ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

ЗУПНИК
Борис Моисеевич

УДК 530.145

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В СУПЕРПОЛЕВЫХ ТЕОРИЯХ

Специальность: 01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна, 1991 г.

Работа выполнена в Научно-исследовательском институте прикладной физики Ташкентского государственного университета.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, академик АН УССР Д.В.Волков

доктор физико-математических наук, профессор Я.А.Смородинский

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Е.А.Иванов

Ведущая организация - Физический институт им.П.Н.Лебедева АН СССР, Москва

Защита состоится " " 1991 года на заседании специализированного совета Д047.01.01. Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна, Московской облости.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан "12 сентября 1991 г.

Ученый секретарь специализированного совета Д047.01.01. кандидат физико-математических наук В.И.Журавлев

Общая характеристика работы

Цель работы. Построение теории интегрирования дифференциальных форм на локально-лоренцевых суперпространствах трехмерных и четырехмерных супергравитаций и суперсимметричных калибровочных теорий.

Актуальность проблемы. Геометрический суперполевой подход к описанию суперсимметричных теорий связан с использованием понятия суперпространства, в котором наряду с обычными координатами используются также антикоммутирующие спинорные координаты. Суперполевой подход приводит к явно ковариантному описанию суперсимметричных теорий, что существенно упрощает их классификацию и проведение квантовых расчетов по теории возмущений. Наиболее последовательно и полно исследованы суперполевые теории в пространствах с размерностью $D \leq 6$ и особенно четырехмерные теории. Важнейшую роль в развитии суперполевого подхода играют геометрические идеи. При непосредственном обобщении геометрии классической теории Янга-Миллса и теории Эйнштейна на суперпространстве вводятся метрика, связность, кривизна и кручение. Особенно просто эти понятия формулируются в рамках алгебры дифференциальных форм на суперпространстве, в которой появляются коммутативные дифференциалы спинорных координат. Особую роль в супергравитации играют локально-лоренцевы суперпространства, в которых действует касательная группа Лоренца. Эти суперпространства впервые рассматривались Акуловым, Волковым и Сорокой, а затем были использованы Вессом и Зумино для построения связей минимальной $D = 4$, $N = 1$ супергравитации.

Следует заметить, что дифференциальные формы ранее мало применялись в суперполевых теориях в связи с отсутствием в математической литературе простого алгоритма интегрирования дифференциальных форм на суперпространстве. В несуперсимметричных калибровочных теориях дифференциальные формы применяются при построении функционалов действия, при анализе квантовых аномалий и при исследовании топологических теорий поля.

В теории супермногообразий Березиным была введена форма суперобъема, которую можно интегрировать в произвольных суперпространствах. Интегральные формы определяются отображениями алгебры дифференциальных форм в форму суперобъема. В локально-лоренцевых суперпространствах мы будем рассматривать простые алгоритмы построения интегральных форм. Использование этих методов интегрирования позволяет построить в простейших трехмерных и четырехмерных суперпространствах новый ковариантный формализм супергравитации и суперкалибровочных теорий. Этот формализм позволяет дать новую трактовку топологическим суперполевым теориям.

При исследовании расширенных суперсимметрий важную роль играет гармонический формализм Гальперина, Иванова, Огиевецкого и Сокачева. В этом формализме возникает проблема построения функционалов действия суперсимметричных калибровочных теорий в аналитическом представлении, которая также рассматривается в диссертации.

Научная новизна. В диссертационной работе исследованы следующие два новых направления в теории суперсимметрии:

А. Построена общая теория интегрирования дифференциальных форм на локально-лоренцевых суперпространствах и иследованы ее приложения к описанию простейших трехмерных и четырехмерных суперсимметричных теорий и супергравитации.

Б. Получено итерационное решение во всех порядках теории возмущений для основных уравнений гармонического формализма суперкалибровочных теорий и построен нелинейный функционал действия в этих теориях.

