ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

САНЮК ВАЛЕРИЙ ИВАНОВИЧ

УДК 539.12

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МНОГОМЕРНЫЕ СОЛИТОНЫ. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

(01.04.02 — теоретическая физика)

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна — 1997

Работа выполнена на кафедре теоретической физики Российского университета дружбы народов.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Михаил Константинович Волков,

доктор физико-математических наук, профессор Андрей Николаевич Лезнов,

доктор физико-математических наук, профессор Константин Алексеевич Свешников.

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Институт ядерных исследований Российской академии наук.

Защита диссертации состоится «28» мая 1997 г. на заседании Специализированного совета Д047.01.01 в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан «25» апреля 1997 г.

Ученый секретарь Специализированного совета
кандидат физико-математических наук В. И. ЖУРАВЛЕВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Современное состояние проблемы описания локализованных структур, возникающих как долгоживущие возбуждения нелинейных систем в физике элементарных частиц и конденсированных сред, в гидродинамике и ядерной физике, в астрофизике и космологии, нельзя признать удовлетворительным. Многочисленные исследования показали, что объекты такого рода в принципе не могут быть описаны как точечно-подобные, а, следовательно, не могут быть изучены традиционными методами анализа, теории возмущений и т.п. Поиски альтернативного описания таких структур как существенно-протяженных объектов привели, в частности, к созданию теории солитонов, основные достижения которой пока ограничиваются одномерными моделями (точнее, описанием структур с одним пространственным и одним временным измерениями: $(1+1)$-мерные модели) [1* – 7]. По понятным причинам значительная часть реальных солитоноподобных объектов (вихрей, текстур, дефектов и т.д.), возникающих, как правило, при сильных возбуждениях в нелинейных средах, не укладывается в рамки одномерных моделей. Поэтому развитие возможностей солитонного подхода на многомерные, в частности, на $(3+1)$-мерные модели представляется одним из важных направлений в современной нелинейной физике.

С одной стороны, развитие солитонной тематики на многомерную ситуацию происходило путем обобщения методов, эффективно работающих в $(1+1)$-мерных моделях, и установления критериев интегрируемости для многомерных динамических систем в работах М. Абловица, Б.А. Дубровина, В.Е. Захарова, И.М. Кричевера, А.Н. Лезнова, С.В. Манакова, В.Г. Махънькова, С.П. Новикова, А. Ньюэлла, Л.Д. Фаддеева и многих других. С другой стороны, происходил поиск моделей теории поля, допускающих многомерные солитоны (в несколько расширенном смысле) в качестве регулярных решений полевых уравнений. На этом пути были обнаружены вихри Нильсена - Олесена [8*], вихри Белавина - Полякова [9*], монополи т'Хоофта - Полякова [10*], инстантоны Белавина - Полякова - Тюпкина - Шварца [11*] и другие объекты, обладающие целым рядом необычных свойств. В частности, выяснилось что эти объекты наделены нетривиальными топологическими характеристиками (зарядами), принимающими целочисленные значения и обеспечивающими устойчивость солитонов как на классическом, так и на квантовом уровне. Именно такие объекты – *топологические солитоны* представляют интерес для физиков, прежде всего, широкими возможностями моделирования на их основе вихревых и струно-подобных локализованных структур в низкоэнергетической хромодинамике и ферромагнетиках, в жидких кристаллах и квантовых жидкостях, в астрофизике, биофизике и т.д.

Как правило, многомерные топологические солитоны присущи неинтегрируемым полевым теориям, а такие киральные модели, как модель Скирма [12*] и модель Фаддеева [13*], не допускают и самодуальных упрощений (предел Богомольного - Прасада - Соммерфилда), позволяющих в некоторых случаях выписывать явный вид солитонных решений. В таких моделях, обладающих практически важным спектром приложений в ядерной физике, в физике частиц и конденсированных сред, на первый план выходят вопросы существования и устойчивости регулярных решений, изучения аналитических и симметрийных свойств солитонных решений, выяснения структуры минимизаторов функционалов энергии при заданном значении топологической характеристики и др. Без выяснения этих вопросов не представляется возможным обосновать и правильно поставить численные эксперименты, по результатам которых и делаются выводы о пригодности рассматриваемых моделей.

Наибольшие сложности в исследовании многомерных топологических солитонов возникают при описании N-солитонных состояний. В частности, описание самодуальных N-инстантонных и N-монопольных конфигураций в калибровочных моделях оказалось возможным лишь на основе средств алгебраической топологии и вариационного исчисления в целом, развитых за последнее время (см. [14*]). Поскольку эта проблема эквивалентна, по сути, проблеме описания взаимодействия солитонов, то именно она является ключевой в исследовании неинтегрируемых солитонных моделей. Таким образом, представляется актуальной разработка методов и средств исследования структуры топологических солитонных конфигураций, позволяю их изучать вопросы существования, егулярности, аналитические и симметрийные свойства солитонных решений в $(3+1)$-мерных моделях.

Целью данной диссертационной работы является разработка эффективных методов исследования многомерных топологических солитонов, описываемых как критические точки функционалов для широкого класса физических систем. При этом ставится задача выяснения симметрийных и аналитических свойств, а также структуры минимизаторов энергии в киральных $(3+1)$-мерных моделях при различных значениях топологических зарядов.

Научная новизна положений, развитых в диссертации, определяется тем, что в работах автора впервые разработан последовательный алгоритм исследования G-инвариантных существенно - нелинейных функционалов $(3+1)$-мерных полевых моделей, позволяющий определять структуру конфигураций с минимальной энергией (анзацев), выяснять вопросы существования, регулярности и устойчивости соответствующих солитонных решений. Состав ющими алгоритма являются:

- *Схема симметрийной редукции функционалов*, основанная на отыскании группы симметрии G функционала, позволяющая выявлять структуру инвариантных полевых конфигураций (анзацев), на которых в силу теоремы Коулмена-Пале и реализуется минимум функционала. Это, как правило, приводит к существенному упрощению исходной задачи без потери общности утверждений.
- *Методы прямой минимизации функционалов*, в основе которых обобщенный "метод оврагов" Гельфанда-Цетлина (минимизация функционалов в расширенном пространстве) и метод сферической перестройки, восходящий к методу симметризации Штейнера. Совместное применение этих методов позволяет установить критерии наличия абсолютного минимума для G-инвариантных функционалов.
- *Прямые методы вариационного исчисления*, применяемые для доказательства существования регулярных решений, описывающих G-инвариантные солитонные конфигурации.
- *Топологические критерии устойчивости солитонных конфигураций*, основанные на представлении топологических зарядов в терминах полевых переменных модели, применении соответствующих неравенств для оценки энергии модели снизу через топологический заряд и последующей проверке достижимости полученной оценки на G-инвариантных солитонных конфигурациях.

