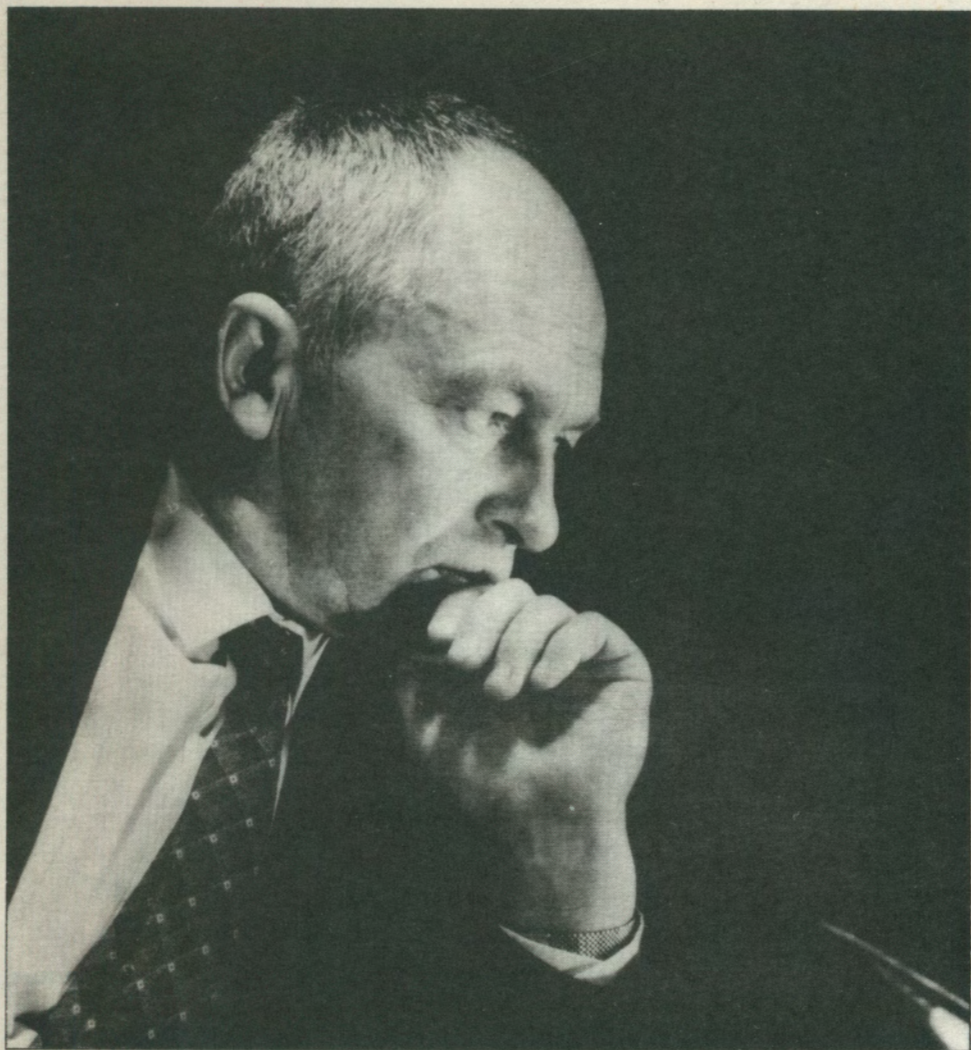


СЗГ

Е-912



**Гарий Владимирович
ЕФИМОВ**

500457

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

СЗГ
E-912

Гарий Владимирович
ЕФИМОВ

К 60-летию со дня рождения

Дубна 1994

140 999



Краткий очерк научной деятельности

... и пусть люди легкомысленные полагают, будто несуществующее в некотором роде легче и безответственнее облечь в слова, нежели существующее, однако для благоговейного и совестливого человека всё обстоит как раз наоборот: ничто так не ускользает от изображения в слове и в то же время ничто так настоятельно не требует передачи на суд людей, как некоторые вещи, существование которых недоказуемо, да и маловероятно, но которые именно благодаря тому, что люди благоговейные и совестливые видят их как бы существующими, хотя бы на один шаг приближаются к бытию своему, к самой возможности рождения своего.

Герман Гессе
"Игра в бисер"

В 1958 году в Лабораторию теоретической физики, в сектор Дмитрия Ивановича Блохинцева пришёл выпускник МИФИ Гарий Владимирович Ефимов. За тридцать пять лет, истекших с тех пор, им пройден большой путь в науке. Первым существенным результатом Гария Владимировича стало обобщение и применение в теории поля матричного метода решения дифференциальных уравнений Лаппо - Данилевского. Используя этот метод для изучения некоторых моделей квантовой теории поля, Г.В. Ефимов развил процедуру перенормировок для этих моделей и получил ряд интересных свойств перенормированных величин, в частности, свойство ограниченности перенормированной константы связи. Цикл работ лёг в основу его кандидатской диссертации. Итогом этих первых исследований было и то, что определилась направленность интересов Гария Владимировича на проблемы квантования, перенормируемости, сильной связи в квантовой теории поля.

Помимо большого класса перенормируемых теорий, весьма интересными с фи-

зической точки зрения являются так называемые неперенормируемые теории поля, в которых возникают принципиальные трудности, связанные с ультрафиолетовыми расходимостями. Среди попыток преодоления этих трудностей особое место занимает нелокальная квантовая теория поля. История изучения релятивистских теорий поля с нелокальным взаимодействием начинается с 1934 года и связана с именами таких ученых как Г. Ватагин, М.А. Марков, Д.И. Блохинцев, И.Е. Тамм, Х. Мак Манус, Х. Юкава, К. Блох, В. Паули, Р. Пайрлс, Е. Штюкельберг, Е.С. Фрадкин, В.Г. Кадышевский, Д.А. Киржниц, В.Я. Файнберг и др. После многих разнообразных исследований, к началу 60-х годов выяснилось, что нелокальная квантовая теория поля содержит свои собственные трудности, которые, казалось, полностью закрывают возможность непротиворечивой формулировки.

Оригинальный выход из этой ситуации был предложен Г.В. Ефимовым – ему удалось открыть новый класс формфакторов, с помощью которых была построена нелокальная квантовая теория поля, удовлетворяющая требованиям релятивистской инвариантности, макропричинности и унитарности. Новый метод позволил описать теорию с неполиномиальными лагранжианами, что дало возможность, в частности, провести расчёты в физически интересных киральных теориях. На разработку этого метода ушли годы напряжённого труда, были написаны десятки статей, сделано множество докладов на семинарах, конференциях и совещаниях. В научную литературу вошли такие понятия, как метод Ефимова – Фрадкина для неполиномиальных лагранжианов, нелокальные обобщённые функции класса Ефимова, нелокальная теория поля Ефимова.

В 1968 году Гарий Владимирович защитил докторскую диссертацию, а в 1977 вышла его первая монография: "Нелокальные взаимодействия квантованных полей".

Одной из центральных проблем в квантовой теории поля является проблема сильной связи, не позволяющая использовать стандартные методы теории возмущений. Необходимо было выйти за рамки этого метода, и здесь Гарием Владимировичем был сделан существенный шаг вперёд. Используя тонкие математические приёмы и строгое определение функционального интеграла, ему удалось доказать существование

конечной S -матрицы в нелокальных и суперперенормируемых теориях для произвольных констант связи, а также найти асимптотическое поведение физических величин в пределе сильной связи. Таким образом, был построен пример конечной самосогласованной четырёхмерной релятивистской квантовой теории поля. Результаты этих исследований обобщены во второй монографии: "Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий", вышедшей в 1985 году.

В 1975 году Г.В. Ефимов выдвинул интересную идею о том, что удержание кварков в адроне можно реализовать релятивистски инвариантным образом в рамках нелокальной квантовой теории поля. Такая теория допускает квантованное поле (впоследствии названное виртонным), которое не существует в свободном состоянии, а проявляется только в виртуальных переходах. Использование виртонного поля для описания кварков привело к возникновению виртон-кварковой модели адронных взаимодействий. В рамках этой модели было изучено множество эффектов низкоэнергетической адронной физики. Цикл исследований был удостоен премии ОИЯИ за 1981 год.

Логическим продолжением виртон-кварковой модели явилась модель конфайнмированных кварков (МКК), предложенная Гаррием Владимировичем и его учениками в середине 80-х годов. МКК – релятивистская кварковая модель, основанная на определенных представлениях об адронизации и конфайнменте легких кварков. Модель конфайнмированных кварков явилась удачным инструментом исследования адрон-адронных взаимодействий при низких и промежуточных энергиях. В рамках этой модели с единой точки зрения описаны различные эффекты адронной физики: константы и формфакторы сильных, слабых и электромагнитных распадов, длины и фазы низкоэнергетического $\pi\pi$ -, πN - и NN - рассеяния, поляризационные характеристики пионов и каонов и т.д.. Удалось также обобщить МКК на физику адронов, содержащих один тяжелый c - или b -кварк. Интерес к этой области физики элементарных частиц особенно возрос в последние пять лет в связи с открытием Изгуром и Вайзе новой группы симметрии сильных взаимодействий в секторе тяжелых кварков. В МКК детально описаны полулептонные распады тяжелых адронов: формфакторы и ширины

распадов, дифференциальные распределения и лептонные спектры. Все эти исследования составили основу еще одной монографии – G.V.Efimov & M.A.Ivanov. The Quark Confinement Model of Hadrons (IOP Publishing, Bristol & Philadelphia, 1993).

Теория критических явлений в квантовополевых системах – одна из самых быстро развивающихся областей квантовой физики. Центральной проблемой здесь является изучение динамической перестройки симметрии или, иначе говоря, фазовой структуры моделей квантовой теории поля. Фазовые переходы в полевых системах, как правило, происходят при больших константах связи, когда неприменимы стандартные методы теории возмущений. В 1989 году Гарий Владимирович предложил метод исследования режима сильной связи и фазовой структуры в квантовой теории поля, основанный на канонических преобразованиях и формализме ренормгруппы. С помощью этого метода фазовая структура ряда квантовополевых моделей была проанализирована в терминах перенормированных величин. Позже идеи этого метода легли в основу изучения широкого круга задач из различных областей квантовой физики (теория полярона, распространение волн в стохастических средах, связанные состояния в квантовомеханических системах). Цикл статей, включающий эти исследования, был удостоен первой премии ОИЯИ за 1992 год. Активная работа в этом направлении продолжается и сейчас.

Давней идеей Гария Владимировича было построение нелокальной кварковой модели адрон-адронных взаимодействий, которая бы основывалась на конкретных механизмах адронизации и конфайнмента. На этом пути и возникли кварк-виртонная модель и ее обобщение – модель конфайнмированных кварков. В 1992 году, основываясь на процедуре бозонизации модели Намбу - Йона-Лазинио и том факте, что однородное глюонное вакуумное поле обеспечивает невылетание кварков, Гарий Владимирович сформулировал модель мезон-мезонных взаимодействий, в которую адронизация и конфайнмент входят в явной математической форме. Хотя исследование этой модели находится сейчас в самом начале, первые же расчеты масс мезонов дали интересные результаты. Несмотря на минимальное число параметров (массы кварков, напряженность вакуумного поля и калибровочная константа связи КХД), модель с хорошей

точностью описывает основные свойства мезонных спектров, включая расщепление масс псевдоскалярных и векторных мезонов, реджевское поведение возбужденных состояний, спектр тяжелых кваркониев и массы мезонов, содержащих один тяжелый кварк.

Чтобы дать представление о сегодняшних научных интересах Гария Владимировича, в настоящий сборник включено несколько оригинальных статей, посвященных исследованию адрон-адронных взаимодействий, теории полярона и связанным состояниям в квантовомеханических системах.

Ярко выраженный индивидуальный научный стиль, мастерское владение математическими методами, глубокая физическая интуиция, простота и доступность в общении, присущие Гарию Владимировичу, делают работу с ним очень интересной и плодотворной. У него легко учиться. Все это привлекает к профессору Ефимову молодых исследователей, для многих из которых его лекции по квантовой теории поля стали первым реальным шагом в теоретическую физику. Педагогический стиль Гария Владимировича таков, что помимо определенного набора знаний слушающий неизбежно получает и мощный заряд вдохновения, помогающего усвоить эти знания. Под руководством Г.В. Ефимова защищено около двадцати кандидатских диссертаций. Три его ученика – доктора физико-математических наук.

Вся жизнь Г.В. Ефимова неразрывно связана с Лабораторией теоретической физики. Он принадлежит к тому поколению физиков, трудом которых создавался и поддерживается научный авторитет лаборатории и Объединенного института ядерных исследований. Это поколение хранит уникальную творческую атмосферу и традиции, которые делают Дубну таким притягательным и неповторимым местом.

Гарий Владимирович умеет быть всегда молодым и энергичным, собранным и смелым и в науке, и в жизни. Внутренне он постоянно ориентирован на будущее, полон новых замыслов и идей.

Список избранных научных работ

Ефимова Гария Владимировича

Функция Грина в модели заряженных скалярных мезонов с фиксированным источником. ЖЭТФ, 38, 1960, с.198-200. (совместно с Б.М. Барбашовым).

Об одном методе в задачах теории поля с фиксированным нуклоном. ЖЭТФ, 39, 1960, с.450-460. (совместно с Б.М. Барбашовым).

Модель локальной теории поля с конечной перенормировкой заряда. ЖЭТФ, 40, 1961, с.848-859. (совместно с Б.М. Барбашовым).

Свойства решения уравнения Лоу для одной модели локальной теории поля. ЖЭТФ, 42, 1962, с.520-525. (совместно с Б.М. Барбашовым).

О скалярной симметричной модели Кеммера. ЖЭТФ, 42, 1962, с.1558-1566.

Замечание о неперенормируемых теориях. ЖЭТФ, 43, 1962, с.1057-1059. (совместно с Б.М. Барбашовым).

О построении локальной квантовой теории поля без ультрафиолетовых расходимостей. ЖЭТФ, 44, 1963, с.2107-2117; Phys. Lett., v.4, No.5, 1963, p.314-316.

On local quantum field theory without ultra-violet divergences. Third order. Nuovo Cimento, 32, 1964, p.1046-1058.

Аналитические свойства амплитуд во втором порядке нелинейной теории поля. ЖЭТФ, 47, 1964, с.1800-1805. (совместно с М.К. Волковым).

О нелинейных лагранжианах взаимодействия. ЖЭТФ, 48, 1965, с.596-606.

Formulation of a scalar quantum field theory with an essentially non-linear interaction. Nucl. Phys., 74, 1965, p.657-668.

Регуляризация неперенормируемых теорий. ЯФ, 2, 1965, с.180-188.

Аналитические свойства евклидовых амплитуд. ЯФ, 4, 1966, с.432-442.

Nonlocal quantum theory of the scalar field. Commun. Math. Phys., 5, 1967, p.42-56.

On a class of relativistic invariant distributions. Commun. Math. Phys., 7, 1968, p.138-151.

Распад μ -мезона в нелокальной теории слабых взаимодействий. ЯФ, 10, 1969, с.1243-1252. (совместно с Ш.З. Сельцер).

Существенно нелинейные лагранжианы взаимодействия и нелокальная квантовая теория поля. ТМФ, 2, 1970, с.36-52.

Нелокальная квантовая теория поля, нелинейные лагранжианы взаимодействия и сходимость ряда теории возмущений. ТМФ, 2, 1970, с.302-310.

Review on methods in nonlinear quantum field theory. Preprint CERN, TH-1087, Geneva, 1969, p.1-34.

Gauge invariant nonlocal theory of the weak interactions. Annals of Physics, 67, 1971, p.124-144. (совместно с Ш.З. Сельцер).

On the constructions of nonlocal quantum electrodynamics. Annals of Physics, 71, 1972, p.466-485.

On the choice of form factors in nonlocal quantum electrodynamics. Nucl. Phys., B44, 1972, p.541-557. (совместно с О.А. Могилевским).

Nonlocal theory of the electromagnetic and weak interactions with W-boson. Annals of Physics, 76, 1973, p.251-280. (совместно с В.А. Алебастровым, Ш.З. Сельцер).

О теореме эквивалентности в квантовой теории поля. М.Л. Рутенберг, ТМФ, 16, 1973, с.186-196. (совместно с М.Л. Рутенбергом).

A proof of the Unitarity of S-matrix in a nonlocal quantum field theory. V.A. Alebastrov, Comm. Math. Phys., 31, 1973, p.1-24. (совместно с В.А. Алебастровым).

О некоторых физических следствиях в нелокальной квантовой теории слабых взаимодействий. ЯФ, 18, 1973, с.210-220. (совместно с В.А. Алебастровым, Ш.З. Сельцер).

Anomalous magnetic moments of leptons and the Lamb shift in nonlocal theory of current-current weak interactions. Nucl. Phys., B59, 1973, p.1-22. (совместно с В.Г. Малышкиным, О.А. Могилевским, К. Намсраем, А.Ю. Юматовым).

Quantization of nonlocal field theory. Int. J. of Theor. phys., 10, 1974, p.19-37.

Causality in quantum field theory with nonlocal interaction. Comm. Math. Phys., 38, 1974, p.11-28. (совместно с В.А. Алебастровым).

Нелокальная квантовая электродинамика. ЭЧАЯ, 5, вып. 1, 1974, с.223-256.

К построению нелокальной квантовой электродинамики частиц со спином 0 и 1. ТМФ, 22, 1975, с.186-202. (совместно с К. Намсраем).

К доказательству унитарности S-матрицы. ТМФ, 25, 1975, с.20-29.

Confinement of quarks in nonlocal quantum field theory. Czechoslovak Journal of Phys., B26, 1976, p.1301-1305. (совместно с А.З. Дубнечковой).

Electron self-energy in nonlocal field theory. Annals of Physics, 103, 1977, p.169-184. (совместно с М.А. Ивановым, О.А. Могилевским).

Strong coupling in the quantum field theory with nonlocal nonpolynomial interaction. Comm. Math. Phys., 57, 1977, p.235-258.

Нелокальные взаимодействия квантованных полей. "Наука", Москва, 1977.

Vacuum energy in $g\varphi_d^4$ - theory for $g \rightarrow \infty$. Comm. Math. Phys., 65, 1979, p.15-44.

Nonlocal quark model and meson decays. Fortschritte der Physik 27, 1979, p.377-408. (совместно с А.З. Дубнечковой, М.А. Ивановым).

Электромагнитные характеристики распадов $P \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-$ в нелокальной модели кварков. Письма в ЖЭТФ, 32, вып. I, 1980, с.60-62. (совместно с М.А. Ивановым).

Распады декаплета барионных резонансов в нелокальной модели кварков. ЯФ, 33, вып. I, 1981, с.241-252. (совместно с М. Динейханом, Ю.Ю. Лобановым).

Формфактор распада $\omega \rightarrow \pi^0 \mu^+ \mu^-$ в нелокальной модели кварков. Письма в ЖЭТФ, 33, вып. I, 1981, с.66-68. (совместно с М. Динейханом, М.А. Ивановым).

Характеристики электромагнитных, слабых лептонных и нелептонных распадов псевдоскалярных мезонов в нелокальной модели кварков. ЯФ, 33, вып. 2, 1981, с.559-569. (совместно с М.А. Ивановым, В.А. Охлопковой).

Распады $P \rightarrow \ell^+ \ell^-$ в нелокальной модели кварков. Письма в ЖЭТФ, 34, вып. 4, 1981, с.230-234. (совместно с М.А. Ивановым, Р.Х. Мурадовым, М.М. Соломоновичем).

Нелокальная модель кварков. ЭЧАЯ, 12, вып. 5, 1981, с.1220-1274. (совместно с М.А. Ивановым).

К вопросу о кварковом содержании $\delta(980)$ - мезона. Письма в ЖЭТФ, 35, вып. II, 1982, с.486-489. (совместно с М. Динейханом).

О поляризуемости π - мезонов. Письма в ЖЭТФ, 35, вып. 10, 1982, с.443-446. (совместно с М. Динейханом, Р.Х. Мурадовым, В.А. Охлопковой).

Сильные распады мезонов с высшими спинами. ЯФ, 36, вып. 6, 1984, с.1588-1595. (совместно с М. Динейханом, Р.Х. Мурадовым).

Адронные распады τ - лептона в виртрон-кварковой модели. Письма в ЖЭТФ, 39, вып. 5, 1984, с.237-238. (совместно с М. Динейханом, Е.А. Ноговицыным).

Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. "Наука", Москва, 1985.
О свойствах $\pi^+\pi^-$ - атома. ЯФ, 44, вып. 2(8), 1986, с.460-495. (совместно с М.А. Ивановым, В.Е. Любовицким).

О πK - димезоатоме. Письма в ЖЭТФ, 45, вып. II, 1987, с.526-529. (совместно с М.А. Ивановым, В.Е. Любовицким).

Роль A_1 - мезона в низкоэнергетической физике адронов. ЯФ, 46, вып. 2(8), 1987, с.576-584. (совместно с Е.З. Авакян, С.Л. Авакяном, М.А. Ивановым).

Кварковая структура нуклона и сильные мезон-нуклонные формфакторы. ЯФ, 48, вып. 1(7), 1988, с.198-208. (совместно с М.А. Ивановым, В.Е. Любовицким).

Strong nucleon and Δ - isobar form factors in the quark confinement model. Few-Body Systems, 1988, v.6, No.1, p.17-43. (совместно с М.А. Ивановым, В.Е. Любовицким).

Confinement and quark structure of light mesons. Int. J. of Mod. Phys., A, 1988, v.3, No.12, p.2911-2940. (совместно с М.А. Ивановым).

On a phase structure of a two-dimensional $(\varphi^2)^2$ field theory. Int. J. of Mod. Phys., A, v.4, No.18, 1989, p.4977-4990.

Green functions of scalar particles in stochastic fields. Int. J. of Th. Phys., v.28, No.12, 1989, p.1463-1482. (совместно с М. Динейханом, К. Намсраем).

Поляризуемость π - мезонов в модели конфаймированных кварков. ЯФ, 49, вып. 5, 1989, с.1398-1407. (совместно с Е.З. Авакян, С.Л. Авакяном, М.А. Ивановым).

Физика лёгких мезонов в кварковой модели с конфайнментом. ЭЧАЯ, 20, вып. 5, 1989, с.1129-1184. (совместно с М.А. Ивановым).

On the vacuum stability in the superrenormalized Yukawa-type theory. Int. J. of Mod. Phys., A, v.5, No.3, 1990, p.531-542. (совместно с Г. Ганболдом).

Микроскопическое описание S - волновых длин πN - рассеяния и времени жизни $p\pi^-$ - атома в модели конфайнированных кварков. ЯФ, 51, вып. 1, 1990, с.190-199. (совместно с М.А. Ивановым, В.Е. Любовицким, А.Г. Русецким).

Quark-diquark approximation of the three-quark structure of baryons in the QCM. Z. Phys., C47, 1990, p.583-594. (совместно с М.А. Ивановым, В.Е. Любовицким).