Исследования по первому направлению позволили построить ковариантный формализм суперполевых теорий и супергравитации в $D = 3, 4$, $N = 1$ суперпространствах, основанный на использовании дифференциальных и интегральных форм.

Результаты, полученные по второму направлению, представляют собой существенный вклад в развитие гармонического формализма расширенных суперкалибровочных теорий.

Основные результаты, выдвигаемые на защиту:

1.В локально-лоренцевом $D = 3$, $N = 1$ суперпространстве $M_{3,2}$ определены ковариантные интегральные формы и рассмотрены условия применимости интегральной формулы Стокса.

2.Определена нильпотентная алгебра обобщенных дифференциальных форм $N_{3,2}$, в которой существует невырожденный оператор дуальности.

3.В рамках алгебры $N_{3,2}$ построен ковариантный формализм черн-саймонсовской версии SG_3^1 -теории, а также топологический массовый член SYM_3^1 -теории. Рассмотрено также ковариантное описание конформной супергравитации и σ -моделей в $D = 3$, $N = 1$ суперпространстве.

4.В локально-лоренцевом $D = 4$, $N = 1$ суперпространстве $M_{4,4}$ определены ковариантные интегральные формы общего вида. Киральные интегральные формы связаны с плоским комплексным суперпространством $C^{4,2}$

5.Показано, что суперполевые связи на компоненты тензора кручения, возникающие при доказательстве теоремы Стокса для интегральной формы $\Phi_3^{(2)}$, совпадают с условиями непротиворечивости описания геометрии $M_{4,4}$ в нильпотентной алгебре обобщенных дифференциальных форм $N_{4,4}$.

6.В рамках алгебры $N_{4,4}$ структурные уравнения SG_4^1 -теории получены в расщепленном виде. Показано, что действие конформной супергравитации CSG_4^1 может быть выражено через интегральную форму Черна-Саймонса. Построен ковариантный формализм суперкалибровочной SYM_4^1 -теории, в котором также используется форма Черна-Саймонса.

7.Исследован дифференциально-геометрический формализм CSG_4^1 в подходе Огиевецкого- Сокачева. Получены суперполевые уравнения CSG_4^1 -теории.

8.В методе гармонического суперпространства получено итерационное решение уравнения нулевой кривизны для гармонических связностей расширенной суперкалибровочной теории SYM_4^2 . Показано, что это решение имеет универсальный характер и может применятся в расширенной супергравитации SG_4^2.

9.Рассмотрено итерационное решение для матрицы перехода h между аналитическим и вещественным представлениями суперкалибровочной теории. Получено точное решение в квадратурах для матрицы h в калибровочной группе $SU(2)$.

10.Построен нелинейный функционал действия SYM_4^2-теории в виде интеграла по полному суперпространству от логарифма некоторого функционального детерминанта. Этот функционал действия может применяться в большом классе суперкалибровочных теорий для размерностей $D \leq 6$.

Апробация диссертации

Основные материалы диссертации неоднократно обсуждались на семинарах Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, кафедры теоретической физики ТашГУ и докладывались на семинаре теоротдела ФИАН СССР , на сессиях Отделения ядерной физики АН СССР, на международных совещаниях по проблемам квантовой теории поля, Алушта, 1987 г. и Дубна, 1990 г., на международных семинарах по теоретико-групповым методам в физике, Звенигород, 1982 г., Юрмала, 1985 г. и Москва, 1990 г., а также на международном семинаре по квантовой гравитации, Москва, 1987 г.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 20 работ.

Объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Она содержит 116 страниц машинописного текста и библиографический список литературы из 90 названий.

Содержание работы

Во введении содержится краткий обзор литературы по геометрии суперполевых теорий, а также обсуждаются цели и задачи диссертационной работы.

В первой главе рассматривается метод ковариантных интегральных форм в суперполевых теориях с $D = 3$, $N = 1$ суперсимметрией. Рассматриваются локально-лоренцевы суперпространства $M_{3,2}$, в которых действует касательная группа Лоренца $SL(2,R)$. Алгебра внешних дифференциальных форм $\Lambda(M_{3,2}) = \Lambda_{3,2}$ является бесконечномерной алгеброй из-за наличия в ней коммутативных спинорных форм E^α.

