87644

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

САРКИСЯН

Гагик Хачикович

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ПУЧКОВ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна, 1986

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ и в ЕрПИ.

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор Е.П.ЖИДКОВ

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник А.Д.ДЫМНИКОВ

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник Н.И.ДОЙНИКОВ

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник А.Ф.ЛУКЬЯНЦЕВ

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Институт кибернетики АН УССР, г.Киев.

Автореферат разослан "6" марта 1986г.

Защита диссертации состоится "10" апреля 1986г. в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна. в 10.30

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук З.М.Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность

Развитие одного из фундаментальных разделов современной физики – физики ядра и элементарных частиц, тесно связано с развитием ускорительной техники. С помощью ускоренных заряженных частиц была получена и получается практически вся информация о структуре и свойствах микромира, причем постоянно планируются и проводятся все новые эксперименты с пучками заряженных частиц.

Эти эксперименты требуют новых, все более мощных ускорителей и ускорительных комплексов, при проектировании которых возникают задачи выбора оптимальных, с точки зрения тех или иных физических требований, параметров ускорительных комплексов (системы транспортировки, "невидимые" вставки, детекторы и др.) и определения различных характеристик элементов (магнитные поля, тепловые поля и др.), необходимых для проведения всего эксперимента.

Одним из наиболее эффективных методов решения подобных задач является численный эксперимент, т.е. моделирование на ЭВМ математического аналога исследуемого физического процесса. Численное моделирование наряду с аналитическими методами позволяет исследовать физическую задачу значительно быстрее, полнее и дешевле, чем это можно сделать физическими экспериментами. Более того, для некоторых задач физический эксперимент представляется либо весьма трудным, либо невозможным. В этом случае математическое моделирование является практически единственным методом, позволяющим решать такие задачи. Поэтому разработка эффективных и экономичных методов и алгоритмов решения прямых и обратных задач математической физики является одним из важных и актуальных направлений современной вычислительной математики.

Большой интерес представляют также вопросы анализа ошибок и повышения точности полученных приближенных решений.

Известны различные способы повышения точности численного решения [I-5], которые можно разбить на две группы: методы, использующие многоточечные разностные схемы, и экстраполяционные методы для приближенных решений, полученных на последовательности сгущающихся сеток невысокого порядка точности. Методы первой группы приводят к значительному усложнению алгоритмов, поэтому во многих случаях предпочтительнее методы второй группы.

Для повышения точности решений задач, представленных в диссертации, использован экстраполяционный метод Ричардсона [6].

Цель работы

Диссертация посвящена разработке, исследованию и практическим приложениям эффективных вычислительных алгоритмов решения прямой и обратной задач интегрирования уравнения движений и эллиптических краевых задач, возникающих при численном моделировании полей электрофизических устройств – элементов ускорительных комплексов, что включает:

1. Получение и исследование оценок погрешности одного численного метода решения задач моделирования пучков заряженных частиц.

2. Использование минимизационного метода скользящего допуска к решению обратной задачи интегрирования уравнений движения и обратной задачи магнитостатики, когда требуемое магнитное поле создается путем изменения формы поверхности полюсных наконечников.

3. Использование граничных интегральных уравнений к решению двумерных эллиптических краевых задач.

4. Разработку численного алгоритма для решения трехмерной эллиптической краевой задачи.

---

[1] А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. М., "Наука", 1971.

[2] Г.И.Марчук. Методы вычислительной математики. М., "Наука", 1977.

[3] А.А.Самарский, В.Б.Андреев. Разностные методы для эллиптических уравнений. М., "Наука", 1976.

[4] А.А.Самарский, Е.С.Николаев. Методы решения сеточных уравнений. М., "Наука", 1978.

[5] Дж.Ортега, В.Рейнболдт. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., "Мир", 1975.

[6] Г.И.Марчук, В.В.Шайдуров. Повышение точности разностных схем. М., "Наука", 1979.

5. Создание комплекса программ решения конкретных прикладных задач.

