d = 2\nu\tau
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial G(x, 0, \tau - \lambda)}{\partial \xi} = -\frac{2\pi x}{(2\pi d_1)^{3/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{2d_1} \right), \quad d_1 = \nu(\tau - \lambda)$$

Искомое решение $\rho(x, \tau)$ уравнения Бюргера получается, если воспользоваться (14), (19), (23) и дается формулами:

$$\rho(x, \tau) = \psi_x = -2\nu \frac{R_x}{R} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned}
R_x & = \int_0^\infty \left[\frac{\partial G_-(x, \xi, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial G_+(x, \xi, \tau)}{\partial x} \right] R_1(\xi) d\xi + \\
& + 2\nu \int_0^\tau \frac{\partial G_-(x, 0, \tau - \lambda)}{\partial x \partial \xi} R_2(\lambda) d\lambda \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\partial_x G_\mp(x, \xi, \tau) = \pm \frac{2\pi h_\mp}{(2\pi d)^{3/2}} \exp \left(-\frac{h_\mp^2}{2d} \right)$$

$$\partial_{x\xi} G(x, 0, \tau - \lambda) = - \left[2\pi - \frac{(2\pi x)^2}{2\pi d_1} \right] \exp \left(-\frac{x^2}{2d_1} \right) (2\pi d_1)^{-3/2}$$

Естественно, окончательные формулы для $\rho(x, \tau)$ по (29) получаются достаточно громоздкими, но задавая $\rho_0(x) = \rho(x, \tau = 0)$ – начальное значение распределения плотности подчиняющееся уравнению Бюргера и $\rho_0(\tau) = \rho(x = 0, \tau)$, $\rho_1(\tau) = \rho_x(x = 0, \tau)$ значения плотности и ее первой производной мы находим с помощью (29), (30) закон эволюции $\rho(x, \tau)$ для $\tau \geq 0$ и $0 \leq x < \infty$. Функции $\rho_0(x)$, $\rho_0(\tau)$, $\rho_1(\tau)$ должны удовлетворять условиям

$$|\rho_0(x)| < A, \quad |\rho_0(\tau)| < B, \quad |\rho_1(\tau)| < C$$

обеспечивающим единственность полученного решения.

Можно конечно ставить теперь

(1) Первую краевую задачу для уравнения Бюргера, задавая: $\rho_0(x) = \rho(x, \tau = 0)$;

$$\rho(x=0, \tau) = \rho_0(\tau), \rho_x(0, \tau) = 0;$$

(2) Вторую краевую задачу уравнения Бюргерса, задавая: $\rho_0(x)$, $\rho_x(0, \tau) = \rho_0(\tau)$ и [3, 9];

(3) Третью краевую задачу, задавая: $\rho_1(\tau) = \lambda[\rho_0(\tau) - \theta(\tau)]$ полученные выше формулы (29), (30) дают их решение.

Таким образом описывая конкретный процесс необходимо в $R_1(\xi)$, $R_2(\lambda)$ и $R(x, \tau)$ перейти от ρ, ν, τ к $\rho - b/\epsilon, \nu = Re^{-1}/\epsilon, t = \tau/\epsilon, d = \nu\tau \rightarrow Re^{-1}$

В заключении подчеркнем еще раз, что при использовании (12), (20) в конкретных задачах надо учитывать что мы "убирали" постоянную в (8), переходя от плотности в уравнении (1) ρ к $\rho' = \rho + b/\epsilon$, события развивались во времени $\tau = \epsilon t$ и "коэффициент диффузии" в (12) $\nu = Re^{-1}/\epsilon$.

Заметим что и число Рейнольдса и коэффициент нелинейности отличны от нуля, но в принципе могут иметь любые значения.

Я признателен Б.М.Барбашову, В.А.Осипову, И.В.Пузынину, В.П.Силину за обсуждение результатов и конструктивные замечания. Я также глубоко благодарен Д.В.Ширкову, внимательно ознакомившемуся с начальным вариантом заметки. Конструктивная критика Д.В.Ширкова собственно и способствовала появлению ее третьего раздела. Он, как мне представляется, и открывает пути использования уравнения Бюргерса для решения конкретных задач им описываемых.

Список литературы

- [1] Дж.Уизем, "Линейные и нелинейные волны", Мир, Москва, 1977.
- [2] С.Лейбович, А.Р.Сибасс, "Примеры диссипативных и диспергирующих систем, описываемых уравнениями Бюргерса и Кортевега-деВриза", Мир, Москва, 1977.
- [3] D.I.Korteweg and G.de Vries, "On the change of form long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves", Phil.Mag., (5), 39, 422, (1895).
- [4] C.S.Gardner, I.M.Greene, M.D.Kruskal, and B.M.Minra, Phys.Rev.Lett., 19, 1095, (1967).
- [5] I.M.Burgers, Adv.Appl.Mech., 1, 171, (1948); (Есть русский перевод в сб."Проблемы механики", М.ИЛ. 1955 с.422-445)
- [6] I.D.Cole, Q.Appl.Math., 9, 225, (1951); (Есть русский перевод в сб."Механика", 2(18), 70 (1953).

- [7] E.Norf, Comm. Pure. Appl. Math., 3, 201, (1950).
- [8] А.Зоммерфельд, "Дифференциальные уравнения в частных производных физики", М.ИЛ. 1950.
- [9] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, "Уравнения математической физики", Наука, М., 1977.
- [10] Т.С.Карслоу, "Теория теплопроводности", ГТТИ, 1947.
- [11] Х.Карслоу, Д.Егер, "Операционные методы в прикладной математике", ИЛ, М., 1948.













Второе приближение для задачи оптического полярона в пределе сильной связи.

Н.Н. Боголюбов (мл.)

*Математический Институт им.В.А.Стеклова,
117976 Москва, ул.Вавилова 42, Россия.*

Мы рассмотрим гамильтониан

$$H = \frac{p^2}{2m} + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{(f)} \frac{A_f}{\sqrt{2}} [b_f e^{ifx} + b_f^\dagger e^{ifx}] + \varepsilon^2 \sum_{(f)} \nu_f b_f^\dagger b_f \quad (1)$$

здесь вектор x описывает пространственное положение электрона, b_f^\dagger и b_f – операторы рождения и уничтожения с волновым вектором $f = \left(\frac{2\pi n_1}{L}, \frac{2\pi n_2}{L}, \frac{2\pi n_3}{L}\right)$ n_1, n_2, n_3 – целые числа, $V = L^3$ – объем, ε – малый параметр.

Предметом данной работы является вычисление энергии основного состояния E в случае сильной связи для оптического полярона, когда параметры A_f и ν_f имеют вид

$$A_f = \frac{A}{|f|} ; \quad \nu_f = \nu, \quad (2)$$

на основании адиабатического приближения¹

$$E = E_0 + \varepsilon \Delta_2 + \dots; \quad (3)$$

$$\Delta_2 = -\frac{1}{2V} \sum_{n>0} \sum_{(f)} A_f^2 \int e^{if(x-x')} \phi_0^*(x) \phi_0(x') \frac{\phi_n(x) \phi_n(x')}{E_n - E_0 + \varepsilon^2 \nu_f} dx dx'; \quad (4)$$

$$\Gamma \phi_n = E_n \phi_n, \quad n \geq 0; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma = -\frac{\Delta_x}{2m} - \frac{1}{V} \sum_{(f)} \frac{A_f^2}{\nu_f} \int e^{if(x-x')} \phi_0^*(x') \phi_0(x') dx' + \\ + \frac{1}{2V} \sum_{(f)} \frac{A_f^2}{\nu_f} \int e^{if(x-x')} |\phi_0^*(x) \phi_0(x')|^2 dx dx', \end{aligned} \quad (6)$$

построенного в [1] исходя из вариационного принципа Боголюбова.

В работе [2] к изучению модели оптического полярона уже применялся вариационный метод, отличающийся от предлагаемого в этой работе, который приводит

¹Здесь мы учитываем концептуальный подход предложенный в работе Н.Н.Боголюбова [1] препринт Дубна E2-90-535,1990, см. также Preceeding Italo-Soviet Workshop Advances in Theoretical Physics, 23-28 October, 1990 (World Scientific) ed. E.R.Caianicello.

не к точным значениям E_0 и Δ_2 , а к оценкам для них. В работе [3] для оценки E построена задача на собственные значения, определяющая частоты фононов, локализованных вблизи полярона, причем E_0 и Δ_2 выражены через собственные значения. Как мы увидим в дальнейшем, наш метод приводит к тому же значению для E_0 , что и в [3], но дает отличающееся значение поправки Δ_2 .