- *Пенлеве-анализ редуцированных уравнений*, применяемый для выявления аналитических свойств солитонных решений и выяснения вопросов интегрируемости полученных уравнений.
- *Анализ геометрии многообразия решений*, основанный на вычислении алгебраических инвариантов Трессе - Лиувилля, установлении метрики и кривизны пространства статических решений. Классическая динамика солитонов моделируется при этом движением по геодезическим пространства решений.

Предложенный алгоритм применен для исследования свойств топологических солитонов в киральных моделях Скирма и Фаддеева, а также в топологических моделях магнетиков.

Научная и практическая значимость результатов определяется тем, что в диссертации предложен последовательный алгоритм исследования свойств топологических многомерных солитонов и его эффективность проиллюстрирована на конкретных моделях. Развитые в работе методы могут быть применены к анализу качественного поведения возбуждений солитонного типа в нелинейной оптике, физике плазмы, теории магнетиков, теории жидких кристаллов, в различных моделях ядерной физики и теории поля.

Некоторые результаты диссертации используются в качестве лекционного материала и получили отражение в курсе лекций для молодых ученых "Модель Скирма и солитоны в физике адронов" (соавторы: Маханьков В.Г. и Рыбаков Ю.П.).- Дубна: ОИЯИ, 1989.- 172 с., а также в монографии "The Skyrme Model. Fundamentals, Methods, Applications" (with Makhankov V.G. and Rybakov Yu.P.). - Springer Series in Nuclear and Particle Physics.- Berlin, Heidelberg, New York, Springer - Verlag, 1993.- 260 p.

Апробация работы. Представленные в диссертации материалы докладывались и обсуждались:
на Всесоюзном совещании по актуальным проблемам гравитации (Менделеево, 1977); на Сессиях Отделения ядерной физики (ОЯФ) АН СССР (Москва, 1979 - 1984); на Всесоюзных семинарах "Квантовая теория солитонов" (Ленинград, 1980, 1984, 1986); на Рабочих совещаниях "Теория солитонов и приложения" (Юрмала, 1986; Пущино, 1987; Дубна, 1989); на XI – XIV Семинарах по физике высоких энергий и теории поля (Протвино, 1988 – 1992); на Международном семинаре "Геометрические аспекты квантовой теории" (Дубна, 1988); на Рабочем совещании "Солитоны в неинтегрируемых системах: теория и приложения" (Дубна, 1988); на Школе – семинаре "Теория представлений и групповые методы в физике" (Тамбов, 1989); на II Всесоюзной конференции "Вычислительная физика и математическое моделирование" (Волгоград, 1989); на IV Школе молодых ученых "Квантовая теория поля и физика высоких энергий" (Ужгород, 1989); на IV Международном Рабочем совещании "Компьютерная алгебра в физических исследованиях" (Дубна, 1990); на XVIII Международном коллоквиуме "Теоретико-групповые методы в физике" (Москва, 1990); на II двустороннем Рабочем совещании "Ландау - Гейзенберг" (Дубна, 1992); на VI, VIII, X Международных Рабочих совещаниях "Нелинейные эволюционные уравнения и динамические системы" (Дубна, 1990, 1992; Лос Аламос, США, 1994); на Рабочем совещании "Компьютерное моделирование в нелинейной оптике" (Дубна-Саратов, 1993); на Рабочем совещании памяти Я.А. Смородинского "Методы симметрии в физике" (Дубна, 1993); на Международном Рабочем совещании "Нелинейное уравнение Шрёдингера: достижения, развитие, перспективы" (Черноголовка, 1994); на Международной конференции памяти Ф. Гюрши "Струны и симметрии" (Стамбул, Турция, 1994); на Сессии ОЯФ РАН (Москва, 1995); на 10-й Международной конференции "Проблемы квантовой теории поля" (Алушта, 1996), а также на семинарах кафедры теоретической физики РУДН, Лаборатории теоретической физики и Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, Отдела квантовой теории поля МИАН, на теоретическом семинаре ИТЭФ, на семинарах по физике высоких энергий Института Н. Бора (Копенгаген, Дания, 1982); Сиракьюзского Университета (Сиракьюз, США, 1990, 1994); Северо-Западного Университета (Эванстон, США, 1991); Йельского Университета (Нью Хейвен, США, 1991); на семинаре Центра нелинейных явлений и сложных систем Международного Института Э. Сольве (Брюссель, Бельгия, 1993); на семинаре по математической физике Центра исследований в Сакле (Жив-сур-Ивет, Франция, 1994), на семинаре Центра нелинейных исследований Лос Аламосской Национальной лаборатории (Лос Аламос, США, 1994) и др.

Публикации. Основные положения диссертации отражены в 35 публикациях.

Личное участие автора. Все приведенные в диссертации результаты получены самим автором, либо под его непосредственным руководством, либо при его непосредственном участии.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы, включающего 275 наименований. Общий объем диссертации составляет 205 страниц машинописного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** формулируется цель исследования, кратко изложено его содержание и обосновывается актуальность работы.

В **Главе I** "Топологические солитоны в калибровочных и киральных полевых моделях" [1 – 3, 18, 20] систематизируются сведения о топологических солитонах, приводятся определения основных понятий, используемых в последующих главах. При этом рассматриваются лишь наиболее характерные модели и методы их исследования, в основном, в рамках классической теории. Акцентируются проблемы и сложности, возникающие при описании N - солитонных состояний в таких моделях.

В § 1.1 дается определение топологического солитона и на примере простейших (1+1)-мерных моделей (sin - Гордон и ϕ^4 - модель) кратко перечисляются свойства 1 - мерных топологических солитонов – *кинков*. При этом удается выделить два существенно различных типа топологических солитонов:

1. **киральные солитоны**, характерные для физических полей, принимающих значения на многообразиях сфер S^n, групп Ли G, однородных пространств G/H и подчиненных тривиальным граничным условиям на бесконечности (sin - Гордон модель);
2. **хиггсовские солитоны**, характерные для полей с нетривиальными и различными асимптотиками на бесконечности и вырожденным классическим вакуумом R (ϕ^4 - модель).

Подчеркиваются различия в определении топологических зарядов и гомотопической классификации для солитонных решений указанных выше типов, выявляются простые критерии существования N - солитонных конфигураций.

