

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Ж-72

На правах рукописи

ЯКОВ МИХАЙЛОВИЧ ЖИЛЕЙКИН

УДК 519.6:535

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВОЙ ФИЗИКИ  
И ИХ ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Дубна 1986

Работа выполнена в Научно-исследовательском вычислительном центре Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,  
профессор А.Г.СВЕШНИКОВ

доктор физико-математических наук,  
профессор Е.П.ЖИДКОВ

доктор физико-математических наук,  
старший научный сотрудник В.Н.КАРАМЗИН

Ведущее учреждение:

Институт общей физики АН СССР, г.Москва

Защита состоится "16" апр 1987 года в 13.50  
часов на заседании специализированного совета Д 047.01.04  
при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации СИАИ  
по адресу: г. Дубна, Московской области.

Автореферат разослан "16" марта 1987 г.

Ученый секретарь специализированного совета  
кандидат физико-математических наук

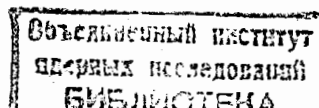
В.М.ИВАНЧЕНКО

И. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. В последние десятилетия бурно развиваются области физики, связанные с исследованием сложных волновых явлений. Результаты этих исследований находят самое широкое практическое применение. Достаточно назвать такие сферы человеческой деятельности как передача информации, энергетика, изучение земли и космоса и многие другие. Появление в 60-х годах первых лазеров произвело революцию в оптике. Основные свойства лазерного излучения - когерентность и возможность концентрации энергии высокой плотности, привели к появлению новых направлений в физике. Существенной чертой наиболее актуальных задач современной физики является их нелинейный характер. Достаточно точное описание сложных нелинейных процессов потребовало привлечения нового математического аппарата. Такие исследования стали возможны в результате применения вычислительных методов на основе использования современных ЭВМ. Вычислительная техника дала возможность решить многие большие задачи до этого недоступные для математики и, в совокупности со специализированными численными методами и программным обеспечением ЭВМ, стала важным, а подчас и единственным, инструментом изучения сложных нелинейных волновых процессов. Для численного моделирования на современных ЭВМ необходимы корректная постановка математической задачи, разработка эффективных численных методов и их реализация в виде программного продукта.

Целью работы является:

- а) Четкая постановка математической задачи; корректный вывод дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные волновые процессы.
- б) Разработка эффективных численных методов решения линейных и нелинейных задач оптики и акустики.
- в) Численное исследование на ЭВМ волновых процессов нелинейной оптики и акустики, представляющих практический и теоретический интерес.
- г) Создание комплекса стандартных программ, ориентированных на решение актуальных задач волновой физики.



Научная новизна. Автором получены следующие результаты:

1. Дан вывод приближенных дифференциальных уравнений, описывающих распространение оптических и акустических пучков,

2. Получены оптимальные формулы численного дифференцирования и интегрирования на классах периодических и быстроосциллирующих функций,

3. Дано математически строгое обоснование спектрального численного метода решения уравнения нелинейной акустики для пучков,

4. Разработан алгоритм численного решения уравнения нелинейной акустики для пучков, использующий консервативные схемы газовой динамики,

5. Разработаны алгоритмы расчета распространения оптических волн через диафрагмы различной формы,

6. Разработан алгоритм расчета собственных чисел и мод открытого оптического резонатора,

7. На основе численных расчетов проведен анализ собственных типов колебаний открытых оптических резонаторов различного вида,

8. Проведено численное исследование распространения оптических пучков с гипергауссовым начальным распределением амплитуды в нелинейных средах с поглощением и без поглощения энергии,

9. На основе численных расчетов показана возможность концентрации в окрестности фокальной точки энергии, существенно превосходящей одну критическую мощность,

10. Проведено численное исследование самофокусировки мощных оптических пучков при наличии малых поперечных возмущений, сформулированы условия устойчивости,

11. Дано полное описание распространения первоначально плоских и сфокусированных акустических пучков в идеальных средах с диссипацией,

12. Проведен подробный гармонический анализ волновых акустических пучков при их распространении в нелинейных средах,

13. На основе численных расчетов показана возможность возрастания амплитуды акустических пучков при больших значениях коэффициента нелинейности,

14. Дано описание трансформации первоначально плоских и сфокусированных акустических импульсов при их распространении

в нелинейных средах,

15. Создана Библиотека стандартных программ для решения задач волновой физики на языке ФОРТРАН.

Научные результаты пункта 2 получены в соавторстве с Т.К. Докучаевой и А.Б.Куваркиным, пункта 4 - с А.А.Амосовым, В.Д. Валединским, А.А.Злотником, пунктов 6-7 - с Н.С.Бахваловым, И.Ф.Балашовым, В.А.Беренбергом, М.В.Соколовским, пунктов 8-9 - с А.М.Прохоровым, Н.С.Бахваловым, А.А.Амосовым, М.В.Владимировым, В.В.Коробкиным, Р.В.Серовым, пункта 10 - с А.Б.Борисовым и В.В.Коробкиным, пунктов 11, 12, 13 - с Р.В.Хохловым, Н.С.Бахваловым и Е.А.Заболотской, пункта 14 - с Ю.И.Осинки и О.В.Руденко, пункта 15 - с А.А.Амосовым, О.В.Беленькой, А.Б.Борисовым, В.Д.Валединским, М.В.Владимировым, А.А.Злотником.

Практическая ценность работы. Научные разработки по теме диссертации внедрены и используются в научных и промышленных организациях страны, в том числе в Институте общей физики АН СССР, в Акустическом институте им. Н.Н.Андреева, в Институте физики атмосферы АН СССР, в Ленинградском оптико-механическом объединении (ЛОМО) им. В.И.Ленина. Экономический эффект от внедрения Библиотеки стандартных программ в ЛОМО им. В.И.Ленина составил 30 тыс. рублей в год.

Рассмотренные в диссертации результаты моделирования сложных нелинейных процессов, имеющие практическое значение:

а) расчет собственных чисел и мод открытого оптического резонатора,

б) численное исследование самофокусировки мощных оптических пучков,

в) численное исследование распространения акустических пучков в нелинейных средах,

г) расчет нелинейного параметрического генератора звука, и др.