Nonleptonic interactions of kaons in the Quark Confinement Model. Fort. Phys., 38, 1990, p.611-639. (совместно с Е.З. Авакян, С.Л. Авакяном, М.А. Ивановым).

Predictions for semileptonic decays rates of charmed baryons in the quark confinement model. Z. Phys., C52, 1991, p.149-158. (совместно с М.А. Ивановым, В.Е. Любовицким).

Rare kaon decays $K_{L(S)}^0 \rightarrow \pi^0 l^+ l^-$ in the quark confinement model. Z. Phys., C52, 1991, p.129-135. (совместно с М.А. Ивановым, В.Е. Любовицким, Н.Б. Кулимановой).

Functional integrals in the strong coupling regime and the polaron self-energy. Phys. stat. sol.(b), 168, 1991, p.165-178. (совместно с Г. Ганболдом).

On a calculation of the ground-state energy in quantum mechanics. ICTP, IC/91/31, Trieste, 1991.

Investigation of Green functions and the Parisi-Wu quantization method in background stochastic fields. Fortschr.Phys. 39, 1991, p.259-318. (совместно с М. Динейханом, К. Намсраем).

Phase structure of the three-dimensional $g(\vec{\varphi}^2)^2$ field theory. Int. J. of Mod. Phys., A7, 1991, p.987-1006. (совместно с С.Н. Неделько).

Intermediate coupling polaron ground state energy. ICTP, IC/92/38, Trieste, 1992. (совместно с Г. Ганболдом).

Phase transition in $g\varphi_2^4$ theory. Mod. Phys. Lett., A7, 1992, p.2189-2197. (совместно с Г. Ганболдом).

Phase structure of the three- and four-dimensional φ^4 field theory. Int. J. of Mod. Phys., A7, 1992, p.4539-4558. (совместно с С.Н. Неделько).

Phase structure of two-dimension φ^4 field theory within thermofield dynamics. J. Phys., A25, 1992, p.2721-2735. (совместно с С.Н. Неделько).

On the instability of an oscillator in a field. Universitat Heidelberg, Stochastische Math. Modelle, N705, 1992. (совместно с W.von Waldenfels).

2β -decay mediated by heavy Majorana neutrinos and nucleon weak magnetism and pseudoscalar coupling. *Z. Phys.*, A341, 1992, p.193-199. (совместно с Ф. Шимковичем, М.А. Ивановым, В.Е. Любовицким).

Predictions for semileptonic decay rates of charmed baryons in the QCM. *Z. Phys.*, C52, 1992, p.149-158. (совместно с М.А. Ивановым, В.Е. Любовицким).

$B \rightarrow C$ flavour changing decays of baryons containing a single heavy quark. *Z. Phys.*, C54, 1992, p.349-356. (совместно с М.А. Ивановым, В.Е. Любовицким, Н.Б. Кулимановой).

The Quark Confinement Model of Hadrons. Institute of Physics Publishing, Bristol & Philadelphia, 1993. (совместно с М.А. Ивановым).

All coupling polaron ground state energy in D -dimension. ICTP, IC/93/228, Trieste, 1993. (совместно с Г. Ганболдом).

The screened Coulomb potential in the oscillator representation. *Journ. of Nucl. Phys.*, 56, 1993, p.89-96. (совместно с М. Динейханом).

Об устойчивости трёхтельной кулоновской системы в осцилляторном представлении. *ЯФ*, 57, 1994, с. 220-232. (совместно с М. Динейханом).

Неэквивалентные представления и фазовая структура $(\varphi^4)_d$ теории поля. *ЭЧАЯ*, 25, вып. 3, 1994, с.779-843. (совместно с С.Н. Неделько).

Модель Намбу - Йона-Лазинио с сепарабельным взаимодействием легких кварков: низкоэнергетическая физика пиона и сильный пион-нуклонный формфактор

И.В. Аникин, М.А. Иванов, В.Е. Любовицкий

*Лаборатория теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна*

Н.Б. Ладыгина

*Лаборатория высоких энергий,
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна*

Аннотация

Предложена лагранжева формулировка модели Намбу - Йона-Лазинио с сепарабельным взаимодействием легких кварков. Переход адронов в кварки и обратно описывается лагранжианом взаимодействия адронов с кварковым током. Калибровочная инвариантность лагранжиана обеспечивается введением Р-экспоненты. Вершина адрон-кваркового взаимодействия имеет нетривиальную импульсную зависимость, которая параметризуется формфактором, характеризующим распределение кварков внутри адронов. В рамках данного подхода рассмотрены фундаментальные характеристики низкоэнергетической пионной физики: слабая константа f_π , константа распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, среднеквадратичные радиусы и формфакторы пиона, связанные с переходами $\pi \rightarrow \pi\gamma$, $\pi^0\gamma^* \rightarrow \gamma$. Вычислена константа сильного πNN -взаимодействия и получено поведение πNN -формфактора в евклидовой области значений квадрата переданного импульса пиона. Полученные результаты находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

1 Введение

Предложенная в 1961 году модель Намбу и Йона-Лазинио сильных взаимодействий (NJL-модель) [1] является мощным инструментом для изучения составной структуры адронов. Первый успех модели связан с объяснением спонтанного нарушения киральной симметрии, где пионы выступают в качестве голдстоуновских бозонов [2]. В этом подходе трудности, возникающие из-за наличия ультрафиолетовых расходимостей в петлевых интегралах, преодолеваются обычно при помощи промежуточной регуляризации. Существенным недостатком такого способа борьбы с ультрафиолетовыми расходимостями является то, что регуляризация не дает информации о виде импульсной зависимости кварк-адронной вершины, которая, в свою очередь, характеризует составную структуру адронов. Хотя необходимо отметить, что оригинальная модель NJL воспроизводит результаты других популярных моделей, например σ - модели [2].

Более реалистическое обобщение модели NJL базируется на введении нелокального четырехкваркового взаимодействия в сепарабельном виде, что позволяет естественным образом связать глобальные характеристики адронов с их волновыми функциями [3-5,15,16]. Существуют также подходы, которые реализуют NJL-механизм, используя КХД-бозонизацию, но это требует введения билкальных адронных полей, что приводит к уравнениям на волновые функции, решение которых является довольно трудной задачей [6]. Любые упрощения таких подходов приводят к NJL-моделям с нелокальным взаимодействием, модификации кваркового пропагатора. Ранее уже делались попытки описания низкоэнергетической адронной физики на основе механизма КХД-бозонизации [9,10]. В этих работах вершина адрон-кваркового взаимодействия имела локальный характер, а ультрафиолетовая расходимость петлевых кварковых интегралов обеспечивалась за счет усреднения по глюонным вакуумным полям (см., например, [9]).

Главная цель нашей работы состоит в том, чтобы сформулировать обобщенную модель Намбу - Йона-Лазинио с сепарабельным взаимодействием легких кварков для описания статических и динамических свойств мезонов и барионов. Массу пионов согласно теореме Голдстоуна считаем в киральном пределе равной нулю.

Мы не используем уравнение Швингера - Дайсона на конституентные массы кварков и уравнение Бете - Солпитера на массы адронов, потому что они содержат слишком много свободных параметров. Действительно, такого рода уравнения могут рассматриваться только как самосогласованные ограничения на выбор масс кварков и адронов, а также констант связи.

Вся необходимая информация о составной структуре адрона содержится в матричных элементах распадов, особенно в электромагнитном формфакторе, характеризующем распределение вещества внутри пиона. Электромагнитное взаимодействие вводится неминимальным способом при помощи упорядоченной по времени P -экспоненты в нелокальном кварковом токе, которая обеспечивает выполнение тождества Уорда-Такахаши и градиентную инвариантность на каждом шаге вычислений.

Модель имеет следующие свободные параметры: размерный параметр Λ , характеризующий эффект сепарабельного взаимодействия легких кварков, и конstituентные массы кварков m_q , где $q = u, d, \dots$. В данной работе рассмотрены процессы только с участием легких u - и d - кварков. При этом в пределе изотопической инвариантности их массы полагаются равными: $m_u = m_d$.

В рамках данного подхода рассмотрены фундаментальные характеристики низкоэнергетической пионной физики: слабая константа f_π , константа распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, среднеквадратичные радиусы и формфакторы пиона, связанные с переходами $\pi \rightarrow \pi\gamma$, $\pi^0\gamma^* \rightarrow \gamma$. Вычислена константа сильного πNN -взаимодействия и получено поведение πNN -формфактора в евклидовой области значений квадрата переданного импульса пиона. Наши результаты находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

2 Модель Намбу - Йона-Лазинио с сепарабельным взаимодействием легких кварков

Для начала запишем лагранжиан обобщенной модели NJL с сепарабельным взаимодействием

$$L_{NJL}^{SI} = \bar{q}i \not{\partial}q + \frac{G}{2}\{J_S^2 + J_P^2\}, \quad (1)$$

где токи J_Γ ($\Gamma = S, P$) имеют вид

$$J_S = \int dy \bar{q}(x+y/2)f(y^2)q(x-y/2),$$

$$J_P^i = \int dy \bar{q}(x+y/2)f(y^2)i\gamma^5\tau^i q(x-y/2).$$

Формфактор $f(y^2)$ характеризует область кварк-антикваркового взаимодействия. В оригинальной модели NJL этот формфактор есть просто δ -функция. Лагранжиан (1) инвариантен относительно киральных ($q \rightarrow e^{i\gamma^5\vec{\tau}\vec{\theta}}q$) и изотопических ($q \rightarrow e^{i\vec{\tau}\vec{\theta}}q$) преобразований. Коротко продемонстрируем процедуру бозонизации в рамках модели NJL (подробно см. в [3]). Производящий функционал запишем в стандартном виде:

$$Z = \int \delta q \int \delta \bar{q} \exp\{i \int dx L_{NJL}^{SI}\}. \quad (2)$$

Используя преобразования Гаусса для квадратичных кварковых токов и интегрируя по кварковым полям, получим

$$Z = \int \delta \sigma \int \delta \vec{\pi} \exp\{iW_{\text{eff}}[\sigma, \vec{\pi}]\}, \quad (3)$$

где эффективное действие W_{eff} имеет вид

$$W_{\text{eff}}[\sigma, \vec{\pi}] = -\frac{m_0^2}{2} \int dx [\sigma^2(x) + \vec{\pi}^2(x)] - iN_c \text{tr} \ln[i \not{\partial} - \vec{\sigma} - i\gamma^5 \vec{\pi}]. \quad (4)$$

Здесь введено обозначение: N_c - цветовой индекс, $m_0^2 = 1/G$ - "голая" масса мезона, поля $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\pi}$ имеют вид

$$\tilde{\sigma}(x_1, x_2) = \sigma\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)f((x_1 - x_2)^2) \quad \tilde{\pi} = \tilde{r}\tilde{\pi}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)f((x_1 - x_2)^2). \quad (5)$$

Предполагая, что поле $\sigma(x)$ обладает нетривиальным вакуумным ожиданием σ_0 , переходим к новому полю $s(x)$ с нулевым вакуумным средним, которое связано с исходным скалярным полем $\sigma(x)$ следующим соотношением:

$$\sigma(x) = s(x) + \sigma_0. \quad (6)$$

Затем, варьируя действие (4) по σ_0 ($\delta W_{\text{eff}}[\sigma_0, 0]/\delta\sigma_0 = 0$), получаем так называемое "gap"-уравнение (т.е. уравнение на массу кварка)

$$1 = 4GN_c N_f i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f^2(k^2)}{k^2 - \Sigma(k^2)}, \quad (7)$$

где массовый оператор кваркового поля $\Sigma(k^2)$ определяется следующей формулой:

$$\Sigma(k^2) = \sigma_0 f(k^2). \quad (8)$$

При этом функция $f(k^2)$ есть вершинный формфактор, зависящий от квадрата вектора 4-импульса. В практических вычислениях физических величин [4] будем пренебрегать импульсной зависимостью массового оператора кварка и аппроксимировать его эффективной массой кварка $\langle \Sigma(k^2) \rangle = m_q$ (мы пренебрегаем "токовой" массой кварка). Вычисление интеграла (8) проводится в евклидовой метрике. При этом переход из псевдоевклидовой области значений k в евклидову производится при помощи стандартной замены $k^0 \rightarrow ik_4$ (виков поворот), тогда $k^2 \rightarrow -k_E^2$. Эта процедура хорошо определена для широкого класса формфакторов $f(k^2)$, быстро убывающих в евклидовой области (более подробно см. [9]).

Далее проиллюстрируем процедуру выделения кинетической части мезонных полей в выражении (4). Преследуя эту цель, рассмотрим слагаемые, билинейные по мезонным полям (4), в разложении эффективного действия по кварковым петлям

$$W_{\text{eff}}^{(2)} = -\frac{m_0^2}{2} \int dx (s^2 + \tilde{\pi}^2) + \frac{i}{2} N_c \text{tr}[S(\tilde{s} + i\gamma^5 \tilde{\pi})]^2, \quad (9)$$

где мы ввели обозначение для кваркового пропагатора

$$S(x) = [i \not{\partial} - \Sigma(-\partial^2)]^{-1} \delta(x). \quad (10)$$

После простых преобразований получим

$$W_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\phi=s,\pi} \int dx_1 \int dx_2 \phi(x_1) \{-m_0^2 \delta(x_1 - x_2) + \Pi_\phi(x_1 - x_2)\} \phi(x_2), \quad (11)$$

где $\Pi_\phi(x)$ задается выражением

$$\Pi_\phi(x) = iN_c N_f \int dy_1 \int dy_2 f(y_1^2) f(y_2^2) \text{tr}[S(x - \frac{y_1 + y_2}{2}) \Gamma_\phi S(-x - \frac{y_1 + y_2}{2}) \Gamma_\phi], \quad (12)$$

в котором

$$\Gamma_\phi = I(\phi = s), \text{ or } i\gamma^5(\phi = \pi).$$

Затем от двухточечной функции (12) перейдем к ее фурье-образу

$$\Pi_\phi(p^2) = \int dx e^{ipx} \Pi_\phi(x) = \Pi_\phi(m_\phi^2) + \Pi'_\phi(m_\phi^2)(p^2 - m_\phi^2) + \Pi_\phi^{\text{ren}}(p^2),$$

где m_ϕ - физическая масса мезона. Используя это выражение, получим

$$W_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\phi=s,\pi} \left\{ \int dx \phi(x) \left[(-m_\phi^2 + \Pi_\phi(m_\phi^2)) + (\square - m_\phi^2) \Pi'_\phi(m_\phi^2) \right] \phi(x) \right. \\ \left. + \int dx_1 \int dx_2 \phi(x_1) \Pi_\phi^{\text{ren}}(x_1 - x_2) \phi(x_2) \right\}. \quad (13)$$

Легко видеть, что при выполнении условия

$$1 = GN_c N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f^2(k^2) \quad (14)$$

$$\text{tr} \left\{ \Gamma_\phi \left[\frac{1}{\not{k} + \not{p}/2 - \Sigma((k+p/2)^2)} \right] \Gamma_\phi \left[\frac{1}{\not{k} - \not{p}/2 - \Sigma((k-p/2)^2)} \right] \right\}_{p^2=m_\phi^2}$$

в мезонной функции Грина появляется полюс, соответствующий массе физической частицы.

Полагая массу пиона в уравнении (14) равной нулю, приходим к "gap"-уравнению (7), тем самым воспроизводя теорему Голдстоуна. Перенормируя поля ϕ (s or π) в выражении (4), запишем эффективное действие W_{eff} в виде

$$W_{\text{eff}}[s, \vec{\pi}] = \frac{1}{2} \sum_{\phi=s,\pi} \left\{ \int dx \phi(x) (\square - m_\phi^2) \phi(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[S \frac{\tilde{\phi}}{\sqrt{\Pi'_\phi(m_\phi^2)}} \right]^n \right\}. \quad (15)$$

Это выражение можно связать с лагранжианом оригинальной модели NJL только посредством кваркового массового оператора $\Sigma(k^2)$ в "gap"-уравнении (7). Это утверждение служит обоснованием аппроксимации $\langle \Sigma(k^2) \rangle = m_q$ (более подробно см. [4,5]), необходимой для вычисления физических наблюдаемых.

Отметим, что выражение для эффективного действия (15) можно получить из квантовой теории поля, если определить лагранжиан как

$$L = L_0 + L_{\text{int}}, \quad (16)$$

где

$$L_0 = \bar{q}(i \not{\partial} - m_q)q + \frac{1}{2} s(\square - m_s^2)s + \frac{1}{2} \vec{\pi}(\square - m_\pi^2)\vec{\pi}, \quad (17)$$

$$L_{\text{int}} = \frac{g_s}{\sqrt{2}} s(x) J_S(x) + \frac{g_\pi}{\sqrt{2}} \vec{\pi}(x) \vec{J}_P(x), \quad (18)$$

и константу перенормировки для мезонных полей положить равной нулю:

$$Z_\phi = 1 - \frac{g^2}{2} \Pi'_\phi(m_\phi^2) = 0. \quad (19)$$

Данное условие отражает сложную природу адронов, т.е. "одетых" состояний в квантовой теории. Это так называемое условие связности, которое рассматривалось во многих работах (см., например, [9,10] или [11,12]).

Предлагаемая нами формулировка модели типа Намбу - Йона-Лазинио с сепарабельным взаимодействием может быть обобщена для описания любых частиц. В частности, приведем лагранжианы для октета векторных (аксиальных), псевдоскалярных (скалярных) мезонов и барионов.

$$1. \text{ Мезоны } M = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_0^8 \lambda^i \phi^i.$$

$$L_M^0(x) = \pm \frac{1}{2} \text{tr} M(x) (\square - m_M^2) M(x) \quad (+ \text{ for S, P } - \text{ for V, A}), \quad (20)$$

$$L_M^{\text{int}}(x) = g_M \int dy f(y^2) \bar{q}(x+y/2) \Gamma_M M(x) q(x-y/2). \quad (21)$$

$$2. \text{ Барионы } B = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_1^8 \lambda^i \psi^i.$$

$$L_B^0(x) = \text{tr} \bar{B}(x) (i \not{\partial} - m_B) B(x), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} L_B^{\text{int}}(x) &= \bar{B}^{km}(x) \int dy_1 \int dy_2 \int dy_3 \delta \left(x - \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) F \left(\frac{1}{18} \sum_{i < j} (y_i - y_j)^2 \right) \\ &\cdot \left\{ g_V J_V^{mk}(y_1, y_2, y_3) + g_T J_T^{mk}(y_1, y_2, y_3) \right\} + \text{h.c.} \\ &= \bar{B}^{km}(x) \int d\xi_1 \int d\xi_2 F(\xi_1^2 + \xi_2^2) \\ &\cdot \left\{ g_V J_V^{mk}(x - 2\xi_1, x + \xi_1 - \sqrt{3}\xi_2, x + \xi_1 + \sqrt{3}\xi_2) \right. \\ &\left. + g_T J_T^{mk}(x - 2\xi_1, x + \xi_1 - \sqrt{3}\xi_2, x + \xi_1 + \sqrt{3}\xi_2) \right\} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$J_V^{mk}(y_1, y_2, y_3) = \lambda_i^{mm_1} \gamma^\mu \gamma^5 q_{a_1}^{m_1}(y_1) \left(q_{a_2}^{m_2}(y_2) \varepsilon^{km_2n} \lambda_i^{nm_3} C \gamma^\mu q_{a_3}^{m_3}(y_3) \right) \varepsilon^{a_1 a_2 a_3}, \quad (24)$$

$$J_T^{mk}(y_1, y_2, y_3) = \lambda_i^{mm_1} \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 q_{a_1}^{m_1}(y_1) \left(q_{a_2}^{m_2}(y_2) \varepsilon^{km_2n} \lambda_i^{nm_3} C \sigma^{\mu\nu} q_{a_3}^{m_3}(y_3) \right) \varepsilon^{a_1 a_2 a_3}. \quad (25)$$

Здесь приняты следующие обозначения: k, m, n и a - ароматические и цветовые индексы, соответственно, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, C - матрица зарядового сопряжения. Переменные в вершинном формфакторе записаны в системе центра масс

$$y_1 = x - 2\xi_1, \quad y_2 = x + \xi_1 - \sqrt{3}\xi_2, \quad y_3 = x + \xi_1 + \sqrt{3}\xi_2,$$

или

$$\xi_1 = \frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{6}, \quad \xi_2 = \frac{y_3 - y_2}{2\sqrt{3}}.$$

Фурье-образ вершинного формфактора определяется следующим образом:

$$F(\xi^2) = \int \frac{d^8 k}{(2\pi)^8} e^{-ik\xi} F(k^2), \quad (26)$$

где $\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ и $k^2 = k_1^2 + k_2^2$. Данный факт означает то, что имеется аналогия между мезонным формфактором $f(k^2)$ в четырехмерном пространстве и барионным формфактором $F(k^2)$ в восьмимерном пространстве.

Следующим шагом нашей программы является введение взаимодействия полей материи с электромагнитным полем. Данная процедура осуществляется нами комбинированным способом. В свободных лагранжианах взаимодействие вводится путем удлинения производной. В лагранжианах взаимодействия адронов с кварками взаимодействие с электромагнитным полем вводится неминимальным образом: кварковые поля умножаются на упорядоченную по времени Р-экспоненту.

$$L_M^{\text{int}}(x) = g_M \int dy_1 \int dy_2 \delta\left(x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) f\left((y_1 - y_2)^2\right) \cdot \bar{q}(y_1) P \exp\left\{ieQ \int_{y_1}^x dz^\mu A^\mu(z)\right\} \Gamma_M M(x) P \exp\left\{ieQ \int_x^{y_2} dz^\mu A^\mu(z)\right\} q(y_2), \quad (27)$$

где $Q = \frac{1}{2}(\lambda^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda^8) = \text{diag}(2/3, -1/3, -1/3)$. Для барионов взаимодействие вводится аналогичным способом.

Определим S-матрицу как

$$S = T \exp\left\{i \int dx L^{\text{int}}(x)\right\}. \quad (28)$$

В основном нас будут интересовать однопетлевые кварковые диаграммы. Т-произведение задается стандартным образом:

$$\langle 0 | T(q(x)\bar{q}(y)) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{m_q - \not{k}}. \quad (29)$$

Адрон-кварковые константы связи g_M в (21) и g_B в (23) определяются из условия связности (19).

3 Параметры модели и фундаментальные константы низкоэнергетической физики пиона

Теперь обсудим параметры модели. Во-первых, это вершинный формфактор $f(k^2)$, характеризующий сложную структуру адронов. Он является неизвестной функцией, поэтому мы сделаем ряд предположений о его виде. Выберем вершинный формфактор в виде монополя, это один из наиболее популярных вершин в физике ядра и элементарных частиц (детальный анализ других видов формфакторов представлен в работе [17]):

• монополю $f(k^2) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - k^2}$

Все фейнмановские диаграммы вычисляем в евклидовой области ($k^2 = -k_E^2$), где формфакторы быстро убывают, так что проблем, связанных с ультрафиолетовыми расходимостями в петлевых интегралах, не возникает. Для удобства формфакторы выбираем безразмерными.