В § 1.2 рассматриваются солитоны, возникающие в абелевой калибровочной модели Хиггса (вихри Нильсена - Олисена) и в нелинейной $O(3)$– модели n– поля (вихри Белавина - Полякова), как наиболее характерные $(2 + 1)$ - мерные топологические солитоны, соответственно, хиггсовского и кирального типа. Несмотря на то, что обе модели относятся к теориям поля типа Богомольного, т.е. допускают сведение полевы : уравнений к уравнениям 1-го порядка (самодуальное упрощение), явные выражения для N - вихревых конфигураций в первой из моделей до сих пор не найдены. Помимо этого, кратко описываются топологические солитоны в иных $(2 + 1)$-мерных σ-моделях, в том числе и *анионы* – топологические солитоны с дробнозначным спином, возникающих при добавлении в функционал действия σ-модели члена Чженя - Саймонса [3].

В § 1.3 дано схематичное описание наиболее известных $(3 + 1)$ - мерных топологических солитонов, к числу которых отнесены монополи т'Хоофта - Полякова, обнаруженные в неабелевой калибровочной модели Хиггса, скирмионы в киральной модели Скирма и тороидальные солитоны (тороны) в модели Фаддеева. Все перечисленные модели являются неинтегрируемыми и поэтому основное внимание уделено вопросам существования и регулярности решений, а также проблемам приближенного описания N - солитонных конфигураций, например, путем построения соответствующих пространств модулей [15*]. Ключ к такого рода построениям был найден при исследовании еще одной разновидности топологических солитонов – *инстантонов*, обнаруженных в евклидовом варианте Янг-Миллсовской теории. В отличие от ранее упоминавшихся солитонов, инстантоны локализованы не только в пространстве, но и во времени, в силу чего они могут осуществлять переходы между полями из разных гомотопических классов. Для N - инстантонных конфигураций известен алгоритм Атьи - Дринфельда - Хитчина - Манина построения точных решений, а при $N = 2, 3$ эти решения удается записать в явном виде. На этом основано одно из наиболее заметных достижений в калибровочных теориях – классификация Дональдсона - Нама N - монопольных конфигураций [14*]. С другой стороны, предложенная в работе [16*] возможность аппроксимации киральных полей голономиями полей Янга-Миллса, позволяет существенно продвинуться в изучении не только геометрии N - солитонных конфигураций, но и, что существеннее с физической точки зрения, в исследовании процессов взаимодействия топологических солитонов [17*]

В **Главе II** "Топологические заряды и устойчивость солитонов" [4 – 14] излагаются способы построения основных видов топологических зарядов в киральных и калибровочных моделях, а также критерии топологической устойчивости многомерных солитонов.

В § 2.1 приведены определения топологических инвариантов, используемых в качестве топологических зарядов в физических моделях. К числу таких инвариантов относятся степень отображения, индекс Кронекера, индекс Хопфа и др. Для каждого из инвариантов приведены способы их выражения в явном виде через полевые переменные соответствующей физической модели, в том числе, и в случае калибровочных обобщений таких моделей. Отмечены различия в определении и свойствах топологических зарядов в киральных и хиггсовских моделях.

В § 2.2 явные выражения для топологических зарядов используются для вывода оценки функционалов энергии E полевых моделей снизу через топологический заряд Q типа

$$E \geq f(|Q|),$$

где f – некоторая монотонно растущая функция. При наличии такой оценки, решения уравнений поля с заданным значением Q, реализующие нижнюю грань энергии – $\mathrm{Inf}\, E$, оказываются устойчивыми по Ляпунову. В таких случаях говорят о *топологической устойчивости солитонов*. Для топологических солитонов хиггсовского типа в пределе Богомольного - Прасада - Соммерфилда приведенная оценка, как правило, точна, т.е. $\mathrm{Inf}\, E = f(|Q|)$, что приводит к понижению порядка вариационных уравнений на единицу и сведению поиска экстремалей функционала E к решению уравнений 1-го порядка – *уравнений Богомольного* [3*]. Для функционалов энергии в киральных моделях типа Скирма и Фаддеева указанная оценка выполняется лишь в виде строгого неравенства и поэтому для выяснения устойчивости киральных солитонов необходимо исследовать достижимость $\mathrm{Inf}\, E$ в каждом из гомотопических классов [18*, 6, 11, 18]. Помимо этого, приводятся необходимые критерии устойчивости многомерных солитонов в отношении масштабных преобразований, основанные на вириальных теоремах Хобарта - Деррика. Обсуждается физический смысл членов 4-го порядка по производным от полей (члены Скирма) в киральных лагранжианах и их роль в обеспечении топологической устойчивости солитонов.

В § 2.3 изучаются альтернативные возможности стабилизации солитонов. По замыслу Скирма, барионы могут рассматриваться как "вихри" в модели "пионной жидкости" с нетривиальной завихренностью (членом Скирма). При этом существенным параметром оказывается радиус ϵ кора (сердцевины) такого вихря. Выбирая ϵ в качестве параметра обрезания удается доказать [10] наличие стабильных классических решений в киральной модели Вайнберга - Гюрши (стандартной σ - модели без скирмовского члена). Рассматривая ϵ как динамическую

переменную и применяя стандартную процедуру квазиклассического квантования удается воспроизвести практически те же результаты для расщепления спектра масс барионов, что и в стандартной модели Скирма. Обсуждается связь предложенной модели с представлениями о структуре нуклонов в модели "кирального мешка" [19*].

Глава III "Методы редукции G - инвариантных функционалов и структура минимизаторов энергии" [4 - 7, 11, 15 - 21, 24, 25, 29] содержит изложение схемы исследования G-инвариантных существенно - нелинейных функционалов в $(3+1)$-мерных полевых моделях, позволяющей выявлять структуру конфигураций (критических точек) на которых достижима нижняя грань функционала.

В § 3.1 дается определение G – инвариантных функционалов, где G - некоторая компактная группа. В частности, такие функционалы характерны для киральных моделей, где поля ϕ принимают значения в некотором компактном (полевом) многообразии Φ, в качестве которого обычно выбирается сфера S^{n-1}, компактная группа G или однородное пространство G/H. Заданием естественных граничных условий $\phi \to \phi_\infty$ при $x \to \infty$, где ϕ_∞ – выделенная точка на полевом многообразии Φ, обеспечивается как конечность энергии состояний, так и эффективная компактификация координатного пространства $\mathbf{R}^3$ в $S^3 = \mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$. Собственно, это и дает возможность классифицировать полевые конфигурации модели, рассматриваемые как отображения $\phi : S^3 \to \Phi$, посредством третьей гомотопической группы $\pi_3(\Phi)$.

