-93

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

РЫБАКОВ ЮРИЙ ПЕТРОВИЧ

УДК 539.12:533.95:531.51

УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ СОЛИТОНОВ

(01.04.02 – теоретическая физика)

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико–математических наук

Дубна – 1994

Работа выполнена на кафедре теоретической физики Российского университета дружбы народов.

Официальные оппоненты:

доктор физико – математических наук, профессор Евгений Петрович Жидков

доктор физико – математических наук, профессор Андрей Николаевич Лезнов

доктор физико – математических наук, профессор Евгений Александрович Кузнецов

Ведущее научно–исследовательское учреждение:

Математический институт имени В.А.Стеклова Российской академии наук.

Защита диссертации состоится "21" дек 1994 г. на заседании специализированного совета Д047.01.01 в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований г.Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан "____"__________1994 г.

Ученый секретарь Специализированного совета
кандидат физико – математических наук В.И.Журавлев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучение широкого класса физических явлений приводит к необходимости исследования нелинейных волновых уравнений, важной отличительной чертой которых является существование особого рода решений, получивших название солитонных и описывающих локализованные долгоживущие возбуждения нелинейных систем. Подобные локализованные структуры стали предметом пристального внимания физиков и математиков, что привело к созданию новой области математической физики – теории солитонов [1*, 2*]. При этом выяснилась фундаментальная роль солитонов в существенно нелинейных процессах, отвечающих сильным возбуждениям. Солитоноподобные объекты обнаруживаются как при исследовании макроскопических явлений – в гидродинамике, физике плазмы, нелинейной оптике, теории твердого тела, – так и в микроскопической области. Например, киральные солитоны успешно применяются в ядерной физике для моделирования структуры протяженных частиц [3*, 4*].

Одной из важных задач физики солитонов является изучение их устойчивости. Исследованию устойчивости солитонов по отношению к начальным возмущениям были посвящены основополагающие работы Т.Б.Бенджамина, Дж.Шатаха, В.Штрауса В.Е.Захарова, Е.А.Кузнецова, В.Г.Маханькова и др. (см. обзоры [5* – 7*]). На практике обычно ограничиваются исследованием линеаризованной устойчивости, когда рассматриваются малые возмущения заданного солитонного решения, с последующим спектральным анализом линеаризованных уравнений. Такой подход не всегда дает правильный ответ, как было установлено еще в классическом труде А.М.Ляпунова [8*], который и разработал строгий метод исследования устойчивости, получивший название прямого метода.

Обобщение метода Ляпунова на распределенные системы развивалось в работах В.И.Арнольда, В.Г.Вилькe, Ю.Л.Далецкого, В.И.Зубова, А.А.Мовчана, М.Г.Крейна, К.П.Персидского, Т.К.Сиразетдинова, А.М.Слободкина, Т.Иошидзавы, Х.Л.Массеры, Д.Хенри и др. Строгий анализ устойчивости солитонов, основанный на этих методах, был применен, однако, лишь к очень ограниченному кругу задач: в основном рассматривались полулинейные уравнения типа нелинейного уравнения Шредингера $i\partial_t u - \Delta u = f(|u|)u$ или Клейна-Гордона

$\Box u = f(|u|)u$. Для солитонных стационарных решений таких уравнений был найден известный критерий устойчивости, получивший название Q –теоремы [6*]. Особое внимание уделялось вполне интегрируемым моделям, большинство из которых одномерны.

Однако многие задачи, поставляемые практикой, не укладываются в эти рамки и требуют разработки новых специальных подходов. В частности, это относится к задачам, возникающим в ядерной физике, физике элементарных частиц, физике плазмы и общей теории относительности. При рассмотрении многих реалистических моделей, как правило, возникают сложные системы уравнений для нескольких функций (взаимодействующих полей). Соответствующие солитонные конфигурации локализованы в реальном трехмерном пространстве и могут быть наделены несколькими обобщенными зарядами (сохраняющимися величинами, отвечающими некоторой внутренней группе), часть которых может иметь и топологическую природу.

Кроме того, возникающие модели могут содержать в себе значительный произвол, например, в виде неопределенных функций в лагранжиане (потенциалов), что также осложняет анализ устойчивости решений и зачастую исключает применение спектрального метода. Таким образом, на практике оказываются необходимыми эффективные критерии устойчивости солитонных конфигураций, позволяющие отбирать модели из достаточно широкого их класса.

Целью данной диссертационной работы является разработка на основе прямого метода Ляпунова эффективных критериев устойчивости многомерных солитонов для широкого класса физических систем. При этом ставится задача – выяснить влияние на область устойчивости солитонов их собственных электромагнитного, гравитационного, а в случае киральных солитонов и неабелевого векторного полей.

Научная новизна положений, развитых в диссертации, определяется тем, что в работах автора впервые получено обобщение теоремы Хобарта – Деррика об энергетической неустойчивости статических солитонов в пространстве размерности $D \geq 3$ на случай стационарных (гармонически зависящих от времени) солитонов для размерности пространства $D \geq 2$, а также найдено обобщение Q –теоремы об устойчивости стационарных солитонов на многозарядный случай.

Впервые поставлена и решена задача о влиянии собственных электромагнитного и гравитационного полей на устойчивость стационарных солитонов в реалистическом трехмерном случае.

На примере киральных солитонов в моделях Скирма и Фаддеева, с полевыми многообразиями S^3 и S^2 соответственно, впервые удалось установить определяющую роль топологии в стабилизации солитонных конфигураций. Показано, что скирмионы с единичным топологическим зарядом абсолютно устойчивы и имеют сферически – симметричную (ежовую) структуру, тогда как к устойчивым конфигурациям из высших гомотопических классов относятся, по крайней мере, аксиально-симметричные.