Выполняя суммирование по f

$$\frac{1}{V} \sum_{(f)} \frac{e^{if(x-x')}}{|f|^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{if(x-x')}}{|f|^2} df = \frac{1}{4\pi|x-x'|}, \quad (7)$$

имеем

$$\Gamma = -\frac{\Delta_x}{2m} - \frac{A^2}{4\pi\nu} \int \frac{|\phi_0(x')|^2}{|x-x'|} dx' + \frac{A^2}{8\pi\nu} \int \frac{|\phi_0(x)\phi_0(x')|^2}{|x-x'|} dx dx'. \quad (8)$$

Интегрируя уравнение на $\phi_n(x)$ с $\phi_0(x)$ по dx , получаем при $n=0$

$$-\frac{1}{2m} \int \phi_0(x) \Delta_x \phi_0(x) dx - \frac{A^2}{8\pi\nu} \int \frac{|\phi_0(x)\phi_0(x')|^2}{|x-x'|} dx dx' = E_0. \quad (9)$$

Выполним масштабное преобразование с безразмерным параметром ξ

$$x \rightarrow y = x/\xi; \quad \phi_n(x) \rightarrow \theta_n^\xi(y) = \xi^{3/2} \phi_n(\xi y). \quad (10)$$

тогда

$$\Gamma_\xi = -\frac{\Delta_y}{2m\xi^2} - \frac{A^2}{4\pi\nu\xi} \int \frac{|\theta_0^\xi(y')|^2}{|y-y'|} dy' + \frac{A^2}{8\pi\nu\xi} \int \frac{|\theta_0^\xi(y)\theta_0^\xi(y')|^2}{|y-y'|} dy dy'; \quad (11)$$

$$\Gamma_\xi \theta_n^\xi(y) = E_n \theta_n^\xi(y); \quad (12)$$

$$\int |\theta_n^\xi(y)|^2 dy = 1. \quad (13)$$

Домножив уравнение (12) на $\theta_n^\xi(y)$ и интегрируя по dy при $n=0$, имеем

$$E_0 = \int \theta_n^\xi(y) \Gamma_\xi \theta_n^\xi(y) dy. \quad (14)$$

Исходя из очевидных равенств

$$\frac{\partial E_0}{\partial \xi} = 0; \quad \int \theta_n^\xi(y) \frac{\partial}{\partial \xi} \theta_n^\xi(y) dy = 0, \quad (15)$$

получаем

$$\int \theta_n^\xi(y) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Gamma_\xi \right) \theta_n^\xi(y) dy = 0 \quad (16)$$

и после дифференцирования имеем

$$\frac{1}{m\xi^3} \int \theta_0^\xi(y) \Delta_y \theta_0^\xi(y) dy + \frac{A^2}{8\pi\nu\xi^2} \int \frac{|\theta_0^\xi(y)\theta_0^\xi(y')|^2}{|y-y'|} dy dy' = 0. \quad (17)$$

С другой стороны, из (9) после преобразования (10) следует

$$-\frac{1}{2m\xi^2} \int \theta_0^\xi(y) \Delta_y \theta_0^\xi(y) dy - \frac{A^2}{8\pi\nu\xi^2} \int \frac{|\theta_0^\xi(y)\theta_0^\xi(y')|^2}{|y-y'|} dy dy' = E_0. \quad (18)$$

Окончательно, из (17) и (18) находим значение интеграла

$$\frac{A^2}{8\pi\nu\xi^2} \int \frac{|\theta_0^\xi(y)\theta_0^\xi(y')|^2}{|y-y'|} dy dy' = -2E_0. \quad (19)$$

Удобно положить параметр ξ равным $\xi = \xi_0 = \frac{4\pi\nu}{A^2 m}$; и введем функцию

$$\theta_n^\xi(y)|_{\xi=\xi_0} = \psi_n(y) \quad (20)$$

и ввести безразмерный параметр

$$\alpha = \frac{A^2}{4\pi\varepsilon\nu} \left(\frac{m}{2\nu}\right)^{1/2} = (\varepsilon^2\nu 2m\xi_0^2)^{1/2}. \quad (21)$$

При этом из уравнения (12) при $n = 0$ получаем, что $\psi_0(y)$ является собственной функцией уравнения

$$\left[-\Delta_y - 2 \int \frac{|\psi(y')|^2}{|y-y'|} dy' - \lambda \right] \psi(y) = 0, \quad (22)$$

соответствующее собственному значению λ_0 , которое равно

$$\lambda_0 = 6m\xi_0^2 E_0 = 3 \frac{E_0}{\varepsilon^2\nu} \alpha^{-2} \quad (23)$$

и является наименьшим собственным значением (22).

При $n > 0$ из уравнения (12) получаем уравнение

$$\left[-\Delta_y - 2 \int \frac{|\psi(y')|^2}{|y-y'|} dy' - \lambda + \alpha^{-2} \right] \psi_n(y) = \lambda_n \psi_n(y), \quad (24)$$

где собственные значения λ_n связаны с E_n выражением

$$\lambda_n = 2m\xi_0^2 (E_n - E_0) + \alpha^{-2}, \quad n > 0. \quad (25)$$

Теперь, применяя последовательно к (3) формулы (6),(7),(10), (20),(21),(25) после преобразований находим

$$\Delta_2 = -\nu I(\alpha), \quad (26)$$

где

$$I(\alpha) = \int \frac{Q(y, y')}{|y-y'|} \psi_0(y) \psi_0(y') dy dy', \quad (27)$$

$$Q(y, y') = \sum_{n>0} \frac{\psi_n(y)\psi_n^*(y')}{\lambda_n}. \quad (28)$$

Так как, согласно (21), $\alpha^{-1} = O(\varepsilon)$, то с учетом (23) и (26) получаем

$$E = \varepsilon^2 \nu \left[\frac{\lambda_0}{3} \alpha^2 - I(\alpha) + O(\alpha^{-2}) \right]. \quad (29)$$

Таким образом, уравнения (22),(24),(27),(28) замкнутым образом позволяют вычислить приближение второго порядка к энергии оптического полярона в пределе сильной связи.

Список литературы

- [1] N.N.Bogolubov, Some remarks on the polaron theory, E2-90-535, Dubna, 1990.
- [2] М.А.Кривоглаз, С.И.Пекар, Метод шпуров для электронов проводимости в полупроводниках. II.Вариационный метод. Известия АН СССР, серия физическая, т.ХХI, N1, с.16-32, 1957.
- [3] S.J.Miyake, The ground state of the optical polaron in the strong-coupling case. J. of the Phys. Soc. of Jap., Vol.41, No.3, 1976.

Связанные электронные состояния в закритичном кластере аммиака в магнитном поле

В.Д. Лахно

*Институт математических проблем биологии РАН,
Пушино, Мос. обл. 142292, Россия.*

Современная техника получения молекулярных кластеров с заданным числом молекул составляющих кластер открыла возможность их последовательного изучения. Исследования таких систем представляет интерес, поскольку они являются промежуточным звеном при переходе от изучения свойств вещества как целого к изучению составляющих его отдельных молекул. С практической точки зрения этот интерес связан с перспективой развития физики конденсированных систем в нанометровом диапазоне, предметом которой являются объекты кластерного типа.

Молекулярный кластер составленный из достаточно большого числа молекул в простейшем случае можно рассматривать как сферически-симметричную область, представляющую для электрона потенциальную яму глубиной V_0 . Так, например, для кластеров из атомов гелия $V_0 = 1\text{эВ}$, для Ne $V_0 = -0.65\text{эВ}$ [1]. В первом случае захват электрона кластером $(He)_n$ невозможен, если n не слишком велико, когда возможно образование поверхностных электронных состояний. Во втором случае захват электрона кластером приводит к образованию заряженного кластера $(Ne)_n^-$.

Особый случай представляют собой кластеры из молекул аммиака. Точное значение V_0 для аммиака в настоящее время не установлено. Обычно считают, что эта величина лежит в области $(-0.5 - 0.5\text{эВ})$. Экспериментально, однако установлено, что для достаточно больших аммиачных кластеров с $n \geq 36$ становится возможным захват электрона кластером [2]. Этот результат позволяет получить оценку для глубины потенциальной ямы в кластере аммиака. Учитывая, что связанное состояние сферически-симметричной яме глубиной $|V_0|$ становится возможным только при условии:

$$|V_0| \geq \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mR^2} \quad (1)$$

где m – масса электрона, R – радиус ямы с использованием соотношения:

$$R = R_s n^{1/3} \quad (2)$$

где n – число молекул в кластере и R_s – эффективный радиус молекулы аммиака: $R_s(NH_3) \simeq 2.85\text{Å}$ [3], получим при $n = 35$ для $|V_0|$ величину:

$$V_0 = -0.11\text{эВ} \quad (3)$$

Такое значение V_0 выглядит вполне правдоподобным и примерно соответствует разнице между экспериментальным значением энергии фототрыва для жидкого аммиака и экстраполяции экспериментальных значений для кластеров $(NH_3)_n^-$ к пределу бесконечно больших n [4].