В модели Скирма [12*, 20*, 7, 11, 17, 18, 20] полевым многообразием является $\Phi = S^3 \simeq (SU(2))$, соответственно $\pi_3(SU(2)) = \pi_3(S^3) = \mathbf{Z}$ (здесь и далее $\mathbf{Z}$ – абелева группа целых чисел) и топологический заряд Q, интерпретируемый как барионное число, реализуется в виде степени отображения $Q = \deg(S^3 \to S^3)$. Вводя левоинвариантные киральные токи $l_i = U^\dagger \partial_i U$, , где $U \in SU(2)$ – киральное поле, функционал энергии модели Скирма записывается в виде

$$H_S = -\int d^3x \left\{ \frac{1}{4\lambda^2} \mathrm{Sp}(l_0^2 + l_i^2) + \frac{\varepsilon^2}{16} \mathrm{Sp} \left([l_0, l_i]^2 + \frac{1}{8} (\varepsilon^{ijk} [l_j, l_k])^2 \right) \right\}$$

и, без учета трансляций, инвариантен относительно группы

$$G = SO(3)_S \otimes SO(3)_I, \qquad (1)$$

где индексы S и I соответствуют пространственным и изотопическим поворотам. Аналогичное утверждение справедливо и в отношении функционала энергии $SU(2)$ - калибровочной модели Скирма.

Это позволяет провести симметрийную (или размерную) редукцию функционалов, сводящуюся к отделению угловых переменных в уравнениях движения. Действительно, согласно принципу Коулмена – Пале [21*, 22*], поиск экстремалей G – инвариантных функционалов достаточно проводить среди так называемых G – инвариантных (эквивариантных или ковариантно постоянных) полей $\{\phi_0(x)\}$, определяемых условием

$$\phi_0(x) = T_g\phi_0(g^{-1}x), \; g \in G, \qquad (2)$$

где T_g – оператор представления группы G, поскольку экстремали, найденные в инвариантном классе являются истинными экстремалями G – инвариантных функционалов.

Задавая киральное поле $U \in SU(2)$ в виде $U = \exp(i(\mathbf{n}\,\tau)\theta)$, где τ – матрицы Паули, $\mathbf{n}$ – единичный вектор, $\theta(x)$ – киральный угол, обнаруживаем что полей U, инвариантных относительно группы (1), не существует, и поэтому имеет смысл ограничиться её подгруппами

$$G_1 = \mathrm{diag}\,[SO(3)_S \otimes SO(3)_I],$$

$$G_2 = \mathrm{diag}\,[SO(2)_S \otimes SO(2)_I],$$

где diag означает совпадение параметров перемножаемых групп или их пропорциональность, а группы $SO(2)_S$ и $SO(2)_I$ отвечают поворотам вокруг третьей оси соответствующих пространств.

Разрешая условие (2) для G_1 – инвариантных (или сферически - симметричных) полей имеем $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\theta = \theta(r)$, что соответствует "ежовому" анзацу Скирма, а структура G_2 – инвариантных (или аксиально - симметричных) полей получается в сферических координатах r, ϑ, α в виде:

$$\theta = \theta(r, \vartheta); \; \beta = \beta(r, \vartheta); \; \gamma = k\alpha; \; k \in Z,$$

где β, γ полярные координаты вектора $\mathbf{n}$.

Для G_i – инвариантных полей принцип Коулмена - Пале получает дальнейшую конкретизацию, поскольку справедлива [18*, 7, 11, 17].

Теорема. Пусть G_i – инвариантное поле ϕ_0 реализует минимум G_i – инвариантного функционала $H[\phi]$ в инвариантном классе. Тогда, если $H[\phi]$ выпуклый по производным $\nabla\phi$ в точке ϕ_0, то ϕ_0 реализует истинный минимум функционала $H[\phi]$.

Следовательно, после установления структуры G_i – инвариантных анзацев, требуется проверить локальную выпуклость G_i – инвариантного функционала по производным.

В § 3.2 для проверки выпуклости функционалов применяются методы прямой минимизации, основанные на обобщенном "методе оврагов" Гельфанда-Цетлина [23*, 6, 7, 16, 17, 19] (минимизация функционалов в расширенном пространстве, когда поля и их производные полагаются независимыми) и на методе сферической перестройки, восходящем к симметризации Штейнера [24*]. Совместное применение этих методов позволяет, в частности, установить, что в первом гомотопическом классе абсолютный минимум энергии достигается на G_1 – инвариантных конфигурациях, т.е. на "ежовом" анзаце Скирма.

В § 3.3 прямая минимизация функционала энергии используется при исследовании $SU(2)$ – калибровочного обобщения модели Скирма [4, 5, 14] с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\lambda^2}\,\mathrm{Sp}\,L_\mu^2 + \frac{\varepsilon^2}{16}\,\mathrm{Sp}\,[L_\mu, L_\nu]^2 + $$
$$+ \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{Sp}\,F_{\mu\nu}^2 + \frac{m_\rho^2}{2\lambda^2}(A_\mu^a)^2 - \frac{2m_\pi^2}{\lambda^2}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

где введены обобщенные левые и правые киральные токи $L_\mu = U^\dagger D_\mu U$, $R_\mu = D_\mu U \cdot U^\dagger$; ковариантные производные $D_\mu U = \partial_\mu U - [A_\mu, U]$ и тензор напряженности Янг-Миллсовских полей $A_\mu = \frac{i}{2}\tau^a A_\mu^a$ - $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]$. Показано, что абсолютный минимум энергии и в этом случае, при $|Q| = 1$, реализуется на G_1 – инвариантных конфигурациях.

В § 3.4 изучается структура минимизаторов энергии для N - солитонных состояний с топологическими зарядами ($|Q| = N > 1$) в модели Скирма. Минимизацией в расширенном пространстве, устанавливается, что в таких случаях допустимы как G_1 –, так и G_2 – инвариантные конфигурации (нарушается единственность). Дальнейший анализ позволяет указать условия, при выполнении которых на аксиально-симметричных конфигурациях реализуется абсолютный минимум энергии во втором гомотопическом классе (при $N = 2$) и, по крайней мере, локальный минимум энергии при $N > 2$. Таким образом, налицо понижение симметрии минимизаторов энергии в модели Скирма с ростом значения топологического заряда.

Как выясняется в § 3.5, G_2 – инвариантные конфигурации играют определяющую роль и при выяснении структуры минимизаторов энергии в модели Фаддеева, в которой киральное поля принимают значения в двумерной сфере S^2 [13*], т.е. задаются единичным 3-вектором n^a с естественным граничным условием $n^a \to \delta_3^a$ при $r \to \infty$, и, соответственно, классифицируются по гомотопической группе $\pi_3(S^2) = \mathbf{Z}$. Эти поля характеризуются топологическим зарядом Q_H – индексом Хопфа, определяемым как число зацеплений $\mathbf{b}$ – линий, сопоставляемых n – полю согласно связи

$$f_{ik} = \varepsilon_{iks} b_s = 2\varepsilon_{abc}\partial_i n^a \partial_k n^b n^c.$$

При этом

$$Q_H = -(8\pi)^{-2} \int d^3x (\mathbf{a}\,\mathbf{b}), \quad \mathbf{b} = \mathrm{rot}\mathbf{a}.$$

Отсюда и из структуры лагранжиана модели Фаддеева

$$\mathcal{L}_F = -\frac{\varepsilon^2}{4} f_{\mu\nu}^2 + \lambda^2(\partial_\mu n^a)^2$$

следует оценка для энергии топологического солитона:

$$E > \mu |Q_H|^{3/4}, \quad \mu = \mathrm{const}.$$

Близкие по структуре модели используются в теории магнетиков [25*] и в теории нематических жидких кристаллов [26*].