Установлено также, что устойчивые конфигурации с нетривиальным индексом Хопфа могут быть реализованы в модели Фаддеева как минимизаторы энергии и имеют тороидальную структуру.

Еще одной иллюстрацией влияния на устойчивость нетривиальной топологии (теперь уже пространства-времени) служат самогравитирующие электромагнитные "кротовые норы" Уилера, для которых удалось установить необходимый и достаточный критерий устойчивости.

Новым результатом является доказательство, путем предъявления функционалов Четаева и Ляпунова, простого необходимого и достаточного критерия устойчивости фазовых солитонов в одномерной плазме Власова-Пуассона.

Научная и практическая значимость результатов определяется тем, что в диссертации сформулированы простые критерии устойчивости многомерных солитонов для широкого класса физических систем и их эффективность проиллюстрирована на конкретных моделях. Развитые в работе методы могут быть применены к анализу качественного поведения возбуждений солитонного типа в нелинейной оптике, физике плазмы, теории магнетиков, теории жидких кристаллов, в различных моделях ядерной физики и теории поля.

Некоторые результаты диссертации используются в качестве лекционного материала и получили отражение в учебном пособии автора "Структура частиц в нелинейной теории поля". – М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1985.- 80 с. и в курсе лекций для молодых ученых "Модель Скирма и солитоны в физике адронов" (соавторы: Маханьков В.Г. и Санюк В.И.).- Дубна: ОИЯИ, 1989.- 172 с.

Апробация работы. Представленные в диссертации материалы докладывались и обсуждались:
на Всесоюзном совещании по актуальным проблемам гравитации (Менделеево, 1977); на Сессиях Отделения ядерной физики (ОЯФ) АН СССР (Москва, 1974 – 1986 гг.); на Всесоюзных семинарах "Квантовая теория солитонов" (Ленинград, 1980, 1982, 1984); на VI Советской гравитационной конференции (Москва, 1984); на III Международном симпозиуме по избранным проблемам статистической механики (Дубна, 1984); на I и II Научных конференциях ОЯФ АН СССР по адронным взаимодействиям (Москва, 1985, 1988); на Научных конференциях ОЯФ АН СССР "Частицы и ядра при высоких энергиях" (Москва, 1986); на VI, IX и X Рабочих совещаниях "Гравитация и электромагнетизм" (Минск, 1985, 1989, 1991); на Рабочих совещаниях "Теория солитонов и приложения" (Юрмала, 1986; Пущино, 1987; Дубна, 1989); на Конференции по проблемам слабых и сильных взаимодействий и гравитации (Москва, 1987); на X – XIII Семинарах по физике высоких энергий и теории поля (Протвино, 1987 – 1990 гг.); на IV Всесоюзной школе "Космология и элементарные частицы" (Баксанская нейтринная обсерватория, 1987); на Международном семинаре "Геометрические аспекты квантовой теории" (Дубна, 1988); на Семинаре "Солитоны в неинтегрируемых системах: теория и приложения" (Дубна, 1988); на Школе – семинаре "Основания физики" (Сочи, 1989); на Школе – семинаре "Теория представлений и групповые методы в физике" (Тамбов, 1989); на III Рабочем совещании "Рассеяние, реакции, переходы в квантовых системах и методы симметрии" (Обнинск, 1989); на XVIII Международном коллоквиуме "Теоретико-групповые методы в физике" (Москва, 1990); на Международных семинарах "Нелинейные эволюционные уравнения и динамические системы" (Дубна, 1990, 1992); на Сессии ОЯФ РАН (Москва, 1992).

Публикации. Основные положения диссертации отражены в 44 публикациях.

Личное участие автора. Все приведенные в диссертации результаты получены самим автором, либо под его непосредственным руководством, либо при его непосредственном участии.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы, включающего 242 наименования. Общий объем диссертации составляет 202 страницы машинописного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** сформулирована цель исследования, кратко изложено его содержание и обосновывается актуальность работы.

Глава I "Прямой метод А.М.Ляпунова в теории устойчивости солитонов" [1 – 5, 44] посвящена формулировке основного метода исследования устойчивости – прямого метода А.М.Ляпунова, состоящего в подборе некоторых функций (функционалов), по свойствам которых можно судить о характере эволюции изучаемой системы в некоторой окрестности какого-либо частного решения рассматриваемых уравнений движения, или же в окрестности заданного семейства решений (орбитальная устойчивость).

В § 1.1 дается определение устойчивости в смысле Ляпунова и обсуждаются различные понимания устойчивости, встречающиеся в физических исследованиях. В частности, подчеркивается различие между нелинейной и линеаризованной устойчивостью, спектральной и энергетической устойчивостью. Обсуждается связь понятия устойчивости для распределенных систем с выбором функциональной метрики. Подчеркивается различие метрик, определяющих начальные и текущие возмущения. Формулируются основные теоремы прямого метода: теорема Ляпунова – Мовчана об устойчивости и теорема Четаева – Мовчана о неустойчивости.

В § 1.2 выявляются некоторые необходимые критерии существования стационарных многомерных солитонов, основанные на вириальных теоремах типа Хобарта – Деррика. Вводится понятие стационарных солитонных решений как критических точек аддитивных пространственных функционалов. Наиболее распространенными примерами стационарных солитонов являются статические солитоны, а также гармонически зависящие от времени.