Следуя Березину мы строим форму суперобъема с помощью антикоммутирующих псевдоформ $\dot{d}\theta_\alpha$.

Определена алгебра ковариантных псевдоформ $A_{3,2}$, которая содержит ковариантную форму суперобъема $\sigma_{3,2}$. Интегральные формы на $M_{3,2}$ определяются как отображения алгебры дифференциальных форм $\Lambda_{3,2}$ в форму суперобъема.

Показано, что в алгебре $\Lambda_{3,2}$ можно построить только три базовые скалярные формы $s_3^{(2)}$, $s_3^{(3)}$, $s_4^{(3)}$. Описаны три типа интегральных форм, соответствующих отображениям этих форм в форму суперобъема. Для простейшей интегральной формы $\Phi_3^{(2)}$ получена интегральная формула Стокса.

Предлагается систематически использовать для описания геометрии суперполевых теорий нильпотентную факторалгебру $N_{3,2}$ алгебры дифференциальных форм. Обобщенные дифференциальные формы в алгебре $N_{3,2}$ удовлетворяют дополнительным условиям нильпотентности. В алгебре $N_{3,2}$ определен невырожденный оператор дуальности $*$.

Геометрия $D = 3$, $N = 1$ супергравитации рассматривается в рамках алгебры $N_{3,2}$. В этом подходе существенно упрощаются структурные уравнения SG_3^1 и анализ тождеств Бьянки. В алгебре $N_{3,2}$ возникает ковариантное соотношение между векторной и спинорной частями оператора внешнего дифференцирования

$$d_s = -\frac{i}{2} * \partial^2 \tag{1}$$

Рассмотрена новая трактовка суперполевой SG_3^1- теории как калибровочной теории для касательной супергруппы $ISO(2,1|2)$. В этом подходе действие SG_3^1 определяется интегральной формой Черна-Саймонса

$$S_1 = ik \int \mathrm{Tr}(AdA + \frac{2}{3}A^3) \tag{2}$$

где A - суперполевая форма связности на $ISO(2,1|2)$. Уравнения движения для этой теории эквивалентны суперполевым связям и уравнениям движения SG_3^1. Эта трактовка SG_3^1 является суперполевым обобщением топологического подхода Виттена к описанию трехмерной гравитации.

Алгебра $N_{3,2}$ применяется также для ковариантного описания суперкалибровочных теорий SYM_3^1. Построены интегральные формы, соответствующие кинетическому и топологическому массовому членам действия SYM_3^1. Рассматривается ковариантная теория возмущений для этой теории. Обсуждается также ковариантный формализм нелинейных σ -моделей в $D = 3$, $N = 1$ суперпространстве.

Вторая глава посвящена исследованию ковариантных интегральных форм в геометрии $D = 4$, $N = 1$ суперпространств. Рассматриваются вещественные суперпространства $M_{4,4}$, в которых действует касательная группа Лоренца $SL(2,C)$. В этом суперпространстве вводится ковариантная форма общего суперобъема $\sigma_{4,4}$. Интегральные формы общего вида $\Phi_s^{(r)}$ определяются как отображения скалярных дифференциальных форм алгебры $\Lambda_{4,4}$ в форму суперобъема $\sigma_{4,4}$. Показано, что в $M_{4,4}$ существуют только пять типов интегральных форм общего вида. Исследованы связи на компоненты тензора кривизны, необходимые для справедливости интегральной формулы Стокса в случае интегральной формы $\Phi_3^{(2)}$ в суперпространстве $M_{4,4}$. Эти связи можно формулировать в виде условия симметрии обобщенного тензора кривизны в алгебре $N_{4,4}$.