Поиск структуры минимизаторов энергии при фиксированном Q_H [18*, 4, 5, 23 - 25] удобно проводить, переходя с помощью обратного отображения Хопфа $h^{-1} : S^2 \to S^3$ к полям на сфере S^3, т.к. имеет место $\pi_3(S^2) = \pi_3(S^3) = \mathbf{Z}$. При этом гамильтониан модели Фаддеева приобретает структуру гамильтониана модели Скирма, что позволяет использовать ранее изложенные приемы минимизации. В результате

находим, что минимизаторы энергии в модели Фаддеева имеют тороидальную структуру (тороны). Для n – поля получаем уже известный аксиально - симметричный анзац:

$$\beta = \beta(\rho, z); \ \gamma = m\alpha + v(\rho, z); \ m \in \mathbf{Z},$$

где ρ, α, z – цилиндрические координаты.

Глава IV "Теоремы существования для киральных топологических солитонов" [4 - 8, 11, 14, 17, 23 - 26] посвящена доказательству существования G_1 –, и G_2 – солитонных конфигураций как регулярных решений соответствующих уравнений движения на основе прямых вариационных методов, т.е., по сути, доказывается достижимость нижней грани соответствующего функционала энергии на множестве функций, подчиненных заданным граничным условиям.

С этой целью в § 4.1 дана краткая сводка основных определений и теорем прямых вариационных методов, используемых в последующих доказательствах.

В § 4.2 приведено доказательство существования регулярных, вещественно - аналитических (из класса C^∞) сферически - симметричных ("ежовых") конфигураций в модели Скирма, при $(|Q| = N)$. Для этого выясняется достижимость $\mathrm{Inf} H$ для сферически - симметричного гамильтониана

$$H[\theta] = \int_0^\infty dr \left[\theta'^2(r^2/2 + 2\sin^2\theta) + \sin^2\theta + \sin^4\theta/r^2\right]$$

на множестве Θ функций $\{\theta(r)\}$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\theta(0) = N\pi, \ \theta(\infty) = 0.$$

Прямой вариационный метод, как известно, сводится к построению минимизирующей последовательности функций $\{\theta_n(r)\} \in \Theta$; к доказательству сходимости этой последовательности к некоторой предельной функции $\{\theta_0(r)\} \in \Theta$ таким образом, что

$$\mathrm{Inf} H[\theta] = \lim_{n\to\infty} H[\theta_n] = H[\theta_0].$$

Для реализации указанных этапов устанавливаются априорные оценки на предельную функцию $\{\theta_0(r)\}$, которые сами по себе важны при выборе вида пробных функций для численных расчетов, используются известные теоремы вложения для доказательства полунепрерывности снизу функционала $H[\theta]$, а затем проверяется регулярность предельной функции $\{\theta_0(r)\}$.

В § 4.3 изложено доказательство существования регулярных аксиально - симметричных конфигураций в модели Скирма при $(|Q| \geq 2)$, а также, в модели Фаддеева при произвольном значении Q_H.

Глава V "Геометрия многообразия солитонных решений" [27 - 30], в основном, посвящена изучению геометрии многообразия решений уравнения скирмиона, т.е. уравнения движения в модели Скирма, описывающего G_1 — инвариантные конфигурации в первом гомотопическом классе, которое записывается в виде:

$$\theta'' = \frac{\sin 2\theta}{M}\left(1 - 2\theta'^2 + \frac{2\sin^2\theta}{x^2}\right) - \frac{2x\theta'}{M}, \tag{3}$$

где $\theta = \theta(x)$ – киральный угол, $x = r/\varepsilon\lambda$, $M = x^2 + 4\sin^2\theta$, а ε, λ - параметры модели. Именно для этого уравнения доказано существование регулярных решений из класса C^∞ в § 4.2, однако их явный вид до сих пор удается записать лишь через формальные ряды [27*], что затрудняет анализ их свойств.

С другой стороны, следуя Э. Картану [28*], интегральные кривые ОДУ 2-го порядка вида $y'' = f(x, y, y')$ можно рассматривать как геодезические на многообразии M^2 элементов (x, y, y'), оснащенного соответствующей связностью. Такие многообразия в общем случае относятся к многообразиям проективной связности, т.е. обладают структурой вещественного проективного пространства $\mathbf{RP}^2$ в окрестности каждого своего элемента; бесконечно близким элементам из M^2 отвечают пространства $\mathbf{RP}^2$, связанные между собой проективными преобразованиями. В нашем случае достаточно ограничиться многообразиями нормальной проективной связности размерности 2, с уравнениями геодезических в виде

$$y'' + a_1(y')^3 + 3a_2(y')^2 + 3a_3y' + a_4 = 0, \tag{4}$$

где $a_i = a_i(x, y)$ - переменные коэффициенты, при определенном выборе которых имеем исходное уравнение (3).

В § 5.1 приведены основные факты из геометрии пространств нормальной проективной связности, а также формулы для нетривиальных компонент тензора кривизны $L_1 \equiv -R^0_{112}$; $L_2 \equiv -R^0_{212}$, в терминах которых вычисляется серия алгебраических инвариантов Трессе - Лиувилля многообразия решений ОДУ 2-го порядка (см. [29*]). Ключевую роль при этом играет инвариант веса 5 – ν_5, который имеет вид

$$\begin{aligned}\nu_5 = &L_2\left(L_1\frac{\partial L_2}{\partial x} - L_2\frac{\partial L_1}{\partial x}\right) + L_1\left(L_2\frac{\partial L_1}{\partial y} - L_1\frac{\partial L_2}{\partial y}\right) - \\ &- a_1L_1^3 + 3a_2L_1^2L_2 - 3L_1L_2^2a_3 + a_4L_2^3,\end{aligned}$$

и тождественная тривиальность которого $\nu_5 \equiv 0$ является критерием погружения двумерного многообразия нормальной проективной связности M^2 в трехмерное проективное пространство $\mathbf{RP}^3$.