Показывается, что вторая вариация аддитивного функционала Ляпунова в окрестности стационарного солитонного решения, не наделенного топологическим зарядом, знакопеременна для размерности пространства $D \geq 2$ (обобщение теоремы Хобарта – Деррика, устанавливающей знакопеременность энергии возмущения в окрестности статического солитонного решения для $D \geq 3$). Тем самым подтверждается необходимость введения понятия условной устойчивости солитонов (Q –устойчивости), т.е. устойчивости при фиксированном обобщенном заряде Q (одном или нескольких). Таким образом, существенно различаются случаи топологических и нетопологических солитонов, в зависимости от природы заряда Q: для нетопологических солитонов заряд Q имеет нетеровскую природу, т.е. сохраняется в силу уравнений движения, а для топологических солитонов он сохраняется тождественно (абсолютно). В итоге устанавливается определяющая роль топологии для устойчивости, так как многомерные ($D \geq 2$) стационарные нетопологические солитоны оказываются энергетически неустойчивыми.

Наконец, в случае статических нетопологических солитонов удается установить еще более сильную, линеаризованную неустойчивость в локальных моделях с положительной по скоростям энергией возмущений.

Глава II "Устойчивость заряженных стационарных солитонов" [1 20] посвящена исследованию Q –устойчивости стационарных солитонов, наделенных одним или несколькими обобщенными зарядами.

В § 2.1 выводится основной критерий устойчивости скалярных заряженных солитонов, гармонически зависящих от времени, в рамках лоренц-инвариантных и $U(1)$ –инвариантных моделей достаточно общего вида (Q – теорема). Для частных моделей этот критерий независимо выводился многими авторами [5*, 6*, 9* – 14*] и определяет область устойчивости неравенством

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega} < 0$$

для основного (безузлового) состояния

$$\varphi = u(x)e^{-i\omega t},$$

где $Q(\omega)$ – соответствующий заряд, рассматриваемый как функционал от $u(x)$ и функция от ω. При этом предполагается, что число собственных возбуждений с отрицательной энергией (отрицательных мод) не более одного. Путем явного построения функционала Четаева удается доказать Q –неустойчивость безузловых солитонов вне области $\partial Q/\partial\omega < 0$ и тем самым установить, что Q –теорема дает необходимый и достаточный критерий их устойчивости. Наконец, доказывается линеаризованная неустойчивость узловых солитонов для модели общего вида.

В § 2.2 на примере двухполевой модели удержания кварков выясняются особенности применения Q –теоремы к составным (многокомпонентным) солитонам. В частности, для состояний с фиксированной частотой ω (когда дифференцирование по ω не имеет смысла) устанавливается область устойчивости по константе связи. Установлена неустойчивость солитонов в нелинейной спинорной модели Гейзенберга - Иваненко. В обобщенной спинорной электродинамике В.Г.Кадышевского доказана неустойчивость тяжелых σ_2 –инвариантных солитонов и показано, что нарушение σ_2 –инвариантности состояний является необходимым условием их устойчивости.

В § 2.3 изучается влияние на область устойчивости безузловых скалярных солитонов их собственного электромагнитного поля. В первом порядке по константе электромагнитного взаимодействия e^2 получено уравнение для границы области устойчивости и на примере модели Синга [15*] устанавливается расширение этой области.

В § 2.4 исследуется Q –устойчивость многозарядных стационарных солитонов, наделенных несколькими обобщенными зарядами Q_i, отвечающими некоторой внутренней группе симметрии. В этом случае удается получить достаточный критерий устойчивости, обобщающий скалярную Q –теорему и приводящий к условию отрицательности матрицы $\partial Q_i/\partial\omega_k$. В частности, для одной отрицательной моды область устойчивости определяется неравенством

$$\omega_i\omega_k \frac{\partial Q_i}{\partial \omega_k} < 0.$$

Глава III "Устойчивость топологических солитонов в $SU(2)$ киральной модели Скирма" [1, 4, 10, 21 34] посвящена анализу структуры и устойчивости киральных солитонов в модели, предложенной английским физиком - ядерщиком Скирмом [16*] и успешно применяемой для описания свойств нуклонов и их возбуждений.

В § 3.1 рассматривается класс G –инвариантных моделей (где G – некоторая компактная группа), допускающих существование топологических зарядов. В частности, это относится к киральным моделям, для которых поле φ принимает значения в некотором компактном многообразии M. В качестве последнего обычно выступает сфера S^{n-1}, компактная группа G или однородное пространство G/H. Вакуумное состояние отвечает выделенной точке $\varphi_\infty \in M$, и поэтому физически допустимые конфигурации удовлетворяют естественному граничному условию $\varphi \to \varphi_\infty$ при $x \to \infty$, что позволяет компактифицировать координатное пространство $\mathbf{R}^3$ в S^3 и классифицировать состояния с помощью третьей гомотопической группы $\pi_3(M)$. В частности, $\pi_3(SU(2)) = \pi_3(S^3) = \mathbf{Z}$, и топологический заряд Q является степенью отображения $Q = \deg(S^3 \to S^3)$, выражаясь через левоинвариантный киральный ток $l_i = U^+\partial_i U$, $U \in SU(2)$, следующим образом:

$$Q = -\frac{1}{24\pi^2}\varepsilon^{ijk}\int d^3x\,\mathrm{Sp}(l_i\,l_j\,l_k).$$

Отсюда и из структуры лагранжиана в модели Скирма

$$\mathcal{L}_S = -\frac{1}{4\lambda^2}\mathrm{Sp}\,l_\mu^2 + \frac{\varepsilon^2}{16}\mathrm{Sp}\,[l_\mu,\,l_\nu]^2$$

вытекает оценка энергии E снизу через топологический заряд:

$$E > 6\pi^2\sqrt{2}\frac{\varepsilon}{\lambda}|\,Q\,|.$$

Состояния, реализующие нижнюю грань энергии в заданном гомотопическом классе, т.е. при $Q = N$, являются поэтому устойчивыми по Ляпунову. В модели Скирма топологический заряд Q интерпретируется как барионный.