Трехмерные фурье-образы формфакторов могут быть рассмотрены как нерелятивистские потенциалы (в борновском приближении). Полагая $k^0 = 0$, получим

$$V(r) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}} f(-\vec{k}^2) = \Lambda^3 v(r\Lambda); \quad (30)$$

следовательно, для монополя имеем $v(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-r}$.

Таким образом, имеем два свободных параметра: Λ , характеризующий область кварк-антикваркового взаимодействия, и конституентная масса кварка m_q . Зафиксируем эти параметры с помощью фитирования по экспериментальным значениям констант электрослабых распадов пиона f_π ($f_\pi^{\text{expt}} = 132$ МэВ) и $g_{\pi\gamma\gamma}$ ($g_{\pi\gamma\gamma}^{\text{expt}} = 0.276$ ГэВ⁻¹).

Отметим, что все величины в подынтегральных выражениях записаны в единицах Λ . При вычислении констант распадов пиона мы пренебрегаем его массой, т.е. работаем в "мягкопионном" пределе.

А. Константа связи пиона с кварками

Как говорилось выше, константа связи пиона с кварками определяется из условия связности (19) с использованием массового оператора пиона

$$\Pi_\pi(p^2) = 6 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} f^2(k^2) \text{tr} \left\{ \gamma^5 \left[\frac{1}{m_q - \not{k} - \not{p}/2} \right] \gamma^5 \left[\frac{1}{m_q - \not{k} - \not{p}/2} \right] \right\}. \quad (31)$$

Тогда, пренебрегая массой пиона, получим

$$\left(\frac{3g_\pi^2}{4\pi^2} \right)^{-1} = \frac{1}{4} \int_0^\infty du u f^2(-u) \frac{(3m_q^2 + 2u)}{(m_q^2 + u)^3}. \quad (32)$$

Б. Слабый распад пиона

Слабым распадам пиона соответствует диаграмма на рис.1. Фундаментальной характеристикой распада $\pi \rightarrow \ell\nu$ служит константа f_π , которая в нашей модели определяется как

$$\begin{aligned} f_\pi &= \frac{3g_\pi}{4\pi^2} m_q \int \frac{d^4 k}{\pi^2 i} \frac{f(k^2)}{[m_q^2 - (k+p/2)^2][m_q^2 - (k-p/2)^2]} \\ &\simeq \frac{3g_\pi}{4\pi^2} m_q \int_0^\infty du u f(-u) \frac{1}{(m_q^2 + u)^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

В. Двухфотонный распад пиона

Данный распад определяется диаграммой, изображенной на рис.2, и характеризуется формфактором $G_{\pi\gamma\gamma}(p^2, q_1^2, q_2^2)$:

$$G_{\pi\gamma\gamma}(p^2, q_1^2, q_2^2) = \frac{g_\pi m_q}{2\sqrt{2}\pi^2 \Lambda^2} \int \frac{d^4k}{\pi^2 i} \frac{f(k^2)}{[m_q^2 - (k + p/2)^2][m_q^2 - (k - p/2)^2]} \frac{1}{[m_q^2 - (k + (q_1 - q_2)/2)^2]} \quad (34)$$

Константа $g_{\pi\gamma\gamma}$ есть $G_{\pi\gamma\gamma}(p^2, q_1^2, q_2^2)$ в предельном случае, когда фотоны находятся на массовой поверхности $q_1^2 = q_2^2 = 0$:

$$g_{\pi\gamma\gamma} = G_{\pi\gamma\gamma}(m_\pi^2, 0, 0) \simeq \frac{g_\pi m_q}{2\sqrt{2}\pi^2 \Lambda^2} \int_0^\infty du u f(-u) \frac{1}{(m_q^2 + u)^3}. \quad (35)$$

Результаты фитирования фундаментальных констант f_π , $g_{\pi\gamma\gamma}$ даны в таблице 1.

Таблица 1

Форм- фактор	Λ (МэВ)	m_q (МэВ)	f_π (МэВ)		$g_{\pi^0\gamma\gamma}$ (ГэВ ⁻¹)	
			NJL SI	EXP [14]	NJL SI	EXP [14]
монополяр	400	267	132	132	0.251	0.276

4 Формфактор распада $\gamma^*\pi^0 \rightarrow \gamma$

Формфактор перехода $\gamma^*\pi^0 \rightarrow \gamma$ измерен для следующих значений квадрата переданного импульса виртуального фотона: $Q^2 > 0$ [13]. В обобщенной модели NJL этот формфактор определяется выражением

$$F_{\gamma\pi}(Q^2) = e^2 G_{\pi\gamma\gamma}(m_\pi^2, -Q^2, 0) \simeq e^2 \frac{g_\pi m_q}{2\sqrt{2}\pi^2 \Lambda^2} R_{\pi\gamma}(Q^2/\Lambda^2), \quad (36)$$

где вид структурной функции $R_{\pi\gamma}$ приведен в Приложении. Наш результат для вершинного формфактора представлен на рис.3. Экспериментальные данные описываются формулой

$$F(Q^2) = \frac{e^2 g_{\pi\gamma\gamma}}{1 + Q^2/\Lambda_\pi^2}, \quad \Lambda_\pi = 0.77 \text{ ГэВ}. \quad (37)$$

Вычислим радиус формфактора распада $\gamma^*\pi^0 \rightarrow \gamma$ по известной формуле

$$\langle r_{\pi\gamma}^2 \rangle = -6 \frac{F'_{\pi\gamma}(0)}{F_{\pi\gamma}(0)}. \quad (38)$$

где

$$F_{\pi\gamma}(0) = \int_0^{\infty} duu \frac{f(-u)}{(m_q^2 + u)^3}, \quad F'_{\pi\gamma}(0) = -\frac{1}{2} \frac{m_q^2}{\Lambda^4} \int_0^{\infty} duu \frac{f(-u)}{(m_q^2 + u)^5}, \quad (39)$$

Результаты для радиуса $r_{\pi\gamma}$ представлены в таблице 2.

Таблица 2

Форм- фактор	$r_{\pi\gamma}$ (фм)	
	NJL SI	EXP [14]
монополю	0.655	0.65 ± 0.03

Отметим хорошее согласие наших результатов с экспериментальными данными.

5 Электромагнитный формфактор пиона

Диаграммы, соответствующие заряженному формфактору, изображены на рис.4. В отдельности эти диаграммы калибровочно-неинвариантны. Суммируя их, вершинную часть запишем в виде

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu(p, p') = & \frac{q^\mu}{q^2} [\Pi_\pi(p^2) - \Pi_\pi(p'^2)] + \frac{3g_\pi^2}{4\pi^2} \int \frac{d^4k}{4\pi^2 i} f \left(\left[k + \frac{p}{2} \right]^2 \right) f \left(\left[k + \frac{p'}{2} \right]^2 \right) \\ & \cdot \text{tr} \left[\gamma^5 S(k+p') \left(\gamma^\mu - \frac{q^\mu \not{q}}{q^2} \right) S(k+p) \gamma^5 S(k) \right] + \\ & + \frac{\eta^\mu}{\eta^2} \frac{3g_\pi^2}{4\pi^2} \int \frac{d^4k}{4\pi^2 i} \int_0^1 dt f(k^2) f'((k+qt/2)^2) \\ & \cdot \left[\text{tr} \left[\gamma^5 S \left(k + \frac{p'}{2} \right) \gamma^5 S \left(k - \frac{p'}{2} \right) \right] - \text{tr} \left[\gamma^5 S \left(k + \frac{p}{2} \right) \gamma^5 S \left(k - \frac{p}{2} \right) \right] \right], \end{aligned} \quad (40)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\eta^\mu = P^\mu - q^\mu \frac{P \cdot q}{q^2}, \quad P = p + p'.$$

Тождество Уорда - Такахаши автоматически следует из выражения (40):

$$q_\mu \Lambda^\mu(p, p') \equiv \Pi_\pi(p^2) - \Pi_\pi(p'^2). \quad (41)$$

Переходя к пределу $q = 0$, получим, с одной стороны,

$$\Lambda^\mu(p, p) = \frac{\partial \Sigma_\pi(p^2)}{\partial p^\mu} = 2p^\mu \frac{\partial \Sigma_\pi(p^2)}{\partial p^2}, \quad (42)$$

где $\Sigma_\pi(p^2) \equiv (3g_\pi^2/4\pi^2)\Pi_\pi(p^2)$, а с другой стороны, имеем

$$\Lambda^\mu(p, p) = 2p^\mu F_\pi(0), \quad (43)$$

где $F_\pi(0)$ - значение зарядового пионного формфактора при $q^2 = 0$. Если считать, что пион в (42) и (43) находится на массовой поверхности, то условие связности $\Sigma'(m_\pi^2) = 1$ эквивалентно условию нормировки зарядового пионного формфактора $F_\pi(0) = 1$.

Восстановление калибровочной инвариантности при помощи введения электромагнитного поля минимальным образом [4] приводит к

$$\int_0^1 dt f' \left((k + qt/2)^2 + q^2 t(1-t)/4 \right) = \frac{f((k + q/2)^2) - f(k^2)}{kq + q^2/4}$$

в выражении (40), в то время как в нашем формализме, использующем лагранжиан (27) с вершиной в виде Р-экспоненты, приходим к

$$\int_0^1 dt f' \left((k + qt/2)^2 \right).$$

Свои вычисления мы проводим в системе Брейта:

$$q = (0, \vec{q}), \quad p = (E, \vec{q}/2), \quad p' = (E, -\vec{q}/2), \quad E = \sqrt{m_\pi^2 + \vec{q}^2}. \quad (44)$$

Аналитическое выражение для электромагнитного формфактора приведено в Приложении, а результаты для электромагнитного формфактора пиона представлены на рис.5. Ниже запишем вклады в электромагнитный радиус пиона от диаграмм типа "треугольник" (Δ) и "головастик" (\circ)

$$\langle r_\pi^2 \rangle^\Delta = -6 \frac{1}{\Lambda^2} \frac{\Phi_1(0)}{\Phi_0(0)}, \quad \langle r_\pi^2 \rangle^\circ = -6 \frac{1}{\Lambda^2} \frac{\Phi_2(0)}{\Phi_0(0)}, \quad (45)$$

где

$$\Phi_1 = - \int_0^\infty du u \left\{ \frac{f^2(-u)}{(m_q^2 + u)^5} \left[\frac{1}{12} u^2 + \frac{3}{8} m_q^2 u + \frac{3}{8} m_q^4 \right] + u \frac{[f'(-u)]^2}{(m_q^2 + u)^3} \left[\frac{7}{96} u + \frac{3}{32} m_q^2 \right] \right\},$$

$$\Phi_2 = \int_0^\infty du u \left\{ \frac{1}{16} \frac{f^2(-u)}{(m_q^2 + u)^5} m_q^2 [m_q^2 - u] - \frac{1}{48} \frac{[f'(-u)]^2}{(m_q^2 + u)^3} u^2 \right\},$$

$$\Phi_0 = \int_0^\infty du u \frac{f^2(-u)}{(m_q^2 + u)^3} \left[\frac{3}{4} m_q^2 + \frac{u}{2} \right],$$

Результаты для радиуса приведены в таблице 3.

Таблица 3

Форм- фактор	NJL SI			EXP [14]
	$\langle r_\pi^2 \rangle^\Delta$ (фм ²)	$\langle r_\pi^2 \rangle^\circ$ (фм ²)	total (фм ²)	(фм ²)
монополю	0.545	-0.012	0.533	0.430

6 Сильный πNN -формфактор

Сильный πNN -формфактор играет важную роль в анализе πN - и NN -взаимодействий. Обычно вид формфактора выбирают из соображения простоты и по результатам фитирования экспериментальных данных. При этом проблема вычисления пион-нуклонного формфактора в рамках моделей, основанных на идеях КХД, ждет своего решения. В связи с этим вычисление πNN -вершины в рамках нашей модели представляет несомненный интерес. Мы стартуем от лагранжианов взаимодействия пиона и нуклона с кварками. В качестве нуклонного лагранжиана выбираем тензорный вариант (25):

$$L_B^{\text{int}}(x) = \bar{B}^{km}(x) \int dy_1 \int dy_2 \int dy_3 \delta \left(x - \frac{\sum_{i=1}^3 y_i}{3} \right) F \left(\frac{1}{18} \sum_{i < j} (y_i - y_j)^2 \right) g_T J_T^{mk}(y_1, y_2, y_3) + \text{h.c.} = \bar{B}^{km}(x) \int d\xi_1 \int d\xi_2 F(\xi_1^2 + \xi_2^2) g_T J_T^{mk}(x - 2\xi_1, x + \xi_1 - \sqrt{3}\xi_2, x + \xi_1 + \sqrt{3}\xi_2) + \text{h.c.}$$

Для упрощения расчетов используем вершинный формфактор гауссового типа

$$F(k^2) = \exp\left(\frac{k^2}{\Lambda_N^2}\right),$$

где параметр Λ_N характеризует распределение кварков внутри нуклона. Формфактор вершины πNN определяется диаграммой, изображенной на рис.6а. Константа связи находится из условия связности, а нуклонный массовый оператор определяется диаграммой на рис.6б. Все вычисления проводим, предполагая, что $m_N = 3m_q$. Параметр Λ_N определяем при помощи фитирования константы $G_{\pi NN}(0)$, которая используется в феноменологическом анализе NN -рассеяния. Лучший фит получается при параметре $\Lambda_N = 1.95 \text{ ГэВ} \approx 2\Lambda_\pi$. Поведение формфактора $G_{\pi NN}(Q^2)$ в евклидовой области значений квадрата переданного импульса приведено на рис.7. Для сравнения приведены результаты других подходов [18,19], в которых используются так называемые "жесткие" [18] и "мягкие" [19] формфакторы. Видно, что наш формфактор имеет "мягкое" поведение.

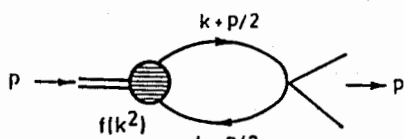


Рис. 1

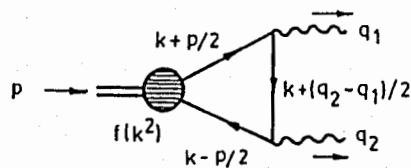


Рис. 2

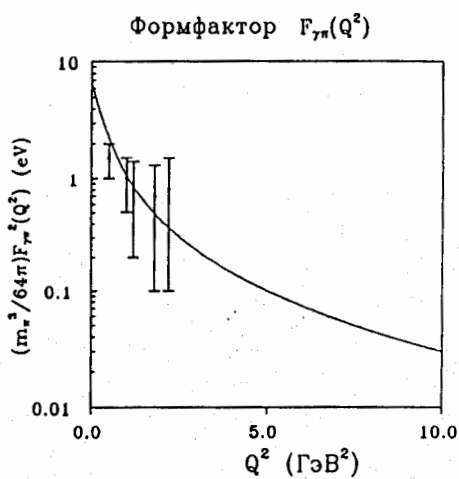


Рис. 3

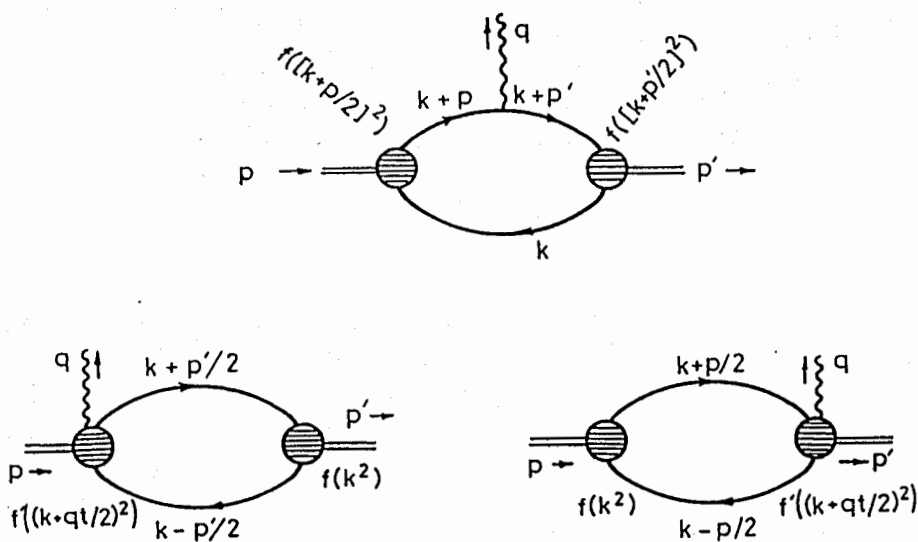


Рис. 4

Формфактор $F_{\pi}(Q^2)$

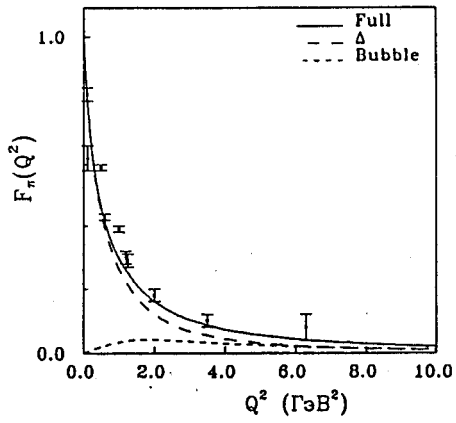


Рис.5

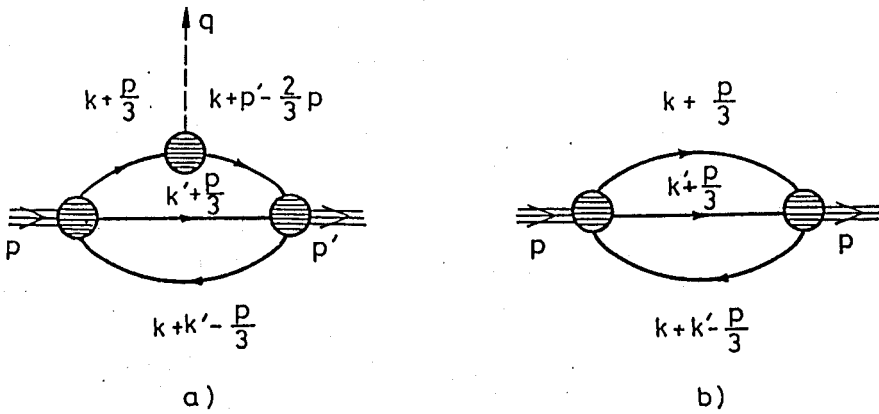


Рис.6

Формфактор $G_{\pi NN}$

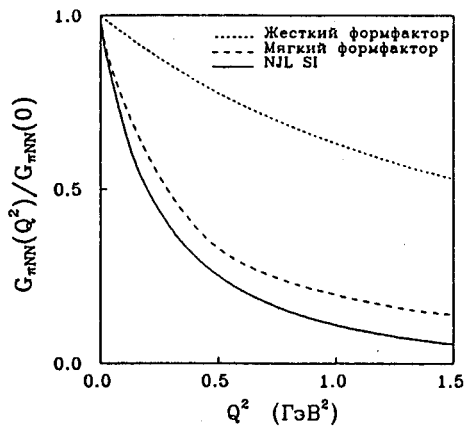


Рис.7

Авторы глубоко признательны Г.В. Ефимову, F.Gross, N.Isgur, H.Lee, M.Locher, H.Ito, A.Корчину и С.Доркину за полезные обсуждения.

Приложение

А. Структурная функция $R_{\pi\gamma}(Q^2)$:

$$R_{\pi\gamma}(Q^2) = \int_0^\infty du u \frac{f(-u)}{m_q^2 + u} \int_0^1 d\alpha \left\{ \frac{1}{\sqrt{R(u, \alpha, Q^2)} [\sqrt{R(u, \alpha, Q^2)} + M_+(u, \alpha)]} + \frac{1}{\sqrt{R(u, \alpha, Q^2) + 4uQ^2\alpha(1-\alpha)} [\sqrt{R(u, \alpha, Q^2) + 4uQ^2\alpha(1-\alpha)} + M_+(u, \alpha)]} \right\},$$

где $M_\pm(u, \alpha) = m_q^2 + u \pm \frac{Q^2\alpha}{2}$, $R(u, \alpha, Q^2) = M_-^2(u, \alpha) + 2Q^2m_q^2\alpha$.

Б. Выражения для электромагнитного формфактора пиона от диаграмм типа "треугольник" (Δ) и "головастик" (\circ):

$$F_\pi^\Delta(Q^2) = \frac{\Phi_1(Q^2)}{\Phi_1(0)}, \quad F_\pi^\circ(Q^2) = \frac{\Phi_2(Q^2)}{\Phi_1(0)},$$

$$\Phi_1(Q^2) = \frac{3}{\pi} \int_0^\infty dk k^3 \int_0^1 dx \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 dy f(-k^2) \frac{f\left(-k^2 - \frac{Q^2}{4} - kxy\sqrt{Q^2}\right)}{P_1(k, x, y, Q^2)} \cdot \left\{ 2 \frac{P_2(k, x, y, Q^2)P_3(k, x, y, Q^2)}{Q_-(k, x, y, Q^2)} - 1 \right\},$$

$$\Phi_2(Q^2) = \frac{4}{\pi} \sqrt{Q^2} \int_0^\infty dk k^6 \int_0^1 dx x^3 \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^1 dy y \int_0^1 dt f(-k^2) f' \left(-k^2 - \frac{Q^2 t^2}{4} - kxyt\sqrt{Q^2} \right) \cdot \frac{m_q^2 + k^2}{Q_+(k, x, y, Q^2)Q_-(k, x, y, Q^2)},$$

где $P_1(k, x, y, Q^2) = \left[m_q^2 + k^2 + \frac{3}{2}kxy\sqrt{Q^2} + \frac{Q^2}{4} \right]^2 + \frac{k^2 Q^2}{4}(1-x^2)$,

$$P_2(k, x, y, Q^2) = m_q^2 + \frac{1+2x^2}{3}k^2 - \frac{1}{2}kxy\sqrt{Q^2},$$

$$P_3(k, x, y, Q^2) = m_q^2 + k^2 + \frac{1}{2}kxy\sqrt{Q^2} + \frac{Q^2}{4},$$

$$Q_\pm(k, x, y, Q^2) = \left[m_q^2 + k^2 \pm \frac{1}{2}kxy\sqrt{Q^2} \right]^2 + \frac{k^2 Q^2}{4}(1-x^2).$$

Литература

- [1] Y.Nambu and G.Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); **124**, 246 (1961).
- [2] T.Eguchi, Phys. Rev. **D14**, 2755 (1976).
- [3] T.Goldman and R.W.Haymaker, Phys. Rev. **D24**, 724 (1981).
- [4] F.Gross and J.Milana, Phys. Rev. **D43**, 2401 (1991); **D45**, 969 (1992).
- [5] H.Ito, W.W.Buck, and F. Gross, Phys. Rev. **C43**, 2483 (1991); **C45**, 1918 (1992);
Phys. Lett. **B287**, 23 (1992).
- [6] C.D.Roberts, R.T.Cahill, and J.Praschifka, Ann. Phys. **188**, 20 (1988).
- [7] M.K.Volkov, Ann. of Phys., **157**, 282 (1984).
- [8] S.P.Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992).
- [9] G.V.Efimov and M.A.Ivanov, *The Quark Confinement Model of Hadrons*
(IOP Publishing, Bristol & Philadelphia, 1993).
- [10] M.A.Ivanov and T.Mizutani, Phys. Rev. **D45**, 1580 (1992).
- [11] K.Hayashi, *et al.*, Fort. der Phys. **15**, 625 (1967).
- [12] D.Lurie, *Particle and Fields* (Interscience, New York, 1968).
- [13] CELLO Collab., H.J.Behrend, *et al.*, Z. Phys. **C49**, 401 (1991).
- [14] C.J.Bebek *et al.*, Phys. Rev. **D17**, 1693 (1978);
Particle Properties Data, Phys. Lett. **B239**, (1990).
- [15] G.V.Efimov and S.N.Nedelko, Preprint Nr. **693**, University of Heidelberg, 1992.
- [16] A.Yu.Korchin, A.V.Shebeko, Jour. of Nuc. Phys. **54**, 2(8) (1991).
- [17] I.Anikin, M.Ivanov, N.Kulimanova, V.Lyubovitskij,
PSI Preprint **PSI-PR-93-08**, 1993.
- [18] R.Machleidt *et al.*, Phys. Rep. **149** (1987) 1.
- [19] L.L.Frankfurt *et al.*, Z. Phys. **A334** (1989) 343;
A.W.Thomas, Phys. Lett. **B126** (1983) 97.