Хорошо известно, что любая даже небольшой глубины потенциальная яма во внешнем магнитном поле приводит к образованию связанного состояния с энергией [5]:

$$\epsilon = -\frac{me^2H^2}{8\pi^2\hbar^4c^2} \left(\int V_0 dV \right)^2 \quad (4)$$

где магнитное поле в (4) считается слабым: $\rho_0 \gg R$ где $\rho_0 = \sqrt{c\hbar/eH}$ — магнитная длина. Для рассматриваемого здесь сферически-симметричного кластера из (4) получим:

$$\epsilon = -\frac{2mR^2}{9\hbar^2} V_0^2 \left(\frac{R}{\rho_0} \right)^4 \quad (5)$$

Характерный размер $\langle r \rangle$ такого состояния равен:

$$\langle r \rangle \simeq R \frac{\hbar^2}{mR^2V_0} \left(\frac{R}{\rho_0} \right)^2 \quad (6)$$

и намного превосходит размер кластера. Отметим, что для такого протяженного электронного состояния приближенное описание кластера как области с постоянным потенциалом V_0 может выполняться даже для больших n . Из (5) следует, что вплоть до очень сильных магнитных полей энергия электрона в закритичном кластере аммиака очень мала. Так, например, для $H = 5 \cdot 10^5$ э соответствующая магнитная длина $\rho_0 = 3.5 \cdot 10^{-7}$ см. Для закритичного кластера с $n = 35$, что соответствует кластеру с $R = 9.3 \text{ \AA}$, энергия связи с использованием (3) и (5) имеет величину $\epsilon \simeq 10^{-4}$ эВ. Такое значение энергии связи, однако, доступно для наблюдения в современных условиях проведения эксперимента.

Список литературы

- [1] P.R.Antoniewicz, G.T.Bennett, I.C.Thompson, J.Chem.Phys. **77**, 1982, p.4573.
- [2] G.H.Lee et al, Z.Phys.D. Atoms, Molecules and Clusters, **20**, 1991, p.9.
- [3] N.K.Balabaev, V.D.Lakhno, Chem.Phys. 1995, in print.
- [4] I.Iortner, Z.Phys.D. Atoms, Molecules and Clusters **24**, 1992, p.247.
- [5] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Квантовая механика, Наука, 1974.

*Dedicated to Professor V.K.Fedyanin
on the occasion of his 60th birthday*

Vortices in elastic media

V.A.Osipov

*Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics
Joint Institute for Nuclear Research, Dubna*

An investigation of problems concerning localised particle-like excitations in condensed matter physics was a subject of Fedyanin's continuous interest [1, 2]. As is known, a study of these problems meets considerable mathematical difficulties since essentially nonperturbative methods should be used in an analysis of strongly non-linear equations. It is clear that every new exact solution is of importance in understanding the physical nature of various phenomena.

Point, line and wall defects are of remarkable interest in modern physics. They appear in a broad class of both condensed matter and field theory models. Point-like vacancies and interstitials allow rapid particle diffusion in crystalline solids. Vortex rings control the decay of supercurrents in superfluids and superconductors. Monopoles, instantons and magnetic vortices play an important role in modern field theory models and quantum chromodynamics. Dislocation lines mediate plastic flow. Disclinations are of importance in plastic crystals, liquid crystals, amorphous bodies, polymers, etc.

As is known, there exists a close relationship between dislocations and vortices. In some sense, dislocations and disclinations are vortices in elastic media. The recent progress in theoretical study of elastic materials with topological defects is based on the principally new theoretical methods (differential geometric approach, topological analysis, gauge approach). In particular, the gauge theory of dislocations and disclinations [3] has been proved to be the new powerful method to investigate defect media. The main idea of the gauge approach is the following: the space group $G = SO(3) \triangleright T(3)$ is considered as the gauge group that leaves the Lagrangian of the elasticity theory invariant. Within this approach, the defect fields are treated as the compensating Yang-Mills fields. This theory is essentially nonlinear in its origin. It allows us to study nonlinear problems (including nonperturbative solutions, like vortex and monopole) which are of a considerable importance for disclinations.

Note that usually one uses the linear theory of elasticity to study dislocations. It is clear, however, that the linear approximation works well only in the case of small deformations. When deformations become large, the nonlinear theory of elasticity should

be used. Unfortunately, the nonlinear problems in dislocation theory turn out to be more complex since the nonlinear relation between stresses and strains must be taken into account. In addition, all known approaches are based essentially on the perturbation scheme. It is known, however, that topologically nontrivial solutions cannot be found in the framework of any perturbation scheme.

It should be noted that disclinations are studied better in liquid crystals. In particular, there is the known exact solution (a hedgehog) within the continuum model for nematics [4]. An important advantage of the gauge approach follows from the fact that the model obtained is similar to the known field theory models (first of all to the non-Abelian and Abelian Higgs models) where topological objects are well studied at the present time. Taking into account this similarity we have found two exact static solutions for disclinations [5, 6].

The exact solution for the disclination vortex possesses cylindrical symmetry which is of interest for linear defects like straight wedge disclinations as well as for defects in planar elastic systems. Clearly, both these defects can be studied in the framework of the two-dimensional model (the first problem can be easily reduced to the planar one by considering the plane to be normal to the disclination line). In this case, the gauge group for the rotational defects becomes $G = SO(2)$, that is the Abelian group instead of the non-Abelian group $SO(3)$ in three space dimensions.

In the cylindrical coordinates (r, θ) , the static vortex-like solution is written in the form [6]

$$\chi^1(X^A) = F(r) \cos \nu\theta, \quad \chi^2(X^A) = F(r) \sin \nu\theta, \quad (1)$$

and

$$W_r(X^B) = 0, \quad W_\theta(X^B) = W(r) = \nu/r, \quad (2)$$

Here χ^j is the state vector of elastic fields, W_A is the gauge field due to disclinations. Clearly, W_A is a pure (but topologically nontrivial) gauge. The Frank vector for such a solution is normal to the plane $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, and $rot \vec{W} = \omega \delta^2(\vec{r})$. Note that ν is in fact the Frank index $\nu = \omega/2\pi$. One can see that this solution is similar to the well-known magnetic Abrikosov-Nielsen-Olesen vortex. The function $F(r)$ in (1) is expressed via $g(r) = \partial_r F(r)$ where

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = N_0 \cosh[\frac{1}{3} \cosh^{-1} \frac{1}{t}], & t \leq 1 \\ g_2(t) = N_0 \cos[\frac{1}{3} \cos^{-1} \frac{1}{t} + \frac{2\pi t}{3}], & t \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

Here $N_0 = 2\sqrt{(B/3A)}$, $t = r/r_0$, $r_0 = \sqrt{(27g_0^2 A/4B^3)}$. Let us note that that (1-3) correspond to a topologically stable elastic vortex. It was found that this solution reproduces qualitatively the behaviour of strain and stress fields of a wedge disclination with the integer Frank index.

At the same time, an analysis shows that the important electronic properties of disclinated crystals take place for topologically unstable disclinations with the non-integer

Frank indices. In particular, it was shown [6, 7] that conducting electrons can acquire the Aharonov-Bohm-like phase in elastic materials with fractional disclination vortices. It results in specific transport properties of defect materials.

This finding is of importance for many elastic materials like amorphous bodies, glasses, liquid crystals, polymers, etc., where such disclinations can play an important role. Let us consider a linear approximation for the gauge model. It is clear that in this case we have to restrict consideration to defects with the sufficiently small Frank indices to justify the use of the linear theory. However, even this problem is of interest for two reasons. First, one can compare our solution with the known results of the classic disclination theory. Second, in many physical applications one considers disclinations with a small Frank index. Notice that for instance 72° disclinations which are of interest in defect glasses [8] have the Frank index $\nu = 0.2$ which is quite appropriate in the linear theory.

The calculations shown [7] that the equilibrium condition, takes the following form:

$$\Delta \vec{u} + (L + 1) \nabla \text{div} \vec{u} = \vec{j}(\vec{r}). \quad (4)$$

where \vec{u} are the displacements, and

$$j^x(\vec{r}) = L(W_y + x\partial_x W_y) + x\partial_y W_x - (L + 2)y\partial_x W_x - y\partial_y W_y - W_y, \quad (5)$$

$$j^y(\vec{r}) = -L(W_x + y\partial_y W_x) - y\partial_x W_y + (L + 2)x\partial_y W_y + x\partial_x W_x + W_x. \quad (6)$$

Here $L + 1 = (1 - 2\sigma)^{-1}$, σ is the Poisson constant. When the source in (4) is setting to be zero we get the well-known in the linear elasticity theory equilibrium condition that is expressed in terms of displacements fields, A source $\vec{j}(\vec{r})$ in (4) characterizes the density of elastic flow due to a disclination, \vec{r} is a two dimensional vector. Let us note that a presence of such a source is typical to the dislocation theory. Namely, to take into account the singular behaviour of the distortion tensor on the dislocation line, in the classic theory of dislocations the source is assumed to have a δ -function form $\vec{j}(\vec{r}) = [\vec{\tau}\vec{b}]\delta(\vec{r})$, where \vec{b} is the Burgers vector [4]. On the other hand, within the framework of a self-consistent gauge approach we can clarify the origin of $\vec{j}(\vec{r})$. As is seen, the source is completely determined by gauge fields.