Среди допустимых конфигураций особую роль играют G –инвариантные (эквивариантные) поля $\varphi_0(x)$, удовлетворяющие условию

$$\varphi_0(x) = T_g\varphi_0(g^{-1}x),\;\; g \in G,$$

где T_g – оператор представления группы G. Согласно принципу Коулмена – Пале [17* – 18*], экстремали G –инвариантного функционала в инвариантном классе являются истинными экстремалями. При этом выделены две группы симметрии:

$$G_1 = \mathrm{diag}\,[SO(3)_S \otimes SO(3)_I],$$

$$G_2 = \mathrm{diag}\,[SO(2)_S \otimes SO(2)_I],$$

где индексы S, I соответствуют пространственным и изотопическим поворотам.

Полагая $U = \exp(i(\mathbf{n}\,\boldsymbol{\tau})\Theta)$, где $\boldsymbol{\tau}$ – матрицы Паули, $\mathbf{n}$ – единичный вектор, для G_1 –инвариантных полей (или сферически-симметричных) имеем $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\Theta = \Theta(r)$, что соответствует так называемому "ежовому" анзацу Скирма.

Наконец, в случае G_2 –инвариантных полей (или аксиально-симметричных) для полярных координат β, γ вектора $\mathbf{n}$ и кирального угла Θ имеем представление:

$$\Theta = \Theta(r,\vartheta);\;\; \beta = \beta(r,\vartheta);\;\; \gamma = k\alpha;\; k \in \mathbf{Z},$$

где r, ϑ, α – сферические координаты.

Выделенность G_i –инвариантных полей обусловлена следующим их свойством, которое удобно сформулировать в виде теоремы [1, 29].

Теорема. Пусть G_i –инвариантное поле φ_0 реализует минимум G_i –инвариантного функционала H в инвариантном классе. Тогда, если H выпукл по производным в точке φ_0, то φ_0 реализует истинный минимум H.

Согласно этому результату, чтобы убедится в устойчивости G_i –инвариантной конфигурации, достаточно проверить локальную выпуклость гамильтониана H по производным.

В § 3.2 показывается, что в первом гомотопическом классе абсолютный минимум энергии достигается на ежовом анзаце Скирма. Это устанавливается с помощью минимизации гамильтониана в расширенном пространстве (в котором поля и их производные принимаются независимыми) и последующей сферической перестройки – симметризации Штейнера [19*].

В результате задача сводится к минимизации сферически-симметричного гамильтониана

$$H[\Theta] = \int\limits_0^\infty dr\,\left[\Theta'^2(r^2/2 + 2\sin^2\Theta) + \sin^2\Theta + \sin^4\Theta/r^2\right]$$

в классе функций $\Theta(r)$ с граничными условиями:

$$\Theta(0) = N\pi,\;\; \Theta(\infty) = 0,$$

когда $Q = N$. Существование таких решений доказывается прямым вариационным методом, а энергетический спектр выражается приближенной формулой

$$E_N \approx I_0(N^4 + aN^3 + bN^2 + cN + d + e/N)^{1/2},$$

где $I_0 = 4,155$; $a = 1,7452$; $b = 4,3894$; $c = -17,2896$; $d = 29,2882$; $e = -15,232$, или более грубо (при $N < 10$) :

$$E_N \approx E_1 N(N+1)/2.$$

При этом условия минимума выполнены только для $N = 1$, что подтверждается устойчивостью нуклона, образом которого в модели Скирма и является скирмион с $Q = 1$.

В § 3.3 выясняется структура минимизаторов энергии в высших гомотопических классах ($|Q| = N > 1$) модели Скирма. Предварительно, путем минимизации в расширенном пространстве, устанавливается, что при этом возникают аксиально-симметричные (G_2 –инвариантные) конфигурации. При выполнении некоторых условий они реализуют, по крайней мере, локальный минимум энергии. Анализ взаимодействия двух скирмионов подтверждает, что при $N = 2$ аксиально-симметричная конфигурация реализует абсолютный минимум энергии, что согласуется с численными данными [20*], согласно которым $E_2 \approx 1,92E_1$.

В дальнейшем путем применения прямого вариационного метода доказывается существование аксиально-симметричных конфигураций с произвольным зарядом N.

В § 3.4 исследуется калибровочное обобщение модели Скирма. При этом путем минимизации в расширенном пространстве устанавливается устойчивость ежовой конфигурации с $|Q| = 1$, существование которой доказывается прямым вариационным методом.

Глава IV "Устойчивость топологических солитонов в S^2 нелинейной сигма-модели Фаддеева" [1, 29, 35 - 38] посвящена анализу структуры минимизаторов энергии в киральной модели Фаддеева, в которой поле принимает значения в двумерной сфере S^2 [21*], т.е. задается единичным 3-вектором n^a. Близкие по структуре модели используются в теории магнетиков [22*].