Научная новизна

Получены аналитические оценки локальной и глобальной погрешности рекурсивного метода для модельных задач. Предлагается численный метод решения обратной задачи интегрирования уравнения движения заряженных частиц и обратной задачи магнитостатики, когда требуемое магнитное поле создается с помощью ступенчатой поверхности полюсных наконечников.

Данные обратные задачи решаются с применением минимизационного метода скользящего допуска с ограничениями в виде равенств и неравенств, который оказался эффективным при решении класса задач.

Для повышения точности приближенного решения эллиптической двумерной краевой задачи методом ГИУ, применялась экстраполяция Ричардсона на последовательности сгущающихся сеток.

Решена задача определения трехмерного температурного поля магнитопровода бетатрона, приводящая к трехмерному эллиптическому уравнению второго порядка с постоянной правой частью. Решение трехмерной краевой задачи с граничными условиями третьего рода получена в виде ряда по собственным функциям эллиптического оператора L_1, позволяющая эффективно исследовать влияние коэффициентов теплоотдачи на решение краевой задачи.

Практическая ценность работы

На основании предлагаемых методов разработаны эффективные численные алгоритмы решения задач, возникающих при проектировании ускорительных комплексов, которые реализованы в виде комплекса программ, написанных на языке Фортран и реализованных на базовых ЭВМ ЛВТА ОИЯИ. Решены следующие физические задачи:

1. Согласование прямолинейной "невидимой" вставки для модели сверхпроводящего синхротрона на 1.5 Гэв по протонам тремя и четырьмя квадрупольными линзами.

2. Определена форма полюсных наконечников магнитной квад-

рупольной линзы по заданному потенциалу поля.

3. Решена задача определения максимального фотонапряжения полупроводниковой пленки.

4. Решена задача определения трехмерного температурного поля магнитопровода бетатрона. Разработанный численный алгоритм решения задачи применяется также при определении температурного поля магнитопровода трансформаторов.

5. Получены численные оценки для элементов матриципанта и огибающей матрицы для рекурсивного метода.

Полученные оценки позволяют определить область эффективного применения рекурсивного метода.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах отдела синхрофазатрона Лаборатории высоких энергий и отдела вычислительной математики Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, на международном совещании "Программирование и математические методы решения физических задач" (Дубна, 1977), на ежегодных научно-технических конференциях преподавателей, научных работников и аспирантов ЕрПИ им.К.Маркса.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 5 работ, в том числе в трудах вышеназванного совещания и в сообщениях ОИЯИ.

Объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и содержит 125 страниц машинописного текста, 23 рисунка, 8 таблиц, список литературы, насчитывающий III наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении изложены актуальность и цель диссертационной работы. Дается краткий обзор литературы по численным методам решения задач моделирования магнитостатических полей, транспортировки и согласования пучков высоких энергий. Сформулированы постановки рассматриваемых в работе задач моделирования электронной оптики. Изложены сущность используемых численных методов, сформулированы основные результаты. Кратко излагается распределение материала по главам.

В первой главе исследуется применение численных методов к решению прямой и обратной задач интегрирования уравнений движения. Обратная задача решается методом решения большого количества прямых задач, с применением минимизационного метода скользящего допуска. Для решения модельной задачи интегрирования уравнений движения применяется консервативный численный метод (обобщенный непрерывный аналог скобок Гаусса).

В параграфе I.I приводится матрично-рекурсивный метод решения линейных систем дифференциальных уравнений. Данный метод, непрерывный обобщенный аналог скобок Гаусса, является консервативным численным методом, сохраняющим фазовый объем неизменным на каждом шаге интегрирования системы дифференциальных уравнений. В параграфе I.2 приводятся аналитические и численные оценки погрешности данного рекурсивного метода для линейных систем вида

$$y' = Py,\ P = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix};\ R' = PR,\ R(0) = I \qquad (I)$$

где y - n - мерный вектор, u, v - функции, зависящие от x. Для некоторого класса функций ($u=1, v=-kx^n$), которыми можно аппроксимировать магнитные поля в элементах электронной оптики. Получены аналитические выражения абсолютной локальной погрешности метода для элементов матрицанта системы дифференциального уравнения (I).