We have found a self-consistent solution of the problem [7]. The static vortex has the form (2) where, however, ν is non-integer. The Frank vector for such a solution is normal to the plane and directed opposite to the z -axis $\vec{\omega} = (0, 0, -\omega)$. According to the generally accepted terminology it corresponds to the so-called negative disclination [9]. A disclination flow can be found from the circular integral

$$\omega = \oint_l \vec{W} d\vec{l} = 2\pi\nu. \quad (7)$$

Notice that the case $\nu > 0$ will correspond to a negative disclination whereas for $\nu < 0$ we get a positive disclination. Substituting (7) into (5) and (6), we obtain the flux density

in the following form:

$$j^x = -\frac{2\nu x}{r^2}, \quad j^y = -\frac{2\nu y}{r^2}. \quad (8)$$

Finally, we have to solve (4) with a source (8). To do this, let us use the following ansatz:

$$u^i = x^i(C_1 \ln r + C_2). \quad (9)$$

where C_1 and C_2 are arbitrary constants. After substitution of (9) into (4) we get that $C_1 = -\nu/(L+2) = -\nu(1-2\sigma)/2(1-\sigma)$, whereas C_2 remains still an arbitrary constant. The stress fields take now the following form:

$$\Sigma_x^x = -\frac{\nu}{1-\sigma} \left(\ln r + \frac{y^2}{r^2} \right) + C, \quad (10)$$

$$\Sigma_y^y = -\frac{\nu}{1-\sigma} \left(\ln r + \frac{x^2}{r^2} \right) + C, \quad (11)$$

$$\Sigma_y^x = \Sigma_x^y = \frac{\nu}{1-\sigma} \frac{xy}{r^2}. \quad (12)$$

Here $C = (-\nu + 2C_2)/(1-2\sigma)$. Thus, one can see that stresses turn out to be just the same as those for the straight wedge disclination with an arbitrary (but small) Frank index in the classic theory [10]. It allows us to identify the elastic vortex with an individual wedge disclination. Stress tensor contains known logarithmic divergence for both $r \rightarrow 0$ and $r \rightarrow \infty$. The most essential difficulty results from the behaviour at the infinity. As it is known in the disclination theory, there are two possibilities to avoid this difficulty. Namely, one can consider arrays of disclinations, e.g., dipole as well as multipole configurations. Particularly, it was shown [9] that in many ways a disclination dipole behaves as an individual dislocation or a dislocation dipole. In this case, the stress fields do not diverge at infinity. Alternatively, one can consider a finite crystal with the appropriate boundary conditions for a disclinated material. Namely, the following boundary condition at the free surfaces of the elastic body must be imposed: $\Sigma_{kl}n_l = 0$. It implies that disclination-induced stresses can not result in the non-compensated surface forces. The classic problems of this sort include the description of a wedge disclination in a cylinder or in a disk. In fact, both these problems are very similar in their mathematical description (see, e.g., ref. [9]). It was shown that all the formulas for a cylinder are valid for a disk. One has only to perform a replacement of coefficients: $(1-\sigma)^{-1}$ to $(1+\sigma)$.

The topological origin of the disclination vortex will result in the non-trivial physical properties of disclinated materials. In particular, the possibility of the solid state realization of the Aharonov-Bohm (AB) effect [11] was predicted first for metals in refs. [12, 13] and for dielectrics in ref. [14]. It has been shown that the AB effect results in oscillations of physical characteristics (transport properties, magnetic susceptibility) with a certain fundamental period $\Phi_0 = hc/ne$ where $n = 1$ for pure metals and $n = 2$ for disordered metals and dielectrics.

There is another principal possibility to realize the AB-like effect in crystals. The fact is that the presence of topological defects in elastic medium changes the topology of space, a simple connected region becomes multiply connected whenever there are defects. As a result, the physical characteristics of quantum particles moving in defect medium will be modified in comparison with the defect free case.

The AB-like effect in dislocated crystals (called 'phase-dismatching') was predicted first by Kawamura in refs. [15]. He found that the Schrödinger equation for a tight-binding electron is reduced to the AB-like equation in the presence of a screw dislocation. In this case, the t-matrix is found to depend essentially on the z-th component of the electron wave vector. In another interesting paper [16] the effects of Berry's geometrical phase were established in analyzing the high-energy electron diffraction from a screw dislocation.

As we have shown [6], the AB-like effect can be realized in planar elastic medium with disclinations. In many respects this idea is similar to that considered in the gravitation theory where the gravitational analog of the AB effect was studied (see, e.g., ref. [17]). Namely, it was shown that the local curvature caused, e.g., by a static cylindrically symmetric cosmic string reflected in the phase of a quantum system moving through the otherwise flat space. It is known that a space with torsion and curvature is completely equivalent to an elastic continuum which has undergone plastic deformation being filled with dislocations and disclinations. Recently, some analogies between the geometry of planar arrays of disclinations and gravitation in (2+1) dimensions was studied in ref. [18]. In elastic continuum the disclination vortex will play a role analogous to a string. The long-range gauge vector potential due to a disclination vortex will induce a topological phase in direct analogy with the usual (electromagnetic) AB effect.

For example, we have shown that the relaxation time τ_{dis} related with disclination vortices has a form

$$\frac{1}{\tau_{dis}} = \frac{\hbar}{m^*} n_{dis} \sin^2 \pi \nu. \quad (13)$$

Here n_{dis} denotes the disclination density. Thus, there is the oscillating contribution to a conductivity σ (recall that $\sigma = n_e e^2 \tau / m^*$ within the free electron approximation) which depends crucially on the disclination flux characterized by the Frank index. Note that in isotropic continuum medium we have no restriction on the value of ν apart from $\nu > -1$ for topological reasons. In real crystals, however, the values of ν must conform to the point symmetry group of the underlying lattice. Namely, if we have the axis of m -fold symmetry, then the available values of ν are equal to $\nu = p/m$ where p is integer and fixes some restriction from above. Thus, we make a conclusion that the available values of ν are "quantized": $\nu = \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots$

Finally, we have established that conducting electrons or holes will acquire the Aharonov-Bohm-like phase in the presence of disclination vortex. The vortex has physical effect if

the disclination flux happens to be fractional. This fraction of a flux is defined fairly well in crystals where the symmetry of the lattice plays an essential role.

References

- [1] V.G.Makhankov and V.K.Fedyanin, Nonlinear Effects in Quasi-One-Dimensional Models of Condensed Matter Theory, *Phys.Reports*, **104**, 1984, p.1-86.
- [2] V.A.Osipov and V.K.Fedyanin, Polyacetylene and two-dimensional field theory models, Lectures for young scientists, JINR, P17-85-809, Dubna, 1985.
- [3] A.Kadić and D.G.B.Edelen, A gauge theory of dislocations and disclinations, in: Lecture notes in physics, Vol.174, eds.H.Araki, et al., (Springer, Berlin, 1983).
- [4] L.D.Landau and E.M.Lifshitz, Theory of Elasticity, (Nauka, Moscow, 1987).
- [5] V.A.Osipov, *Phys.Lett.*, **A146** (1990) 67.
- [6] V.A.Osipov, *Phys.Lett.*, **A164** (1992) 327.
- [7] V.A.Osipov, *Phys.Lett.*, **A193** (1994) 97.
- [8] D.R.Nelson, *Phys.Rev.B*, **28** (1983) 5515.
- [9] V.I.Vladimirov and A.E.Romanov, Disclinations in crystals (Leningrad, Nauka, 1986).
- [10] R.deWit, Continuum theory of disclinations (Moscow, Mir, 1977).
- [11] Y.Aharonov and D.Bohm, *Phys.Rev.*, **115** (1959) 485.
- [12] I.O.Kulik, *Pis'ma Zh.Eksp.Teor.Fiz.*, **11** (1970) 407 (*JETP Lett.* **11** (1970) 275).
- [13] B.L.Altshuler, A.G.Aronov and B.Z.Spivak, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **33** (1981) 101.
- [14] E.N.Bogachek, I.V.Krive, I.O.Kulik and A.S.Rozhavsky, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **97** (1990) 603.
- [15] K.Kawamura, *Z.Physik B*, **29** (1978) 101; *Z.Physik B.* **30** (1978) 1.
- [16] D.M.Bird and A.R.Preston, *Phys.Rev.Lett.*, **61** (1988) 2863.
- [17] S.Deser, R.Jackiw, and G.t'Hooft, *Ann.Phys.(NY)*, **152** (1984) 220.
- [18] A.Holz, *Class.Quantum Grav.*, **5** (1988) 1259.