В § 4.1 показывается, что n –поля, удовлетворяющие естественному граничному условию $n^a \to \delta_3^a$ при $r \to \infty$, разбиваются на гомотопические классы, принадлежащие $\pi_3(S^2) = \mathbf{Z}$. Эти поля характеризуются

топологическим зарядом Q_H, называемым индексом Хопфа и определяемым как число зацеплений $\mathbf{b}$ –линий, сопоставляемых n –полю согласно связи

$$f_{ik} = \varepsilon_{iks} b_s = 2\varepsilon_{abc}\partial_i n^a \partial_k n^b n^c.$$

При этом

$$Q_H = -(8\pi)^{-2}\int d^3x(\mathbf{a}\,\mathbf{b}), \quad \mathbf{b} = \mathrm{rot}\mathbf{a}.$$

Отсюда и из структуры лагранжиана модели Фаддеева

$$\mathcal{L}_F = -\frac{\varepsilon^2}{4} f_{\mu\nu}^2 + \lambda^2(\partial_\mu n^a)^2$$

можно вывести известную оценку для энергии топологического солитона:

$$E > \mu |Q_H|^{3/4}, \quad \mu = \mathrm{const}.$$

Для поиска минимизаторов энергии при фиксированном Q_H удобно использовать отображение Хопфа $h : S^3 \to S^2$, положив

$$\mathbf{n} = \psi^+ \boldsymbol{\tau} \psi,$$

где

$$\psi^T = (\cos A + i \sin A \cos B,\ \sin A \sin B\, e^{iC}).$$

Тогда структура гамильтониана модели Фаддеева оказывается похожей на структуру гамильтониана модели Скирма, что позволяет использовать те же приемы минимизации, что и в модели Скирма.

В результате удается установить, что минимизаторы энергии имеют тороидальную структуру (тороны), представляя собой замкнутые "закрученные" струны (вихри). При этом для n –поля получаем уже известную аксиально-симметричную подстановку:

$$\beta = \beta(\rho,\ z);\ \ \gamma = m\alpha + v(\rho,\ z);\ m \in \mathbf{Z},$$

где $\rho,\ \alpha,\ z$ – цилиндрические координаты.

В § 4.2 прямым вариационным методом доказывается существование торонов в модели Фаддеева и показывается, что аналогичные конфигурации реализуются и в модели Скирма, отвечая там нестабильным образованиям с нулевым барионным зарядом (тяжелые бозоны).

В § 4.3 строится вихревая (струнная) аппроксимация для торонов модели Фаддеева, когда полагается

$$\beta = \beta(\rho), \quad v = æz, \quad \beta(0) = \pi.$$

Существование таких решений доказывается прямым вариационным методом. При этом рассматривается отрезок струны длиной l, выбираемой так, что при замыкании струны получается нетривиальный индекс Хопфа $Q_H = æl/2\pi = N$. Указанная аппроксимация оказывается разумной при $N >> 1$, когда радиус замыкания велик. При этом получается нижняя оценка для энергии солитона с зарядом N (в единицах $8\pi\varepsilon\lambda$) :

$$E_N > 23,65\,N.$$

Верхнюю же оценку можно получить с помощью пробной функции, основанной на отображении Хопфа:

$$\cos\beta = 1 - 2\sin^2\psi\sin^2\vartheta, \quad v = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\psi\cos\vartheta),$$

где $\psi = \psi(r)$ – радиальная функция, соответствующая киральному углу скирмиона с $Q = 1$. Отсюда вытекает оценка для энергии торона сверху:

$$E_N < 30,95\,N(N+1)/2.$$

В § 4.4 описываются тороидальные и струнные решения в калибровочной модели Фаддеева, отвечающей локализации $SO(2)$ –подгруппы внутренней группы. Существование таких решений доказывается прямым вариационным методом. При этом абелево калибровочное поле **C** торонов имеет следующую структуру:

$$C_\rho = -\partial_z\psi; \quad C_z = \partial_\rho\psi + \frac{\psi}{\rho}; \quad C_\alpha = B(\rho, z),$$

где $\psi = \psi(\rho, z)$ а ρ, α, z – цилиндрические координаты. Струнные конфигурации рассматриваются как аппроксимации торонов.

Глава V "Устойчивость солитонов в плазме" [39, 44] посвящена применению прямого метода Ляпунова к исследованию устойчивости стационарных солитонных решений системы уравнений Власова – Пуассона.

В § 5.1 описана структура равновесных плазменных конфигураций, которые получаются методом Бернштейна – Грина – Крускала (так называемые БГК–равновесия, или электронные фазовые дыры). Их характерной особенностью является наличие областей в фазовом μ–пространстве, в которых функция распределения электронов растет с увеличением энергии.

В § 5.2 доказывается общая теорема о глобальной устойчивости распределений, монотонно убывающих по энергии электронов, – в согласии с классическим результатом [23*]. В этом случае полная энергия системы оказывается глобально выпуклым функционалом. Линеаризованные уравнения для возмущений приводятся к "квантово–механической" форме, с некоторым эрмитовым гамильтонианом. Это позволяет построить функционал Четаева и установить неустойчивость немонотонных по энергии электронов распределений.

Глава VI "Устойчивость самогравитирующих солитонов" [1, 40 – 43] посвящена анализу устойчивости самосогласованных солитонных конфигураций в общей теории относительности.

В § 6.1 на примере логарифмической модели с лагранжианом материи

$$\mathcal{L}_m = g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi^*_{,\nu} - |\varphi|^2(1 - \ln|\varphi|^2)$$

изучается вопрос о влиянии собственного гравитационного поля скалярных заряженных солитонов на их устойчивость относительно простейших радиальных возмущений. Граничная частота ω_0 области устойчивости $|\omega| > \omega_0$ разлагается в ряд по степеням эффективной гравитационной постоянной $æ$ и путем анализа положительной определенности соответствующего функционала Ляпунова в первом порядке по $æ$ устанавливается, что

$$\omega_0(æ) = 2^{-1/2} - æe^{5/2}\,29/48 + O(æ^2).$$

Таким образом, наблюдается расширение области устойчивости под влиянием собственного гравитационного поля, т.е. гравитационная стабилизация безузловых солитонов.