$$\tilde{T}^{AB} = (-1)^{\dot{A}\dot{B}}\tilde{T}^{BA} \tag{3}$$

Алгебра $N_{4,4}$ определяется с помощью дополнительных условий нильпотентности обобщенных дифференциальных форм. По аналогии с трехмерным случаем в алгебре $N_{4,4}$ можно определить невырожденный оператор дуальности. В алгебре $N_{4,4}$ оператор внешнего дифференцирования разбивается на сумму векторной и спинорных частей

$$d = d_x + \partial + \bar{\partial} \tag{4}$$

которые удовлетворяют следующим условиям

$$d_x^2 = 0, \quad \partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0 \tag{5}$$

$$d_x = -\tfrac{i}{4} * \{\partial, \bar{\partial}\} \tag{6}$$

Условия (3) являются также условиями непротиворечивости описания геометрии $M_{4,4}$ в рамках алгебры $N_{4,4}$.

В рамках алгебры $N_{4,4}$ существенно упрощаются структурные уравнения минимальной SG_4^1 -теории

$$\tilde{T}^{\alpha} = iR * g^{\alpha} + iG^{\alpha\dot{\beta}} * \bar{g}_{\dot{\beta}} \tag{7}$$

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = 2i * g^{\gamma}W_{\alpha\beta\gamma} + \tfrac{1}{2} * \bar{g}^{\dot{\gamma}}(\nabla_{\alpha}G_{\beta\dot{\gamma}} + \nabla_{\beta}G_{\alpha\dot{\gamma}}) \tag{8}$$

где R, G и W -физические SG_4^1 -суперполя.

Аналогичный ковариантный формализм применяется для описания конформной супергравитации CSG_4^1 в алгебре $N_{4,4}$. В этом формализме появляются дополнительные масштабные преобразования с киральными параметрами. Получены масштабные преобразования обобщенной формы связности $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}$.

Действие CSG_4^1 -теории выражается через интегральную форму Черна-Саймонса

$$\int \mathrm{Tr}\,(\tilde{\Gamma}d\tilde{\Gamma} + \frac{2}{3}\tilde{\Gamma}^3) \tag{9}$$

Масштабная и лоренцева инвариантность этого действия при инфинитезимальных преобразованиях проверяется непосредственно.

В формализме Огиевецкого-Сокачева внутренняя геометрия CSG_4^1 -теории формулируется в плоском комплексном суперпространстве $C^{4,2}$. Физическое вещественное суперпространство CSG_4^1 представляет собой вещественную поверхность в $C^{4,2}$. В этом подходе в диссертации рассматривается дифференциально-геометрический формализм. Масштабным параметром CSG_4^1 -теории в этом подходе является березиниан координатных преобразований $C^{4,2}$ суперпространства.

Выведены суперполевые уравнения движения конформной супергравитации в геометрическом формализме

$$M_{\alpha\dot{\alpha}} + M_{\alpha\dot{\alpha}} = \beta I_{\alpha\dot{\alpha}} \tag{10}$$

$$M_{\alpha\dot{\alpha}} = \nabla^{\gamma}(\nabla_{\dot{\alpha}}\nabla^{\dot{\beta}} - \tfrac{1}{2}G^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}})W_{\alpha\beta\gamma} \tag{11}$$

где $I_{\alpha\dot{\alpha}}$ -конформный суперток, а β -константа связи. Эти уравнения представляют собой суперсимметричное обобщение конформно-ковариантных уравнений Баха в теории Вейля.

В рамках теории $N_{4,4}$ рассмотрен также ковариантный формализм суперкалибровочной SYM_4^2-теории. Показано, что действие SYM_4^2-теории в полном суперпространстве может быть выражено через интегральную форму Черна-Саймонса, которую можно представить в следующем виде

$$S = \int \mathrm{Tr}\, \{A_x \cdot A_x + \tfrac{1}{2} A_\theta d_x A_\theta + \\ + \tfrac{1}{2} A_x(\partial A_\theta + \partial A_\theta + \{A_\theta, A_\theta\})\} \qquad (12)$$

В этом формализме условие киральности накладывается независимо.