Земля–атмосфера как самоорганизующаяся открытая динамическая система (к концепции регулируемого развития биосферы)

С.Ф.Тимашев

ГНЦ РФ НИФХИ им. Л.Я.Карпова, Москва

Разработка концепции регулируемого ("sustainable", "устойчивого") развития биосферы представляется важнейшей из междисциплинарных научных проблем [1]. основополагающая идея такой концепции может состоять в развитии представлений В.И.Вернадского о системе Земля–атмосфера как развивающейся динамической открытой системе, подверженной управляющим воздействиям со стороны Солнца и планет солнечной системы, при реализации множества взаимосвязей и внутреннего единства косного и живого вещества на всех пространственно-временных уровнях организации системы. При этом масштабы и характер "производственной деятельности" человека должны соотноситься как со способностями самой природы к восстановлению после разрушающих антропогенных воздействий и к самоочищению от загрязняющих и токсических веществ, так и с возможностями современной науки определять пределы "терпимости природы к оскорблениям" и границы допустимого риска. Модельные представления, отражающие указанные воздействия антропогенной и неантропогенной, в том числе, "космической" сущности и учитывающие сложную динамику всех геосфер с постоянно формирующимися массовыми потоками, включая образование воды и "восстановительных" мантийных флюидных потоков, формирование полезных ископаемых, процессы самовосстановления и самоочищения в биосфере, были развиты в [2,3].

Исходное положение модели — наличие в жидко–металлическом ядре Земли растворенного в высокой концентрации водорода, который "включивался" во формирующие Землю планетоземали как основной компонент солнечного ветра при ее образовании 4,6 млрд. лет назад [4]. Полагается, что плотность растворенного в жидкой фазе ядра Земли водорода может достигать 0,1 — 1,0 г/см³ при общей средней плотности жидко–металлического ядра ~ 10 г/см³. В меньших количествах в жидком ядре могут быть растворены гелий, азот, кислород, ионы которых входили в состав солнечного ветра "молодого" Солнца. Принятие одной лишь этой гипотезы приводит к разнообразным следствиям глобального масштаба, вскрывающим генезис внутренних и внешних взаимосвязей в системе Земля–атмосфера–Космос

и показывающим неизбежность формирования диссипативных структур в различных геосферах — от ядра Земли до средней и верхней атмосферы. Анализ таких феноменов или их проявлений, установление реализующихся взаимосвязей между геосферами позволит оценить степень адекватности предлагаемой модели и разработать подходы к выявлению упомянутых выше пределов устойчивости "нашего дома" — биосферы в условиях сильных воздействий неантропогенной и антропогенной сущности.

Перечислим основные следствия модели (см. также [2,3]).

1. Реализация на химически и термически неоднородной межфазной границе жидкое ядро–нижняя мантия эндотермических химических реакций восстановления оксидов (прежде всего, кремнезема) с образованием воды приводит к инициированию несимметричных, нерегулярных диссипативных структур Бенара–Марангони в прилежащих к границе жидко-металлических слоях ядра. Эти структуры (валы, вихри) с нерегулярной средней спиральностью будут обуславливать "химический механизм" возникновения затравочного магнитного поля, которое затем усиливается путем "растяжения" магнитных силовых линий при собственном вращении Земли ("динамо-механизм"). При этом эволюционные изменения геомагнитного поля могут связываться с неизбежными вариациями "химической активности" межфазной границы.

2. Возникающая в жидком ядре самоорганизующаяся система диссипативных структур может определяющим образом влиять как на формирование структурных неоднородностей мантии (процесс может быть самосогласованным) и системы линеаментов литосферы [5] через систему мантийных каналов, так и на инициирование конвективных движений в самой мантии, включая апвеллинг мантийных плюмов и "перевороты мантии" [6].

3. Генерируемый на межфазной границе ядро–нижняя мантия массовый поток "вверх" (помимо молекул воды, водорода и кислорода его компонентами могут быть выходящие из ядра гелий и азот, а также образующиеся при последующих химических реакциях в мантии метан и оксид углерода) переносятся через мантию к поверхности Земли. Происходит подпитка "мантийной водой" разнообразных водных систем, поддерживаются процессы (в том числе микробиологические стадии) формирования углерод- и металлосодержащих диссипативных структур — месторождений полезных ископаемых (нефть, угли, сланцы, шунгиты, руды). При этом стационарное в среднем состояние биосферы обуславливается уходящими "вверх" через атмосферу в космос (из области экзосферы) массовыми потоками.

4. Такие "самоорганизующиеся" потоки с пространственно-временным распределением, определяемым сложной динамикой геосфер, а также потоки вещества, падающего из космоса на Землю (компоненты солнечного ветра, метеоры, космическая пыль) должны обуславливать "стохастически детерминированные" (коррели-

рованные) [7] вариации суммарного момента количества движения системы Земля–атмосфера. Практическая неизменность последней величины (обсуждение общих принципов устойчивости звездных и планетарных систем в рамках принципа Маха и его возможных обобщений выходит за рамки данного сообщения) дает основание полагать, что обмен массовыми потоками между Землей и ближним Космосом должен с необходимостью сопровождаться процессами, приводящими к компенсации изменений суммарного момента количества движения системы Земля–атмосфере. Это могут быть процессы, связанные с флуктуациями магнитного поля Земли (“механизм Фейнмана” [3]), а также с локальными перестройками литосферы или верхней мантии (при землетрясениях, извержениях вулканов [2]). Установление механизмов реализации таких перестроек, приводящих часто к катастрофическим последствиям, с разработкой методик их прогнозирования несомненно должны стать элементами разрабатываемой концепции регулируемого развития.

5. Результирующие потоки “вверх” функционально играют очистительную роль для биосферы, поскольку способны уносить за пределы земной атмосферы часть вредных и токсических соединений (или их фрагментов), не разложившихся в атмосфере под действием главных “санитарных” агентов — гидроксила и озона [8], а также при разнообразных фото- и фотокаталитических процессах. Эти же “очистительные” потоки “вверх”, по-видимому, могут участвовать, наряду с массовыми потоками от Океана в формировании самоорганизующихся парогазовых потоков (“рек”) в тропосфере, причем мощность некоторых из них может превосходить сток Амазонки. Выявление природы образования пространственно-временных структур в атмосфере, равно как и океанических течений необходимо для адекватного моделирования динамики биосферы и процессов ее самоочищения и самовосстановления.

6. Вариации солнечной активности обычно рассматривается как основной переменный “управляющий” фактор, воздействующий на эволюцию биосферы. Согласно [3], такие вариации могут определяться особенностями траектории центра масс Солнца при его движении относительно барицентра (Солнце может удаляться относительно центра масс солнечной системы на расстояния, более чем вдвое превышающие солнечный радиус [9]). При таком движении неоднородность гравитационных воздействий на различные области Солнца и инерция солнечного вещества приводят к возникновению в Солнце колебательных и вихревых движений, которые могут инициировать изменения в наблюдаемой солнечной активности на разнообразных пространственно-временных уровнях — от вариаций потоков нейтрино из центральных областей Солнца до изменений в интенсивности излучения солнечной короны [10]. Здесь мы обращаем внимание еще на одно обстоятельство. В [9] было показано, что несмотря на сложный характер движения центра масс Солнца относительно барицентра, расстояние от Земли до Солнца при этом практически не

изменяется, что подтверждается неизменностью величины солнечной постоянной. Но этот вывод в то же время означает, что центр масс Земли совершает такое же неинерциальное движение, как и центр масс Солнца. Поскольку в системе Земля–атмосфера также могут генерироваться вихревых и колебательные движения (не только в атмосфере и океане, но и в жидко–металлическом ядре), а литосфера и отчасти мантия способны к небольшим структурным перестройкам, указанное движения центра масс Земли, осложняемое гравитационным воздействием со стороны Луны, может приводить к циклическим явлениям планетарного масштаба. Конечно, модельный расчет таких перестроек и вихревых возбуждений еще более сложен, чем в случае Солнца. Поэтому более актуальным сейчас представляется поиск, обнаружение и исследование таких феноменов. Это тем более важно, что некоторые из известных, но пока непонятых крупномасштабных явлений природы, таких как Эль-Ниньо или Гольфстрим, которые могут иметь именно указанную природу, в значительной мере определяют экологическое состояние больших территорий Земли и судьбы многих людей. Может оказаться, что энергия диссипации, выделяемая при рассматриваемых структурных перестройках, вихревых и колебательных возбуждениях в Земле и обычно не учитываемая в общем балансе тепловых потоков, достаточна для разрешения т.н. парадокса "малого Солнца" [11]. Согласно [11], при тех потоках энергии, которые Земля получала от Солнца в течение 4 млрд. лет, начиная с периода "малого Солнца", светимость которого была на треть меньше сегодняшней, а также при учете известных тепловых потоков из недр Земли, поверхность Земли должна быть покрыта ледяным панцирем. Но этого никогда не было в истории Земли.