Результаты исследований, приведенные в диссертации, включены в курсы лекций по математическим методам волновых процессов и по нелинейной акустике.

Для защиты выдвигаются следующие основные результаты диссертации.

1. Вывод приближенных уравнений линейной и нелинейной оптики и акустики.

2. Оптимальные методы численного дифференцирования и интег-

рирования на классах периодических и бистросциллирующих функций.

3. Обоснование спектрального численного метода решения уравнения нелинейной акустики для пучков.

4. Метод численного решения уравнения нелинейной акустики для пучков, основанный на использовании консервативных схем газовой динамики.

5. Численный метод расчета собственных чисел и мод открытого оптического резонатора. Расчет и сравнение стационарных и нестационарных собственных типов колебаний для открытых оптических резонаторов с плоскими зеркалами.

6. Результаты численного исследования самофокусировки мощных оптических пучков с гипергауссовым начальным распределением амплитуды. Анализ протекания самофокусировки при наличии малых угловых возмущений, условия устойчивости самофокусировки.

7. Результаты численного исследования распространения акустических пучков в идеальных и диссипативных нелинейных средах. Проведенный на основе численных расчетов анализ взаимодействия дифракции, фокусировки, диссипации энергии и образования ударного фронта. Расчет низкочастотного параметрического генератора звука низкой частоты.

8. Библиотека стандартных программ для решения задач волновой физики на языке ФОРТРАН.

Апробация работы. Результаты, вошедшие в диссертацию докладывались на IX и X Всесоюзных акустических конференциях (1977, 1983), на XI Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике (1982), на 6-м, 8-м и 10-м Международных симпозиумах по нелинейной акустике (1975, 1978, 1984), на Международном симпозиуме ИОТАМ по нелинейным волнам деформации (1982), на Симпозиуме "Нелинейные волны деформации" (1978), на 3-м Всесоюзном симпозиуме по физике акустогидродинамических явлений и оптоакустике (1982), на Втором всесоюзном научно-техническом совещании "Нелинейная гидроакустика-76" (1976), на Всесоюзном совещании "Нелинейная гидроакустика-83" (1983), на Всесоюзном совещании по теории кубатурных формул и смежным вопросам (1983), на выездных сессиях Объединенного научного совета АН СССР по комплексной проблеме "Физическая и техническая акустика" (1976, 1980, 1981). Результаты диссертации обсужда-

лись на семинарах Института общей физики АН СССР, физического факультета и факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова. Библиотека стандартных программ для решения задач волновой физики, принятая к эксплуатации в НИВУ МГУ, экспонировалась на международных выставках "Наука-83" (1983) и "Программа-84" (1984), на выставках ВДНХ СССР. Она удостоена Серебряной и Бронзовой медалей ВДНХ СССР.

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в одной монографии, в 16 статьях в журналах ЖВМиФ, Акустический журн., Письма БЭТФ, Известия АН СССР сер. физич., Журн.оптика и спектроск., в сборниках и ротапиртных выпусках Издательства Московского университета.

Объем и структура работы. Диссертация объемом 285 стр. состоит из Введения, пяти глав и списка литературы из 82 наименований.

## II. Содержание диссертации.

Глава I диссертации посвящена выводу приближенных уравнений распространения оптических и акустических пучков в нелинейных средах. Непосредственное решение исходных дифференциальных уравнений связано с существенными трудностями, которые делают его недоступным для современных ЭВМ.

В 50-е годы для решения уравнений волновой физики В.А.Фоксм и М.А.Леонтовичем был предложен метод, который состоит в переходе к приближенному уравнению для амплитуды волны, распространяющейся в заданном направлении. Указанный метод называет в литературе квазиоптическим, методом медленно меняющихся амплитуд, параболическим или прединтегральным приближением.

В 60-е годы аналогичный подход был плодотворно применен Р.В.Хохловым и его учениками для решения задач нелинейной оптики. Этим же методом были получены уравнения нелинейной акустики для пучков, распространяющихся в идеальных средах и в средах с вязкостью и теплопроводностью. Вывод приближенных уравнений был проведен на физическом уровне строгости. Авторы предполагали существование малых параметров, которые определяют медленное изменение амплитуды решения по пространственным переменным.

Не всегда четко было сформулировано, какие физические величины играют роль малых параметров, и выписана зависимость решения от этих параметров.

В § I главы I рассматривается волновое уравнение

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

и уравнение Гельмгольца

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad (2)$$

соответственно в областях  $G_1$  ( $0 \leq t < \infty$ ,  $-\infty < x$ ,  $y < \infty$ ,  $0 \leq z < \infty$ ) и  $G_2$  ( $-\infty < x$ ,  $y < \infty$ ,  $0 \leq z < \infty$ ). Ставится смешанная задача: задача Коши по переменным  $t, x, y$  и краевая задача по  $z$ . В плоскости  $z=0$  заданы значения  $u_0(t, x, y)$  и  $v_0(x, y)$ . При  $z \rightarrow \infty$  решения уравнений (1) и (2) должны удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда. Начальные функции  $u_0$  и  $v_0$  равны нулю (или являются пренебрежимо малыми) вне некоторого круга

$x^2 + y^2 \leq A^2$ . Переход к приближенному уравнению для уравнения (2) осуществляется с помощью замены переменных  $v = v^+ e^{-ikz}$ . Ранее предполагалось, что зависимость  $v^+$  от переменных  $x, y, z$  имеет вид  $v^+ = v^+(\sqrt{\mu}x, \sqrt{\mu}y, \mu z)$ , где  $\mu$  - некоторый малый параметр. В результате, после отбрасывания членов порядка  $O(\mu^2)$  получалось уравнение

$$-2ik \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \Delta_1 \tilde{v} = 0 \quad (3)$$

$$(\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$$

Пусть  $a_0$  - характерная ширина пучка, и  $x' = x/a_0$ ,  $y' = y/a_0$ ,  $z' = z/a_0$  - новые переменные. Из рассмотрения уравнения (3) следует, что области  $z \leq cka_0^2$  единственным малым параметром является  $\mu = \frac{1}{ka_0}$  и зависимость от него решения имеет вид  $\tilde{v} = \tilde{v}(x', y', \mu z')$ . Так как  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$  - длина волны, то  $\mu$  имеет смысл отношения длины волны к характерной ширине пучка. Если