В § 6.2, в подтверждение общего результата о необходимости внесения ограничений на допустимые возмущения, чтобы обеспечить устойчивость многомерных солитонов, – изучается устойчивость "кротовых нор" Уилера в нелинейной электродинамике. Эти объекты характеризуются нетривиальной топологией пространства времени (существование "горловины", или "ручки") и могут возникать [24*] в рамках нелинейной электродинамики с лагранжевой плотностью материи

$$\mathcal{L}_m = -F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}X(J) - F^{\mu\nu}F_{\mu\sigma}A^{\sigma}A_{\nu}Y(J),$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, а X, Y – некоторые функции от инварианта $J = A_\mu A^\mu$. Путем анализа линеаризованных уравнений для радиальных возмущений устанавливается необходимый и достаточный критерий устойчивости, сводящийся к неравенству

$$1 > 2J(2W_J/W - W_{JJ}/W_J),$$

где $W = 2X + JY$. Приводится пример устойчивой конфигурации.

В **заключении** формулируются **основные результаты**, полученные в диссертации:

1. Доказано, что в любой трансляционно-инвариантной лагранжевой модели для размерности пространства $D \geq 2$ имеет место энергетическая неустойчивость стационарных нетопологических солитонов и неустойчивость по Ляпунову статических солитонов для лагранжианов, выпуклых по скоростям; в случае же скалярных солитонов это верно для любой размерности пространства (обобщение теоремы Хобарта – Деррика об энергетической неустойчивости).
2. В обобщенной спинорной электродинамике В.Г.Кадышевского установлен необходимый критерий устойчивости стационарных солитонов.
3. В релятивистской скалярной электродинамике в первом порядке по константе взаимодействия e^2 установлена область устойчивости безузловых стационарных солитонов.
4. Для любой регулярной лагранжевой модели с компактной внутренней группой симметрии найдены достаточные условия Q –устойчивости многозарядных стационарных солитонов; установлено, что для скалярных стационарных солитонов эти условия также и необходимы.

5. Для $SU(2)$ киральной модели Скирма (в том числе с учетом неабелева калибровочного поля) доказаны существование, гладкость и абсолютная устойчивость сферически–симметричного солитонного решения с единичным топологическим зарядом как реализующего абсолютный минимум энергии. В случае солитонов с высшими топологическими зарядами установлено, что сферически–симметричные состояния неустойчивы по Ляпунову, и доказано существование устойчивой аксиально–симметричной конфигурации, реализующей минимум энергии.
6. Для S^2 нелинейной сигма–модели Фаддеева (в том числе с учетом абелева калибровочного поля) доказано существование устойчивых аксиально–симметричных солитонов с нетривиальным индексом Хопфа (торонов), а также установлено существование аппроксимирующих их струноподобных решений.
7. Для равновесных конфигураций Бернштейна – Грина – Крускала в плазме Власова – Пуассона установлена глобальная устойчивость монотонных по энергии электронов распределений и неустойчивость немонотонных.
8. Для самогравитирующих сферически–симметричных скалярных заряженных солитонов в логарифмической модели в рамках общей теории относительности установлена область устойчивости в первом порядке по эффективной гравитационной константе связи для радиальных возмущений. Найдено необходимое и достаточное условие устойчивости "кротовых нор" Уилера в нелинейной электродинамике.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1*. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. -М.: Наука, 1980.- 320с.

2*. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. - М.: Наука, 1986.- 528 с.

3*. Adkins G.S., Nappi C.R., Witten E. Static Properties of Nucleons in the Skyrme Model// Nucl. Phys., ser. B.- 1983.- V. **228**, No. 4.- P. 552 - 556.

4*. Zahed I., Brown G.E. The Skyrme Model// Phys. Reports, ser. C.- 1986.- V. **142**, No. 1. & 2.- P. 1 - 102.