Возможности современной компьютерной техники и успехи в компьютерном моделировании динамики достаточно сложных нелинейных систем дают надежду на прогресс и в моделировании динамики природных явлений. Использование нелинейных моделей с реализацией в их решениях бифуркационных переходов между различными состояниями рассматриваемой системы позволит не только представить особенности динамики отдельных фрагментов системы Земля–атмосфера и биосферы, в частности, но и последовательно ввести [2] такие важные для понимания и направленного регулирования эволюции экосистем характеристики, как ПДВ ("предельно допустимые выбросы"), ПДК ("предельно допустимые концентрации"), ПДП ("предельно допустимое потребление").

Представления о нелинейной динамике сложных многофакторных процессов лежат и в основе современных методов анализа экспериментальных данных (в частности, временных рядов динамических переменных), характеризующих эволюцию природных систем. Наряду с известными методами [12] — определением фрактальной размерности, показателей Ляпунова, К–энтропии Колмогорова — весьма эффективным может оказаться новый динамический метод анализа — фликкер–шумо-

вая спектроскопия [13,14], позволяющая получать информацию о характере релаксационных процессов в исследуемой системе и о ее изменении в ходе ее эволюции.

Список литературы

- [1] Н.Н.Моисеев, Вопросы философии, **1**, 3, (1995).
- [2] С.Ф.Тимашев, Успехи химии, **60**, 2292, (1991).
- [3] С.Ф.Тимашев, Журн. физ. химии, **67**, 160, (1993).
- [4] М.Озима, Ш.Зацу, 27-й Межд. геол. конгресс, Геохимия и космохимия, М.: Наука, 1984. Т. II, С.87.
- [5] П.А.Беспрозванный, Э.В.Бородзич, В.А.Буш, Физика Земли, **2**, 57, (1994).
- [6] M.Stein and A.W.Hofmann, Nature, **372**, 63, (1994).
- [7] С.Ф.Тимашев, Журн. физ. химии, **68**, 2216, (1994).
- [8] С.Ф.Тимашев, С.П.Перов, Э.Е.Гутман, Журн. физ. химии, **68**, 1360, (1994).
- [9] В.П.Долгачев, Л.М.Доможилова, А.И.Хлыстов, Тр. Гос. астроном. ин-та им. П.К.Штернберга. М.: Изд-во МГУ, 1991, Т.62, С.111.
- [10] S.F.Timashev and I.G.Kostioutchenko, 13-th Int. Conf. Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations — ICNF'95. Palanga, Lithuania.
- [11] А.В.Бялко, Природа, **3**, 39, (1994).
- [12] Г.Шустер, Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988, 240 с.
- [13] С.Ф.Тимашев, Журн. физ. химии, **68**, 2216, (1994).
- [14] С.Ф.Тимашев, Журн. физ. химии, **68**, 953, (1994).

Path - integral and semiclassical dynamics of photons with pair correlation

V.S.Yarunin¹ and L.A.Siurakshina²

¹*Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics,*

²*Laboratory of Computing Techniques and Automatization,*

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

Abstract

The path-integral representation for the two-photon process with a quantum pump is considered and gives the semiclassical picture via the condition for the action $(S/\hbar) > 1$. The corresponding inequalities for frequencies, amplitudes and dipole interaction appears in the nonlinear dynamics both of pump and registered field. These inequalities show the border of the regimes of the given and classical pump as well as the difference between nonlinear and parametrical effects.

The recent interest in the wide class of quantum electromagnetic field states which have not classical analogies has been stimulated by a development of experimental technics in the quantum optics. One of this states is the electromagnetic field state with Sub-Poisson photon statistics. It corresponds to the smaller fluctuation as compared with coherent state which is close to laser field state. The criterion of the Sub-Poisson effect existence is that the average occupation number $\langle n \rangle$ exceeds its variance $V(n)$ [1] - [3]:

$$V(n) < \langle n \rangle$$

Formerly the details for the existence condition of Sub-Poisson photon statistics in the model of parametric amplification of the signal and noise superposition was established in the work [4]. The test of thermodynamic equilibrium Sub-Poisson effect was made in the papers [5], [6]. However all these models corresponds to classical pumping. In this paper we will touch quantum pumping in order to understand the frames of the classical approximation to be justice.

Hamiltonian of the resonant tree-boson interaction is

$$H = \sum_{j=1}^3 \omega_j a_j^\dagger a_j + g(a_1 a_2 a_3^\dagger + a_3 a_2^\dagger a_1^\dagger), \quad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad (1)$$

g is the interaction constant, ω_j is the frequency corresponding to j oscillator. This Hamiltonian gives a complete quantum description of second harmonic generation, frequency

conversion, so that a_3 is amplitude of pump, while $a_{1,2}$ are the amplitudes of generated fields.

By using path-integral method we will consider the condition of applicability of the classical pumping by the way of research of the photon statistics. It is convenient to define the average photon number $\langle n_i \rangle$ and its variance $V(n_i)$ for the problem of the Sub-Poisson statistics of the model (1) by the generating function

$$P_i = \text{Tr}(e^{-\varepsilon a_i^\dagger a_i} R),$$

$$\langle n_i \rangle = \langle a_i^\dagger a_i \rangle = -\frac{\partial P_i}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad V(n_i) = \frac{\partial^2 P_i}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} - \langle n_i \rangle^2, \quad (2)$$

where $R = UR_0U^+$, U - evolution operator and R_0 - operator defining an initial system condition. For the thermodynamic equilibrium case R is equal to Gibbs operator. P should be calculated in the coherent state representation

$$P_i = \int d\mu \langle z|U^+|z' \rangle \langle z'|e^{-\varepsilon a_i^\dagger a_i}|z'' \rangle \langle z''|U|z''' \rangle \langle z'''|R_0|z \rangle,$$

$$d\mu = \pi^{-4} d^2 z d^2 z' d^2 z'' d^2 z'''.$$

Let us describe the matrix element of the evolution operator

$$\langle z|U|z' \rangle = J \exp\left(-\frac{|z|^2}{2} - \frac{|z'|^2}{2}\right), \quad (3)$$

with the functional integral representation

$$J = \int \prod_i Da_i^* Da_i \exp(\Phi), \quad \Phi = iS + \frac{1}{2} \sum_i (z_i^* a_i(t) + z_i' a_i^*(0)) \quad (4)$$

$$z_i^* = a_i^*(t), \quad z_i' = a_i(0), \quad S = \int_0^t \left\{ \frac{i}{2} \sum_i \left[a_i^* \frac{d}{d\tau} a_i - a_i^* \frac{d}{d\tau} a_i \right] - H(\tau) \right\} d\tau \quad (5)$$

Hamiltonian function H is obtained from Hamiltonian H after replacing operators by trajectories. The pump amplitude a_3 is taken as given C -number usually, as far as it is assumed to be a strong enough. In the opposite case we must consider a_3 as the unknown quantum amplitude which must be determined together with $a_{1,2}$. Such problem can not be solved exactly because the dynamics of this system is nonlinear.

We are going to use a semiclassical approximation with the purpose to make clear the frames of C -number picture and follow the transformation of the non-linear process to the

parametrical one. Really, the dimensionless function S in (4) is the physical \tilde{S} divided by \hbar . So, we have a semiclassical approximation when

$$S = (\tilde{S}/\hbar) > 1. \quad (6)$$

In this case the problem of dynamics reduces to the solution of the functional saddle-point equation which is resulted from the condition $\delta S = 0$. Therefore the approximated semiclassical formula is the following

$$\int \prod_i Da_i^* Da_i e^S \sim e_0^S \int \prod_i Da_i^* Da_i e^{\delta^2 S} = \frac{\exp(\Phi_0)}{\sqrt{\text{Det} \delta^2 S_0}}, \quad (7)$$

$$\Phi_0 = iS_0 + \frac{1}{2} \sum_i z_i^* a_{0i} + z_i' a_{0i}^*, \quad z_i^* = a_i^*(t), \quad z_i' = a_i(0),$$

where the subscript '0' means that the action S and the determinant of its second variation are calculated on the extreme path a_0, a_0^* .

As the first step of our research we take the classical limit $a_3 \rightarrow C$ - number and show the application of the path-integral method in the simplest situation preliminary. This problem is solved exactly and we treat both statical and dynamical versions of it. In the first of these cases the photon-phonon interpretation of the problem is the best one [7].