$v^+$  вместе со своими производными имеет тот же порядок по  $\mu$ , что и  $\tilde{v}$ , то можно перейти от уравнения (2)

к уравнению (3). Поведение  $v^+$  и  $\tilde{v}$  определяется свойствами начальной функции  $v_0$ . Если  $v_0(x, y)$  - гладкая и достаточно медленно меняющаяся функция своих переменных, то решения  $v^+$  и  $\tilde{v}$  - близки друг к другу. В случае, когда  $v_0(x, y)$  или ее производные имеют резкие перепады или разрывы,  $v^+$  и  $\tilde{v}$  могут сильно отличаться друг от друга. В диссертации уделено много внимания начальному распределению  $v_0 = e^{-\left(\frac{z}{a_0}\right)^n}$ , где  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  и

$n \geq 2$ . При  $n=2$  - это обычное гауссово распределение амплитуды, при  $n > 2$  оно называется гипергауссовым. Такие распределения часто рассматриваются в научно-технической литературе. В диссертации приводятся результаты вычисления  $\tilde{v}$  и  $v^+$  для начальных функций такого вида при значениях  $a_0 = 1$  и  $k = 100$ . Показано, что при малых  $n$  ( $n \leq 8$ ) оба решения совпадают друг с другом с большой точностью для всех значений  $z$  и  $z'$ . При больших  $n$  поведение  $\tilde{v}$  и  $v^+$  в ближней зоне,  $z \leq cka_0^2$  совершенно различно.

В дальней зоне, при  $z \geq cka_0^2$ , роль малого параметра играет переменная  $z'$  в комбинации  $\sigma = \frac{ka_0^2}{z}$ .

Показано, что для любой, даже разрывной, начальной функции в ограниченной области по переменным  $x, y$  решения  $\tilde{v}$  и  $v^+$  становятся сколь угодно близки друг к другу при  $z \rightarrow \infty$ .

Полученные результаты обобщаются на практически важные случаи сфокусированных пучков и нелинейного уравнения оптической самофокусировки. В случае волнового уравнения переход к "медленным" переменным осуществляется с помощью замены

$$\tau = t - \frac{z}{c}, \quad x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z.$$

В новых переменных решение, имеющее смысл волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $z$ , становится медленно меняющейся функцией пространственных переменных.

В § 2 и § 3 первой главы дается вывод приближенных уравнений, описывающих распространение акустических пучков в нелинейных идеальных средах и средах с диссипацией. В основу положены системы уравнений газовой динамики для идеальной среды и среды с диссипацией. Ставится вопрос о нахождении периодического по

времени решения. Наряду с малым акустическим параметром, числом Маха  $\mu$ , определяется малый волновой параметр. В ближней зоне,  $z \neq cka_0^2$ , малым волновым параметром является величина  $1/ka_0$ , где  $k$  соответствует основной частоте волнового пучка. Предполагается разложимость решения в асимптотические ряды по малым параметрам. Выделяются случаи низкочастотных,  $ka_0 \sim 1$  и высокочастотных,  $ka_0 \sim \mu^{-\frac{1}{2}}$ , пучков. В первом случае в идеальных средах первый и последующие члены разложения по степеням  $\mu$  удовлетворяют, соответственно, однородному и неоднородным волновым уравнениям. В случае высокочастотных пучков первый член разложения по степеням  $\mu^{\frac{1}{2}}$  удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению для акустических пучков, которое по имени авторов называется в диссертации уравнением Хохлова-Заболотской. Если акустический пучок в идеальной среде распространяется в дальней зоне, то предполагается разложимость решения в асимптотический ряд по  $\mu$  и  $\sigma = \frac{ka_0^2}{z}$ , и такая же зависимость решения от  $x, y, \sigma$ , как в линейном случае. При  $ka_0 \sim 1$  основным асимптотическим членом является решение Шредингера приближения для волнового уравнения

$$-\frac{2}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} + \Delta_1 u = 0,$$

а при  $ka_0 \sim \mu^{-\frac{1}{2}}$  - решение уравнения Хохлова-Заболотской.

В заключении § 2 полученные результаты обобщаются на случай акустических импульсных пучков. Большой интерес представляет исследование законов развития звуковых пучков в реальных средах, обладающих вязкостью и теплопроводностью.

В § 3 главы I дается обоснование вывода приближенных уравнений, описывающих рассматриваемый круг задач. Наряду с малым акустическим параметром  $\mu$  и волновым числом  $k$  в этом случае фигурируют параметры, характеризующие диссипативные свойства среды: коэффициенты вязкости  $\eta$  и  $\zeta$  и коэффициент теплопроводности  $\chi$ . Предполагая порядок величин этих коэффициентов относительно параметра  $\mu$  и используя асимптотическое разложение решения, получены уравнения, которым удовлетворяют члены этих разложений.

Глава 2 диссертации посвящена численным методам решения задач волновой физики. В § I рассматривается вопрос численной аппроксимации операторов дифференцирования и интегрирования на классах периодических и быстрососциллирующих функций. Погрешность аппроксимации на классе функций  $A$  оператора  $\ell$  дискретным оператором  $\ell_N$ , использующим информацию о функции в  $N$  узлах, определяется как

$$\bar{R}_N(\ell_N) = \sup_{f \in A} \|\ell f - \ell_N f\|.$$

Оптимальным на классе  $A$  оператором называется оператор  $\ell_N^*$ , на котором достигается

$$R_N^* = \inf_{\ell_N \in L_N} \bar{R}_N(\ell_N),$$

$R_N^*$  - оптимальная погрешность приближения  $\ell$  на классе  $A$  дискретными операторами из  $L_N$ .