Таким образом, в ковариантном формализме интегральная форма Черна-Саймонса является универсальным объектом, который используется в суперпространствах различных размерностей.

В третьей главе исследуется решение суперполевых связей расширенных суперкалибровочных теорий в гармоническом формализме Гальперина, Иванова, Огиевецкого и Сокачева.

В аналитическом представлении суперкалибровочной SYM_4^2-теории рассматривается уравнение нулевой гармонической кривизны

$$\partial^{(+2)} A^{(-2)} - \partial^{(-2)} V^{(+2)} + [V^{(+2)}, A^{(-2)}] = 0 \qquad (13)$$

где $V^{(+2)}$ -аналитический препотенциал, а $A^{(-2)}$ -неаналитическая гармоническая связность.

Это уравнение решается по теории возмущений. Итерационное решение имеет вид ряда по $V^{(+2)}$ и содержит гармонические обобщенные функции

$$A^{(-2)}(z,u) = \sum_{n=1} (-1)^n \int du_1 \cdots du_n \frac{V^{(+2)}(z,u_1) \cdots V^{(+2)}(z,u_n)}{(u^+u_1^+) \cdots (u_n^+ u^+)} \qquad (14)$$

Итерационное решение для гармонической связности $A^{(-2)}$ имеет универсальный характер в гармоническом формализме и применяется также при решении связей расширенной супергравитации и в гармоническом формализме гиперкэлеровой геометрии.

Для решения связей расширенной супергравитации в работе введены удобные координаты, в которых частные производные коммутируют с гармоническими производными .

Рассматривается также итерационное решение гармонического уравнения для матрицы перехода (моста) h в суперкалибровочных теориях. Это решение легко получается во всех порядках теории возмущений для линейной калибровочной группы. Для унитарной группы решение получено в низших порядках разложения по препотенциалу.

Для калибровочной группы $SU(2)$ получено точное решение уравнения для матрицы h в специальной калибровке, в которой индексы калибровочной группы отождествляются с индексами группы автоморфизмов. В этой калибровке решение матричного уравнения для h сводится к решению в квадратурах системы гармонических дифференциальных уравнений. В суперкалибровочной SYM_4^2-теории без ограничения общности можно выбрать калибровку, в которой препотенциал и решение для h будут зависеть от одной аналитической функции.

Использование итерационного решения для связности $A^{(-2)}$ (14) позволяет построить функционал действия SYM_4^2-теории во всех порядках теории возмущений по препотенциалу $V^{(+2)}$

$$S = \frac{1}{g^2} \sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int d^{12}z du_1 \cdots du_n \,\mathrm{Tr}\, \frac{V^{(+2)}(z,u_1) \cdots V^{(+2)}(z,u_n)}{(u_1^+ u_2^+) \cdots (u_n^+ u_1^+)} \qquad (15)$$

Суперполевую плотность действия можно выразить через логарифм некоторого функционального детерминанта

$$L(z) = \mathrm{Tr}\ln \left[1 + \frac{1}{\partial^{(+2)}} V^{(+2)}\right] \qquad (16)$$

Полученная формула для действия расширенной суперкалибровочной теории справедлива в широком классе суперпространств размерности $D \leq 6$, которые связаны между собой размерной редукцией.

Рассматривается специальный случай применения гармонического формализма к $D = 3$, $N = 3$ суперкалибровочной теории. В этом случае формула (15) определяет топологический массовый член теории, а кинетический член действия имеет тензорный вид в аналитическом пространстве.

В заключении подводятся итоги и перечисляются результаты диссертации, выносимые на защиту.

Результаты диссертации опубликованы в работах

1. Зупник Б.М. Суперполевой формализм конформной супергравитации. //Ядер. физ. 1982. Т.36. N.3. С.779-789.