В § 5.2 вычислены инварианты Трессе - Лиувилля для уравнения (3) и получены основные геометрические характеристики солитонного многообразия: средняя и гауссова кривизны, символы Кристоффеля, метрика и т.д. Выясняется, что серия инвариантов Трессе - Лиувилля для уравнения (3) зануляется уже при относительно малых весах, что ограничивает возможности подхода в исследовании киральных моделей. Поскольку в этом случае $\nu_5 \equiv 0$, делается вывод о погружаемости многообразия решений в трехмерное проективное пространство $\mathbf{RP}^3$. Обсуждается возможные пути использования полученных сведений о геометрии многообразия скирмионных решений.

Обсуждается связь предлагаемого подхода к исследованию свойств солитонных решений в неинтегрируемых моделях с известным приближенным подходом, основанном на построении пространства модулей [15*].

В § 5.3 аналогичным образом исследуется геометрия многообразия решений интегрируемой модификации уравнения (3), предложенной в работах [31, 32]. При этом обнаруживается, что значения инвариантов в основном определяются кинетическими членами исходных лагранжианов и не зависят от вида потенциалов в уравнениях.

В обоих рассмотренных случаях $\nu_5 \equiv 0$ и согласно предположению В.С. Дрюмы [29*], такие уравнения должны обладать свойством Пенлеве – отсутствие подвижных особых точек. Изучению справедливости этого предположения для уравнений в киральных моделях посвящена

Глава VI "Пенлеве-анализ уравнений топологических солитонов" [22, 27 - 29, 33 - 35], где изучаются симметрийные и аналитические свойства решений уравнения скирмиона (3), некоторых точно решаемых модификаций этой модели, а также уравнений в киральных моделях магнетиков [25*].

В § 6.1 приведены основные элементы Пенлеве - анализа на примере уравнения скирмиона (3), обсуждается роль этого анализа в установлении факта интегрируемости уравнений и прямыми вычислениями показано отсутствие свойства Пенлеве для уравнения (3). Отрицательный ответ получен и в случае расширения области определения кирального угла на всю числовую ось.

В § 6.2 аналогичным образом исследуется модель Скирма-Мантона [30*], где в качестве области определения киральных полей изначально выбирается сфера S^3. Несмотря на наличие в такой модели известного точного решения, показано что и в этом случае уравнение движения не обладает свойством Пенлеве.

В § 6.3 предположение Дрюмы проверяется для уравнений топологических магнетиков [25*]. Для одного из таких уравнений (уравнение Гросса - Питаевского) удается доказать наличие свойства Пенлеве, и на этом основании привести его к трансцендентным уравнениям из списка Пенлеве - Гамбье. Указаны преобразования сводящие уравнения Гросса - Питаевского к уравнениям $PIII$ и PV из данного списка, а также способ выражения его решений (до этого получаемых лишь численно) через известные решения синус - Гордон уравнения.

В **Заключении** перечислены **основные результаты** полученные в диссертации:

1. Доказаны существование и вещественная аналитичность сферически – симметричного солитонного решения с единичным топологическим зарядом (скирмиона), реализующего абсолютный минимум энергии $SU(2)$ киральной модели Скирма.

2. Доказано, что абсолютный минимум энергии $SU(2)$ калибровочной модели Скирма (т.е. при наличии неабелева калибровочного поля) реализуется на сферически - симметричных полевых конфигурациях с единичным топологическим зарядом, в то время как в модели Фаддеева минимизаторы энергии имеют тороидальную структуру, а абсолютный минимум реализуется на состояниях с единичным инвариантом Хопфа Q_H. На основе отображения Хопфа установлена связь между моделями Скирма и Фаддеева.

3. Установлено понижение симметрии критических точек модели Скирма в высших гомотопических классах $Q > 1$: сферически – симметричные состояния отвечают седловым критическим точкам и неустойчивы, а минимальными оказываются аксиально – симметричные конфигурации. Дано доказательство существования и показана возможность образования таких конфигураций как связанных состояний скирмионов.

4. Показано, что известные результаты для расщепления спектра масс барионов в стандартной модели Скирма, могут быть воспроизведены и в рамках более простой киральной модели Вайнберга - Гюрши, путем введения параметра обрезания, равного радиусу ϵ кора (сердцевины) "вихря" в "пионной жидкости", моделирующего барион. Доказано существование стабильных классических решений в рамках предложенной упрощенной модели.

5. Исследованы аналитические свойства решений редуцированного уравнения Эйлера-Лагранжа в модели Скирма – нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего скирмионные конфигурации (уравнение скирмиона). Показано, что уравнение не обладает свойством Пенлеве. Аналогичные результаты получены и для точно решаемого уравнения модифицированной модели Скирма-Мантона.

6. Проведен Пенлеве-анализ уравнений топологических магнетиков [51]. Доказано, что все они относятся к уравнениям Р - типа. Для одного из таких уравнений (уравнение Гросса - Питаевского) на этом основании указаны преобразования сводящие уравнения Гросса - Питаевского к уравнениям $PIII$ и PV из данного списка, а также способ выражения его решений (до этого получаемых лишь численно) через известные решения синус - Гордон уравнения.

7. Исследована геометрия многообразия решений уравнения скирмиона, построены алгебраические инварианты Трессе-Лиувилля. На этой основе найдены основные характеристики многообразия решений (главные и средние кривизны, метрика, связность и т.д.).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1*. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: Метод обратной задачи.*- М.: Наука, 1980.- 320 С.

2*. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. *Гамильтонов подход в теории солитонов.* - М.: Наука, 1986.- 528 С.

3*. Раджараман Р. *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля.* - М.: Мир, 1985. - 414 С.

4*. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи.* - М.: Мир, 1987. - 479 С.

5*. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения.* - М.: Мир, 1988. - 694 С.

6*. Ньюэлл А. *Солитоны в математике и физике.* - М.: Мир, 1989. - 326 С.

7*. Makhankov V.G. *Soliton Phenomenology.* - Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1990. - 452 P.

8*. Nielsen H.B., Olesen P. Vortex-Line Models for Dual Strings// *Nucl. Phys., ser. B.* - 1973. - V.**61**, No. 1.- P. 45 -61.

9*. Белавин А.А., Поляков А.М. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика// *Письма в ЖЭТФ.*- 1975.- Т. **22**, вып. 10.- С. 503 - 506.

10*. Поляков А.М. Спектр частиц в квантовой теории поля// *Письма в ЖЭТФ.*- 1974.- Т. **20**, вып. 6.- С. 430 - 433; 't Hooft G. Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories//*Nucl. Phys., ser. B.*- 1974. - V.**79**, No. 3.- P. 276 - 285.