Bounds for the Polaron Ground-State Energy in d Dimensions

G.V. Efimov and G. Ganbold

*Bogoliubov Theoretical Laboratory,
Joint Institute for Nuclear Research, Dubna*

Abstract

The polaron path integral by Feynman is generalized to the case of an electron moving in d space dimensions. A new scheme of systematic calculations of the obtained path integral is developed to estimate the ground-state energy of the polaron in the same way for different values of the electron-phonon coupling constant α . The leading-order term in this approach yields a new upper bound to the polaron self-energy and improves the Feynman's variational estimates for $d = 2$ and $d = 3$. A scaling relation between polaron self-energies for different space dimensions is obtained for this term. The next correction to this estimation is calculated by numerical integration for $d = 2$ and $d = 3$.

1 Introduction

The polaron problem embraces a wide range of questions concerning the behaviour of the electron of conductance in polar crystals [1]–[3]. The first field-theoretical formulation of polaron theory was proposed by Fröhlich [4] to describe the interaction of a single band electron with phonons, quanta associated with the longitudinal optical branch of lattice vibrations. Since that time, Fröhlich polaron model has attracted interest as a testing ground of various non-perturbative methods in quantum physics. One of the main quasi-particle characteristics of the polaron is its ground-state energy (GSE) $E_0(\alpha)$.

Historically, the GSE of the polaron is investigated in the weak [4], intermediate [5] and strong coupling regime [6, 7] by using different methods. The first attempt to build the polaron theory, valid for arbitrary values of α , was made by Feynman [1] within the path integral (PI) formalism using variational estimations. As a result, the Feynman's PI approach gives good upper bounds of $E_0(\alpha)$ in the entire range of α in a unified way.

There arises the question, whether the Feynman's estimations of polaron GSE can be improved by introducing some trial actions, more general than the quadratic action with two variational parameters used in [1]. This question, in particular, has been studied within different variational approaches [8, 9]. But giving variational answers, it could not estimate the next corrections to the obtained values.

Traditionally, the polaron problem has been investigated in three-dimensional ($d = 3$) space [10, 11]. In recent years, however, polaron effects have been observed in low-dimensional systems [12], and certain physical problems have been mapped into a two-dimensional ($d = 2$) polaron theory [13]. The possibility that an electron may be trapped on the surface of a dielectric material has attracted much interest [14]. The GSE of the polaron for $d = 2$ is discussed in [15, 16].

In the present paper, we investigate the GSE of the polaron in the case of arbitrary space dimensions ($d > 1$) and try not only to improve the Feynman's result, but also to estimate next corrections that allow one to test the accuracy and reliability of the obtained values.

2 Polaron Path Integral in d Dimensions

The Fröhlich longitudinal-optical (LO) polaron model for $d = 3$ is determined by the Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + \hbar\omega \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} - a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right), \quad (2.1)$$

which describes the interaction of an electron (position and momentum vectors \mathbf{x} and \mathbf{p} , band mass m) with the phonon field (creation and annihilation operators $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$, $a_{\mathbf{k}}$, quantization volume Ω , Plank constant \hbar) associated with a LO branch of lattice vibrations (wave vector \mathbf{k} and frequency ω) in a polar crystal. The electron-phonon interaction coefficient for coupling with the wave vector \mathbf{k} in (2.1) is defined as follows:

$$g_{\mathbf{k}} = \frac{i\hbar\omega(\hbar/2m\omega)^{1/4}(4\pi\alpha)^{1/2}}{|\mathbf{k}|}, \quad (2.2)$$

where the dimensionless Fröhlich coupling constant α takes the value $\alpha \sim 1 \div 20$ in most of the real ionic crystals (e.g. $\alpha \simeq 5$ for sodium chloride). In the following, units will be chosen such that $\hbar = m = \omega = 1$.

Until now, no nontrivial solution of $H\Psi_n = E_n\Psi_n$ was known. Various methods [1, 6, 17, 5] have been used to calculate approximately the spectrum of H , especially, to obtain its GSE E_o for selected (weak, intermediate or strong) regions of α .

To extend the Fröhlich Hamiltonian (2.1) written for $d = 3$ to arbitrary spatial dimensions $d > 1$, we follow a physical approach [18, 19] inspired by the formulation of a lower-dimensional polaron problem as obtained from the Fröhlich Hamiltonian of a higher-dimensional system by integrating out one or more dimensions. Following [19] we suppose that the form of the Fröhlich Hamiltonian in d -dimensions is the same as in (2.1) except that now all vectors and operators are d -dimensional and the electron-phonon interaction coefficient $g_{\mathbf{k}}$ is redefined as follows:

$$|g_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{\lambda_d^2}{|\mathbf{k}|^{d-1}}, \quad \lambda_d^2 = \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) 2^{d-3/2} \pi^{(d-1)/2} \alpha. \quad (2.3)$$

Accordingly, the GSE (further it will be denoted by $E(\alpha)$) of the Fröhlich polaron can be defined as follows:

$$E(\alpha) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \ln Z_T(\alpha), \quad (2.4)$$

where

$$Z_T(\alpha) = C_o \int_{\mathbf{r}(-T)=\mathbf{r}(T)} \delta\mathbf{r} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint_{-T}^T dt ds \mathbf{r}(t) D_o^{-1}(t,s) \mathbf{r}(s) + \frac{\alpha}{2} \iint_{-T}^T dt ds V[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(s); t, s] \right\}, \quad (2.5)$$

$$D_o^{-1}(t,s) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta(t-s).$$

The standard normalization $E(0) = 0$ in (2.4) is satisfied under the condition $Z_T(0) = 1$. The Green function D_o corresponding to the differential operator D_o^{-1} and satisfying the periodic boundary conditions is

$$D_o(t, s) = -\frac{1}{2}|t - s|. \quad (2.6)$$

The Coulomb-like interaction part, the electron self-interaction, is given by the retarded potential

$$V[\mathbf{R}; t - s] = \frac{\Gamma(d/2 - 1/2)}{4\sqrt{2}\pi^{(d+1)/2}} e^{-|t-s|} \int \frac{d\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^{d-1}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(s).$$

with the electron position vector $\mathbf{r}(t)$ embedded into d -dimensions.

The path integral in (2.5) is not explicitly solvable due to the non-Gaussian character of $V[\mathbf{R}; t - s]$ in (2.7).

3 The Gaussian Equivalent Representation of the Polaron Path Integral

For α not too large, the PI in the initial presentation (2.5) may be estimated by using a perturbation expansion in α . The problem is to estimate $Z_T(\alpha)$ beyond the weak coupling regime.

Our idea is the following. As α grows, $d\sigma_o$ with the initial kinetic part transforms to the new measure $d\sigma$ that also has a Gaussian character. The potential part is also changed into another interaction functional. The system goes to new representation under strong enough interaction. Certain restrictions may be imposed on the representation. First, it is known that in quantum theory, the main divergences given by "tadpole"-type vacuum diagrams may be efficiently eliminated out of the consideration if the normal-ordered product of operators is introduced into the interaction Hamiltonian. We suppose that in the case of finite polaron theory without divergences, the main contribution to the finite background energy can also be taken into account if we require the normal-ordered form for the polaron interaction functional in the strong coupling regime. Second, the system under consideration should be near its equilibrium state. Then any linear terms $\sim \mathbf{r}$ are absent here and quadratic configurations $\sim \mathbf{r}^2$ concentrated only in the Gaussian measure $d\sigma$ determine the Gaussian oscillator character of this equilibrium point. Therefore they should not appear in the interaction functional. Then the polaron action in the new representation of PI consists of a new kinetic part $(\mathbf{r}, D^{-1}\mathbf{r})$ and new non-Gaussian interaction functional which should be proportional to \mathbf{r}^3 as $|\mathbf{r}| \rightarrow 0$.

Following this idea [20, 21] finally we get the new representation of the GSE of the optical polaron in the form:

$$E(\alpha) = E_o(\alpha) + \Delta E(\alpha), \quad (3.8)$$

where the function $E_o(\alpha)$ being the "leading-order energy", or the GSE in the zeroth ap-

proximation, is

$$E_o(\alpha) = -d \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \left[\ln \left(k^2 \tilde{D}(k) \right) - k^2 \tilde{D}(k) + 1 \right] + \frac{\alpha_d}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt \frac{\exp(-t)}{F^{1/2}(t)} \right\}. \quad (3.9)$$

The function $F(t)$ in (3.9) is defined by the equations

$$F(t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} \tilde{D}(k) (1 - e^{ikt}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{1 - \cos(kt)}{k^2 + \alpha_d \tilde{\Sigma}(k)}, \quad (3.10)$$

$$\tilde{\Sigma}(k) = \int_{-\infty}^\infty dt e^{-ikt} \Sigma(t) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt \exp(-t) \frac{1 - \cos(kt)}{F^{3/2}(t)}. \quad (3.11)$$

Here we have introduced "the effective coupling constant"

$$\alpha_d \doteq \alpha \cdot R_d, \quad R_d = \frac{3\sqrt{\pi} \Gamma(d/2 - 1/2)}{2d \Gamma(d/2)}. \quad (3.12)$$

Our leading term (the zero-order approximation) $E_o(\alpha)$ gives an upper bound to the exact GSE of a polaron $E(\alpha)$. Really, applying the Jensen's inequality to (3.8) one gets

$$\exp \{-2T \cdot E(\alpha)\} \geq \exp \{-2T \cdot E_o(\alpha)\}. \quad (3.13)$$

Consequently,

$$E_o(\alpha) \geq E(\alpha). \quad (3.14)$$

The high-order corrections $\Delta E(\alpha)$ in (3.8) can be obtained by evaluating the PI

$$\exp \{-2T \cdot \Delta E(\alpha)\} = C \int_{\mathbf{r}(-T)=\mathbf{r}(T)} \delta \mathbf{r} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint_{-T}^T dt ds \mathbf{r}(t) D^{-1}(t, s) \mathbf{r}(s) + W[\mathbf{r}] \right\}, \quad (3.15)$$

Here, the interaction functional written in the new representation is

$$W[\mathbf{r}] = \alpha_d \cdot \frac{\Gamma(d/2) d}{6\sqrt{2\pi}^{d/2+1}} \iint_{-T}^T dt ds e^{-|t-s|} \int \frac{d\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^{d-1}} \exp \{-k^2 F(t-s)\} : e_2^{i\mathbf{k}[\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(s)]} : \quad (3.16)$$

where $e_2^x = e^x - 1 - x - x^2/2$.

Due to equations (3.11) and (3.10), in the new representation all the quadratic terms in the polaron action functional are concentrated only in the new Gaussian measure $d\sigma$ and do not enter to $W[\mathbf{r}]$.

It should be stressed that the representation (3.8) is completely equivalent to the initial representation (2.4) for asymptotically large $T \rightarrow \infty$. The Gaussian equivalent representation (3.8) gives the origin of various approximations differing from each other in the accuracy of deriving equations (3.11)-(3.10).

As a simple approximation of $\Sigma(k)$ obeying the necessary asymptotics, one can take the function:

$$\tilde{\Sigma}(k) = \frac{\mu^2}{\alpha_d} \cdot \frac{k^2}{\xi^2 + k^2}, \quad (3.17)$$

where μ and ξ are parameters. Then, (3.9) becomes

$$E_o(\alpha) = -\frac{d}{2} \left[\xi - \lambda + \frac{\mu^2}{2\lambda} \right] - \frac{\alpha_d \lambda^{3/2} d}{3\mu\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dt \exp(-t)}{\sqrt{1 - \exp(-\lambda t) + \lambda t \xi^2 / \mu^2}}, \quad (3.18)$$

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 + \xi^2}.$$

Minimizing the obtained energy over the parameters μ and ξ , one easily finds a variational upper bound in d dimensions. For $d = 3$ ($\alpha_3 = \alpha$) it explicitly reproduces the well-known Feynman's variational upper bound to the polaron GSE [1]:

$$E^{Feynman}(\alpha) = \min_{\mu} \min_{\xi} E_o(\alpha, d = 3). \quad (3.19)$$

We stress that the extremal conditions on parameters λ, ξ in (3.19) are equivalent to a particular choice of the functions $\tilde{\Sigma}(k)$ in (3.17). However, the function in (3.17) is not exact solution of (3.11) and (3.10). It means, that the Feynman's trial quadratic action does not at all represent the Gaussian part of the polaron action for $d = 3$. Exact numerical solution of equations (3.11), (3.10) by the iteration procedure allows us to obtain $E_o(\alpha)$, more exactly, which improves the Feynman's result $E^F(\alpha)$ in the entire range of α . The obtained numerical results $E_o(\alpha)$ for $d = 2$ and $d = 3$ as compared with the Feynman's variational estimation are displayed in Tables I-VI.

The correction $\Delta E(\alpha)$ should be evaluated from the functional integral in (3.16) by expanding e^W in (3.15) in a series

$$\Delta E(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta E_n(\alpha) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\sigma \{W[\mathbf{r}]\}_{\text{connected}}^n. \quad (3.20)$$

We stress that (3.20) is not a standard perturbation series in the coupling constant α_d as α_d enters into W not only explicitly as a factor, but also implicitly through the function $F(t)$. The first term in (3.20) with $n = 1$ equals zero due to normal ordering. Nontrivial corrections are given by terms with $n \geq 2$. For the second order correction to $E_o(\alpha)$ we get

$$\Delta E_2(\alpha) = -\alpha_d^2 \cdot \frac{\Gamma(d/2) d^2}{18\pi^{3/2}} \sum_{n=2}^{\infty} Q_n R_n(\alpha), \quad (3.21)$$

where

$$Q_n = \frac{(2n)! \Gamma(n + 1/2)}{16^n (n!)^2 \Gamma(n + d/2)},$$

$$R_n = \iiint_0^\infty da db dc \left\{ e^{-a-c} \cdot \frac{[F(a+b) + F(b+c) - F(a+b+c) - F(b)]^{2n}}{[F(a) \cdot F(c)]^{n+1/2}} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-a-2b-c} \cdot \frac{[F(a) + F(c) - F(a+b+c) - F(b)]^{2n}}{[F(a+b) \cdot F(b+c)]^{n+1/2}} \\
& + e^{-a-2b-c} \cdot \frac{[F(a+b) + F(b+c) - F(a) - F(c)]^{2n}}{[F(a+b+c) \cdot F(b)]^{n+1/2}} \Big\}.
\end{aligned}$$

We stress that expression (3.21) can further be simplified, but we keep this form for clarity.

Finally, we get the following expression for the GSE of the polaron

$$E^{(2)}(\alpha) = E_o(\alpha) + \Delta E_2(\alpha), \quad (3.22)$$

which can be evaluated numerically for arbitrary α and different space dimensions d .

Notice that $E_o(\alpha)$ in (3.9) is of an order of α^i , ($i = 0, 1, 2, \dots$) while $\Delta E_2(\alpha)$ in (3.21) is only of an order of α^j , ($j = 2, 3, \dots$).

4 Scaling Relations

The theory under consideration has two parameters α and d . In general, all our expressions should depend on both of them. Notice that key expressions in (3.11) and (3.10), completely defining the functions $F(t)$ and $\tilde{\Sigma}(k)$, depend only on the effective coupling constant α_d . This means that the following relations

$$F^{[n]}(\alpha_m, t) = F^{[m]}(\alpha_n, t), \quad \tilde{\Sigma}^{[n]}(\alpha_m, k) = \tilde{\Sigma}^{[m]}(\alpha_n, k) \quad n, m > 1 \quad (4.23)$$

take a place, where the numbers of space-dimensions n and m are in square brackets [...]. In the particular case of $d = 2$ and $d = 3$, we found

$$F^{[2]}(\alpha, t) = F^{[3]}(\frac{3\pi\alpha}{4}, t), \quad \tilde{\Sigma}^{[2]}(\alpha, k) = \tilde{\Sigma}^{[3]}(\frac{3\pi\alpha}{4}, k). \quad (4.24)$$

Then, considering (3.9) one easily finds that this scaling relation is also valid for $\frac{1}{d}E_o(\alpha_d)$. We have

$$E_o^{[2]}(\alpha) = \frac{2}{3} E_o^{[3]}(\frac{3\pi\alpha}{4}). \quad (4.25)$$

Note that the relation (4.25) was obtained earlier in [19, 16]. But this scaling is not valid beyond E_o because the interaction functional $W[r]$ depends not only on α_d , but also on d in a complicated way.

Let us consider the asymptotic limits of spatial dimensions d at fixed finite α . We get

$$\lim_{d \rightarrow 1} \alpha_d = \frac{3\alpha}{d-1} \rightarrow \infty, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} \alpha_d = \frac{3\alpha\sqrt{\pi e}}{\sqrt{2}d^{3/2}} \rightarrow 0. \quad (4.26)$$

Taking into account (4.26) we can conclude that as d becomes larger, α_d decreases fast and in fact we deal with the effective weak-coupling regime $\alpha_d \ll 1$ even for α not too small. For example, the second-order corrections $\Delta E_2(\alpha)$ behaves as follows:

$$\Delta E_2(\alpha) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} -\frac{1}{8\pi} \alpha_d^2. \quad (4.27)$$

In other words, our leading-order energy term $E_o(\alpha)$ tends to the exact GSE $E(\alpha)$ as d grows because the role of $\Delta E(\alpha)$ becomes insignificant.

Table I. Comparison of known weak coupling results for the polaron ground state energy $E(\alpha) = \alpha \cdot C_{w1} + \alpha^2 \cdot C_{w2} + O(\alpha^3)$ in two-dimensions.

Authors	C_{w1}	C_{w2}
S.Das Sarma, B.Mason [23]	$-\pi/2$	- 0.062
R.Feynman's theory [24]	$-\pi/2$	- 0.04569
4th, 6th order pert. theory [24]	$-\pi/2$	- 0.06397
F.Peeters, ... [19]	$-\pi/2$	- 0.063973966*
O.Hipolito [25]	$-\pi/2$	- 0.0245
Present $E_o(\alpha)$	$-\pi/2$	- 0.046626
Present $E_o(\alpha) + \Delta E_2$	$-\pi/2$	- 0.063974

* The exact value

Table II. Comparison of known weak coupling results for the polaron ground state energy $E(\alpha) = \alpha \cdot C_{w1} + \alpha^2 \cdot C_{w2} + O(\alpha^3)$ in three-dimensions.

Authors	C_{w1}	C_{w2}
S.Das Sarma, B.Mason [23]	-1	- 0.016
R.Feynman,s theory [24]	-1	- 0.012347
F.Peeters, ... [19]	-1	- 0.0159196*
T.Lee, ... [17]	-1	- 0.014
D.Larsen [5]	-1	- 0.016
Present $E_o(\alpha)$	-1	- 0.012598
Present $E_o(\alpha) + \Delta E_2$	-1	- 0.015919

* The exact value

5 Numerical Results

In this Section, we present numerical values of $E_o(\alpha)$ and $E^{(2)}(\alpha)$ estimated within the GER method and compare them with known results obtained in various (weak, strong and intermediate) ranges of α . Obtained results are given in Tables I-VI.

A. Weak Coupling Limit

Among known numerical results, concerning the GSE of the polaron, more accurate are those obtained for $\alpha \rightarrow 0$. Below, we calculate the exact GSE of the d -dimensional polaron to order α^2 in the weak coupling limit and compare the accuracy of the obtained results with exact perturbation estimations presented in [17, 23, 24, 15, 25, 19] for $d = 2$ and $d = 3$.