2. Zupnik B.M. The equations of conformal supergravity. //Phys. Lett. 1981. V.105B. N.2,3. P.153-154. (Уравнения конформной супергравитации)

3. Зупник Б.М. Конформные суперполя без связей в киральных U(1)- супергравитациях. //Ядер. физ. 1983. Т.38. N.3. С.788-797.

4. Зупник Б.М. Суперполевое действие в конформной супергравитации. //Доклады АН УзССР. 1981. N.7. С.27-29.

5. Зупник Б.М. Неограниченные конформные суперполя в 1-супергравитациях с различной внемассовой структурой. //Труды II международного семинара "Теоретико-групповые методы в физике. "-М. :Наука, 1983. С. 234-238.

6. Зупник Б.М. , Пак Д.Г. Суперполевые методы квантования в супергравитации. //Ядер. физ. 1985. Т.42. N.3. С.710-719.

7. Зупник Б.М. Решение суперполевых связей шестимерных суперсимметричных теорий в гармоническом суперпространстве. //Теоретико - групповые методы в физике. Труды 3 международного семинара. М. : Наука 1986. Т.1. С.52-59.

8. Зупник Б.М. Шестимерные суперкалибровочные теории в гармоническом суперпространстве. //Ядер. физ. 1986. Т.44. N.3. С.794-802.

9. Зупник Б.М. Действие суперсимметричной N=2 калибровочной теории в гармоническом суперпространстве. //Доклады АН УзССР . 1986. N.6. С.28 [illegible].

10. Зупник Б.М. Решение связей суперкалибровочной теории в гармоническом SU(2)/U(1) суперпространстве. //Теор. мат. физ. 1986. Т.69. N.2. С.207-213.

11. Zupnik B.M. The action of the supersymmetric N=2 gauge theory in harmonic superspace. //Phys. Lett. 1987. N.2. P.175-176. (Действие суперсимметричной N=2 калибровочной теории в гармоническом суперпространстве)

12. Зупник Б.М. , Пак Д.Г. Суперполевая формулировка простейших трехмерных калибровочных теорий и конформных супергравитаций. //Теор. мат. физ. 1988. Т.77. N.1. С.97-106.

13. Зупник Б.М. , Пак Д.Г. Топологически массивные калибровочные теории в суперпространстве. //Изв. вузов. Физика. 1988. N.12. С.13-17.

14. Zupnik B.M. , Pak D.G. Differential and integral forms in supergauge theories and supergravity. //Class. Quant. Grav. 1989. V.6. N.5. P.723-730. (Дифференциальные и интегральные формы в суперкалибровочных теориях и супергравитации)

15. Zupnik B.M. , Pak D.G. , Hetselius D.V. Superfield geometry of three- dimensional supersymmetry and supergravity. //Quantum gravity. Ed. by M.A. Markov, V.A. Berezin, V.P. Frolov. Singapore: World Sci. Publ. , 1988. P. 502-514. (Суперполевая геометрия трехмерной суперсимметрии и супергравитации)

16. Зупник Б.М. , Хецелиус Д.В. Трехмерная расширенная суперсимметрия в гармоническом суперпространстве. //Ядер. физ. 1988. Т.47. N.4. С.1147- 1156.

17. Зупник Б.М. Решение гармонических уравнений в калибровочных теориях. //Ядер. физ. 1988. Т.48. N.4. С.1171-1180.

18. Zupnik B.M. On the solutions of SU(2)/U(1) harmonic equations in the gauge theories. //Phys. Lett. 1988. V.209B. N.4. P.513-515. (О решениях SU(2)/U(1) гармонических уравнений в калибровочных теориях)

19. Зупник Б.М. , Толстоног Л.В. Стандартные суперполя в гармоническом формализме суперкалибровочных теорий. //Теор. мат. физ. 1989. Т.80. N.3. С.391-398.

20. Zupnik B.M. Nilpotent algebras of the generalized differential forms and the geometry of superfield theories. //Phys. Lett. 1991. V.254B. N.1,2. P.127-131. (Нильпотентные алгебры обобщенных дифференциальных форм и геометрия суперполевых теорий)