1. Statical nongenerate case.

Hamiltonian of two-boson interaction

$$H_1 = \omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_2 a_2^+ a_2 + g(a_1 a_2 + a_2^+ a_1^+), \quad (8)$$

may be used for description of simplest case of monochromatic light interaction with isotropic crystal. In this case $a_1^+(a_1)$ - creation (annihilation) photon operator and $a_2^+(a_2)$ - phonon operator accordingly. For establishing quantum statistics (phonon or photon) we introduce the function:

$$F_i = V(n_i) - \langle n_i \rangle, \quad i = 1, 2.$$

If F_i is negative the quantum statistics is Sub-Poisson. When F_i is equal to zero we have Poisson statistics and Super-Poisson, if F_i is positive.

To define F_i according to (2) in the thermodynamic equilibrium state it is need to calculate the matrix elements of Gibbs operator. Using Euclidean transformation

$$it \rightarrow \beta, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

in the formulae (3-5) we go from matrix elements of the evolution operator to matrix elements of Gibbs operator. To utilize formula (7) we should solve differential equation system:

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{d\tau}a_1 - \omega_1 a_1 - g a_2^* &= 0, & a_1(0) &= z'_1, \\
\frac{d}{d\tau}a_1^* - \omega_1 a_1^* - g a_2 &= 0, & a_1^*(\beta) &= z_1^*, \\
-\frac{d}{d\tau}a_2 - \omega_2 a_2 - g a_1^* &= 0, & a_2(0) &= z'_2, \\
\frac{d}{d\tau}a_2^* - \omega_2 a_2^* - g a_1 &= 0, & a_2^*(\beta) &= z_2^*.
\end{aligned} \tag{9}$$

which gives the exact solution of the system (8) via saddle-point ($\delta S = 0$) trajectories. Their values on the boundary term of the phase Φ are:

$$\begin{aligned}
a_1^*(0) &= \frac{1}{T} \left[z_1^* e^{-\frac{\Delta}{2}\beta} - g \frac{\sinh \beta E}{E} z'_2 \right], & T &= \cosh \beta E + \bar{\omega} \frac{\sinh \beta E}{E}, \\
a_1(\beta) &= \frac{1}{T} \left[z'_1 e^{-\frac{\Delta}{2}\beta} - g \frac{\sinh \beta E}{E} z_2^* \right], & E^2 &= \bar{\omega}^2 - g^2, \\
a_2(0) &= \frac{1}{T} \left[z'_2 e^{\frac{\Delta}{2}\beta} - g \frac{\sinh \beta E}{E} z_1^* \right], & \bar{\omega} &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \\
a_2^*(0) &= \frac{1}{T} \left[z_2^* e^{\frac{\Delta}{2}\beta} - g \frac{\sinh \beta E}{E} z'_1 \right], & \Delta &= \omega_1 - \omega_2.
\end{aligned} \tag{10}$$

So, the phase of the integral on the paths, which supply $\delta S = 0$ is

$$\Phi_0 = \frac{1}{T} \left[z_1^* z'_1 e^{-\frac{\Delta}{2}\beta} + z_2^* z'_2 e^{\frac{\Delta}{2}\beta} - g \frac{\sinh \beta E}{E} (z_1^* z_2^* + z'_1 z'_2) \right]. \tag{11}$$

The calculation of the second variation of the action operator in (7)

$$\text{Det} \delta^2 S_0 = \text{Det} K, \quad S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p \\ p^* \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} p \\ p^* \end{pmatrix}, \quad p^* = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2^* \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2 \end{pmatrix}$$

may be reduced to defining the inverse operator K^{-1} with the zero boundary conditions

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\ln K) &= \ln(\text{Det} K), & \frac{\partial}{\partial g} \ln(\text{Det} K) &= \text{Tr}(K^{-1} \frac{\partial K}{\partial g}), \\
\text{Det} K &= \exp \left(\int dg \text{Tr}(K^{-1} \frac{\partial K}{\partial g}) \right), \\
\begin{pmatrix} p \\ p^* \end{pmatrix} &= K^{-1} \begin{pmatrix} A \\ A^* \end{pmatrix}, & a_1(0) &= a_2(0) = 0, & a_1^*(\beta) &= a_2^*(\beta) = 0.
\end{aligned}$$

The solution of the differential equations system (9) with the zero boundary conditions is equal to

$$\begin{pmatrix} p \\ p^* \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} A \\ A^* \end{pmatrix} = \int_0^\beta d\tau' \left\{ \Theta(\tau - \tau') e^{-M(\tau - \tau')} - e^{-M\tau} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} e^{-M(\beta - \tau')} \right\} \sigma \begin{pmatrix} A \\ A^* \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} \omega_1 & g \\ -g & -\omega_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_3 \\ -\Lambda_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{T} e^{-\frac{\Delta}{2}\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T} e^{\frac{\Delta}{2}\beta} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

As a result we obtain external integral factor

$$\text{Det} \delta^2 S = \left(\frac{T}{T_0} \right)^2, \quad T_0 = T|_{g=0} = e^{\beta \bar{\omega}} \quad (12)$$

and in accordance with (2,4,11,12) the generating function is

$$P_{\epsilon 1,2} = \frac{2(\cosh \beta E - \cosh \frac{\Delta}{2}\beta)}{2(\cosh \beta E - \cosh \frac{\Delta}{2}\beta) + \epsilon(\cosh \beta E - \frac{\bar{\omega}}{E} \sinh \beta E - \exp(\mp \frac{\Delta}{2}\beta))} \quad (13)$$

which gives the result

$$F_i = \langle n_i \rangle^2, \quad i = 1, 2$$

$$\langle n_{1,2} \rangle = \frac{\exp(\mp \frac{\Delta}{2}\beta) - \cosh \beta E + \frac{\bar{\omega}}{E} \sinh \beta E}{2[\cosh \beta E - \cosh \frac{\Delta}{2}\beta]} \quad (14)$$

Evidently, the condition of Sub-Poisson statistics of both phonon and photon is not fulfilled for any parameters values of the system ω_1, ω_2, T, g . The above calculation shows that the statement [6] concerning the possibility of the equilibrium state with Sub-Poisson statistics must be revised. Surely, this result may be received by the help of the canonical transformation in (9) as well. Still we prefer to present the functional- integral method here as far as we use it in the rest part of the paper.

2. Classical pumping. Degenerate parametrical process.

The Hamiltonian of the bose-oscillator

$$H_2 = \omega a^+ a + \frac{\tilde{g}}{2} (a^2 e^{i2\omega t - i\varphi} + (a^+)^2 e^{-i2\omega t + i\varphi}) \quad (15)$$

describes the parametric excitement on the frequency 2ω (pumping) of the field with the frequency ω of the fundamental wave, φ - is a pumping phase, \tilde{g} - is a pumping amplitude a_3 multiplied by the interaction constant. The initial distribution for the radiation with the frequency ω is assumed to be Gibbs distribution [4]:

$$R_0 = \frac{1}{Q} e^{-\beta(\omega a^+ a + j a^+ + j^* a)},$$

$$Q = \frac{\exp(|j|^2/(\omega\beta))}{1 - \exp(-\omega\beta)} = \text{Tr} R_0, \quad \beta = T^{-1}, \quad (16)$$

describing a superposition of the coherent signal with the intensity j and of the thermal noise at the temperature \tilde{T} . It may be shown [4], [8] that the Poisson distribution $\rho_0 = |z_0\rangle\langle z_0|$ is the limit of the initial distribution (14) at the zero-temperature and the parameter z_0 is connected with the distribution parameter (14) by the formula $z_0 = \frac{j}{\omega}$. At high temperatures distribution (14) is the Plank distribution. The competition between these distributions leads to the formation of a new statistical state.

The generating function P may be calculated by the use formulae (2,7). It is obtained in the way similar to the way (9-12). The result of such calculation [8] coincides with that one received by these authors earlier in the different way [4]. It gives the formula for the F function [4], [8]

$$F = V - \langle n \rangle = \sinh(\tilde{g}t) \left[\frac{\sinh(3\tilde{g}t) - \sinh(\tilde{g}t)}{2} + 2 \frac{|j|^2}{\omega^2} \sinh(3\tilde{g}t) + \right. \\ \left. + 2 \frac{|j|^2}{\omega^2} \cosh(3\tilde{g}t) \sin(\varphi - 2\theta) \right] + (V - \langle n \rangle)_\beta, \quad (17)$$

$$(V - \langle n \rangle)_\beta = n_0^2 \cosh(4\tilde{g}t) + 2n_0 \sinh(\tilde{g}t) \sinh(3\tilde{g}t) + \\ + 2n_0 \frac{|j|^2}{\omega^2} (\cosh(4\tilde{g}t) + \sinh(4\tilde{g}t) \sin(\varphi - 2\theta)),$$

$$n_0 = (e^{\omega\beta} - 1)^{-1}, \quad \theta = \arg(j),$$

which is the exact solution of the problem with the bilinear Hamiltonian and initial distribution.