For α not too large, the polaron self-energy $E(\alpha)$ has the form

$$E(\alpha) = \alpha \cdot C_{w1} + \alpha^2 \cdot C_{w2} + O(\alpha^3). \quad (5.28)$$











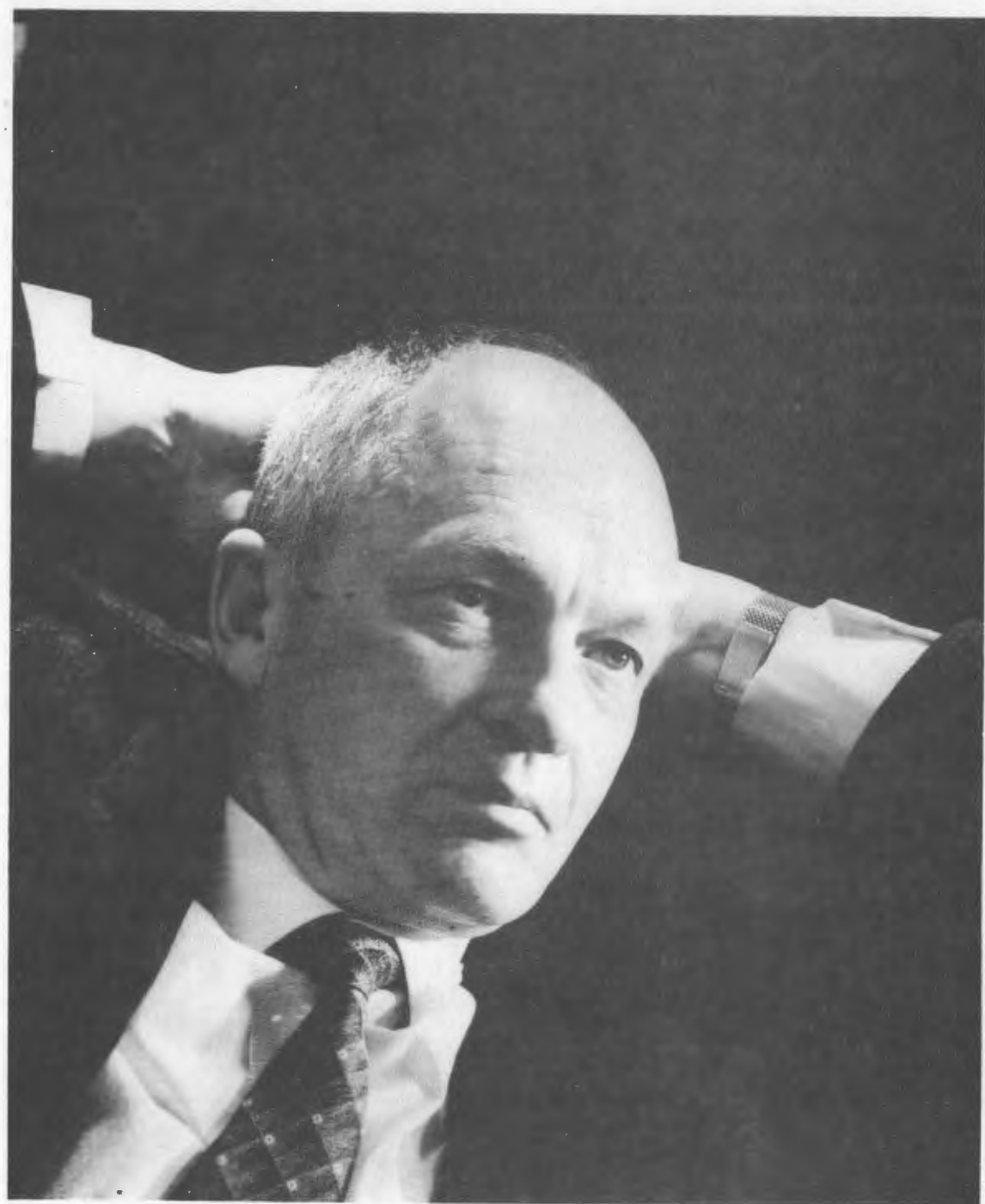


Table III. Comparison of obtained estimations of the coefficient C_s of the polaron ground state energy $E(\alpha) = \alpha^2 \cdot C_s + O(1)$ for $d = 2$ as $\alpha \rightarrow \infty$.

Authors	C_s
S.Das Sarma, B.Mason [23]	- 0.392699
Feynman's theory [24]	- 0.392699 ¹
W.Xiaoguang, ... [24]	- 0.4047 ²
O.Hipolito [25]	- 0.392699
M.Smodyrev [16]	- 0.4099
Present $E_o(\alpha)$	- 0.392699
Present $E_o(\alpha) + \Delta E_2$	- 0.400538

¹ Estimated in [24]

² Adiabatic approximation

The coefficients C_{w1} and C_{w2} are known with a good accuracy for $d = 2$ [19] and $d = 3$ [23, 19]. In our approach, the coefficient C_{w1} arises only from $E_o(\alpha)$ in (3.9); whereas the C_{w2} , from both $E_o(\alpha)$ and $\Delta E_2(\alpha)$ in (3.21). We get the coefficients C_{w1} and C_{w2} exactly as follows

$$C_{w1} = -\frac{R_d}{3} d \quad (5.29)$$

and

$$C_{w2} = -\frac{R_d^2 d}{36} \left(1 - \frac{8}{3\pi}\right) - \frac{R_d^2 \Gamma(d/2) d^2}{9\pi^{3/2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)! \Gamma(n+1/2)}{4^n (n!)^2 \Gamma(n+d/2)} B_n, \quad (5.30)$$

$$B_n = \iint_1^{\infty} dx dy \frac{1}{(x+y)^2} \left[\frac{1}{(x \cdot y)^{n+1/2}} + \frac{1}{(x+y-1)^{n+1/2}} \right].$$

For comparison, in Table I we give the known results for $d = 2$ as $\alpha \rightarrow 0$. One can see from Table I that our C_{w2} obtained only from $E_o(\alpha)$ improves the Feynman's estimate about 2 per cent. Adding the next correction calculated from ΔE_2 results in $C_{w2} = -0.063974$ which is in good agreement with the exact value in [19]. Note, ΔE_2 contributes about 40 per cent to the total value of C_{w2} .

For three dimensions, obtained results are displayed in Table II together with the known results of the polaron GSE in the weak coupling limit. Our leading term of energy $E_o(\alpha)$ improves the Feynman's variational estimation of C_{w2} by 2 per cent. Next correction results in $C_{w2} = -0.015919$ which is in good agreement with the exact value in [19]. Note, for $d = 3$ our ΔE_2 contributes about 29 per cent (smaller than for $d = 2$) to the total value of C_{w2} . Comparing the obtained results for $d = 2$ and $d = 3$, we conclude that higher-order corrections (the second-order one in our case) coming from $J_T(\alpha)$ are substantially more important for $d = 2$ than for $d = 3$. In other words, the polaron effect is stronger in low space dimensions (see Eq. (4.27)). This effect was noted earlier in [19, 16].

B. Strong Coupling Regime

Table IV. Comparison of obtained estimations of the coefficient C_s of the polaron ground state energy $E(\alpha) = \alpha^2 \cdot C_s + O(1)$ for $d = 3$ as $\alpha \rightarrow \infty$.

Authors	C_s
Feynman, Schultz [29]	- 0.1061
Pekar(by Miyake) [7]	- 0.108504 ¹
Miyake [7]	- 0.108513 ²
Luttinger, Lu [26]	- 0.1066
Marshall, Mills [31]	- 0.1078
Sheng, Dow [32]	- 0.1065
Adamowski,... [22]	- 0.1085128
Feranchuk, Komarov [33]	- 0.1078
Efimov, Ganbold [21]	- 0.10843

¹ Estimated in [7]

² The exact value

Table V. The obtained estimations of the polaron ground state energy $E_o(\alpha)$ and $E^{(2)}(\alpha)$ for $d = 2$ in the intermediate range of α compared with known results obtained in [25, 34, 23].

α	Feynman*	Hipolito[25]	Huybrecht[34]	Das Sarma[23]	Present	
					E_o	$E_o + E_2$
0.6364	- 1.0198	- 1.0266	- 1.0201	- 1.0405	- 1.020	- 1.028
1.909	- 3.2247	- 3.2263	- 3.2263	- 3.5690	- 3.231	- 3.250
3.183	- 5.9191	- 6.0902	- 5.9193	- 6.9688	- 5.928	- 6.039
4.450	- 9.6935	- 9.8723	- 9.7154	- 11.388	- 9.710	- 9.871

* Our estimation by Feynman's variational method

The GSE of the polaron in the strong electron-phonon coupling regime has been considered in [7, 23, 24, 22, 21].

It is well known that in this limit

$$E(\alpha) = \alpha^2 \cdot C_s + O(1). \quad (5.31)$$

For large α (3.22) becomes

$$E^{(2)}(\alpha) = -\alpha_d^2 \left\{ \frac{d}{9\pi} + \frac{2\Gamma(d/2) d^2}{9\pi^{3/2}} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)! \Gamma(n+1/2)}{16^n (n!)^2 n \Gamma(n+d/2)} \right\} + O(1). \quad (5.32)$$

For comparison, in Table III we give our result with the known results of the polaron GSE for $d = 2$ in the strong coupling regime $\alpha \rightarrow \infty$.

Table VI. The obtained estimations of the polaron ground state energy $E_o(\alpha)$ and $E^{(2)}(\alpha)$ for $d = 3$ in the intermediate range of α compared with known results obtained in [22, 29, 28, 5]. Our $E_o(\alpha)$ coincides exactly with the upper bound obtained in [22].

α	Osc.[22]	Feynman[29]	Smondirev[28]		Larsen[5]		Present	
	upper	upper	upper	lower	upper	lower	E_o	$E_o + E_2$
0.5	- 0.5	- 0.5032	- 0.5041	- 0.5041	- 0.5040	- 0.5052	- 0.504	- 0.5041
1.0	- 1.0	- 1.0130	- 1.0167	- 1.0175	- 1.0160	- 1.0270	- 1.014	- 1.017
1.5	- 1.5	- 1.5302	-	-	- 1.5361	- 1.576	- 1.532	- 1.539
2.0	- 2.0	- 2.0554	-	-	- 2.0640	- 2.172	- 2.058	- 2.071
2.5	- 2.5	- 2.5894	-	-	- 2.5995	- 2.872	- 2.593	- 2.614
3.0	- 3.0	- 3.1333	- 3.1645	- 3.2122	- 3.1421	-	- 3.138	- 3.167
4.0	- 4.0	- 4.2565	-	-	- 4.2771	-	- 4.265	- 4.305
5.0	- 5.0	- 5.4401	- 5.4945	- 5.7767	-	-	- 5.452	- 5.528
7.0	- 7.356	- 8.1127	- 8.0406	- 8.8832	-	-	- 8.137	- 8.255
9.0	- 10.72	- 11.486	- 10.834	- 12.654	-	-	- 11.54	- 11.69
11.0	- 14.94	- 15.710	- 13.905	- 17.165	-	-	- 15.83	- 16.04
20.0	- 44.53	- 45.283	-	-	-	-	- 45.33	- 45.99
30.0	- 97.58	- 98.328	-	-	-	-	- 98.52	- 99.86
40.0	- 171.9	- 172.60	-	-	-	-	- 173.4	- 175.1

For three-dimensions the estimation of the next higher-order corrections for the coefficient C_s was obtained by the authors earlier in [21]:

$$C_s \leq -0.108431. \quad (5.33)$$

The comparison of the known results for the coefficient C_s for $d = 3$ is displayed in Table IV.

C. Intermediate Coupling Range

In the intermediate-coupling regime the main tool for obtaining polaron properties is the variational approach [1, 17]. For $d = 3$, the Feynman variational method based on a trial oscillator-type action gives an upper bound of the polaron free energy, valid for arbitrary α . Generalizations of the Feynman action for $d = 3$ to the arbitrary density function [8] and arbitrary quadratic action [9] have improved this upper bound. In our opinion, the result [9] obtained for $d = 3$ is the best variational upper bound in the whole range of α . But this variational method does not give the next corrections to this bound. Other numerical methods dealing with this problem [26, 27] require specific complicated schemes of calculations which may introduce statistical errors. Estimations of both the upper and lower bounds for the polaron self-energy obtained in [5, 28] should be improved.

Considering intermediate values of α , we have derived equations (3.11) and (3.10) numerically, by the following iteration scheme:

$$F_{n+1}(t) = \Phi_t[\hat{\Sigma}_n],$$

$$\tilde{\Sigma}_n(k) = \Omega_k[F_n], \quad n \geq 0, \quad (5.34)$$

starting from reasonable assumed functions $F_o(t)$ and $\tilde{\Sigma}_o(k)$ (see (3.17)). Both the series $F_n(t)$ and $\tilde{\Sigma}_n(k)$ turned out to be fast convergent and the value of the leading term $E_o(\alpha)$ is actually not changed since $n \geq 6$. The results for $E_o(\alpha)$ and $E^{(2)}(\alpha)$ in two dimensions are presented in Table V.

The values of $E_o(\alpha)$ and $E^{(2)}(\alpha)$ for $d = 3$ are given in Table VI in comparison with the known data [5, 29, 9, 28]. Our $E_o(\alpha)$ for $d = 3$ coincides with the upper bound obtained in [9].

We have made preliminary estimations which indicate that the decreasing series in (3.20) was alternating. Then one can expect that the third-order correction $\Delta E_3(\alpha)$ may slightly increase the value of $E^{(2)}(\alpha)$ and inclusion of higher-order corrections $\Delta E_{n>2}(\alpha)$ might result in insignificant oscillation of $E^{(n>2)}(\alpha)$ between $E_o(\alpha)$ and $E^{(2)}(\alpha)$. In other words, the obtained $E^{(2)}(\alpha)$ may be accepted as a lower bound of the ground state energy of the polaron. Note that numerical results obtained in [30] at three points ($\alpha = 1, 3, 5$) by the method of "partial averaging" lie exactly between our curves for $E_o(\alpha)$ and $E^{(2)}(\alpha)$.

6 Conclusion

A scheme of systematic calculations has been proposed to estimate the ground-state energy of the polaron in the same way for different values of the electron-phonon coupling constant α . The polaron path integral by Feynman has been generalized to the case of an electron moving in d space dimensions. We transform this path integral to the representation built so that all the quadratic part of polaron action is concentrated entirely in the Gaussian measure, which is defined from certain equations. The interaction part of the polaron action is purely non-Gaussian in this representation. The leading-order term in this approach yields a new upper bound to the polaron self-energy and improves the Feynman's variational estimates for $d = 2$ and $d = 3$. A scaling relation between polaron self-energies for different space dimensions is obtained for this term. The next correction to this estimation is calculated by numerical integration for $d = 2$ and $d = 3$. Our results obtained within the proposed method provide a reasonable description of both two- and three-dimensional polarons at arbitrary coupling α . The consideration could be extended to computing the other characteristics of the polaron, the effective mass, the average number of phonons as well as to estimating the energy of the polaron in the presence of the magnetic field due to validity of the proposed method for the complex functionals.

References

- [1] R.P. Feynman, Phys. Rev. **97**, 660 (1955).
- [2] *Physics of polarons and excitons in polar semiconductors and ionic crystals*, eds. J.T. Devreese and F.M. Peeters, (Plenum, N.Y., 1984).
- [3] T.K. Mitra, A. Chatterjee and S. Mukhopadhyay, Phys. Rep. **153**, 91 (1987).

- [4] H. Fröhlich, H. Peltzer and S. Zienau, *Philos. Mag.* **41**, 221 (1950).
- [5] D.M. Larsen, *Phys. Rev.* **172**, 967 (1968).
- [6] S.I. Pekar, *Untersuchungen über die Elektronentheorie der Kristalle*, (Akademie-Verlag, Berlin, 1954).
- [7] S. Miyake, *Jour. Phys. Soc. Jap.* **38**, 181 (1975).
- [8] M. Saitoh, *Jour. Phys. Soc. Jap.* **49**, 878 (1980).
- [9] J. Adamowski, B. Gerlach and H.Leschke, in *Functional Integration, Theory and Applications*, eds. J.P. Antoine and E. Tirapegui, (Plenum, N.Y., 1980).
- [10] *Proceed. Int. Workshop on Variational Calculations in Quantum Field Theory*, eds. L. Polley and D.E.L. Pottinger, (World Scientific, Singapore, 1987).
- [11] *Polarons and Excitons in Polar Semiconductors and Ionic Crystals*, eds. J.T. Devreese and F.M. Peeters, (Plenum, N.Y., 1984).
- [12] M. Horst, V. Merkt and J.P. Kottaus, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 754 (1983).
- [13] S.A. Jackson and P.M. Platzman, *Phys. Rev. B* **24**, 499 (1981).
- [14] *Proceed. IV Int. Conf. on Electronic Properties of 2D-Systems*, (New Hampshire, August 1981).
- [15] D.M. Larsen, *Phys. Rev.* **B35**, 4435 (1987).
- [16] M.A. Smondirev, *Physica A* **171**, 191 (1991).
- [17] T.D. Lee, F. Low and D. Pines, *Phys. Rev.* **90**, 297 (1953).
- [18] S. Das Sarma, *Phys. Rev. B* **27**, 2590 (1983).
- [19] F.M. Peeters, Wu Xiaoguang and J.T. Devreese, *Phys. Rev.* **B33**, 3926 (1986).
- [20] G.V. Efimov and G. Ganbold, *NATO ASI series* **B255**, 205 (1991).
- [21] G.V. Efimov and G. Ganbold, *phys. stat. sol.(b)* **168**, 165 (1991).
- [22] J. Adamowski, B. Gerlach and H.Leschke, *Phys. Lett. A* **79**, 249 (1980).
- [23] S. Das Sarma and B.A. Mason, *Ann. Phys.* **163**, 78 (1985).
- [24] Wu Xiaoguang, F.M. Peeters, and J.T. Devreese, *Phys. Rev.* **B31**, 3420 (1985).
- [25] O. Hipolito, *Sol. Stat. Commun.* **32**, 515 (1979).
- [26] J.M. Luttinger and C.-Y. Lu, *Phys. Rev. B* **21**, 4251 (1982).
- [27] W. Becker, B. Gerlach and H. Schliffke, *Phys. Rev. B* **28**, 5735 (1983).

- [28] M.A. Smondyrev, *phys. stat. sol.(b)* **155**, 155 (1989).
- [29] T.D. Schultz, *Phys. Rev.* **116**, 526 (1959).
- [30] C. Alexandrou, W.Fleischer and R.Rosenfelder, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2615 (1990).
- [31] J.T. Marshall and L.R. Mills, *Phys. Rev. B* **2**, 3143 (1970).
- [32] P. Sheng and L.D. Dow, *Phys. Rev. B* **4**, 1343 (1971).
- [33] I.D. Feranchuk and I.I. Komarov, *phys. stat. sol.(b)* **15**, 1965 (1982).
- [34] W.J. Huybrecht, *Sol. Stat. Commun.* **28**, 95 (1978).

Коллективные моды КХД, индуцированные однородным самодуальным вакуумным глюонным полем

Г.В. Ефимов, С.Н. Неделько

*Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна*

Я.В. Бурданов, С.А. Солуниин

Ивановский госуниверситет

Аннотация

Сформулировано обобщение модели Намбу - Йона-Лазинио, учитывающее наличие вакуумного однородного самодуального глюонного поля. Такая вакуумная конфигурация обеспечивает аналитический конфайнмент кварков. Учёт фонового поля в глюонном пропагаторе ведет к тому, что бесцветные коллективные моды описываются нелокальными кварковыми токами с полным набором квантовых чисел, включая радиальное и орбитальное числа. Эффективная мезонная теория ультрафиолетово конечна. Показано, что взаимодействие спина кварков с вакуумным глюонным полем ведет к расщеплению масс псевдоскалярных и векторных мезонов с одинаковым кварковым составом (ρ - π , K - K^*). Спектры радиальных и орбитальных возбуждений мезонов, предсказываемые моделью, являются эквидистантными, т.е. имеют реджевский характер. Такое поведение спектров следует из нелокальности кваркового пропагатора и мезон-кварковых вершин, обусловленной вакуумным глюонным полем. Другим следствием нелокальности является то, что в пределе тяжелых кварков масса кваркония стремится к сумме масс составляющих кварков, а масса мезона, состоящего из легкого и тяжелого кварков, асимптотически равна массе тяжелого кварка.

1 Введение

Вакуумные самодуальные глюонные поля, такие, как инстантонные решения [1]-[4], стохастические поля [5] или поля с постоянной напряженностью [6, 7, 8], широко используются для объяснения различных явлений низкоэнергетической физики адронов. В частности, Леутвилером было показано, что (анти)самодуальное однородное глюонное поле обеспечивает аналитический конфайнмент кварков [6]. К сожалению, многочисленные попытки оценить напряженность поля, соответствующую минимуму эффективного потенциала КХД, не дали однозначного ответа на вопрос о существовании однородного вакуумного глюонного поля. Причина этого вполне понятна: фазовые переходы в квантовополевых системах, сопровождающиеся появлением ненулевого вакуумного поля, происходят, как правило, в области сильной связи. Методы сильной связи недостаточно развиты, что и препятствует успешному исследованию фазовых переходов в полевых системах. Доказательство существования вакуумного поля и оценка его напряженности из "первых принципов" представляется в настоящее время весьма сложной задачей.

Мы будем следовать иной, во многом феноменологической, точке зрения. А именно, предположим, что само- или антисамодуальное однородное глюонное поле реализует вакуум КХД при низких энергиях, и попытаемся найти такие явления в физике адронов, в которых это поле может играть важную роль. Такой подход можно реализовать на основе процедуры бозонизации стандартной модели Намбу - Йона-Лазинио (NJL) [9, 10]. Вместе с тем учет вакуумного поля в кварковом и глюонном пропагаторах требует, во-первых, нелокального обобщения модели NJL и, во-вторых, существенной модификации самой процедуры бозонизации.

Беря за основу производящий функционал КХД с вакуумным глюонным полем в евклидовой метрике [2, 11], мы строим бесцветные билोकальные кварковые токи. Затем, исходя из вида глюонного пропагатора во внешнем поле, производится разложение билोकальных токов по нелокальным кварковым токам с полным набором квантовых чисел, включая орбитальное ℓ и радиальное n числа. Идея такого разложения в общем виде обсуждалась в работе [12]. Ее реализация предполагает существование некоторого набора ортонормированных функций, явный вид которых должен определяться физическими свойствами системы. Мы показываем, что однородное (анти)самодуальное вакуумное поле ведет к вполне определенным функциям – обобщенным полиномам Лагерра. В результате такого разложения лагранжиан взаимодействия кварков принимает вид произведения двух нелокальных кварковых токов, имеющих полный набор квантовых чисел. В отличие от неперенормируемой локальной модели NJL, обобщенная модель оказывается суперперенормируемой, причиной чего является нелокальность кварк-кваркового взаимодействия.

Следуя стандартной процедуре бозонизации, мы получаем представление производящего функционала в терминах локальных мезонных полей, взаимодействующих с нелокальными кварковыми токами. Наконец, интегрирование по полям кварков дает эффективную мезонную теорию, в которой мезон-мезонные взаимодействия описываются кварковыми петлями, содержащими нелокальные мезон-кварковые вершины и пропагаторы кварков во внешнем однородном глюонном поле. В свою очередь, эта теория ультрафиолетово конечна благодаря нелокальности мезон-мезонных взаимодействий.

Представление производящего функционала КХД, лежащее в основе модели, подразумевает усреднение всех амплитуд по некоторым параметрам вакуумного поля (подробно см. в [2, 11]). В случае однородного поля усреднение производится по его направлениям и по само- и антисамодуальным конфигурациям этого поля. В результате усреднения все адронные амплитуды инвариантны относительно цветовых преобразований и пространственных вращений.

Обобщенная модель имеет минимальный набор свободных параметров. Ими являются массы кварков, константа четырехфермионного взаимодействия (калибровочная константа КХД) и напряженность вакуумного глюонного поля.

Расчет масс легких мезонов показывает, что взаимодействие спина кварков с вакуумным глюонным полем, которое учитывается в кварковом пропагаторе, ведет к расщеплению между массами псевдоскалярных и векторных мезонов с одинаковой кварковой структурой (ρ - π , K - K^*). Учет этой динамической причины расщепления масс позволяет сократить число свободных параметров модели по сравнению со стандартной локальной моделью NJL [14].

Спектр радиальных и орбитальных возбуждений асимптотически эквидистантен при $\ell \gg n$ и $n \gg \ell$, т.е. имеет качественно правильное реджевское поведение. При реальных значениях $\ell = 1, 2$ получено количественное описание экспериментальных данных с точностью около десяти процентов. Реджевский характер спектра следует из нелокальности мезон-кварковых вершин и кваркового пропагатора, обусловленной характером вакуумного поля.