Пусть  $f(x)$  - функция вещественного переменного, периодическая с периодом единица. Исследована погрешность линейных способов численного дифференцирования, использующих значения функции  $f$  в узлах равномерной сетки:

$$f^{(p)}\left(\frac{k}{N}\right) \approx \bar{f}^{(p)}\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_{k-m}^p f\left(\frac{m}{N}\right), \quad (4)$$

$$k = 0, \dots, N-1.$$

Погрешность оценивается в дискретной метрике  $L_2$

$$R_N = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| f^{(p)}\left(\frac{k}{N}\right) - \bar{f}^{(p)}\left(\frac{k}{N}\right) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотренные следующие классы функций  $E^2(M)$  и  $A^h(M)$  определяются поведением коэффициентов Фурье

$$c_m = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i m x} dx. \text{ Для этих классов коэффициенты Фурье}$$

удовлетворяют соответственно неравенствам

$$|c_m| \leq \frac{M}{\bar{m}} \quad \text{и} \quad |c_m| \leq M e^{-h/|m|}$$

$$\text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \bar{m} = \begin{cases} |m| & \text{при } m \neq 0, \\ 1 & \text{при } m = 0 \end{cases}$$

$$\alpha, h > 0.$$

$\tilde{H}_{L_2}^\alpha(M)$  и  $\tilde{H}_C^\alpha(M)$  - классы периодических на  $[0, 1]$  функций, для которых выполняются неравенства

$$\|f^{(\alpha)}\|_{L_2} \leq M \quad \text{и} \quad \|f^{(\alpha)}\|_C \leq M, \quad f^{(\alpha)} - \text{дробная производная порядка } \alpha.$$

Формула (4) может быть представлена в виде

$$\bar{f}^{(p)}\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \beta_m^p \tilde{c}_m e^{2\pi i \frac{mk}{N}}, \quad (5)$$

где  $\tilde{c}_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}$  - дискретные

коэффициенты Фурье и  $\beta_m^p = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^p e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}$ .

Показано, что если ряд Фурье функции  $f^{(p)}(x)$  абсолютно сходится, то для погрешности численного дифференцирования справедливо равенство

$$R_N^2 = \sum_{m=0}^{N-1} \left| \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{m+\nu N} (2\pi i(m+\nu N))^p - \beta_m^p \right|^2.$$

Рассмотрена конкретная формула численного дифференцирования

$$\beta_m^p = \bar{\beta}_m^p = \begin{cases} (2\pi i m)^p & \text{для } 0 \leq m \leq N/2, \\ (2\pi i(m-N))^p & \text{для } \frac{N}{2} < m \leq N-1. \end{cases} \quad (6)$$

Доказано, что на классах  $E^\alpha(M)$  и  $A^k(M)$  формула (5)-(6) оптимальна и справедливы теоремы.

Теорема I.1. Пусть  $p, N > 0$  - целые и  $\alpha > p+1$ , тогда формула (5) - (6) оптимальна на классе  $E^\alpha(M)$  и

$$R_N^* = \frac{M \cdot C(N)}{N^{\alpha-p-1/2}}, \quad \text{где } c_1 \leq C(N) \leq c_2, \quad c_2 \geq c_1 > 0.$$

Теорема I.2. При тех же условиях, что и в Теореме I.1 формула (5)-(6) оптимальна на классе  $A^k(M)$  и

$$R_N^* = M \cdot C(N) \cdot N^p \cdot e^{-\frac{kN}{2}}, \quad \text{где}$$

$$c_3 \leq C(N) \leq c_4, \quad c_4 \geq c_3 > 0.$$

Доказано, что рассмотренная формула численного дифференцирования на классах  $\tilde{H}_{L_2}^\alpha$  и  $\tilde{H}_C^\alpha$  неулучшаема по порядку и для оптимальной погрешности справедливы соотношения

$$R_N^*(\tilde{H}_{L_2}^\alpha) \asymp \frac{1}{N^{\alpha-p}}, \quad R_N^*(\tilde{H}_C^\alpha) \asymp \frac{1}{N^{\alpha-p}}.$$

Здесь  $f(x) \asymp \varphi(x)$  ( $\varphi(x) \geq 0$ ) означает, что  $c_1 \varphi \leq |f| \leq c_2 \varphi$  при  $x \rightarrow 0$  (или  $\infty$ ), где  $c_2 \geq c_1 > 0$  - константы.

Полученные результаты обобщаются на случай нормы погрешности в дискретной метрике  $C$

$$R_N = \max_{0 \leq k \leq N-1} \left| f^{(p)}\left(\frac{k}{N}\right) - \bar{f}^{(p)}\left(\frac{k}{N}\right) \right|.$$

Во второй части параграфа рассмотрена задача об оптимальном вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций. Пусть требуется вычислить

$$I(\omega) = \int_0^1 f(x) e^{i\omega x} dx, \quad (7)$$

где  $\omega$  - вещественное число и  $f(x) \in H_C^\alpha(M)$ . Так же как и выше определены погрешность численного интегрирования на классе,

$$\bar{R}_N(H_C^\alpha, \omega, \ell_N) = \sup_{f \in H_C^\alpha} R_N(f, \omega, \ell_N),$$

$$R_N(f, \omega, \ell_N) = \left| \int_0^1 f(x) e^{i\omega x} dx - \ell_N[f, \omega] \right|$$

и оптимальная погрешность на классе  $R_N^*(H_C^\alpha, \omega)$ .

Доказана следующая теорема.

Теорема I.8. Для оптимальной на классе  $H_C^\alpha(M)$  погрешности приближенного вычисления интеграла (7) справедлива оценка

$$R_N^*(H_C^\alpha, \omega) \asymp \begin{cases} \frac{M}{N^\alpha} & \text{при } N \geq |\omega|, \\ \frac{M}{|\omega|^\alpha} & \text{при } N \leq |\omega|. \end{cases}$$

При доказательстве этой теоремы, и аналогичных теорем, приведенных выше, применялся метод двухсторонних оценок, предложенный и развитый в работах А.Н. Колмогорова, А.Г. Витушкина и

Н.С.Бахвалова.