5*. Kuznetsov E.A., Rubenchik A.M., Zakharov V.E. Soliton Stability in Plasma and Hydrodynamics// Phys. Reports, ser. C.- 1986.- V. **142**, No. 3.- P. 103 - 165.
6*. Makhankov V.G. Dynamics of Classical Solitons (in Non-Integrable Systems)// Phys. Reports, ser. C.- 1978.- V. **35**, No. 1.- P. 1 - 128.
7*. Жидков Е.П., Кирчев К.П. Устойчивость решений вида уединенных волн некоторых нелинейных уравнений математической физики// Физика элем. частиц и ат. ядра.- 1985.- Т. **16**, вып. 3.- С. 597 - 648.
8*. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения.- Л.-М.: ОНТИ, 1935.- 386 с.
9*. Заставенко Л.Г. Частицеподобные решения нелинейного волнового уравнения// Прикл. мат. мех.- 1965.- Т. **29**, N 3.- С. 430 - 439.
10*. Вахитов Н.Г., Колоколов А.А. Стационарные решения волнового уравнения в среде с насыщением нелинейности// Изв. ВУЗов. Радиофиз.- 1973.- Т. **16**, N 7.- С. 1020 - 1028
11*. Laedke E.W., Spatchek K.H. Stable Three - Dimensional Envelope Solitons// Phys. Rev. Lett,- 1984.- V. **52**, No. 4.- P. 279 - 282.
12*. Weinstein M.I. Lyapunov Stability of Ground States of Nonlinear Dispersive Evolution Equations// Comm. Pure Appl. Math.- 1986.- V. **39**, No. 1.- P. 51 - 68.
13*. Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. Class of Scalar - Field Solutions in Three Space Dimensions// Phys. Rev., ser. D.- 1976.- V. **13**, No. 10.- P. 2739 - 2761.
14*. Grillakis M., Shatah J., Strauss W. Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry. I, II// J. Funct. Anal.- 1987.- V. **74**, No. 1.- P. 160 - 197; - 1990.- V. **94**, No. 2.- P. 308 - 348.
15*. Synge J.L. On a Certain Nonlinear Differential Equation// Proc. Roy. Irish Acad. Sci., ser. A.- 1961.- V. **62**, No. 3.- P. 17 - 41.
16*. Skyrme T.H.R. A Unified Field Theory of Mesons and Baryons// Nucl. Phys.- 1962.- V. **31**, No. 4.- P. 556 - 569.
17*. Palais R. The Principle of Symmetric Criticality// Comm. Math. Phys.- 1979.- V. **69**, No. 1.- P. 19 - 30.
18*. Ладыженская О.А., Капитанский Л.В. О принципе Коулмена нахождения стационарных точек инвариантных функционалов// Зап. науч. сем. ЛОМИ.- 1983.- Т. **127**, вып. 15.- С. 84 - 102.
19*. Полиа Г., Сегё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. - М.: ГИФМЛ, 1962.- 336 с.
20*. Копелиович В.Б., Штерн Б.Е. Экзотические скирмионы// Письма в ЖЭТФ.- 1987.- Т. **45**, N 4.- С. 165 - 168.
21*. Фаддеев Л.Д. Калибровочно - инвариантная модель электромагнитного и слабого взаимодействия лептонов// Докл. АН СССР.- 1973.- Т. **210**, N 4.- С. 807 - 810.

22*. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны.- Киев: Наук. думка, 1983.- 190 с.
23*. Fowler T.K. Lyapunov's Stability Criteria for a Plasma// J. Math. Phys.- 1963.- V. **4**, No. 4.- P. 427 - 441.
24*. Бронников К.А., Шикин Г.Н. Модели самогравитирующих частиц с классическими полями и их устойчивость// Итоги науки и техники. Классическая теория поля и теория гравитации. Т.2. Гравитация и космология.- М.: ВИНИТИ, 1991.- С. 4 - 55.

Основные результаты диссертации отражены в следующих работах:

1. Рыбаков Ю.П. Устойчивость многомерных солитонов в киральных моделях и гравитации// Итоги науки и техники. Классическая теория поля и теория гравитации. Т.2. Гравитация и космология.- М.: ВИНИТИ, 1991.- С. 56 - 111.
2. Рыбаков Ю.П. Об устойчивости стационарных состояний в нелинейной теории поля// Труды Ун-та дружбы народов, сер. Теорет. физ.- 1972.- Т. 59, N 6.- С. 139 - 154
3. Рыбаков Ю.П. Вопросы устойчивости в нелинейной теории поля// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц, под ред. К.П.Станюковича.- М.: Атомиздат, 1966.- С. 68 - 97.
4. Рыбаков Ю.П. Структура частиц в нелинейной теории поля.- М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1985.- 80 с.
5. Рыбаков Ю.П. Устойчивость солитонов// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. - Вып. 16.- М.: Энергоатомиздат, 1985.- С. 174 - 189.
6. Рыбаков Ю.П. К вопросу об устойчивости частицеподобных решений нелинейных уравнений скалярного поля// Вест. МГУ, сер. 3, Физ., Астрон.- 1962.- N 4.- С. 24 - 29.
7. Рыбаков Ю.П. О неустойчивости стационарных состояний нелинейного спинорного поля// Вест. МГУ, сер. 3, Физ., Астрон.- 1965.- N 6.- С. 62 - 67.
8. Rybakov Ju.P. Sur certaines relations thérmodynamiques en théorie du champ// Comptes Rendus hebd. de l'Academie des Sci. de Paris.- 1963.- T. **256**.- P. 4857 - 4859.
9. Нисиченко В.П., Рыбаков Ю.П. О возможности описания протяженных частиц в нелинейной теории поля// Изв. ВУЗов. Физика.- 1975.- Т. **18**, N 4.- С. 61 - 64.
10. Рыбаков Ю.П. Об условной устойчивости регулярных решений в нелинейной теории поля// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. - Вып. 10.- М.: Атомиздат, 1979.- С. 194 - 202.