Доказано следующее утверждение. При постоянной матрице P (I) погрешность приближенного матрицанта (I), вычисленного с помощью непрерывного аналога скобок Гаусса, имеет второй порядок точности относительно шага дискретизации. Для элементов матрицента получены формулы для относительной и абсолютной погрешности для N шагов интегрирования (глобальная погрешность метода). На основе данного алогоритма составлена программа DIFSYS для интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений в n мерном случае, реализованная на ЭВМ БЭСМ-6 и СДС-6500. Результаты численных экспериментов согласуются с аналитическими оценками.

Для определения эффективности данного метода производились сравнения полученных численных решений с решениями по методам Рунге-Кутта 4-го порядка и Адамса. Результаты сравнений показывают, что характер поведения погрешности по различным методам вдоль оси интегрирования одинаковы. Время счета на ЭВМ СДС-6500 для одного шага интегрирования по методу Рунге-Кутта составляет 0,00216 с., т.е. время выполнения одного шага вычислений методом Рунге-Кутта в 3,7 раза больше и это отношение увеличивается по мере усложнения функции U и V. На основании проведенных численных экспериментов, на последовательности сгущающихся сеток в широком интервале, можно утверждать, что:

I) для больших и средних шагов ($H > 0{,}0001$) методы Рунге--Кутта и Адамса имеют большую точность, чем рекурсивный;

2) для малых шагов интегрирования ($H < 0{,}0001$) точности всех трех методов почти одинаковы.

В параграфе I.3 для рассмотрения движения статистического ансамбля заряженных частиц (пучка) удобно пользоваться понятием огибающей матрицы, которая определяется через матрицант системы дифференциальных уравнений следующим образом

$$\sigma(x) = R(x)\,\sigma(0)\,R^T(x)$$

Из соответствующих оценок для элементов матрицанта (§ I.2) получаются аналитические оценки глобальной абсолютной погрешности элементов огибающей матрицы, которые имеют вид:

$$\Delta\sigma_{11} = \frac{H^2}{4}\sin^2(x-H) + O(H^4)$$

$$\Delta\sigma_{12} = \frac{H^2}{4}\sin(x-H)\cos x\cos H + O(H^3)$$

Характер поведения остальных погрешностей одинаков по диагоналям. Численный эксперимент подтверждает полученные аналитические выражения глобальной погрешности метода. При сравнении полученных результатов с результатами методом Рунге-Кутта с Адамса видно, что:

I. Абсолютная погрешность элементов огибающей матрицы монотонно возрастает с увеличением числа шагов интегрирования (метода Рунге-Кутта и Адамса);

2. Определитель матрицанта системы линейных дифференциальных уравнений для данных методов монотонно убывает и при числе шагов интегрирования $N = 20000$ имеет точность 0.001. Это соответствует изменению фазового объема. При расчетах рекурсивным методом определитель матрицанта остается неизменным на каждом шаге интегрирования.

Из проведенных численных экспериментов и аналитических выражений следует, что рекурсивный метод более эффективен в тех задачах, когда решение ищется в виде функций огибающей матрицы или решается многооборотная задача при изучении динамики пучка в циклических ускорителях.

В параграфе I.4 решается задача согласования пучков заряженных частиц высоких энергий. Рассматриваются согласования на половине "невидимой" вставки тремя и четырьмя квадрупольными линзами. Задача согласования сводится к задаче нелинейного программирования при наличии ограничений на параметры задачи. В данном случае параметрами являются градиенты квадрупольных линз и расстояния между ними. В зависимости от вида целевой функции можно кроме согласования получить минимальные значения максимальных огибающих, данное увеличение горизонтального размера пучка в середине вставки и др. Результаты расчетов приводятся в виде таблиц и графиков, показывающих зависимость градиентов квадрупольных линз и максимальных огибающих от геометрии вставки.

Работа докладывалась на международном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (1977, Дубна).