11*. Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu.S. Pseudo-Particle Solutions of the Yang-Mills Equations// *Phys. Lett., ser. B.*- 1975.- V. **59**, No. 1.- P. 85 - 87.

12*. Skyrme T.H.R. A Unified Field Theory of Mesons and Baryons// *Nucl. Phys.*- 1962.- V. **31**, No. 4.- P. 556 - 569.

13*. Фаддеев Л.Д. Калибровочно - инвариантная модель электромагнитного и слабого взаимодействия лептонов// *Докл. АН СССР.*- 1973.- Т. **210**, N 4.- С. 807 - 810.

14*. *Монополи: Топологические и вариационные методы.* Сб. статей 1983-1986 гг. Пер. с англ. М.: Мир, 1989.- 584 С.

15*. Атья М., Хитчин Н. *Геометрия и динамика магнитных монополей.* Пер. с англ.- М.: Мир, 1991.- 150 С.

16*. Atiyah M.F., Manton N.S. Skyrmions from Instantons// *Phys. Lett., ser. B.* - 1989.- V. **222**.- P. 438 - 44.

17*. Atiyah M.F., Manton N.S. Geometry and Kinematics of Two Skyrmions// *Commun. Math. Phys.,* - 1993.- V. **152**.- P. 391 - 422.

18*. Рыбаков Ю.П. Устойчивость многомерных солитонов в киральных моделях и гравитации/ *Итоги науки и техники. Классическая теория поля и теория гравитации.* Т.2. Гравитация и космология.- М.: ВИНИТИ, 1991.- С. 56 - 111.

19*. Rho M. Cheshire Cat Hadrons// *Phys. Reports, ser. C.*- 1994.- V. **240**, No. 1.- P. 1 - 142.

20*. Zahed I., Brown G.E. The Skyrme Model// *Phys. Reports, ser. C.*- 1986.- V. **142**, No. 1. & 2.- P. 1 - 102.

21*. Palais R. The Principle of Symmetric Criticality// *Comm. Math. Phys.*- 1979.- V. **69**, No. 1.- P. 19 - 30.

22*. Ладыженская О.А., Капитанский Л.В. О принципе Коулмена нахождения стационарных точек инвариантных функционалов// *Зап. науч. сем. ЛОМИ.*- 1983.- Т. **127**, вып. 15.- С. 84 - 102.

23*. Гельфанд И.М., Цетлин М.Л. Принцип нелокального поиска в системах автоматической оптимизации// *Докл. АН СССР*- 1961.- Т. **137**, N 2.- С. 295 - 298.

24*. Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике.* - М.: ГИФМЛ, 1962.- 336 С.

25*. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны.* - Киев: Наук. думка, 1983.- 190 С.

26*. Монастырский М.И. *Топология калибровочных полей и конденсированных сред.* - М.: ПАИМС, 1995.- 478 С.

27*. Рыбаков Ю.П. Скирмионы в высших гомотопических классах// Вестник РУДН, сер. Физика.- 1993.- N 1.- С. 49 - 53.

28*. Картан Э. *Пространства аффинной, проективной и конформной связности.* - Казань: Изд-во Казанск. университета, 1962.- 210 С.

29*. Дрюма В.С. *Геометрическая теория нелинейных динамических систем.*/ Препринт Инст. математики АН Молд. ССР. - Кишинев: Инст. математики, 1986.- 54 С.

30*. Manton N.S., Ruback P.J. Skyrmions on Flat Space and Curved Space// *Phys. Lett.,* ser. B. - 1986.- V. **181**.- P. 137 - 140.

Основные результаты диссертации отражены в следующих работах:

1. Санюк В.И. Топологические солитоны: классификация и N - солитонные конфигурации. I. Кинки, лампы, вихри и анионы //*Вестник РУДН,* серия "Физика." - 1995. - N 3, Вып. 1. - С. 142-167.
2. Санюк В.И. Топологические солитоны /*Физическая Энциклопедия* Т. V. - М.: Большая Российская энциклопедия. - 1997. - С.134 - 142.
3. Санюк В.И. Алгебра Курышкина и квантование "ребячьих" скирмионов /*Дискуссионные вопросы квантовой физики.* Памяти Васи-

лия Васильевича Курышкина./ Ред. Запорованный Ю.И., Санюк В.И. - М.: Изд-во РУДН, 1993. - С. 90-103.
4. Кунду А., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. Топологические солитоны на многообразии 3-х мерной сферы *Деп. ВИНИТИ* No. 1906-79 (1979) 22 С.
5. Кунду А., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. О структуре топологических солитонов//*Проблемы теории гравитации и элементарных частиц*. - Вып. 11.- М.: Атомиздат, 1980.- С. 14 - 22.
6. Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. Topological Skyrmeons/*Preprint NBI* - HE - 81 - 49. - Copenhagen: The Niels Bohr Institute, 1981.- 36 P.
7. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. *Модель Скирма и солитоны в физике адронов.* Лекции для молодых ученых. Вып. 55. Р4 - 89 - 568.- Дубна: ОИЯИ, 1989.- 171 С.
8. Sanyuk V.I. On the Vortex Nature of the Skyrmions/ *Problems of High Energy Physics and Field Theory.* Proc. of the XII Workshop, Protvino, 3 - 7 July 1989/ Ed. V.A. Petrov. - M.: Наука, 1990. - С. 254-259.
9. Sanyuk V.I. Skyrme Model and Hadron Structure in QCD/Proc. of the IVth Intern. Workshop *Solitons and Applications*, 24 - 26 August 1989, Dubna, USSR. Dedicated to Academician N.N.Bogoliubov on the occasion of his 80th birthday./ Eds. V.G. Makhankov, V.K. Fedyanin, O.K.Pashaev. - Singapore: World Scientific, 1990.- P. 374 - 378.
10. Balakishna B.S., Sanyuk V., Schechter J., Subbaraman A. Cutoff Quantization and the Skyrmion// *Phys.Rev.* (1992) **D45** P. 344-351.
11. Makhankov V.G., Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. *The Skyrme Model. Fundamentals, Methods, Applications.*- Springer Series in Nuclear and Particle Physics.- Berlin, Heidelberg, New York: Springer - Verlag, 1993.- 260 P.
12. Makhankov V.G., Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. Localized Non - Topological Structures: Construction of Solutions and Stability Problems/ *LANL (CNLS) Preprint* LA-UR-94-0767.- Los Alamos: LANL (CNLS), 1994. - 67 P.
13. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. Локализованные нетопологические структуры: построение решений и проблема устойчивости//*Усп. физ. наук.*- 1994.- Т. **164**, N 2.- С. 121 - 148.
14. Kundu A., Rybakov Yu.P.,Sanyuk V.I. Topological Solitons in the Skyrme Gauge Mod.// *Indian J. Pure Appl. Phys.*- 1979.- V. **17**, No. 10.- P. 673 - 677.
15. Sanyuk V.I. On a Reduction Algorithm for Chiral Lagrangians// *Computer Algebra in Physical Research*, Eds: V.M. Gerdt, D.V. Shirkov. Proc. of the IV Int. Workshop, Dubna, 1990.- Dubna: JINR Publ., 1990.- P. 94-95.

16. Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. Methods to Study (3+1) Localized Structures. 1. Skyrmion as Absolute Minimum of Energy/*Syracuse Univ. Preprint*, SU-4228-473. - Syracuse: Univ. Publ. 1991. - 37 P.
17. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. Модель Скирма и сильные взаимодействия: К 30-летию создания модели Скирма// *Усп. физ. наук.*- 1992.- Т. **162**, N 2.- С. 1 - 61.
18. Sanyuk V.I. Genesis and Evolution of the Skyrme Model from 1954 till the Present //*Intern.J.Mod.Phys., ser. A.*- 1992.- V. **7**, No 1.- P. 1-40; reprinted in *Selected Papers, with Commentary, of Tony Hilton Royle Skyrme* Ed. by G.E. Brown. World Scientific Series in 20th Century Physics.- Vol. 3. - Singapore: World Scientific, 1994.- P. 126-165.
19. Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. Methods for Studying 3+1 Localized Structures: The Skyrmion as the Absolute Minimizer of Energy// *Intern. J. Mod. Phys., ser. A.*- 1992.- V. **7**, No 14.- P. 3235 - 3264.
20. Санюк В.И. Модель Скирма/*Физическая Энциклопедия* Т. IV. - М.: Большая Российская энциклопедия. - 1994. - С. 543-544.
21. Санюк В.И. О моделировании сильно взаимодействующих частиц/ Тезисы докладов II-ой Всесоюзной конференции "*Вычислительная физика и математическое моделирование*", Волгоград, 1989/ Ред. Е.П. Жидков.- М.: Изд-во УДН, 1990.- С. 61-63.
22. Санюк В.И. О некоторых свойствах уравнений в модели Скирма/*Проблемы физики высоких энергий и теории поля.* Труды X семинара Протвино, ИФВЭ/ Ред. В.А. Петров.- М.: Наука 1989. - С. 240 - 244.
23. Sanyuk V.I. Some Remarks on the Berry Phase for Skyrmions/ *Topological Phases in Quantum Theory.* Proc. of "Intern. Seminar on Geometrical Aspects of Quantum Theory", Dubna, JINR, 2 - 4 September 1988/ Eds: B. Markovski, S.I. Vinitsky.- Singapore: World Scientific, 1989.- P. 316 - 332.
24. Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. Elements of Critical Points Theory for (3+1)-dimensional Topological Solitons: Structure of Torons in the Faddeev Model/ *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems.* Proc. of the Int. Conference "NEEDS-94", Los Alamos, September 1994/Eds: V.G. Makhankov, A. Bishop, D. Holm.- Singapore: World Scientific, 1995.- P. 197 - 207.
25. Sanyuk V.I. Gürsey Chiral Model and Its Modifications/ *Strings and Symmetries.* Proc. of the Gürsey Memorial Conference I, Bogazici Univ., Istanbul, Turkey, June 1994/ *Lect. Notes in Physics* Vol. **447**.- Berlin - Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.- P. 326 - 331.
26. Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. О существовании частицеподобных решений в модели Скирма/ *Проблемы квантовой физики.* /Ред. Ю.И. Запарованный. - М.: Изд-во УДН, 1977.- С. 19-22.

27. Птуха А.Р., Санюк В.И. Интегрируемость некоторых ОДУ в физике солитонов/ *Дискуссионные вопросы квантовой физики.* Памяти Василия Васильевича Курышкина./ Ред. Ю.И. Запарованный, В.И. Санюк.- М.: Изд-во РУДН, 1993.- С. 104-109.
28. Птуха А.Р., Санюк В.И. О групповом анализе некоторых ОДУ, имеющих солитонные решения/*Проблемы квантовой и статистической физики.*/Ред. Ц.И. Гуцунаев.- М.: Изд-во РУДН, 1994.- С. 34-37
29. Sanyuk V.I. Algebraic and Analytical Features of (3+1)-Dimensional Topological Solitons/ *Symmetry Methods in Physics.* Proc. of the Int. Workshop in memory of Professor Ya.A. Smorodinsky, Dubna, 1993/ Eds: A.N. Sissakian, G.S. Pogosyan, S.I. Vinitsky.- Dubna: JINR Publ., 1994.- P. 443 - 449.
30. Мещрякова Е.М., Санюк В.И. К геометрии солитонных многообразий модели Скирма// *Вестник РУДН*, серия "Физика." - N 2.- 1994.- С..79-93.
31. Санюк В.И. Об интегрируемых модификациях модели Скирма/ *Проблемы статистической физики и теории поля.* /Ред. Ю.И. Запарованный. - М.: Изд-во УДН, 1987.- С. 101-104.
32. Sanyuk V.I. On the Methods of Finding First Integrals in Application to the Skyrme Model/ Proc. of the IVth Intern. Workshop *Solitons and Applications*, 24 - 26 August 1989, Dubna, USSR. Dedicated to Academician N.N.Bogoliubov on the occasion of his 80th birthday/ Eds: V.G.Makhankov, V.K.Fedyanin, O.K.Pashaev.- Singapore: World Scientific, 1990.- P 425 - 428.
33. Птуха А.Р., Санюк В.И. Симметрийный подход в изучении модели Скирма/ Тезисы докладов II-ой Всесоюзной конференции *"Вычислительная физика и математическое моделирование"*, Волгоград, 1989/ Ред. Е.П. Жидков.- М.: Изд-во УДН, 1990.- С. 59-60.
34. Ptukha A.R., Sanyuk V.I. Symmetries and First Integrals of the Chiral Skyrme Model/*Computer Algebra in Physical Research.* Proc. of the IV Int. Workshop, Dubna, 1990/ Eds: V.M. Gerdt, D.V. Shirkov.- Dubna: JINR Publ., 1990.- P. 93.
35. Ptukha A.R., Sanyuk V.I. Painlevé Property in (3+1)-dimensional Chiral Models/ *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems.* Proc. of the Int. Conference "NEEDS-92", Dubna, 1992/ Eds: V.G. Makhankov, I.V. Puzynin, O.K.Pashaev.- Singapore: World Scientific, 1993.- P. 170-179.

15.04.97г. Объем 1,5п. л. Тир. 100 Зак. 222
Тип. РУДН, Орджоникидзе, 3