The Sub-Poisson photon statistics of the field with the frequency ω is said to take place if the inequality $V - n < 0$ is fulfilled. At zero temperatures in formulae (15) the terms $\langle n \rangle_\beta$ and $(V - \langle n \rangle)_\beta$ are equal to zero and these formulae coincide with the

well known one [2] which is obtained for the initial distribution ρ_0 . The inequality $V < n$ is fulfilled when the relation between the phases is equal to $\varphi - 2\theta = -\frac{\pi}{2}$. With increasing temperature the positive addend $(V - \langle n \rangle)_\beta$ describes the influence of the thermal noise and prevents the establishment of the Sub-Poisson photon statistics. Also, this is prevented by the first terms in the square brackets (15) which are independent of the initial field j and describe the quantum noise. It can be noted that the thermal fluctuations are important at a small evolution time ($\tilde{g}t < 1$). On the contrary, the quantum fluctuations are important at large times ($\tilde{g}t > 1$), if the frequency is large enough $\omega > j$.

3. Quantum pumping. Degenerate nonlinear process.

It is seen, that the "classical pump" approximation gives the exact result in the problems with bilinear Hamiltonians (8) and (15). The quantum and classical properties of the registered field a_1 (or a_2) were discussed in this approximation. Now let us turn to the general threelinear case (1), when $a_1 = a_2$. Using the equation $\delta S = 0$ for the assumed semiclassical situation (6) we receive the equation for the extremal trajectories $a_1(t), a_1^*(t), a_3(t), a_3^*(t)$

$$\begin{aligned}
 -i \frac{d}{d\tau} a_{03}^* - \omega_3 a_{03}^* - \frac{g}{2} (a_{01}^*)^2 &= 0, \\
 i \frac{d}{d\tau} a_{03} - \omega_3 a_{03} - \frac{g}{2} (a_{01})^2 &= 0, \\
 -i \frac{d}{d\tau} a_{01}^* - \omega_1 a_{01}^* - g a_{03}^* a_{01} &= 0, \\
 i \frac{d}{d\tau} a_{01} - \omega_1 a_{01} - g a_{03} a_{01}^* &= 0,
 \end{aligned} \tag{18}$$

Except the approximation (6) for the equations (18) to be valid we notice that some additional approximation must be introduced. Really, the nonlinear equations (19) (even they are valid) can not be solved exactly. In order to look for the existence condition of semiclassical approximation we put the trajectories $a_3(t), a_3^*(t)$ to be constant

$$\frac{d}{d\tau} a_{03} = 0, \quad a_{03} = \tilde{a}_3 e^{-i\varphi}. \tag{19}$$

In this case we take the solution of the last two equations (18)

$$\begin{aligned}
 a_{01}^* e^{-i\omega_1 \tau} &= \cosh(g\tau \tilde{a}_3) a_{01}^*(0) + i \sinh(g\tau \tilde{a}_3) a_{01}(0) e^{i\varphi}, \\
 a_{01} e^{i\omega_1 \tau} &= \cosh(g\tau \tilde{a}_3) a_{01}(0) - i \sinh(g\tau \tilde{a}_3) e^{-i\varphi},
 \end{aligned} \tag{20}$$

which depends on the amplitudes a_{03}, a_{03}^* . One may notice that it follows from the first two equations (18) that the amplitude a_{01} is close to the value

$$a_{01}(\tau) \sim a_{01}(0) = \tilde{a}_1 e^{-i\Phi} = -\frac{2\omega_3}{g} \sqrt{a_{03}} \quad (21)$$

as far as the approximation for a_{03} is valid. The equation system (20) according with (19) and (21) may be transformed to the equations:

$$\begin{aligned} -\frac{2\omega_3}{g} \tilde{a}_3 e^{i\varphi} &= \tilde{a}_1^2 e^{i2\omega\tau} [\cosh(g\tau\tilde{a}_3) e^{i\Phi} + i \sinh(g\tau\tilde{a}_3) e^{-i(\Phi-\varphi)}]^2, \\ -\frac{2\omega_3}{g} \tilde{a}_3 e^{-i\varphi} &= \tilde{a}_1^2 e^{-i2\omega\tau} [\cosh(g\tau\tilde{a}_3) e^{-i\Phi} - i \sinh(g\tau\tilde{a}_3) e^{i(\Phi-\varphi)}]^2, \end{aligned} \quad (22)$$

which will give the condition looked for the parameters of the system. After taking into account the phase shift $\Phi - \frac{\varphi}{2} = \pi$ in (21), the system (22) may be rewritten in the form

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2\omega_3}{g}} \frac{\sqrt{\tilde{a}_3}}{\tilde{a}_1} \sin(\omega_1\tau - \pi) &= \cosh(g\tau\tilde{a}_3) \cos(2\pi), \\ \sqrt{\frac{2\omega_3}{g}} \frac{\sqrt{\tilde{a}_3}}{\tilde{a}_1} \cos(\omega_1\tau + \pi) &= \sinh(g\tau\tilde{a}_3) \cos(2\pi), \end{aligned} \quad (23)$$

which gives

$$\cos(2\omega\tau) = -\frac{1}{\cosh(2g\tau\tilde{a}_3)}.$$

The condition (23) together with the inequality (6) is the condition for semiclassics to be a good approximation. As far as the action S was introduced in the symmetrical form, its contribution S_0 to the phase Φ is zero. As to the boundary terms in (7) we must satisfy the inequality (6) and receive the condition $\tilde{a}_3 > 1$. Two possibilities may happen in this case:

$$g\tilde{a}_1 > \frac{1}{\tilde{a}_3}.$$

These two possibilities correspond to the inequalities:

$$g\tilde{a}_1^2 > \omega_3, \quad \text{and} \quad g\tilde{a}_1^2 < \omega_3\tilde{a}_3. \quad (24)$$

The first of them assumes that the pump is low-frequency, a dipole interaction is strong, the initial field \tilde{a}_1 is strong too. The second of them means that the dipole interaction is weak and initial field \tilde{a}_1 is weak too.

These inequalities give the quantitative measure of the applicability of the "classical pump" ($a_3 \rightarrow C$ -number) approximation in (1). They mean that the condition for the "classical pump" approximation to be valid touches the initial amplitudes of the fields, frequencies and the coupling constant. Namely, the frequency of the pump must be small or its amplitude must be large in accordance with (24).

So the influence of quantum fluctuation of the generated field in the parametrical process (15) is regulated by its initial magnitude j due to the parameter $j\omega^{-1}$ in (17). The role of the initial condition in such process was underlined earlier in [9]. The influence of quantum property of the pump in nonlinear process is also determined by the initial amplitudes of the fields. Still the additional parameter $g\omega_3^{-1}$ appears in this case. This parameter is the measure of nonlinearity: it shows the magnitude of dipole interaction g respecting to the energy of quanta ω_3 and it absent in the parametric process. Thus the main point is that the parametrical process (15) does not full the deviation g/ω , as far as this process is bilinear in the amplitude may be describe exactly. Just the opposite the dynamics of the nonlinear process (1) is approximative and depends on the relative value of interaction g/ω_3 . Let us take into account the inequality $(g/\omega_3) \ll 1$ for the optical scale of frequency. Therefore, the initial amplitude of the generated field may be large when the period of interaction is small ($g\tau < \tilde{a}_3^{-1}$) and must be small when the period of interaction is large ($g\tau > \tilde{a}_3^{-1}$).

References

- [1] D.Stoler, Phys.Rev.Lett. 33 (1974) 1397.
- [2] Y.Perina. Quantum statistics of the linear and non linear optical phenomena. Mir. 1987.
- [3] M.C.Teich and B.E.A.Salech. Quant.Opt. 1 (1989) 153.
- [4] L.A.Siurakshina and V.S.Yarunin. Phys.Lett. A 164 (1992) 167.
- [5] A.S.Shumovsky. Teor.i Math.Fis. 89 (1991) 438.
- [6] B.B.Govorcov(jr.) and A.S.Shumovsky. Zs.Exp.Teor.Fis. 101 (1992) 1270. 164 (1992) 167.
- [7] A.V.Chizhov and R.G.Nazmitdinov. Pis'ma Zs.Exp.Teor.Fis. 52 (1991) 993
- [8] L.A.Siurakshina and V.S.Yarunin. Teor.i Math.Fis. 92 (1992) 158.
- [9] D.N.Klyshko. Phys.Lett. A 146 (1990) 93.

95-129

Ответственный за выпуск: В.А.Осипов

Фото Ю.А.Туманова

**Рукопись поступила 20.03.95. Подписано в печать 23.03.95
Формат 60×84/8. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 4,5
Тираж 240. Заказ 48061**

**Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области**