В параграфе I.5 рассматривается применение рекурсивного метода к решению жестких систем дифференциальных уравнений.

<u>Во второй главе</u> рассматривается применение метода граничных

интегральных уравнений к решению уравнений Лапласа и Пуассона, к которым приводят многие задачи магнитостатики. Прямой задачей магнитостатики является определение потенциала поля при заданной конфигурации магнитов. Вместе с тем часто возникает необходимость определения конфигураций магнитов по заданным характеристикам поля (потенциал, градиент и др.).

В параграфе 2.I приводится один из способов дискретизации используемой при решении уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений.

В параграфе 2.2 предлагается численный метод исследования влияния малых возмущений формы полюсных наконечников квадрупольной магнитной линзы на потенциал поля и определение таких размеров ступенчатой поверхности полюса, при которых заданные коэффициенты разложения поля в ряд Фурье обращаются в нуль.

$$U=\sum_{i=0}^{\infty} a_{4i+2}\left(r/r_0\right)^{4i+2}\sin(4i+2)\varphi \qquad (2)$$

где r_0 радиус максимальной окружности, вписанной в апертуру квадрупольной магнитной линзы. Методом граничных интегральных уравнений решается прямая задача определения коэффициентов разложения в ряд (2) для начального возмущения. Начальное малое возмущение выбирается в виде ступеньки.

Изменяя величину возмущения (высота ступеньки AA_1) находим второй коэффициент разложения в ряд (2) путем решения прямой задачи. С помощью полученных значений строится интерполяционный многочлен, корень которого есть искомое возмущение, для которого $a_6=0$.

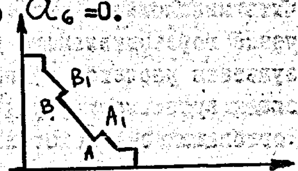

рис.I

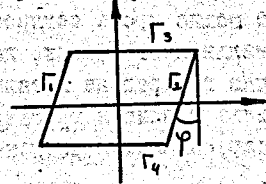

рис.2

В параграфе 2.3 также решается обратная задача магнитостатики, т.е. по заданному магнитному полю нужно определить форму поверхности квадрупольной линзы, при условии, что $a_6=a_{10}=0$. Решение найдено в классе ступенчатых поверхностей. Для получения оптимального решения используется минимизационный метод скользящего допуска с ограничениями на физические параметры в виде равенств и неравенств.

В параграфе 2.4 исследуется вопрос получения максимального фотонапряжения, возникающего в косонапыленных полупроводниковых пленках при облучении их потоком частиц или света. Задача сводится к решению уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=-G(y)/D,\quad G(y)=\alpha G_0 e^{\left(\alpha\beta y-\frac{\alpha d}{2}\right)}$$
$$D,\alpha,\beta,G_0-const \qquad (3)$$

с ограничными условиями третьего рода в параллелограмме. Уравнение Пуассона решается методом граничных интегральных уравнений. Используя специфичность правой части уравнения Пуассона, поверхностный интеграл в формуле Грина также преобразуется в интеграл по границе.

Для нахождения элементов матрицы левой части алгебраической системы, подинтегральные функции представляются в виде ряда и приводятся к квадратурным формулам. Все эти преобразования производились, исходя из следующих свойств данной задачи:

I. Область интегрирования есть параллелограмм.

2. Правая часть уравнения Пуассона зависит только от y.

Решив интегральное уравнение относительно U (из граничных условий исключаем $\partial u/\partial \bar{n}$), найдем решения границы $\Gamma=\Gamma_I\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4$. Γ_I, Γ_2, Γ_3 и Γ_4 показаны на рис.2. Так как решение $u(x,y)$ есть концентрация электронно-дырочных пар, то разность интегралов даст разность потенциалов для данного значения φ.

$$\int_{\Gamma_1} u(x,y)\,dl-\int_{\Gamma_2} u(x,y)\,dl$$

При решении таких задач, где нет необходимости вычислять решение во всех внутренних точках области, особенно характерно выявляются преимущества метода граничных интегральных уравнений.