Полученные результаты обобщаются на интегралы вида

$$\int_0^1 f(x) e^{i\omega g(x)} dx$$

Отдельно рассмотрены случаи, когда производные функции  $g(x)$  отличны от нуля на  $[0, 1]$  и когда имеются точки, в которых они обращаются в ноль. Получены неулучшаемые по порядку оценки оптимальной погрешности на классах функций  $H_c^{\alpha}(M)$  и построены квадратурные формулы, на которых эти оценки достигаются.

В § 2 и § 3 главы 2 обсуждается круг вопросов, связанных с численным решением уравнения нелинейной акустики для пучков:

$$Ne \frac{\partial^2 p^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial \theta \partial z} + B \Delta_{\perp} p = -M \frac{\partial^3 p}{\partial \theta^3}, \quad (8)$$

где  $\Delta_{\perp} = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial}{\partial z} \right)$ .

$p(\theta, z, z)$  - периодическая по  $\theta$  с периодом  $2\pi$  функция такая, что

$$p|_{z=0} = F(\theta, z), \quad p|_{z=R} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (9)$$

$$\int_0^{2\pi} p d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} F(\theta, z) d\theta = 0.$$

Предполагается так же, что

В § 2 дается обоснование спектрального метода для решения задачи (8)-(9). Суть метода состоит в замене (8)-(9) бесконечной системой нелинейных дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье

$$p_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p e^{-im\theta} d\theta, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и в последующем численном решении этой системы. Задача ставится на классах  $H^{\alpha_1, \alpha_2}(c)$ ,  $\tilde{H}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(c)$  - функций  $\varphi(\theta, z)$  и  $f(\theta, z, z)$  периодических по  $\theta$  и

таким, что все производные  $\frac{\partial^{\nu}(\varphi)}{\partial \theta^{\nu_1} \partial z^{\nu_2}} \quad (\nu = \nu_1 + \nu_2, \nu_i = \alpha_i)$   
и  $\frac{\partial^{\nu} f}{\partial \theta^{\nu_1} \partial z^{\nu_2} \partial z^{\nu_3}} \quad (\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3, \nu_i = \alpha_i)$

непрерывны в областях  $G_2 \{ 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq R \}$

$$G_3 \{ 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq R, 0 \leq z \leq Z \}$$

Для функций  $\varphi(\theta, z)$  и  $f(\theta, z, z)$ , при фиксированном  $z$ , введены нормы

$$\|f\|_{L_2} = \left( \int_0^R |f|^2 z dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_9 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f\|_{L_2}^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}$$

Последняя норма называется энергетической, так как ее квадрат имеет физический смысл среднего за период потока энергии волны. В предположении гладкости функции  $F(\theta, z)$ , существования и единственности достаточно гладкого решения доказана эквивалентность задачи (8)-(9) системе дифференциальных уравнения

$$B \Delta_{\perp} p_0 = 0,$$

$$\frac{\partial p_m}{\partial z} + \frac{iB}{m} \Delta_{\perp} p_m + M m^2 p_m = im Ne [p^2]_m, \quad (10)$$

$$p_m|_{z=0} = F_m(z), \quad p_m|_{z=R} = 0, \quad \frac{\partial p_m}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0,$$

где  $[p^2]_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} p_{\nu} p_{m-\nu}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$

При построении численного метода используется доказанное в Лемме 2.10 равенство

$$\frac{\partial}{\partial z} \|p\|_9^2 = -2M \left\| \frac{\partial p}{\partial \theta} \right\|_9^2,$$

которое имеет физический смысл закона диссипации потока энергии акустической волны. Для аппроксимации системы (10) выписана система двухслойных конечноразностных уравнений, обладающая



свойством полной консервативности. Это означает, что в пространстве дискретных функций  $\{u_k(m)\}$  с нормами

$$\|u_k(m)\|_{\mathcal{D}(k)}^2 = \sum_{m=-N}^N \|u_k(m)\|_{L_2(k)}^2,$$

$$\|u_k(m)\|_{L_2(k)} = h_z \sum_k z_k |u_k(m)|^2$$

для решений конечно-разностной системы  $-\rho_k^n(m)$  выполняется дискретный аналог закона диссипации потока энергии

$$\frac{\|\rho_k^{n+1}\|_{\mathcal{D}(k)}^2 - \|\rho_k^n(m)\|_{\mathcal{D}(k)}^2}{h_x} = -2M \sum_{m=-N}^N m^2 \|\rho_k^n(m)\|_{L_2(k)}^2,$$

здесь  $m$  - номер гармоники,  $n$  и  $k$  - номера узлов сетки по  $\tilde{z}$  и  $z$ .

В диссертации доказывается существование и единственность решения системы разностных уравнений. Основное утверждение сформулировано в Теореме 2.2:

пусть существует решение задачи (8)-(9) из класса  $\tilde{H}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$  ( $\alpha_1 \geq 5$ ,  $\alpha_2 \geq 4$ ,  $\alpha_3 \geq 3$ ), тогда решение системы конечно-разностных уравнений сходится к нему в дискретной энергетической норме со скоростью

$$O\left(\left(h_x^2 + h_z^2\right)^2 \ln \frac{1}{h_x} + \frac{1}{N^{2\alpha_1 - 3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

В § 3 для численного решения задачи (8)-(9) применяется конечно-разностный метод, использующий консервативные схемы газовой динамики. При  $M=0$  из исходной системы интегральных уравнений, выражающих законы сохранения массы и импульса, получены уравнения, являющиеся интегральным аналогом уравнения Хохлова-Заболотской. Эти уравнения аппроксимируются системой конечно-разностных уравнений. Используется метод С.К. Годунова построения консервативных схем распада разрыва. Доказывается существование и единственность решения полученной системы конечно-разностных уравнений. Для нахождения периодического решения применяется метод установления. В Лемме 3.2 установлена скорость сходимости этого метода.