Масса кваркония в случае тяжелых кварков равна сумме масс составляющих кварков $M \rightarrow 2m_Q$. Вместе с тем для мезонов, содержащих легкий q и тяжелый Q кварки, получаем $M \rightarrow m_Q$ при $m_Q \gg m_q$. Эти асимптотики также обусловлены нелокальностью вершин и пропагаторов и хорошо согласуются с существующими представлениями о спектроскопии тяжелых кварков.

2 Производящий функционал КХД

После интегрирования по квантовому глюонному полю производящий функционал КХД с вакуумным глюонным полем B_μ^a в евклидовой метрике может быть записан в виде [2, 11]:

$$Z = N \int d\sigma_{\text{vac}} Dq D\bar{q} \exp \left\{ \int d^4x \sum_f^{N_f} \bar{q}_f(x) (i\gamma_\mu \hat{\nabla}_\mu - m_f) q_f(x) + \sum_{n=2}^{\infty} L_n \right\}, \quad (2.1)$$

где

$$L_n = \frac{g^n}{n!} \int d^4y_1 \dots \int d^4y_n j_{\mu_1}^{a_1}(y_1) \cdot \dots \cdot j_{\mu_n}^{a_n}(y_n) G_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}(y_1, \dots, y_n | B),$$

$$j_\mu^a(y) = \bar{q}_f(x) \gamma_\mu t^a q_f(x).$$

Представление (2.1) подразумевает, что поле B_μ^a характеризуется некоторым набором параметров $\{\sigma_{\text{vac}}\}$, по отношению к которым вакуумное состояние вырождено. Интегрирование по мере $d\sigma_{\text{vac}}$ означает, что все амплитуды должны быть усреднены по $\{\sigma_{\text{vac}}\}$. Функция $G_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}$ — точная (без учета кварковых петель) n -точечная глюонная функция Грина во внешнем поле B_μ^a . Здесь и далее используются обозначения:

$$\hat{\nabla}_\mu = \partial_\mu - ig\hat{B}_\mu, \quad \hat{B}_\mu = B_\mu^a t^a, \quad \check{\nabla}_\mu = \partial_\mu - ig\check{B}_\mu, \quad \check{B}_\mu = B_\mu^a C^a,$$

где t^a и C^a — генераторы группы $SU_c(3)$ в фундаментальном и присоединенном представлениях.

Для изучения $(q\bar{q})$ коллективных мод рассматривают усеченную форму функционала (2.1), так что взаимодействие кварков описывается только слагаемым L_2 :

$$Z = N \int d\sigma_{\text{vac}} Dq D\bar{q} \exp \left\{ \int d^4x \sum_f^{N_f} \bar{q}_f(x) (i\gamma_\mu \hat{\nabla}_\mu - m_f) q_f(x) + L_2 \right\}, \quad (2.2)$$

$$L_2 = \frac{g^2}{2} \int d^4x \int d^4y j_\mu^a(x) G_{\mu\nu}^{ab}(x, y | B) j_\nu^b(y).$$

Стандартная модель NJL соответствует представлению (2.2) с

$$B_\mu^a = 0 \text{ и } G_{\mu\nu}^{ab}(x, y) = \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \delta(x - y).$$

Мы будем аппроксимировать двухточечную функцию Грина в (2.2) глюонным пропагатором во внешнем поле. Иначе говоря, предлагаемое обобщение состоит в учете вакуумного поля и в глюонном и в кварковом пропагаторах.

3 Кварки и глюоны в однородном фоновом поле

Однородное (анти)самодуальное глюонное поле имеет следующий вид [6, 7, 16, 17]:

$$B_\mu^a(x) = B_{\mu\nu}^a x_\nu = n^a B_{\mu\nu} x_\nu, \quad n^2 = 1,$$

где вектор n задает направление в цветовом пространстве, а постоянный тензор $B_{\mu\nu}$ удовлетворяет условиям:

$$B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}, \quad B_{\mu\rho} B_{\rho\nu} = -B^2 \delta_{\mu\nu}, \quad \tilde{B}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = \pm B_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

где B – напряженность фонового поля.

Любая матрица $n^a t^a \in SU_c(3)$ может быть приведена к виду

$$n^a t^a = t^3 \cos \xi + t^8 \sin \xi, \quad 0 \leq \xi < 2\pi. \quad (3.2)$$

Поскольку хромоманнитное \vec{H} и хромозлектрическое \vec{E} поля удовлетворяют условию $\vec{H} = \pm \vec{E}$, то направление поля в x -пространстве определяется только двумя сферическими углами (θ, φ) . Исходя из этого мера $d\sigma_{\text{vac}}$ записывается в виде

$$\int d\sigma_{\text{vac}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\xi \sum_{\pm}, \quad (3.3)$$

где знак \sum_{\pm} соответствует усреднению по само- и антисамодуальной конфигурациям, которые предполагаются равновероятными.

Кварковый и глюонный пропагаторы удовлетворяют уравнениям ($g B_\mu^a \equiv B_\mu^a$):

$$(i\gamma_\mu \hat{\nabla}_\mu - m_f) S_f(x, y | B) = -\delta(x - y), \quad (3.4)$$

$$(\hat{\nabla}^2 \delta_{\mu\nu} + 4i\tilde{B}_{\mu\nu}) G_{\nu\rho}(x, y | B) = -\delta_{\mu\rho} \delta(x - y), \quad (3.5)$$

которые могут быть решены методом собственного времени Швингера - Фока (см., например, [11]). Пропагатор кварка имеет вид

$$S_f(x, y | B) = \frac{i\hat{\nabla}_\mu \gamma_\mu + m_f}{\hat{\nabla}^2 - m_f^2 + \sigma_{\mu\nu} \tilde{B}_{\mu\nu}} \delta(x - y) = e^{\frac{i}{2}(x\hat{B}y)} H_f(x - y | B) e^{\frac{i}{2}(x\hat{B}y)}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_f(p | B) &= \frac{1}{v\Lambda} \int_0^1 ds e^{-\frac{p^2}{2v\Lambda^2}s} \left(\frac{1-s}{1+s} \right)^{\frac{\sigma_f^2}{4v}} \left[\alpha_f + \frac{1}{\Lambda} p_\mu \gamma_\mu - is \frac{1}{\Lambda} (\gamma f p) \right] \\ &\times \left[P_\pm + P_\mp \frac{1+s^2}{1-s^2} - \frac{i}{2} (\gamma f \gamma) \frac{s}{1-s^2} \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

где использованы следующие обозначения (см., также (3.1))

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5), \quad \alpha_f = \frac{m_f}{\Lambda}, \quad (xB_y) = x_{\mu} B_{\mu\nu} y_{\nu},$$

$$(pf\gamma) = p_{\mu} f_{\mu\nu} \gamma_{\nu}, \quad f_{\mu\nu} = \frac{t^8}{v\Lambda^2} B_{\mu\nu}, \quad f_{\mu\rho} f_{\rho\nu} = -\delta_{\mu\nu},$$

$$\Lambda^2 = \sqrt{3}B, \quad v = \text{diag}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Знаки + и - у матрицы P соответствуют само- и антисамодуальной конфигурациям.

Введем переменную $\mu = p_{\nu} \gamma_{\nu}$. Функция $\tilde{H}_f(\mu | B)$ является целой аналитической функцией в комплексной μ -плоскости. Другими словами, пропагатор не имеет полюсов, соответствующих свободным кваркам, что означает так называемый аналитический конфайнмент кварков. Параметр Λ (напряженность B) определяет характерную область изменения $\tilde{H}_f(p|B)$ или, иначе, масштаб конфайнмента.

Слагаемое $\sigma_{\mu\nu} \hat{B}_{\mu\nu}$ в пропагаторе кварка (3.6) может трактоваться как взаимодействие спина кварка с вакуумным полем. Вторая строка в (3.7) соответствует слагаемому $\sigma_{\mu\nu} \hat{B}_{\mu\nu}$ в (3.6). Влияние такого спин-полевого взаимодействия на спектр мезонов обсуждается ниже.

Глюонный пропагатор может быть представлен в виде (см. (3.5)):

$$G_{\mu\nu}(x, y | B) = e^{\frac{i}{2}(x\hat{B}y)} D_{\mu\nu}(x - y | B) e^{\frac{i}{2}(x\hat{B}y)}, \quad (3.8)$$

$$D_{\mu\nu}^{ab}(z | B) = \delta_{\mu\nu} [K^2]^{ab} D(z | \Lambda^2) + R_{\mu\nu}^{ab}(z),$$

$$R_{\mu\nu}^{ab}(z | B) = \delta_{\mu\nu} [(1 - K^2)D(z | 0) + K^2 D_0(z | \Lambda^2)]^{ab} + 2i f_{\mu\nu} K^{ab} D_1(z | \Lambda^2),$$

$$D(z | \Lambda^2) = \frac{1}{(2\pi)^2 z^2} \exp\left\{-\frac{\Lambda^2 z^2}{4}\right\}. \quad (3.9)$$

Здесь K - матрица вида

$$K_{54} = -K_{45} = K_{76} = -K_{67} = i, \quad K^2 = \text{diag}(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0),$$

а остальные элементы K равны нулю. Фурье-образ функции $D(z | \Lambda^2)$ - целая аналитическая функция квадрата импульса. Часть пропагатора, содержащая ее, описывает распространение конфаймированных мод глюонного поля. Мы будем исходить из того, что эти моды играют ключевую роль в формировании адронных связанных состояний, а остальные слагаемые ($R_{\mu\nu}^{ab}(z)$) в первом приближении могут быть опущены.

4 Бесцветные коллективные состояния

Согласно уравнению (3.8) слагаемое L_2 в (2.2) записывается в виде

$$L_2 = \frac{g^2}{2} \iint d^4x d^4y \{ \bar{q}_f(x) \gamma_{\mu} t^a [e^{\frac{i}{2}(x\hat{B}y)}]^{aa'} q_f(x) \} D_{\mu\nu}^{a'b'}(x - y | B)$$

$$\times \{ \bar{q}_{f'}(y) \gamma_{\nu} [e^{\frac{i}{2}(x\hat{B}y)}]^{b'b} t^b q_{f'}(y) \}.$$

Пользуясь тождеством

$$t_{kj}^a [e^{-i\tilde{\omega}}]^{aa'} = [e^{-i\tilde{\omega}t^{a'}} e^{i\tilde{\omega}}]_{kj}, \quad (\tilde{\omega} = \omega^a C^a \quad \hat{\omega} = \omega^a t^a),$$

можно получить

$$L_2 = \frac{g^2}{2} \iint d^4x d^4y J_\mu^a(x, y) D_{\mu\nu}^{ab}(x - y | B) J_\mu^b(y, x),$$

$$J_\mu^a(x, y) = \bar{Q}_f(x, y) \gamma_\mu t^a Q_f(x, y),$$

где $Q_f(x, y) = e^{-\frac{1}{2}(x\hat{B}y)} q_f(x)$, $\bar{Q}_f(x, y) = \bar{q}_f(x) e^{\frac{1}{2}(x\hat{B}y)}$.

Затем производится преобразование Фирца по цветовым, флейворным ($N_f = 3$) и лоренцевским индексам. Удерживая только скалярный J^{aS} , псевдоскалярный J^{aP} , векторный J^{aV} и аксиальный J^{aA} бесцветные токи, находим

$$L_2 = \frac{g^2}{2} \sum_{aJ} C_J \iint d^4x d^4y D(x - y | \Lambda^2) J_{aJ}^+(x, y) J_{aJ}(x, y), \quad (4.1)$$

$$J_{aJ}(x, y) = \bar{q}_f(y) M_{ff'}^a \Gamma^J e^{i(y\hat{B}x)} q_{f'}(x),$$

$$\Gamma^S = 1, \quad \Gamma^P = i\gamma_5, \quad \Gamma^V = \gamma_\mu, \quad \Gamma^A = \gamma_5 \gamma_\mu,$$

$$C_S = C_P = \frac{1}{9}, \quad C_V = C_A = \frac{1}{18},$$

M^a - матрицы Гелл-Манна λ^a или их линейные комбинации ($a = 0, \dots, 8$).

Тождественной заменой переменных

$$x \rightarrow x + \frac{1}{2}y, \quad y \rightarrow x - \frac{1}{2}y \quad (4.2)$$

уравнение (4.1) приводится к виду

$$L_2 = g^2 \sum_{aJ} C_J \iint d^4x d^4y D(y | \Lambda^2) J_{aJ}^+(x, y) J_{aJ}(x, y), \quad (4.3)$$

$$J_{aJ}(x, y) = \bar{q}(x) M^a \Gamma^J e^{-\frac{1}{2}y\bar{\nabla}(x)} q(x),$$

$$\bar{\nabla}_\mu(x) = \bar{\nabla}_\mu(x) - \bar{\nabla}_\mu(x), \quad \bar{\nabla}_\mu(x) = \bar{\partial}_\mu(x) - i\hat{B}_\mu(x),$$

$$\bar{\nabla}_\mu(x) = \bar{\partial}_\mu(x) + i\hat{B}_\mu(x), \quad \partial_\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

Следующий шаг состоит в вычислении интеграла по переменной y с помощью разложения токов по некоторой подходящей ортонормированной системе полиномов. С квантовомеханической точки зрения такое разложение соответствует описанию радиальных и орбитальных возбуждений системы. Запишем разложение биллокальных токов в виде

$$J_{aJ}(x, y) = \sum_{n\ell} (y^2)^{\ell/2} f_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{n\ell}(y) J_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{aJ n\ell}(x), \quad (4.4)$$

$$f_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{n\ell}(y) = L_{n\ell}(y^2) T_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\ell)}(n_y) \quad (n_y = y/\sqrt{y^2}).$$

Неприводимые тензоры четырехмерной группы вращений $T_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\ell)}$ ортогональны

$$\int_{\Omega} \frac{d\omega}{2\pi^2} T_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\ell)}(n_y) T_{\nu_1 \dots \nu_\ell}^{(\ell)}(n_y) = \frac{1}{2^\ell (\ell + 1)} \delta^{\ell k} \delta_{\mu_1 \nu_1} \dots \delta_{\mu_\ell \nu_\ell} \quad (4.5)$$

и удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned} T_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\ell)}(n_y) &= T_{\mu_1 \dots \nu_\ell \dots \mu_\ell}^{(\ell)}(n_y), \quad T_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\ell)}(n_y) = 0, \\ T_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\ell)}(n_y) T_{\mu_1' \dots \mu_\ell'}^{(\ell)}(n_{y'}) &= \frac{1}{2^\ell} C_\ell^{(1)}(n_y n_{y'}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Мера $d\omega$ в (4.5) соответствует интегрированию по сферическим углам вектора n_y , а $C_\ell^{(1)}$ в (4.6) – полиномы Гегенбауэра (ультрасферические). Полиномы $L_{n\ell}(u)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^\infty du \rho_\ell(u) L_{n\ell}(u) L_{n'\ell}(u) = \delta_{nn'}.$$

Функция $D(y|\Lambda^2)$ предопределяет выбор весовой функции в виде

$$\rho_\ell(u) = u^\ell e^{-u},$$

что соответствует обобщенным полиномам Лагерра $L_{n\ell}(u)$. Другие слагаемые глюонного пропагатора не обеспечивают какого-либо разложения типа (4.4). Это положение подтверждает то, что конфайнированные глюонные моды (т.е., $D(y|\Lambda^2)$) дают главный вклад в формирование связанного состояния. Вместе с тем именно функция D аккумулирует неабелев характер глюонов – самодействие глюонного поля. В результате разложения получаем [13]

$$L_2 = \sum_{aJ\ell n} \frac{1}{2\Lambda^2} G_{J\ell n}^2 \int d^4x [J_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{aJ\ell n}(x)]^2, \quad (4.7)$$

$$G_{J\ell n}^2 = C_J g^2 \frac{(\ell + 1)}{2^\ell n! (\ell + n)!}, \quad J_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{aJ\ell n}(x) = \bar{q}(x) V_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{aJ\ell n}(x) q(x), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} V_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{aJ\ell n}(x) &\equiv V_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{aJ\ell n} \left(\frac{\vec{\nabla}(x)}{\Lambda} \right) \\ &= M^a \Gamma^J \left\{ F_{n\ell} \left(\frac{\vec{\nabla}^2(x)}{\Lambda^2} \right) T_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\ell)} \left(\frac{1}{i} \frac{\vec{\nabla}(x)}{\Lambda} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$F_{n\ell}(s) = \left(\frac{s}{4} \right)^n \int_0^1 dt t^{\ell+n} \exp \left\{ \frac{1}{4} st \right\}. \quad (4.10)$$

Двойные скобки в (4.9) означают, что ковариантные производные коммутируют. Функции $F_{n\ell}(s)$ – целые аналитические функции в комплексной s -плоскости, т.е. удовлетворяют условию аналитического конфайнмента.

При больших евклидовских импульсах вершинные функции имеют асимптотику

$$\lim_{p^2 \rightarrow \infty} F_{n\ell}[p^2] T_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\ell)}[p] \sim \frac{1}{(p^2)^{1+\ell/2}}. \quad (4.11)$$

Вследствие этого расходящимися являются только "головастиковые" диаграммы. Такие расходимости легко устраняются с помощью контрчленов вида $-2J(x)\text{Tr}VS$. Производя перенормировку, получаем выражение

$$Z = \int d\sigma_{\text{vac}} Dq D\bar{q} \exp \left\{ \iint d^4x d^4y \bar{q}(x) S^{-1}(x, y) B q(y) + \sum_{aJ\ell n} \frac{1}{2\Lambda^2} G_{J\ell n}^2 \int d^4x \left[J_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{aJ\ell n}(x) - \text{Tr} V_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{aJ\ell n} S \right]^2 \right\}. \quad (4.12)$$

Модель ((4.12),(4.8)–(4.10)) имеет следующие основные свойства. Вакуумное поле обеспечивает конфайнмент кварков. Нелокальные кварковые токи (4.8) являются цветовыми синглетами. Эти токи несут полный набор квантовых чисел, включая радиальное n и орбитальное ℓ числа. Модель ультрафиолетово конечна благодаря нелокальности вершинных функций (4.9).

Массы кварков m_f , константа связи g и масштаб Λ (напряженность вакуумного поля) – свободные параметры эффективной теории ((4.12),(4.8)–(4.10)).

С помощью стандартной процедуры бозонизации [9, 10, 14] мы переходим в формуле (4.12) к коллективным переменным (мезонным полям) и получаем представление для производящего функционала в терминах мезонных полей $\Phi_\mu^{a\kappa}$ ($\kappa \equiv (J\ell n)$, $\mu \equiv (\mu_1 \dots \mu_\ell)$):

$$Z = N \int \prod_{a\kappa} D\Phi_\mu^{a\kappa} \exp \left\{ \frac{1}{2} \iint d^4x d^4y \Phi_\mu^{a\kappa}(x) \left[(\square - M_{a\kappa}^2) \delta(x - y) - h_{a\kappa}^2 \Pi_{a\kappa}^R(x - y) \right] \Phi_\mu^{a\kappa}(y) + I_{\text{int}}[\Phi] \right\}, \quad (4.13)$$

$$I_{\text{int}} = -\frac{1}{2} \iint d^4x d^4y h_{a\kappa} h_{a'\kappa'} \times \Phi_\mu^{a\kappa}(x) \left[\Pi_{\mu\mu'}^{a\kappa, a'\kappa'}(x - y) - \delta_{\mu\mu'}^{a\kappa, a'\kappa'} \Pi(x - y) \right] \Phi_{\mu'}^{a'\kappa'}(y) - \sum_{m=3} \frac{1}{m} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_m \prod_{k=1}^m h_{a_k \kappa_k} \Phi_{\mu_k}^{a_k \kappa_k}(x_k) \Gamma_{\mu_1, \dots, \mu_m}^{a_1 \kappa_1, \dots, a_m \kappa_m}(x_1, \dots, x_m), \quad (4.14)$$

$$\Gamma_{\mu_1, \dots, \mu_m}^{a_1 \kappa_1, \dots, a_m \kappa_m}(x_1, \dots, x_m) = \int d\sigma_{\text{vac}} \text{Tr} \left\{ V_{\mu_1}^{a_1 \kappa_1}(x_1) S(x_1, x_2 | B) \dots V_{\mu_m}^{a_m \kappa_m}(x_m) S(x_m, x_1 | B) \right\}. \quad (4.15)$$

Заметим, что интеграл по $d\sigma_{\text{vac}}$ в (4.13) перенесен в экспоненту. Это корректно лишь на уровне однопетлевого приближения, которым мы и ограничиваемся в этой работе. Заметим, что линейные по полям $\Phi_\mu^{a\kappa}$ слагаемые в действии (4.14) не возникли. Они сокращаются контрчленами, содержащимися в (4.12). Массы мезонов $M_{a\kappa}$ определяются уравнением

$$\Lambda^2 + G_\kappa^2 \tilde{\Pi}_{a\kappa}(-M_{a\kappa}^2) = 0, \quad (4.16)$$

где $\tilde{\Pi}_{a\kappa}(-M_{a\kappa}^2)$ – диагональная часть поляризаационного оператора

$$\Pi_{\mu, \mu'}^{a\kappa, a'\kappa'}(x - y) = \int d\sigma_{\text{vac}} \text{Tr} \left\{ V_\mu^{a\kappa}(x) S(x, y | B) V_{\mu'}^{a'\kappa'}(y) S(y, x | B) \right\}. \quad (4.17)$$

Поляризационный оператор (4.17) ультрафиолетово конечен, что следует из асимптотики (4.11). Константы

$$h_{a\kappa} = 1/\sqrt{\tilde{\Pi}'_{a\kappa}(-M_{a\kappa}^2)} \quad (4.18)$$

играют роль эффективных констант мезон-кваркового взаимодействия. Соотношение (4.18) согласуется с условием связности в квантовой теории поля [18].

Эффективная теория (4.13) удовлетворяет всем требованиям нелокальной КТП [19] и ведет к унитарной S -матрице. Согласно формулам (4.13)-(4.15) мезон-мезонное взаимодействие описывается вершинными функциями Γ (4.15). Они – ультрафиолетово конечны и могут быть вычислены.

Свободные параметры эффективной мезонной теории (4.13)-(4.15) имеют ясный физический смысл. Это – массы кварков m_f , масштаб Λ (напряженность вакуумного поля) и константа связи g . Последний параметр входит в модель только через массы мезонов, вычисляемые посредством уравнения (4.16).

5 Массы легких мезонов

В этом разделе мы применим модель (4.13)-(4.16) для расчета масс легких мезонов. Имеется много работ [20]-[23], в которых массы легких мезонов вычисляются в рамках стандартной (локальной) модели NJL. При этом успешное описание большой разницы масс псевдоскалярных и векторных мезонов достигается благодаря использованию независимых четырехфермионных констант связи $g_P \neq g_V$ для псевдоскалярных и векторных нонетов [14]. С нашей точки зрения, более последовательным было бы считать их равными друг другу $g_P \equiv g_V = g$. Константа g описывает четырехфермионное взаимодействие L_2 в (2.2), и нет никакой явной причины для различия между g_P и g_V . Для объяснения расщепления масс псевдоскалярных и векторных мезонов нужно привлечь некоторый динамический механизм. В нерелятивистской квантовой механике такая динамика определяется спин-спиновым взаимодействием кварков. Другими словами, необходимо учесть спиновую степень свободы кварков. Как уже было замечено, слагаемое $\sigma_{\mu\nu} B_{\mu\nu}$ в пропагаторе (3.4) описывает взаимодействие спина кварка с вакуумным полем. Исследуем, как это спин-полевое взаимодействие сказывается на массах мезонов.