<u>В третьей главе</u> решаетсязадача определения стационарного температурного поля магнитопровода бетатрона. Подобные задачи возникают при исследовании распределения температуры в обмотках сверхпроводящих магнитов, в тепловыделяющих элементах

реакторов, а также в магнитопроводах силовых трансформаторов. Изучение температурных полей имеет важное значение для определения некоторых свойств магнитных материалов, таких как магнитная проницаемость, теплопроводность и т.д.

Магнитопровод бетатрона или трансформатора представляет собой цилиндрическую область. Он собран из пластин разной формы таким образом, что его поперечное сечение представляет ступенчатую поверхность, вписанную в окружность. Так как коэффициент заполнения близок к единице (0,94÷0,98), то область, ограниченную ступенчатой поверхностью, заменяем кругом. Рассматривается задача определения стационарного температурного поля анизотропного цилиндра, что сводится к решению эллиптического уравнения в трехмерном цилиндре.

$$L_1\Theta \equiv \lambda_x \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = -Q_v \qquad (4)$$

На боковой поверхности ставятся граничные условия третьего рода

$$\lambda_n \frac{\partial\Theta}{\partial n} = -\alpha\Theta \qquad (5)$$

где $\alpha = \alpha(\varphi)$ – коэффициент теплоотдачи на границе Ω; $\lambda_n = \lambda(\varphi)$ – коэффициент теплопроводности вдоль нормали $\bar{n}$. Граничные условия на верхнем и нижнем основаниях имеют вид

$$\lambda_z \frac{\partial\Theta}{\partial z}\Big|_{z=L} = -\alpha_1\Theta, \quad \lambda_z \frac{\partial\Theta}{\partial z}\Big|_{z=-L} = \alpha_2\Theta$$

где α_1, α_2 и λ_z постоянные величины.

В параграфе 3.I решение краевой задачи (4-5) ищется в виде ряда по произведениям собственных функций оператора в данном случае являющимся функциями Матье.

В параграфе 3.2 рассматриваются вопросы, связанные с численной реализацией аналитических формул, полученных в предыдущем параграфе. При определении распределения температур в анизотропном цилиндре для эллиптических координат получается уравнение Матье.

$$y'' - (h - a\cos 2z)y = 0 \qquad (6)$$

Существует четыре типа периодических решений уравнения (6). Из них в качестве решения уравнения (6) выбираются функции $ce_{2n}(z, q)$, так как они удовлетворяют условию периодичности (с периодом π) и условию

$$\frac{\partial V(\xi,-\eta)}{\partial\eta}\Big|_{\xi=0} = -\frac{\partial V(\xi,\eta)}{\partial\eta}\Big|_{\xi=0}$$

которое физически соответствует непрерывности температурного поля вдоль оси $\xi = 0$.

Расоматриваются различные представления обычной $ce_{2n}(z, q)$ и модифицированной функции Матье $Ce_{2n}(z, q)$ в зависимости от индекса n, параметра q. При больших n $(n \geq 4)$ появляются трудности при вычислении собственных чисел a_{2n} (соответствующих $Ce_{2n}(z, q)$), что связано с сужением области устойчивости. Результаты расчета трехмерного температурного поля приведены в виде графиков зависимости температуры от радиуса, высоты и от полярного угла. Исследуются интерполяционные многочлены Лагранжа, аппроксимирующие коэффициенты разложения в ряд по $\cos(2rz)$ функций Матье, вплоть до десятого порядка точности.

При определении температурного поля, в частности, важно знать местоположение наиболее нагретой точки. Численные расчеты показывают, что наиболее нагретая точка находится между серединой и верхним основанием и ее месторасположение определяется разностью коэффициентов теплоотдачи верхнего и нижнего основания. Приведенные расчеты нашли применение в народном хозяйстве. Они были применены к определению температурного поля магнитопроводов трансформаторов.

В заключении приводятся основные результаты диссертации

I. Решена обратная задача интегрирования уравнения движения, т.е. по заданному движению частиц пучка определяются основные параметры управляющего поля (градиенты и расстояния).