В случае, когда коэффициент диссипации  $M$  отличен от нуля, применяется метод расщепления:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tilde{z} \partial \theta} = A_1 \rho + A_2 \rho,$$

где

$$A_1 \rho = N e \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \theta^2} + B \Delta_{\perp} \rho,$$

$$A_2 \rho = M \frac{\partial^3 \rho}{\partial \theta^3}.$$

На каждом слое по  $\tilde{z}$  решаются уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial \tilde{z} \partial \theta} = A_1 v, \quad v|_{\tilde{z}=\tilde{z}_n} = \rho(\theta, z, \tilde{z}_n)$$

и

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tilde{z} \partial \theta} = A_2 \omega, \quad \omega|_{\tilde{z}=\tilde{z}_n} = v(\theta, z, \tilde{z}_{n+1}).$$

Первое, это - уравнение Хохлова-Заболотской, способ решения которого рассмотрен выше. Для решения второго уравнения предложены конечно-разностный неявный метод и метод преобразования Фурье, использующий явный вид решения для каждой гармоники.

Рассмотренный в этом параграфе метод решения задачи (8)-(9) обладает рядом достоинств, присущих консервативным схемам газовой динамики. Основное из них - хорошая аппроксимация численным решением образующегося в решении задачи ударного фронта. Консервативные схемы правильно описывают распространение разрывов и не вызывают их размывания.

В главах 3 и 4 диссертации приводятся результаты численного моделирования явлений линейной и нелинейной оптики и акустики.

В § I главы 3 рассмотрена задача о распространении  $z$  линейных средах оптических волн, прошедших через различного вида диаграммы и другие элементы оптических систем. Речь идет о моделировании линейных оптических пучков различной формы: одномерных или целевых, аксиально-симметричных, двулучных и произвольных. Приведены математические методы для решения указанной задачи. Рассмотрены:

1. вычисление интегрального представления решения уравнения Гельмгольца;
2. метод Фурье для расчета одномерных и двумерных пучков;
3. конечно-разностные методы численного решения приближения

Шредингера для уравнения Гельмгольца.

Дается описание функциональных возможностей каждого из этих методов. Приводятся результаты применения разработанных алгоритмов для численного сравнения решений уравнения Гельмгольца и его шредингера приближения.

В § 2 рассмотрена задача о нахождении собственных чисел и мод открытого оптического резонатора. Впервые подобные расчеты были проведены американскими учеными А. Фоксом и Т. Ли. Математически задача сводится к вычислению собственных функций и чисел интегрального оператора

$$P = \gamma \int_{-1}^1 e^{-i \frac{\beta}{2} (x-\xi)^2} d\xi$$

Если существует счетная система  $\{u_i\}, \{\lambda_i\}$  ( $i=1,2,\dots$ ) решений уравнения  $Pu = \lambda u$ , то модуль числа  $\lambda_i$  характеризует затухание  $i$ -й собственной функции при проходе световой волны от зеркала к зеркалу. Произвольный сигнал можно разложить по собственным функциям, и после многократных проходов поле между зеркалами определяется основной собственной функцией, а ее затухание первым собственным числом. Недостатком изложенного метода является тот факт, что в общем случае система  $\{u_i\}$  не является полной в  $L_2$ , и разложение поля по ней требует дополнительного обоснования. Для открытых резонаторов с произвольной структурой зеркал рассматривается разложение поля по полной системе собственных элементов Шмидта  $\{u_{N_i}\}, i=1,2,\dots$ , удовлетворяющих уравнениям

$$B_N u_{N_i} = \Lambda_{N_i}^2 u_{N_i},$$

где  $B_N = P_N P_N^*$ ,  $P_N = (P)^N$ ,  $P_N^*$  - оператор сопряженный  $P_N$ .

$B_N$  - неотрицательный, вполне непрерывный, самосопряженный оператор,  $\Lambda_{N_i} > 0$  и стремится к нулю при  $i \rightarrow \infty$ . Если существует предел  $\Lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} (\Lambda_{N_i})^{\frac{1}{N}}$ ,

то имеет место такое же затухание, как и для функции Фокса и Ли:  $\Lambda_i = |\lambda_i|$ . Сравнение  $\{u_{N_i}\}$  и  $\Lambda_{N_i}$  при различных  $N$  позволяет исследовать процесс установления результирующего поля, что особенно важно в случае, когда

параметры квантового генератора зависят от времени. Значительное место занимает обсуждение результатов расчета конфигурации поля для однородных зеркал и зеркал с коэффициентом отражения, убывающим к краю зеркала. Построенные с помощью численных расчетов графики позволяют судить о динамике и характеристиках процесса установления колебаний в открытом оптическом резонаторе.

В § 3 приводятся результаты численного исследования самофокусировки оптических пучков в средах с трехфотонным поглощением. В качестве математической модели взята задача Коши

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} E + (i\alpha I - \beta I^2) E = 0,$$

$$E|_{z=0} = E_0(x, y) \quad (I = |E|^2)$$

в области  $G_3 \{-\infty < x, y < \infty, z \geq 0\}$ .

Свойства решения этой задачи для гауссова начального распределения амплитуды  $E_0(r) = \bar{E}_0 e^{-\frac{r^2}{2a}}$ ,  $n=2$

были исследованы ранее. Показано, что при  $\beta=0$  и входной мощности пучка  $P_0 = \frac{cn_0}{8T} \iint_{-\infty}^{\infty} |E_0|^2 dx dy$ ,

превосходящей некоторую величину, называемую критической мощностью -  $P_{кр}$ , происходит самофокусировка пучка в окрестности точки  $\{r=0, z = z_{\varphi} \approx \frac{0.4k}{\sqrt{\frac{P_0}{P_{кр}} - 1}}\}$ .

В точке фокуса интенсивность  $I = |E|^2$  обращается в бесконечность. При малых по модулю  $\beta < 0$  на оси пучка образуется несколько последовательных фокусов, количество которых примерно равняется  $P_0/P_{кр}$ . В каждом из фокусов интенсивность принимает большие конечные значения. В окрестности фокальной точки втекает энергия примерно равная  $1/P_{кр}$ , из которой  $2/3 P_{кр}$  поглощается в фокусе, а оставшая часть расходится в виде кольцеобразных волн.