Таблица 1. Параметры модели. Δ – вариация параметров, обеспечивающая описание масс с погрешностью меньше 10%

параметры	значения	Δ
m_u , МэВ	300	50
m_s , МэВ	452	100
Λ , МэВ	425	75
$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$	1.84	1

Прежде всего, определим численные значения параметров модели. Для этого решим уравнения (4.16), подставив в них наблюдаемые массы π -, ρ -, K - и K^* -мезонов.

Затем вычисляются массы ϕ , η и η' . Поляризационный оператор $\tilde{\Pi}_{aJ}$ определяется уравнением (4.17) с кварковым пропагатором (3.6), включающим взаимодействие спина с вакуумным полем. Оптимальные значения параметров приведены в таблице 1. В таблице 2 собраны экспериментальные и вычисленные значения масс M_{aJ} мезонов и констант h_{aJ} мезон-кваркового взаимодействия (см. (4.18)).

Таблица 2. Массы легких мезонов (МэВ) и константы h_{aJ} мезон-кваркового взаимодействия

	π	K	η	η'	ρ	K^*	ω	ϕ
M_{aJ}	140 (140)	496 (496)	578 (550)	923 (960)	757 (770)	921 (890)	757 (783)	1087 (1020)
h_{aJ}	3.12	3.29	3.31	2.88	1.59	1.78	1.59	1.96

Видим, что описание масс мезонов является качественно правильным и количественно приемлемым, если используется константа связи g , общая для обоих нонетов, и учитывается спин-полевое взаимодействие в пропагаторе кварков. В то же время исключение слагаемого $\sigma_{\mu\nu}B_{\mu\nu}$ в уравнении (3.6), т.е. пренебрежение взаимодействием спина кварков с полем, разрушает эту картину – разница между массами псевдоскалярных и векторных мезонов становится неудовлетворительно малой.

6 Реджевское поведение

Как правило, радиальные и орбитальные возбуждения мезонов изучаются в рамках нерелятивистских потенциальных моделей [24, 25], основанных на уравнении Шредингера. При этом для обеспечения эквидистантности спектра в потенциал вводится слагаемое вида $r^{2/3}$ [24]. Поскольку эти модели – нерелятивистские, то область их применимости ограничена мезонами, содержащими только тяжелые кварки. Возбужденные состояния легких мезонов описываются с помощью так называемого релятивизованного уравнения Шредингера [25]. В эффективной мезонной модели (4.13)–(4.15) реализуется теоретико-полевой, т.е. релятивистский по существу, подход к описанию масс мезонов, включая массы радиальных и орбитальных возбуждений.

Прежде всего найдем асимптотические решения уравнения (4.16), удовлетворяющие условиям:

$$M_{aJtn}^2 \gg \Lambda^2, \quad \text{если } n \gg \ell \text{ (или } \ell \gg n \text{)}. \quad (6.1)$$

Интегрируя по импульсным переменным и вычисля оставшиеся интегралы по параметрам методом стационарной фазы, из уравнения (4.17) можно получить следующее выражение для $\tilde{\Pi}_{aJtn}$:

$$\tilde{\Pi}^{aJtn}(-M_{aJtn}^2) \sim -\Lambda^2 \frac{(2n+\ell)!2^\ell}{5^{2n+\ell}} \exp\left\{\frac{3}{4} \frac{M_{aJtn}^2}{\Lambda^2}\right\}, \quad (6.2)$$

где учтены только факториальные и степенные по n и ℓ члены, так как именно они определяют асимптотическое поведение спектра. Формула (6.2) становится почти

очевидной, если заметить, что и кварковый пропагатор (3.4), и вершинная функция (4.9) имеют экспоненциальный характер в физической области значений импульсной переменной. Из уравнений (6.2), (4.8) и (4.16) находим

$$\frac{(2n + \ell)!}{n!(n + \ell)!5^{2n+\ell}} \exp \left\{ \frac{3 M_{aJ\ell n}^2}{4 \Lambda^2} \right\} \sim 1. \quad (6.3)$$

Рассмотрим два предельных случая.

• $n \gg \ell$ Уравнение (6.3) принимает вид

$$\exp \left\{ \frac{3 M_{aJ\ell n}^2}{4 \Lambda^2} \right\} \sim \frac{(n!)^2}{(2n)!} 5^{2n} \approx \left(\frac{5}{2} \right)^{2n},$$

или

$$M_{aJ\ell n}^2 = \frac{8}{3} \ln \left(\frac{5}{2} \right) \cdot \Lambda^2 \cdot n + O(\ln n). \quad (6.4)$$

• $\ell \gg n$ В этом случае (6.3) выглядит следующим образом:

$$\exp \left\{ \frac{3 M_{aJ\ell n}^2}{4 \Lambda^2} \right\} \sim 5^\ell, \quad M_{aJ\ell n}^2 = \frac{4}{3} \ln 5 \cdot \Lambda^2 \cdot \ell + O(\ln \ell). \quad (6.5)$$

Из уравнений (6.4) и (6.5) видно, что для больших n и ℓ спектр эквидистантен. Подчеркнем, что полученное реджевское поведение является проявлением нелокальности пропагатора (3.4) и вершинной функции (4.9), обусловленной наличием постоянного вакуумного глюонного поля.

Используя значения m_u , m_s , g и Λ из таблицы 1, можно численно решить уравнение (4.16) для низших состояний. Имеются богатые экспериментальные данные для орбитальных возбуждений π -, ρ - и K^* -мезонов [25]. Экспериментальные и вычисленные с помощью (4.16) массы собраны в таблице 3, из которой видно, что модель описывает наблюдаемые массы количественно (с точностью около десяти процентов).

Таблица 3. Массы возбужденных состояний

Meson	ℓ	$M_{aJ\ell 0}$, МэВ	$M_{aJ\ell 0}^{\text{exp}}$, МэВ
π	0	140	140
b_1	1	1206	1235
π_2	2	1599	1670
ρ	0	770	770
a_2	1	1248	1320
ρ_3	2	1514	1690
K^*	0	892	892
K_2^*	1	1367	1430
K_3^*	2	1623	1780

7 Массы тяжелых кваркониев

Еще один асимптотический режим, который можно легко исследовать – это предел тяжелых кваркониев. В этом случае необходимо решить уравнение (4.16), предполагая, что массы кваркония M и составляющих его тяжелых кварков m_Q много больше,

чем масштаб конфайнмента Λ :

$$M \gg \Lambda, \quad m_Q \gg \Lambda.$$

Поляризационный оператор в этом пределе принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{aJtn} \approx & - \iint_0^1 dt_1 dt_2 \iint_0^1 ds_1 ds_2 \left[A(s_1, s_2, t_1, t_2) \frac{M^2}{\Lambda^2} + B(s_1, s_2, t_1, t_2) \frac{m_Q^2}{\Lambda^2} \right] \\ & \times \exp \left\{ \frac{2s_1 s_2 + v(t_1 + t_2)(s_1 + s_2)}{2v(t_1 + t_2) + s_1 + s_2} \frac{M^2}{4v\Lambda^2} - \frac{m_Q^2}{4v\Lambda^2} \ln \left(\frac{1+s_1}{1-s_1} \cdot \frac{1+s_2}{1-s_2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Для определения лидирующего при $M \gg \Lambda$ и $m_Q \gg \Lambda$ поведения $\tilde{\Pi}_{aJtn}(-M^2)$ явный вид функций $A > 0$ и $B > 0$ не важен. Асимптотика интегралов в (7.1) легко находится методом стационарной фазы. Показатель экспоненты в (7.1) максимален при

$$s_1 = s_2 = s_{\max} = \sqrt{1 - \frac{4m_Q^2}{M^2}},$$

так что

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{aJtn}(-M^2) \approx & - \exp \left\{ \frac{M^2}{4v\Lambda^2} s_{\max} - \frac{m_Q^2}{2v\Lambda^2} \ln \left(\frac{1+s_{\max}}{1-s_{\max}} \right) \right\} \\ & \times \iint_0^1 dt_1 dt_2 \iint_0^1 ds_1 ds_2 \left[A(s_1, s_2, t_1, t_2) \frac{M^2}{\Lambda^2} + B(s_1, s_2, t_1, t_2) \frac{m_Q^2}{\Lambda^2} \right] \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} F_{ij}(s_i - s_{\max})(s_j - s_{\max}) \right\}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где F_{ij} – положительно определенная матрица. Легко заметить, что $s_{\max} \rightarrow 0$ при $M^2 \rightarrow 4m_Q^2$. Следовательно, в пределе тяжелых кварков уравнение (4.16) с $\tilde{\Pi}_{aJtn}(-M^2)$, определенным формулой (7.2), имеет асимптотическое решение вида

$$M^2 = 4m_Q^2 \left[1 + O \left(\frac{\Lambda^2}{m_Q^2} \ln \frac{m_Q^2}{\Lambda^2} \right) \right]^\rho \quad \text{при } m_Q \gg \Lambda. \quad (7.3)$$

Лидирующее слагаемое $4m_Q^2$ возникает из экспоненты перед интегралом в (7.2). Число ρ в (7.3) зависит от вида A и B и определяет следующие за лидирующим члены. Аналогично этому расчету, с помощью того же метода стационарной фазы можно найти асимптотику массы мезона, состоящего из легкого q и тяжелого Q кварков в пределе $m_Q \gg m_q$. Асимптотика имеет вид

$$M^2 = m_Q^2 \left[1 + O \left(\frac{\Lambda^2}{m_Q^2} \ln \frac{m_Q^2}{\Lambda^2} \right) \right]^{\rho'} \quad \text{при } m_Q \gg \Lambda, \quad m_Q \gg m_q. \quad (7.4)$$

Таким образом, видно, что нелокальность кваркового и глюонного пропагаторов, обусловленная вакуумным глюонным полем рассматриваемой конфигурации, ведет к соотношениям

$$\begin{aligned} M & \rightarrow 2m_Q, \quad \text{при } m_Q \gg \Lambda \quad (Q\bar{Q}), \\ M & \rightarrow m_Q, \quad \text{при } m_Q \gg M_q \quad (Q\bar{q}), \end{aligned}$$

которые хорошо согласуются с общепринятыми представлениями о спектроскопии тяжелых кварков. Важно подчеркнуть, что эти соотношения получены в рамках квантовополевой релятивистской модели, не апеллирующей к какой-либо потенциальной картине.

8 Заключение

Перечислим самые важные свойства обобщенной модели NJL, рассмотренной в этой статье.

- Конфайнмент кварков; обычное (локальное) поведение пропагатора кварков в глубоко евклидовой области.
- Суперперенормируемая эффективная четырехфермионная теория (4.8)-(4.12) с нелокальными бесцветными кварковыми токами, имеющими полный набор квантовых чисел.
- Ультрафиолетово конечная мезонная теория (4.13).
- Естественность параметризации : массы кварков m_f , напряженность фонового поля B (Λ) и константа связи g (калибровочная).
- Расщепление масс псевдоскалярных и векторных мезонов за счет взаимодействия спина кварков с вакуумным полем.
- Эквиливантность спектра радиальных и орбитальных возбуждений мезонов.
- В пределе тяжелых кварков масса кваркония асимптотически равна сумме масс составляющих кварков, а масса мезона, содержащего один тяжелый кварк стремится к массе тяжелого кварка (см. (7.3,7.4)).

Литература

- [1] E.V. Shuryak. Phys. Rep. **115** (1984) 151
- [2] D.I. Dyakonov, V.Yu. Petrov. Nucl. Phys. **B245** (1984) 259
- [3] C.G. Callan, R. Dashen, D.J. Gross. Phys. Rev. **D17** (1978) 2717
- [4] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov. Nucl. Phys. **B147** (1979) 385
- [5] J. Ambjorn, N.K. Nilsen, P. Olesen. Nucl. Phys. **B152** (1979) 75
- [6] H. Leutwyler. Nucl. Phys. **B179** (1981) 129; *ibid.* Phys. Lett. **96B** (1980) 154
- [7] S.G. Matinyan, G.K. Savvidy. Nucl. Phys. **B134** (1978) 539
- [8] G. Preparata. Phys. Lett. **B201** (1988) 139; preprint LNF-86/2(P); preprint MITH 89/1 (1989) Milano
- [9] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio. Phys. Rev. **122** (1961) 345
- [10] T. Eguchi. Phys. Rev. **D14**, (1976) 2755;
T. Goldman, R.W. Haymaker. Phys. Rev. **D24** (1981) 724

- [11] G.V. Efimov, M.A. Ivanov. "The Quark Confinement Model of Hadrons", IOP, Bristol and Philadelphia, 1993
- [12] C.D. Roberts, R.T. Cahill. Aust. J. Phys. **40** (1987) 499
- [13] G.V. Efimov, S.N. Nedelko. Heidelberg Univ. preprint No. 693 (1992), to be published elsewhere
- [14] S.P. Klevansky. Rev. Mod. Phys. **Vol.64** (1992) 649
- [15] L.F. Abbott. Nucl. Phys. **B185** (1981) 189
- [16] J. Finjord. Nucl. Phys. **B194** (1982) 77
- [17] E. Elizalde. Nucl. Phys. **B243** (1984) 398;
E. Elizalde. J. Soto, Nucl. Phys. **B260** (1985) 136
- [18] K. Hayashi *et al.* Fortsch. Phys. **15** (1967) 625
- [19] G.V. Efimov. "Nonlocal Interactions of Quantized Fields", Nauka, Moscow, 1977
- [20] S. Klimt, M. Lutz, W. Weise. Phys. Lett. **B249** (1990) 386
- [21] M. Takizawa, K. Tsushina. Nucl. Phys. **A507** (1989) 511
- [22] M. Takizawa, K. Kubolera. Phys. Lett. **B261** (1991) 221
- [23] U. Vogl, W. Weise. Prog. Part. Nucl. **27** (1991) 195
- [24] F. Paccanoni, S.S. Stepanov, R.S. Tutik. Mod. Phys. Lett. **A8** (1993) 549.
- [25] W. Lucha, F. Schöberl, D. Gromes. Phys. Rep. **200** (1991) 127

Quantum mechanics of bound states in the oscillator representation.

M.Dineykhan and G.V.Efimov

*Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics,
Joint Institute for Nuclear Research, Dubna*

Abstract

The Wick-ordering method called the Oscillator Representation is proposed to calculate the energy spectrum for a wide class of potentials allowing the existence of a bound state. The oscillator representation method gives a unique regular way to describe and calculate the energy levels of ground and excited states for a wide class of potentials. The results of the zeroth approximation of the oscillator representation are in a very good agreement with the exact values for the anharmonic potentials. The perturbation series converges fairly fast, i.e., the highest perturbation corrections over the effective interaction Hamiltonian are small.

1 Introduction

One of the basic problems of nonrelativistic quantum mechanics is to find the energy spectrum and eigenfunctions of a microsystem described by the Schrödinger equation with an appropriate potential. Exact solutions of this equation have been found ([1]-[4]) for a quite limited class of potentials like the harmonic oscillator, the Coulomb potential and some others. However, most quantum systems are described by potentials for which the Schrödinger equation can not be solved analytically. Thus, the solution of the Schrödinger equation with a sufficiently arbitrary potential represents the main mathematical task. For this aim, many approximate analytical and numerical methods were worked out. The great progress in the development of computer technique and effective algorithms of numerical solution of differential equations permit one to obtain numerical solutions for the energy spectrum and wave functions with a quite high accuracy although practical calculations are usually very laborious and require powerful computers.

Approximate analytical methods imply a perturbative procedure when the Hamiltonian is divided into two parts $H = H_0 + H_I$, the solution of the zeroth approximation $H_0\Psi^{(0)} = E^{(0)}\Psi^{(0)}$ is supposed to be obtained and perturbation corrections to the zeroth approximation $E^{(0)}$ and $\Psi^{(0)}$ can be calculated. The physical and mathematical top point is that the Hamiltonian H_0 in an appropriate representation of the Schrödinger equation should be chosen in such a way to catch the main dynamic properties of a quantum system and to give a possibility to calculate analytically all physical characteristics of the system under consideration. The interaction Hamiltonian H_I should give small corrections to the zeroth approximation.

Here we mention the standard perturbation Reley-Schrödinger theory ([1]-[4]), the quasiclassical or WKB method ([1]-[4]), $1/N$ -expansion([5],[6]). We will not enter into details of these methods and refer readers to the numerous literature (see, for example, [1]-[6]).

In this paper the oscillator representation method ([7],[8]) will be applied to Quantum Mechanics problems. The most remarkable difference between Quantum Field Theory and Quantum Mechanics is that quantized fields in QFT are a set of oscillators and any interactions of fields do not change the oscillator nature of these quantized fields. At the same time, in Quantum Mechanics most of the potentials and therefore their corresponding wave functions are quite far from the oscillator behaviour. The application of the oscillator representation method implies that a wave function, being a bound ground state of a quantum system with an attractive potential, is expanded over the oscillator basis in the representation, in which canonical variables (coordinate and momenta) are expressed through the creation and annihilation operators a^+ and a . However in most cases the asymptotic behaviour of a true wave function (for example, the Coulomb wave functions) for large distances does not coincide with the Gaussian asymptotic behaviour of oscillator wave functions. It means that the expansion of these wave functions over the oscillator basis, although being mathematically correct, leads to series converging not sufficiently fast for practical purposes.

Therefore, before applying the oscillator representation method we have to modify the variables in the starting Schrödinger equation to get a modified equation having solutions with the Gaussian asymptotic behaviour. In the Coulomb systems such a modification is performed by going over to the four-dimensional space where the wave function of the Coulomb system becomes an oscillator one. In an early paper [9] Schrödinger has noted the existence of such a transformation which transforms the three-dimensional Coulomb system into an oscillator one in the four-dimensional space. Kustaanheimo and Stiefel [10] gave the explicit form of this transformation and used it to solve the classical Kepler problem.

It should be taken into account that these transformations are not the canonical ones. It means that a quantum system after a la Kustaanheimo-Stiefel transformation becomes another quantum system with another set of quantum numbers and corresponding wave functions. However this new set contains a subset of wave functions which are wave functions of the initial system at the same time, and we should be able to pick out necessary quantum numbers and wave functions. Therefore, these transformations should be considered as a successful mathematical technical method.

So we get a modified Schrödinger equation the eigenfunctions of which have the oscillator Gaussian asymptotical behaviour. The next step is to write the Hamiltonian in terms of normal products over the creation and annihilation operators a^+ and a . Now one faces the question what is the optimal way to determine the frequency of this oscillator. In the language of the Hamilton formalism the problem of calculation of the ground-state energy can be formulated in the following manner. Let the Hamiltonian of a system be given. Let us pick out the pure oscillator part with some unknown frequency ω and write this Hamiltonian in the form $H_0 = \omega a^+ a$. The rest of the Hamiltonian should be represented in terms of normal products over the operators a^+ and a . The requirement that this interaction Hamiltonian does not contain quadratic in the canonical variables terms leads to the equation which determines the oscillator frequency ω . This requirement can be called the *oscillator representation condition* (ORC). As a result, the total Hamiltonian is written in the representation where the main quantum contributions to the ground state or vacuum of the system are taken into account.

The conception of normal products introduced into nonrelativistic quantum mechanics is actually not new (see for example, [11]); however, the question is on what principles the

realization of this idea should be based. All approaches which have used the formalism of creation and annihilation operators imply that the ground state wave function belongs to the oscillator basis although the true wave function can have completely different asymptotic behaviour. Besides, the "free" Hamiltonians H_0 , for which the exact oscillator solutions exist, are usually chosen in the form which destroys completely the canonical quantum structure of the Hamiltonian (see, for example, [5]-[11]).

The paper is organized in the following way. In section 2 we consider the one- and three-dimensional anharmonic potentials and power-law as well as logarithmic potentials. The energy levels for the ground and excited states are calculated. The results of our calculations in the zeroth approximation agree with the exact values very well.

2 Anharmonic Potentials

Anharmonic oscillator models have played an important role in the evolution of many branches of quantum physics. In spite of seeming simplicity it is not easy problem to find spectrum and eigenfunctions of an anharmonic interaction. There is a voluminous literature where different analytical and numerical methods are worked out to solve this problem (see, for example, [15]-[21]). On the other hand, the anharmonic potential is a good touchstone to test any new method.

Bender and Wu [16] have made a valuable contribution to investigation of the anharmonic oscillator, which is of particular interest to field theoreticians because it can be regarded as a field theory in one dimension. The main hope is that the unusual and unexpected properties of this nonlinear model may give some indication of the analytical structure of more realistic field theory. Nevertheless the developed technique turned out to be quite complicated even for this simple case.

The standard way of attacking this problem is to invoke perturbation theory. Perturbation series for any physical characteristics are asymptotical ones, i.e., they have the zeroth radius of convergence. Summation methods should be applied to calculate high order corrections. As a result, we have quite a cumbersome process. A thorough discussion of these difficulties has been done by Stevenson [17].

The quasiclassical approximation was applied to the three-dimensional anharmonic oscillator [18]. The problem of calculation of the energy levels is reduced to the solution of a very cumbersome transcendental equation invoking the complete elliptic integrals. However, its accuracy drastically worsens for the low lying energy levels and moderate anharmonicity.

Another known approach for treating systems with strong interaction is a modified perturbation theory [19]. The accuracy of the modified perturbation theory with the principle of minimal sensitivity has been carefully analyzed [20] for the anharmonic oscillator.

The $1/N$ expansion for the anharmonic oscillator was used in Refs. [21]. In [6] the $1/N$ expansion was applied to calculate the spectrum of the anharmonic oscillator.

In this section we would like to contribute to these numerous investigations. We shall apply the oscillator representation method to calculate the bound state energies of anharmonic oscillators.

2.1 Anharmonic potentials in R^1

First of all we will consider the bound state energy of the one-dimension anharmonic oscillator. The Hamiltonian is

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\nu^2}{2}q^2 + \lambda q^4. \quad (2.1)$$

In the case of symmetrical potentials $V(q^2)$ the ground state wave function depends on q^2 only, i.e.

$$\Psi = \Psi(q^2), \quad \Psi'(0) = 0,$$

so that we can write

$$\int_0^\infty dq \Psi(q^2) \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dq^2} + V(q^2) - mE \right] \Psi(q^2) = 0, \quad (2.2)$$

$$V(q^2) = \frac{m^2\nu^2}{2}q^2 + m\lambda q^4.$$

Thus we can consider the wave equation on the positive semiaxis $0 \leq q \leq \infty$.