Решена задача определения параметров прямолинейной "невидимой" вставки с тремя и четырьмя квадрупольными линзами на середине вставки. Результаты расчетов приведены в виде таблиц и графиков. Исходя из формы аппертуры квадрупольной линзы или допустимых градиентов при проектировании ускорителей можно из графиков выбрать геометрию прямолинейной вставки. При использовании четырех квадрупольных линз получены минимальные значения максимальных огибающих и поля в линзах.

2. С использованием метода граничных интегральных уравнений решена задача, принадлежащая к классу обратных задач магнитостатики. Решение обратной задачи найдено в классе ступенчатых поверхностей. Это позволило:

а) в случае малых возмущений поверхности полюса получить $a_6 = 0$ (второй коэффициент) разложения потенциала поля в ряд Фурье;

б) получить $a_6 = a_{10} = 0$ (второй и третий коэффициенты) разложения потенциала поля, когда возмущения не являются малыми. Алгоритм, построенный на основе минимизационного метода скользящего допуска, реализован в виде комплекса программ на языке "Фортран". Комплекс программ использовался для определения геометрических размеров полюсных наконечников квадрупольных линз системы транспортировки установки ВАСИЛИСА сооружаемой в ЛЯР ОИЯИ.

3. Методом граничных интегральных уравнений решена задача определения максимального фотонапряжения полупроводниковой пленки. Получена зависимость интегралов решения по сторонам от угла параллелограмма, позволяющая определить значение угла, соответствующее максимальной разности потенциалов.

4. Решена задача определения трехмерного температурного поля магнитопровода бетатрона. Получены зависимости решения от полярного угла, высоты и от коэффициентов теплоотдачи на верхнем и нижнем основаниях. Даны методические указания по способам вычислений функций Матье $ce_{2n}(z, q)$, $Ce_{2n}(z, q)$ в зависимости от n и q. Алгоритм также был использован для определения температурного поля магнитопровода трансформатора.

5. Исследована сходимость консервативного матричного численного метода: непрерывного обобщенного аналога скобок Гаусса.

а) для модельной задачи получены численные и аналитические оценки погрешности элементов матриканта для этого метода, которые позволяют утверждать, что он является методом второго порядка точности относительно H;

б) получены аналитические и численные оценки погрешности элементов огибающей матрицы для данного метода, которые показывают, что погрешность элементов огибающей матрицы имеет второй порядок точности и глобальная погрешность практически не зависит от длины интервала интегрирования;

в) используя экстраполяцию типа экстраполяции Ричардсона на последовательности сеток, численно доказано, что при решении жестких систем вышеуказанный метод является методом второго порядка относительно шага дискретизации H, причем численные неустойчивости не возникают вплоть до шага дискретизации $H = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$.

Работы, положенные в основу диссертации

1. С.Н.Андрианов, А.Д.Дымников, Е.М.Кулакова, Г.Х.Саркисян. О расчетах динамики частиц рекурсивными методами. ОИЯИ, II-10974, Дубна, 1977.
2. С.Н.Андрианов, А.Д.Дымников, Е.М.Кулакова, Г.Х.Саркисян, И.А.Шелаев. Применение метода скользящего допуска при решении задач синтеза оптимальных систем управления пучками заряженных частиц. В трудах международного совещания по программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1978, с.295-299.
3. Г.Х.Саркисян, С.Г.Нерсесян, С.М.Мхитарян, Л.А.Смирнова. Температурное поле анизотропного цилиндра. ОИЯИ, PII-85-218, Дубна, 1985.
4. Г.Х.Саркисян, С.Г.Нерсесян, С.М.Мхитарян, Л.А.Смирнова. Численный расчет температурного поля анизотропного цилиндра. ОИЯИ, PII-85-219, Дубна, 1985.
5. В.А.Акопян, Г.Х.Саркисян, Л.А.Смирнова. Определение потенциала поля квадрупольной линзы методом граничных интегральных уравнений. ОИЯИ, PII-85-766, Дубна, 1985.