В диссертации проведено исследование протекания самофокусировки для гипергауссова распределения амплитуды при различных значениях  $P_0$ ,  $\alpha, \beta < 0$ . Показано, что при достаточно большом  $n$  явление самофокусировки протекает совсем иначе, чем в случае гауссовых пучков. Определяющим фактором

становится образование линейной, дифракционной картины Френеля, которая приводит к нелинейно усиливающейся и сходящейся к центру кольцевой структуре пучка. Динамика формирования колец, их сходимости, а также содержащаяся в них энергия зависят от соотношения параметров задачи. Так при  $P_0/P_{кр} = 10$ ,  $n > 4$  образуется только один фокус, в окрестность которого втекает энергия, значительно превосходящая  $1 P_{кр}$ .

В диссертации дается подробное описание явления самофокусировки для различных значений  $P_0$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $n$ . В заключение параграфа речь идет о стандартной программе и реализованном в ней алгоритме численного решения рассматриваемой задачи.

В § 4 проведено численное исследование устойчивости оптической самофокусировки относительно малых угловых возмущений. Рассмотрена задача о распространении пучка с начальной амплитудой

$$E_0(x, y) = 2e^{-(\sqrt{x^2 + y^2} - 1.5)^4}$$

в нелинейных средах с насыщением. Точное решение задачи - аксиально симметричная функция, имеющая вид колец, колеблющихся по мере распространения пучка вокруг оси  $z$ . При численном исследовании роль возмущений играла погрешность аппроксимации конечно-разностной задачи. Показано, что при малом числе узлов по переменным  $x$  и  $y$  ( $N_x$  и  $N_y = 50$ ), после нескольких колебаний кольцеобразная форма становится несимметричной, и образуется несколько нитей интенсивности. При численном решении с  $N_x = N_y = 100$  образования псевдо-нитей на тех же расстояниях не наблюдалось, так как погрешность аппроксимации была в этом случае меньше. Рассмотренное исследование является более тщательно проведенным аналогом расчетов, выполненных Н.А.Тихоновым и А.С.Резцовым.

Значительное внимание в этом параграфе уделено численному исследованию устойчивости распространения оптических пучков с гипергауссовым начальным распределением амплитуды.

Рассмотрена начальная функция

$$E_0(r, \varphi) = e^{-\frac{1}{2} r^{2n}} \left( 1 + \sum_{q=1}^n \varepsilon_q \cos q\varphi \right),$$

где  $\varepsilon_q \sim 0.01$ . Расчеты показали, что самофокусировка

мощных оптических пучков такого рода неустойчива и приводит к образованию мелкомасштабных нитей интенсивности. Исследованы случаи различных  $P_0$  и  $q$ . Показано, что наиболее возрастающей гармонической составляющей возмущения будет составляющая с  $q = c \cdot \alpha \kappa$ , где  $c$  - некоторая константа.

В § 5 главы 3 приводятся результаты численного исследования решения уравнения самофокусировки с начальным гауссовым распределением амплитуды при коэффициенте трехфотонного поглощения  $\beta$ , стремящемся к нулю. Показано, что для рассмотренной в диссертации последовательности монотонно убывающих по модулю значений  $\beta$  количество поглощенной в фокусе энергии с убыванием  $|\beta|$  становится близким к  $2/3 P_{кр}$ .

В главе 4 дается подробное описание распространения акустических пучков в нелинейных идеальных и диссипативных средах. В качестве математической модели взяты дифференциальные уравнения нелинейной акустики для пучков, рассмотренные в главах I и 2 диссертации. Для удобства в этих уравнениях сделан переход к безразмерным переменным, в результате которого в уравнении Хохлова-Заблотской фигурирует один отличный от единицы коэффициент при нелинейном члене  $N$ , имеющий смысл отношения характерного волнового расстояния  $\kappa a_0^2$  к расстоянию образования ударного фронта в плоской волне, а в уравнении акустических пучков для сред с диссипацией - два коэффициента  $N$  и  $M$ , где  $M$  учитывает относительное влияние дифракционных и диссипативных явлений.

Описаны следующие процессы.

I. Распространение первоначально плоских акустических пучков в нелинейных идеальных средах. Рассмотрены различные начальные распределения амплитуд: гауссово, гипергауссово и другие, а также нелинейные среды, характеризуемые различными значениями параметра  $N$ . Проведено исследование взаимного влияния дифракционных свойств пучка и явления образования ударного фронта. Показано, что в ближней зоне ударный фронт образуется при значениях параметра  $N$ , превосходящих некоторое значение, примерно, равное 3.25. При увеличении  $N$  точка образования ударного фронта приближается к начальной плоскости. Для различных значений параметра  $N$  построены графики кривых, ограничивающих область существования ударного фронта. Исследована динамика изменения номера распространения пучка

его основных характеристик при различных распределениях амплитуды и различных  $N$ . Рассмотрена трансформация формы сигнала, пикового значения амплитуды  $\rho_n = \max_{\theta} \rho$  и средней за период интенсивности  $I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta$ .

Продемонстрированы эффекты, свойственные именно пучкам и не имеющие места в случае плоских волн: изменение симметрии фазы сжатия и разрежения входного гармонического сигнала, превышение в области образования разрыва пиковым значением сигнала начального пикового значения.

2. Распространение сходящихся акустических пучков в нелинейных средах. На входе системы – сфокусированные акустические сигналы с различными начальными распределениями амплитуды. Сходимость характеризуется величиной некоторого параметра.

Значительное внимание уделено взаимодействию явлений фокусировки и распространения ударного фронта при различных значениях  $N$  и параметра фокусировки.

3. При исследовании и практическом использовании явлений, связанных с распространением акустических пучков, значительный интерес представляет изучение их гармонического состава.

В диссертации на основе численного моделирования на ЭВМ исследована динамика обогащения спектрального состава пучков из-за нелинейности среды. Прослежено изменение амплитуды и фазы гармонических составляющих в зависимости от параметров задачи. Рассмотрены случаи первоначально плоских и сходящихся пучков с различным начальным распределением амплитуды.