We are going to apply the oscillator representation to this Hamiltonian so that we should coordinate the Gaussian asymptotic behaviour of functions in OR with the true one. For large q this asymptotic is defined by the anharmonic term λq^4 and the wave function is proportional to

$$\Psi(q^2) \sim \exp(-q^3) \quad \text{for } q \rightarrow \infty.$$

However, it is clear that for small λ the true wave function is close more to the Gaussian wave function than to the anharmonic one. Thus, we can expect the behaviour like

$$\Psi(q^2) \sim \exp(-q^\alpha) \quad \text{for } q \rightarrow \infty,$$

where $2 \leq \alpha \leq 3$ is a parameter. Let us introduce the new variable

$$q = s^{2/\alpha} = s^{2\rho}, \quad \rho = \frac{1}{\alpha}. \quad (2.3)$$

After some transformations the integral in (2.2) can be written as

$$\int_0^\infty ds s^{1-2\rho} \Psi(s) \left[-\frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1-2\rho}{s} \frac{d}{ds} \right] + W(s^2, E) \right] \Psi(s) = 0, \quad (2.4)$$

where

$$W(s^2, E) = 4\rho^2 \left[\frac{m^2\nu^2}{2} \cdot (s^2)^{4\rho-1} + m\lambda(s^2)^{6\rho-1} - mE(s^2)^{2\rho-1} \right].$$

Now we can identify the operator

$$\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1-2\rho}{s} \frac{d}{ds} = \frac{d^2}{ds^2} + \frac{d-1}{s} \frac{d}{ds} \rightarrow \Delta_d \quad (d = 2 - 2\rho)$$

and the measure

$$dss^{1-\rho} = dss^{d-1} \rightarrow (ds)^d$$

with "the Laplacian" Δ_d and "the measure" $(ds)^d$ in an auxiliary space \mathbb{R}^d if these operators act on a function depending on the radius only. The equation (2.4) looks as

$$\int (ds)^d \Psi(s) \left[-\frac{1}{2} \Delta_d + W(s^2, E) \right] \Psi(s) = 0. \quad (2.5)$$

The wave function $\Psi(s)$ in (2.5) can be considered as a wave function of the ground state satisfying the Schrödinger equation

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{2} \Delta_d + W(s^2, E) \right] \Psi(s) &= H \Psi(s) = \varepsilon(E) \Psi(s), \\ H &= \frac{p^2}{2} + W(s^2, E), \end{aligned} \quad (2.6)$$

and the desired energy E is determined by the equation

$$\varepsilon(E) = 0. \quad (2.7)$$

Now we can apply the oscillator representation method to the Hamiltonian (2.6). The Schrödinger equation and the Hamiltonian (2.6) in the oscillator representation look as

$$\begin{aligned} (H_0 + H_I + \varepsilon_0) \Psi &= \varepsilon(E) \Psi, \\ H &= \frac{p^2}{2} + W(s^2, E) = H_0 + H_I + \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

where H_0 , H_I and ε_0 are given by paper [22] and equal

$$\begin{aligned} H_0 &= \omega(a^+ a), \\ H_I &= \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^D \widetilde{W}(k^2, E) e^{-k^2/(4\omega)} : e_2^{ikq} : , \\ \varepsilon_0(E; \omega, \rho) &= \frac{d\omega}{4} + \int_0^\infty \frac{du u^{\frac{d}{2}-1} e^{-u}}{\Gamma(\frac{d}{2})} W\left(\frac{u}{\omega}, E\right) = \\ &= A(\omega, \rho) - EB(\omega, \rho), \\ A(\omega, \rho) &= \frac{1-\rho}{2} \omega + \frac{4\rho^2 m \omega}{\Gamma(1-\rho)} \left[\frac{m\nu^2}{2x^2} \cdot \Gamma(3\rho) + \frac{\lambda}{x^3} \cdot \Gamma(5\rho) \right], \\ B(\omega, \rho) &= \frac{4\rho^2 m \omega}{x} \cdot \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(1-\rho)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Here $: * :$ is the symbol of normal ordering and $e_2^z = e^z - 1 - z - \frac{1}{2}z^2$, $x = \omega^{2\rho}$. The functions $\omega(E)$ and $\rho(E)$ are defined by the equations

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0(E, \omega, \rho) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \varepsilon_0(E, \omega, \rho) = 0.$$

In Table 1 the numerical results for the background energy are given for the case $m = \frac{1}{2}$ and $m\nu = 1$ in the zeroth and second approximations.

Table 1. Results of calculation of the ground state energy of one-dimensional anharmonic oscillator for the case $m = \frac{1}{2}$ and $m\nu = 1$ as a function of the parameter λ . $E^{(0)}$ and $E^{(2)}$ on the energy of the zeroth and second approximations, E^{ex} is the exact value in Ref.[23]

λ	ρ	E		
		$E^{(0)}$	$E^{(2)}$	E^{ex}
.02	2.02	1.015	1.015	
.1	2.07	1.065	1.065	
.2	2.12	1.119	1.118	1.118
.5	2.18	1.243	1.242	
1.	2.23	1.394	1.393	
1.5	2.25	1.511	1.510	
2.	2.27	1.610	1.609	1.608
5.	2.31	2.022	2.020	
10.	2.32	2.454	2.452	
20.	2.34	3.016	3.014	3.010
100.	2.36	5.009	5.008	

2.2 Anharmonic potentials in R^3

In this section we consider the three-dimensional anharmonic potential. The Schrödinger equation looks as

$$\left[-\frac{1}{2mr} \left(\frac{d}{dr} \right)^2 r + \frac{l(l+1)}{2mr^2} + \frac{m\nu^2}{2} r^2 + \lambda r^4 \right] \psi(r) = E\psi(r). \quad (2.10)$$

According to (2.3) we do the transformation $r = s^{2\rho}$ and get the representation

$$\begin{aligned} H(E)\Phi(s) &= \varepsilon(E)\Phi(s), \\ H(E) &= \frac{1}{2}p^2 + W(s^2, E), \\ W(s^2, E) &= 4\rho^2 m \left[\frac{m\nu^2}{2} (s^2)^{4\rho-1} + \lambda (s^2)^{6\rho-1} - E (s^2)^{2\rho-1} \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

where $s \in R^d$ with

$$d = 2\rho(2l+1) + 2.$$

Now we can apply the oscillator representation method. The Hamiltonian is

$$H = \frac{p^2}{2} + W(s^2, E) = H_0 + H_I + \varepsilon_0, \quad (2.12)$$

where H_0 and H_I are given by (2.9) and ε_0 equals

$$\varepsilon_0(E; \omega, \rho) = \frac{d\omega}{4} + \int_0^\infty \frac{du u^{\frac{d}{2}-1} e^{-u}}{\Gamma(\frac{d}{2})} W\left(\frac{u}{\omega}, E\right)$$

$$\begin{aligned}
&= A(l, \omega, \rho) - EB(l, \omega, \rho) , \\
A(l, \omega, \rho) &= \frac{\rho(2l+1)+1}{2} \cdot \omega + \frac{4\rho^2 m \omega}{\Gamma(\rho(2l+1)+1)} \cdot \\
&\quad \left[\frac{m\nu^2}{2x^2} \cdot \Gamma(\rho(2l+5)) + \frac{\lambda}{x^3} \cdot \Gamma(\rho(2l+7)) \right] , \\
B(l, \omega, \rho) &= \frac{4\rho^2 m \omega}{x} \cdot \frac{\Gamma(\rho(2l+3))}{\Gamma(\rho(2l+1)+1)} .
\end{aligned}$$

where $x = \omega^{2\rho}$.

The ground state energy E_{0l} in the zeroth perturbation order is

$$\begin{aligned}
E_{0l} &= \min_{\{\omega, \rho\}} \frac{A(l, \omega, \rho)}{B(l, \omega, \rho)} = \min_{\{x, \rho\}} \left[\frac{\Gamma(\rho(2l+1)+2)}{\Gamma(\rho(2l+3))} \cdot \frac{x}{8m\rho^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{m\nu^2}{2x} \cdot \frac{\Gamma(\rho(2l+5))}{\Gamma(\rho(2l+3))} + \frac{\lambda}{x^2} \cdot \frac{\Gamma(\rho(2l+7))}{\Gamma(\rho(2l+3))} \right] . \tag{2.13}
\end{aligned}$$

The ground state energy of the anharmonic oscillator has been extensively studied numerically and the exact result[6] for E_{00} in the case $\lambda = 1$, $m = 1/2$ and $\nu = 2$ equals

$$E_{00}^{ex} = 4.64881\dots$$

Formula (2.12) gives for this case

$$E_{00} = 4.6511\dots$$

One can see that the oscillator representation method in the zeroth approximation gives a quite acceptable accuracy.

2.3 The power-low potentials

In this section the oscillator representation method will be applied to calculation of the ground, orbital and radial excitation energy spectrum of three-dimensional power-low potentials:

$$V(r) = \lambda r^\nu . \tag{2.14}$$

The Schrödinger equation looks as

$$\left[-\frac{1}{2mr} \left(\frac{d}{dr} \right)^2 r + \frac{l(l+1)}{2mr^2} + \lambda r^\nu \right] \psi(r) = E\psi(r) . \tag{2.15}$$

The transformation $r = s^{2\rho}$ leads to the representation

$$\begin{aligned}
H(E)\Phi(s) &= \varepsilon(E)\Phi(s) , \\
H(E) &= \frac{1}{2}p^2 + W(s^2, E) , \\
W(s^2, E) &= 4\rho^2 m \left[\lambda (s^2)^{\rho(2+\nu)-1} - E (s^2)^{2\rho-1} \right] , \tag{2.16}
\end{aligned}$$

where $s \in \mathbb{R}^d$ with

$$d = 2\rho(2l + 1) + 2.$$

The Hamiltonian in the oscillator representation looks as

$$H = \frac{p^2}{2} + W(s^2, E) = H_0 + H_I + \varepsilon_0, \quad (2.17)$$

where H_0 and H_I are given by (2.9) and ε_0 equals

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(E; \omega, \rho) &= \frac{d\omega}{4} + \int_0^\infty \frac{du u^{\frac{d}{2}-1} e^{-u}}{\Gamma(\frac{d}{2})} W\left(\frac{u}{\omega}, E\right) \\ &= A(l, \omega, \rho) - EB(l, \omega, \rho), \\ A(l, \omega, \rho) &= \frac{\rho(2l+1)+1}{2} \cdot \omega + \frac{4\rho^2 m \lambda \omega}{y^{2+\nu}} \cdot \frac{\Gamma(\rho(2l+3+\nu))}{\Gamma(\rho(2l+1)+1)}, \\ B(l, \omega, \rho) &= \frac{4\rho^2 m \omega}{y^2} \cdot \frac{\Gamma(\rho(2l+3))}{\Gamma(\rho(2l+1)+1)}. \end{aligned}$$

where $y = \omega^\rho$.

The ground state energy E_{0l} in the zeroth perturbation order is

$$\begin{aligned} E_{0l} &= \min_{\{\omega, \rho\}} \frac{A(l, \omega, \rho)}{B(l, \omega, \rho)} \quad (2.18) \\ &= \min_{\{y, \rho\}} \left[\frac{\Gamma(\rho(2l+1)+2)}{\Gamma(\rho(2l+3))} \cdot \frac{y^2}{8m\rho^2} + \frac{\lambda}{y^\nu} \cdot \frac{\Gamma(\rho(2l+3+\nu))}{\Gamma(\rho(2l+3))} \right] \\ &= \min_{\{\rho\}} \frac{2+\nu}{\Gamma(\rho(2l+3))} \cdot \left[\frac{\Gamma(\rho(2l+1)+2)}{8\nu m \rho^2} \right]^{\frac{\nu}{2+\nu}} \cdot \left[\frac{\lambda}{2} \cdot \Gamma(\rho(2l+3+\nu)) \right]^{\frac{2}{2+\nu}}. \end{aligned}$$

Now let us obtain the formula for radial excitations. We have in the first approximation (the details see in [22])

$$\varepsilon_1^{(n)} = \varepsilon_0 + 2n\omega + \langle n | H_I | n \rangle,$$

where

$$\langle n | H_I | n \rangle = \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \tilde{W}_d(k^2) \exp\left(-\frac{k^2}{4\omega}\right) \langle n | : e_2^{ikq} : | n \rangle.$$

Let us define the polynomials

$$\begin{aligned} e_n(t, d) &= \langle n | : e_2^{ikq} : | n \rangle = \sum_{m=2}^{2n} c_m(n, d) t^m, \quad t = -\frac{k^2}{4\omega}, \\ c_m(n, d) &= \frac{n! \Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+n) \Gamma(\frac{d}{2}+m)} \sum_p^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{2^{m-2p} \Gamma(\frac{d}{2}+n+p)}{(n-m+p)! (m-2p)! (p!)^2}. \end{aligned}$$

where

$$p = \max(0, m-n).$$

The coefficients for $n = 1$ and $n = 2$ are

$$c_2(1, d) = \frac{2}{d}, \quad c_2(2, d) = \frac{4(d+8)}{d(d+2)}, \quad c_3(2, d) = \frac{16}{d(d+2)}, \quad c_4(2, d) = \frac{2}{d(d+2)}.$$

Three first polynomials are

$$e_0(t) = 0, \quad e_1(t) = \frac{2}{d}t^2, \quad e_2(t) = \frac{4}{d(d+2)} \left[(d+8)t^2 + 4t^3 + \frac{1}{2}t^4 \right].$$

If the potential has the form

$$W(s^2) = \sum_k w_k (s^2)^{\sigma_k}$$

then one can get

$$\begin{aligned} \langle n | H_I | n \rangle &= \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \tilde{W}_d(k^2) \exp\left(-\frac{k^2}{4\omega}\right) \langle n | : e^{ikq} : | n \rangle = \\ &= \sum_k \frac{w_k}{\omega^{\sigma_k}} \cdot C_k(d, \sigma_k), \\ C_k(d, \sigma_k) &= \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + \sigma_k)}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \cdot \sum_{s=2}^{2n} c_s(n, d) \cdot \frac{\Gamma(\sigma_k + 1)}{\Gamma(\sigma_k + 1 - s)}. \end{aligned}$$

Table 2. Results of calculation of the ground state energy power-low potentials for the $n = \ell = 0$ and $2m = 1$ of various ν . E_{00} is the zeroth approximation of the oscillator representation. The results of the numerical, Ref.[24], and $1/N$ - expansion methods. Ref.[6], are also shown .

ν	$1/N$	Num.	E_{00}
-1.5	-.29888	-.29609	-.29703
-1.25	-.22035	-.22029	-.22027
-1.0	-.25	-.25	-.25
.15	1.32795	1.32795	1.3279
.5	1.83341	1.83339	1.8335
.75	2.10815	2.10814	2.1082
1.5	2.70806	2.70809	2.7081
2.	3.0	3.0	3.0
3.0	3.45111	3.45056	3.4511
4.0	3.80139	3.79967	3.8024
5.0	4.09146	4.08916	4.0962
6.0	4.33801	4.33860	4.3524
7.0	4.54690	4.55866	4.5815
8.0	4.71772	4.75587	4.7901
10.	4.92220	5.09786	5.1607

Table 3. Results of calculation of the energy spectrum for a wide class of potentials in the zeroth approximation. The numerical ones are taken from Refs.[6], [24] (in parentheses).

		$V(r)$			
		$-\frac{2^{1.7}}{r^{0.2}}$	$-\frac{2^8}{r^{0.8}}$	$2^{3.5}r$	$\ln r$
		$2m = 1$	$2m = 1$	$2m = 1$	$m = 1$
$n = 0$	$l = 0$	-2.686 (-2.686)	-1.2186 (-1.218)	9.353 (9.35243)	1.045 (1.0443)
	$l = 1$	-2.345 (-2.345)	-0.5004 (-0.500)	13.445	1.641 (1.643)
	$l = 2$	-2.156 (-2.156)	-0.2947 (-0.295)	16.993	2.014 (2.015)
	$l = 3$	-2.029 (-2.029)	-0.2019 (-0.202)	20.204	2.284 (2.286)
$n = 1$	$l = 0$	-2.253 (-2.253)	-0.462 (-0.462)	16.355 (16.3518)	1.848 (1.8474)
	$l = 1$	-2.101 (-2.101)	-0.281 (-0.281)	19.540	2.151 (2.151)
	$l = 2$	-1.990 (-1.990)	-0.195 (-0.195)	22.521	2.388 (2.388)
	$l = 3$	-1.905	-0.146	25.330	2.580
$n = 2$	$l = 0$	-2.044 (-2.044)	-0.265 (-0.265)	22.084 (22.08224)	2.290 (2.290)
	$l = 1$	-1.951 (-1.951)	-0.187 (-0.187)	24.833	2.491 (2.491)
	$l = 2$	-1.875 (-1.875)	-0.142 (-0.142)	27.478	2.663 (2.663)
	$l = 3$	-1.812	-0.113	30.021	2.811

The next step is to solve equations (3.25). The result is

$$E_{nl} = \lambda \min_{\rho} \frac{\Gamma(\rho(2l+3+\nu))}{\Gamma(\rho(2l+3))} \cdot \frac{F(\nu)}{F(0)} \cdot \left[\frac{F(0)}{8\rho^2 m \lambda J} \cdot \frac{\Gamma(\rho(2l+1)+1)}{\Gamma(\rho(2l+3+\nu))} \right]^{\frac{\nu}{2l+\nu}}$$

with

$$F(\nu) = 4n[\rho(2+\nu)-1] + [\rho(2l+1)+1][\rho(2+\nu) + C_n(d, \rho(2+\nu)-1)],$$

$$J = \rho\nu + [\rho(2+\nu)-1]C_n(d, 2\rho-1) - (2\rho-1)C_n(d, \rho(2+\nu)-1),$$

where $d = 2\rho(2l+1) + 2$. The numerical results are shown in Tables 2 and 3.

2.4 The Logarithmic potential

Now we consider the logarithmic potential

$$V(r) = \lambda \ln(r) . \quad (2.19)$$

This is one of the potentials which has been used in heavy quarkonium spectroscopy [24]. The standard calculations according to formulas (2.9), give the following result for the energy E_{nl} in the lowest approximation:

$$E_{nl} = \lambda \min_{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \ln \left[\left(\frac{d}{2} + 4n \right) \sigma + \frac{d}{2} (1 + C_n(d, \sigma)) \right] + \psi \left(\frac{d}{2} + \sigma \right) + \frac{1}{2\rho} \ln \left[\frac{1}{(\sigma + 1)^3 m \lambda} \cdot \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2} + \sigma)} \cdot \frac{(\frac{d}{2} + 4n) \sigma + \frac{d}{2} (1 + C_n(d, \sigma))}{1 + C_n(d, \sigma) - \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} C_n(d, \sigma)} \right] \right\} , \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{2} = \rho(2l + 1) + 1, \quad \sigma = 2\rho - 1, \quad \psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x).$$

The functions $C_n(d, \sigma)$ are defined in the previous section.

The numerical results are shown in Table 3. One can see that the first approximation of the OR method coincides with the exact values in four signs.

References

- [1] Landau L.D., and Lifschitz E.M., *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* Pergamon, Oxford, 1977
- [2] Blokhintsev D.I., *Quantum Mechanics*, Moscow, Atomizdat, 1981 (in Russian).
- [3] Messiah A., *Quantum Mechanics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1961.
- [4] Fröman N., and Fröman P.O., *JWKB Approximation*, North-Holland, Amsterdam, 1965.
- [5] Mlodinow L., and Papanicolaou N., *Ann. Phys. (N.Y.)* 128, p.314(1980);
Bander C., Mlodinow L., and Papanicolaou N., *Phys. Rev. A* 25, p.1305(1983);
Ader J., *Phys. Lett.*, 97A, p.178 (1983);
Yaffe L., *Rev. Mod. Phys.*, 54, p.497 (1982);
Witten E., *Nucl. Phys. B* 160, p.57 (1979).
- [6] Sukhatme U., Imbo T., *Phys. Rev. D* 28, p.418 (1983);
Imbo T., Pagnamenta A. and Sukhatme U., *Phys. Rev. D* 29, p.418 (1984).
- [7] Efimov G.V., Preprint IC/91/31, Miramare-Trieste (1991);
Preprint IC/90/23, Miramare-Trieste (1990).
- [8] Dineykhan M., and Efimov G.V., *Yad. Fiz.*, 57, p.220 (1994).
- [9] Schrödinger E.: *Proc.R.Irish Acad.* 46, p.183 (1941).
- [10] Kustaanheimo P. and Stiefel E.: *J. Reine Angew.Math.* 218, p.204 (1965).

- [11] Caswell W.E., Ann. Phys. 123, p.153 (1979);
Feranchuk I.D. and Komarov L.I., Phys.Lett. A88, p.211 (1982).
- [12] Duru I.H. and Kleinert H., Fortsch. der Phys. 30, p.401 (1982).
- [13] Mlodinow L.D., Papanicolaow N., Ann. Phys., 131, p.1(1981);
Sergeev A.V., Yad. Fiz. 50 , p.945 (1989) (in Russian).
- [14] Johnson R., J.Math.Phys. 21, p.2640 (1980);
Papp E., Phys. Rev. A38, p.5910 (1988).
- [15] Hioe F.T., Don Mae Millen and Montrall E.W., Phys. Rep. C43, p.307 (1978).
- [16] Bender C.M., and Wu T.T., Phys. Rev. 184, p.1231 (1969); Phys. Rev., D7, p.1620 (1973).
- [17] Stevenson P.M., Nucl. Phys., B231, p.65 (1984).
- [18] Seetharaman M., Raghavan S., and Vason S., J. Phys. A15, p.1537 (1982); J. Phys. A17, p.2493 (1984); J. Phys. A18, p.1041 (1985).
- [19] Yukalov V.I. , Theor. Math. Phys., vol.28, p.652 (1976) (in russian);
Killingbeck J., J. Phys. A14, p.1005 (1981).
- [20] Stevenson P.M., Phys. Rev. D23, p.2916 (1981).
- [21] Koudinov A.V., and Smondyrev M.A., Czech. J.Phys. 32, p.556 (1982); Theor. Math. Phys., vol.56, p.357 (1982) (in russian).
- [22] Dineykhon M., and Efimov G.V. Preprint JINR E4-94-75, Dubna(1994).
- [23] Banerjee K., et al., Proc. Roy. Soc. London 360, p.575 (1978).
- [24] Quigg C., and Rosner J., Phys. Rep., 56, p.206 (1979);
Richardson J., and Blankenbecier R., Phys. Rev. D19, p.496 (1979);
Dumont-Le Page M., et al., J. Phys. A13, p.1243 (1980).

94-187

Ответственные за выпуск: С.Н.Неделько, М.А.Иванов

Фото Ю.А.Туманова

Редактор М.И.Зарубина. Монтаж Т.Е.Попеко

Рукопись поступила 20.05.94. Подписано в печать 31.05.94
Формат 60×84/8. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 6,34
Тираж 200. Заказ 47269

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области