В § 2 и § 4 все результаты обобщены на случаи среды с диссипацией и распространения в нелинейных средах акустических импульсных пучков.

В § 3 речь идет о численном моделировании и расчете характеристик низкочастотного параметрического генератора звука. Принцип его работы состоит в том, что на вход среды подается сигнал, состоящий из нескольких высокочастотных гармоник; в результате нелинейности происходит генерация низкочастотного (обычно разностного) сигнала. В дальнейшем из-за диссипации высокочастотные составляющие затухают, а низкочастотный сигнал распространяется на большие расстояния. В диссертации приведены результаты расчетов, характеризующие генерацию и развитие различных гармонических составляющих волнового пучка.

Построены диаграммы направленности высокочастотной и низкочастотной составляющих. Численное моделирование этого процесса дает возможность оценить характер его протекания в зависимости от исходных данных.

Завершает диссертацию глава 5, в которой описывается Библиотека стандартных программ решения задач волновой физики, созданная и принятая к эксплуатации в НИИЦ МГУ. В этой главе приводятся данные об организации Библиотеки, ее содержании, оформлении описания, принципах программирования, положенных в основу оформления подпрограмм. Важнейшими являются следующие положения.

1. В Библиотеку объединены вычислительные подпрограммы на стандарте языка ФОРТРАН, ориентированные на использование ЭВМ БЭСМ-6 и удовлетворяющие единым требованиям.

2. Библиотека и ее описание в соответствии с тематикой разбиты на разделы. Описание каждой подпрограммы, входящей в раздел, оформлено по определенному образцу.

3. Разработаны и приведены в диссертации общие принципы оформления подпрограмм Библиотеки.

4. В НИИЦ МГУ Библиотека стандартных программ для решения задач волновой физики принята к эксплуатации в качестве общей библиотеки мониторной системы ДУБА с номером 16.

Основными разделами Библиотеки являются:

- а) Раздел 1. Стандартные программы для расчета распространения оптических пучков в линейных средах.
- б) Раздел 2. Стандартные программы для расчета распространения оптических пучков в нелинейных средах.
- в) Раздел 3. Стандартные программы для расчета распространения акустических пучков в нелинейных средах.
- г) Раздел 4. Вспомогательные, сервисные программы.

В диссертации приводится содержание каждого раздела, перечислены все программы. Дается описание математического метода, положенного в основу каждой программы, ее функциональных возможностей и областей применения. Указаны прикладные задачи, которые были решены с помощью каждой из программ.

Результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А., Уохлов Р.В. Нелинейное распространение звукового пучка в недиссипативной среде.-Акустич.журн., т.22, вып.4, 1976, с.487-491.
2. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Распространение звуковых пучков конечной амплитуды в диссипативной среде.-Акустич.журн., т.24, вып.4, 1978, с.473-479.
3. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Параметрическое взаимодействие звуковых пучков.-Акустич.журн., т. 25, вып. 4, 1979, с. 488-494.
4. Жилейкин Я.М. О численном решении уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков.-Журн.вычисл.матем. и матем. физики., т. 22, № 5, 1982, с. 1157-1171.
5. Жилейкин Я.М. О погрешности приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций.- Журн.вычисл.матем. и матем.физики, т.11, № 1, 1971, с.263-266.
6. Жилейкин Я.М. О выводе уравнений нелинейной акустики для пучков.- В сб.: Численный анализ на ФОРТРАНе - М.: Изд-во Моск.ун-та, 1985.
7. Жилейкин Я.М. О вейнштейновском приближении для уравнений волновых пучков.- В сб.: Современные проблемы матем.моделирования.- М.: Изд-во Моск.ун-та, 1984, с.128-143.
8. Бахвалов Н.С., Беренберг В.А., Жилейкин Я.М. Численный расчет коэффициентов затухания и мод открытого оптического резонатора.-В кн.: Вычислительные методы и программирование.-М.: Изд-во Моск.ун-та, вып.31, 1979, с.190-193.
9. Балахов И.Ф., Беренберг В.А., Жилейкин Я.М., Соколовский М.В. Влияние краевых эффектов на структуру поля нестационарных типов колебаний резонатора с плоскими зеркалами.-Журн.оптика и спектроск., т.44, вып. 66, 1978, с. 1131-1135.
10. Жилейкин Я.М., Руденко О.В. Нелинейно-дифракционная трансформация акустических импульсов.-Акустич.журн., т.27, вып. 3, 1981, с. 363-366.
11. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Руденко О.В. Особенности параметрических излучателей звука.-Акустич.журн., т.24, вып.1, 1978, с. 125-127.
12. Елисеева Д.И., Жилейкин Я.М. О расчете диаграммы направленности низкочастотного излучателя звука.-Журн.вычисл.матем.и

- матем.физики, т.25, № 6, 1985, с. 941-945.
13. Амосов А.А., Бахвалов Н.С., Владимиров М.В., Власов Д.В., Жилейкин Я.М., Коробкин В.В., Прохоров А.М., Сергеев Р.В. О распространении мощных волновых пучков в нелинейной среде.- Известия АН СССР, сер.физич., т.45, № 8, 1981, с.1422-1428.
  14. Борисов А.Б., Жилейкин Я.М., Коробкин В.В., Прохоров А.М. Устойчивость самофокусировки волновых пучков при различных поперечных распределениях интенсивности.- Тезисы докладов XI Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике. Брест, 22-25 ноября 1982, ч.1, с.175-177.
  15. Амосов А.А., Борисов А.Б., Валедицкий В.Д., Владимиров М.В., Жилейкин Я.М., Злотник А.А., Кузьмина М.А. О наборе стандартных программ решения задач нелинейной оптики.-Журн. вычисл.матем. и матем.физики, т.21, 1981, с.756-758.
  16. Амосов А.А., Валедицкий В.Д., Жилейкин Я.М., Злотник А.А. Описание набора программ для решения уравнения световой волны.-Журн.вычисл.матем. и матем. физики, т.17, № 4, 1977, с. 1074-1076.
  17. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков.-М.: Наука, 1982.