11. Kumar A., Nisichenko V.P., Rybakov Yu.P. Stability of Charged Solitons// Intern. J. Theor. Phys.- 1979.- V. **18**. No. 6.- P. 425 - 432.
12. Кумар А., Нисиченко В.П., Рыбаков Ю.П. Об устойчивости по Ляпунову скалярных заряженных солитонов// Изв. ВУЗов. Физика.- 1981.- Т. **24**, N 1.- С. 56 - 60.
13. Рыбаков Ю.П., Чакрабарти С. Об устойчивости солитонов в модели Синга с электромагнитным полем// Изв. ВУЗов. Физика.- 1981.- Т. **24**, N 7.- С. 97 - 101.
14. Chakrabarti S., Rybakov Yu.P. On Stability of Charged Solitons in Scalar Electrodynamics// Indian J. Pure Appl. Phys.- 1982.- V. **20**, No. 2.- P. 115 - 118.
15. Chakrabarti S., Rybakov Yu.P. On Stability Domain of Charged Solitons in Scalar Electrodynamics// Indian J. Pure Appl. Phys.- 1982.- V. **20**, No. 7.- P. 544 - 545.
16. Рыбаков Ю.П. Об устойчивости многозарядных солитонов// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. - Вып. 14.- М.: Энергоиздат, 1984.- С. 161 - 166.
17. Rybakov Yu.P., Chakrabarti S. Conditional Stability of Multiple-Charged Solitons // Intern. J. Theor. Phys.- 1984.- V. **23**, No. 4.- P. 325 - 333.
18. Аргиру Н.Л., Рыбаков Ю.П. Устойчивость солитонов в одной нелинейной модели удержания кварков// Изв. ВУЗов. Физика.- 1988.- Т. **31**, N 3.- С. 39 - 44.
19. Рыбаков Ю.П. О неустойчивости скалярных узловых и спинорных солитонов// Проблемы квантовой и статистической физики, ред. Ю.И.Запарованный.- М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1989.- С. 20 - 26.
20. Магар Е.Н., Рыбаков Ю.П. Тяжелые солитоны в обобщенной спинорной электродинамике// Изв. ВУЗов. Физика.- 1989.- Т. **32**, N 10.- С. 97 - 100.
21. Kundu A., Rybakov Yu.P.,Sanyuk V.I. Topological Solitons in the Skyrme Gauge Model// Indian J. Pure Appl. Phys.- 1979.- V. **17**, No. 10.- P. 673 - 677.
22. Кунду А., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. О структуре топологических солитонов// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. - Вып. 11.- М.: Атомиздат, 1980.- С. 14 - 22.
23. Нисиченко В.П., Рыбаков Ю.П. О регулярных решениях в модели Скирме с калибровочным полем// Изв. ВУЗов. Физика.- 1980.- Т. **23**, N 9.- С. 13 - 17.
24. Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. Topological Skyrmeons.- Copenhagen: The Niels Bohr Institute, 1981.- 36 p./ Preprint NBI - HE - 81 - 49.

25. Рыбаков Ю.П. Поиск абсолютного минимума энергии в киральных моделях// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. - Вып. 13.- М.: Энергоиздат, 1982.- С. 187 - 192.
26. Рыбаков Ю.П. Связанное состояние двух скирмеонов// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. - Вып. 14.- М.: Энергоиздат, 1984.- С. 166 - 170.
27. Рыбаков Ю.П., Сутантио В. Поиск оптимальной конфигурации двух связанных скирмеонов// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. - Вып. 15.- М.: Энергоатомиздат, 1985.- С. 137 - 141.
28. Кожевников И.Р., Рыбаков Ю.П., Фомин М.Б. Структура топологических солитонов в модели Скирма// Теор. мат. физ.- 1988.- Т. **75**, N 3.- С. 353 - 360.
29. Рыбаков Ю.П. Киральные солитоны в ядерной физике// Труды X Семинара "Проблемы физики высоких энергий и теории поля", Протвино, 6 - 12 июля 1987.- М.: Наука, 1988.- С. 349 - 355.
30. Fomin G.B., Fomin M.B., Rybakov Yu.P., Kojhevnikov I.R. Topological Aspects of Skyrmions' Interactions// Proc. of "Intern. Seminar on Geometrical Aspects of Quantum Theory", Dubna, USSR, 2 - 4 September 1988. Eds. B. Markovski, S.I. Vinitsky.- Singapore: World Scientific, 1989.- P. 333 - 340.
31. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. Модель Скирма и солитоны в физике адронов. Лекции для молодых ученых. Вып. 55. Р4 - 89 - 568.- Дубна: ОИЯИ, 1989.- 171 с.
32. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. Модель Скирма и сильные взаимодействия: К 30-летию создания модели Скирма// Усп. физ. наук.- 1992.- Т. **162**, N 2.- С. 1 - 61.
33. Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. Methods for Studying 3+1 Localized Structures: The Skyrmion as the Absolute Minimizer of Energy// Intern. J. Mod. Phys., ser. A.- 1992.- V. **7**, No 14.- P. 3235 - 3264.
34. Makhankov V.G., Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. The Skyrme Model. Fundamentals, Methods, Applications.- Springer Series in Nuclear and Particle Physics.- Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest: Springer - Verlag, 1993.- 260 p.
35. Рыбаков Ю.П. О солитонах с индексом Хопфа// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. - Вып. 12.- М.: Энергоиздат, 1981.- С. 147 - 154.
36. Рыбаков Ю.П., Швачка А.Б. Исследование свойств трехмерных солитонов с нетривиальным индексом Хопфа в модели Энза - Фаддеева// III Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 22 - 26 авг. 1984. Сб. аннотаций.- С. 108.- Дубна: ОИЯИ, Д 17 - 84 - 407.

37. Рыбаков Ю.П., Халдер А.К. О струнных решениях в S^2 нелинейной σ –модели с калибровочным полем// Изв. ВУЗов. Физика.- 1986.- Т. **29**, N 5.- С. 79 - 83.
38. Kundu A., Rybakov Yu.P. Closed-Vortex-Type Solitons with Hopf Index// J. Phys., ser. A: Math. & Gen.- 1982.- V. **15**, No. 1.- P. 269 - 275.
39. Rybakov Yu.P. Stability of Electron Phase Space Holes// Proc. of the IVth Intern. Workshop "Solitons and Applications", 24 - 26 August 1989, Dubna, USSR. Dedicated to Academician N.N.Bogoliubov on the occasion of his 80th birthday. Eds. V.G.Makhankov, V.K.Fedyanin, O.K.Pashaev. - Singapore: World Scientific, 1990.- P. 368 - 373.
40. Рыбаков Ю.П. О гравитационном дефекте массы солитонов// Тезисы докл. Всес. конф. "Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации" (VI Советская гравитационная конференция).- М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1984.- С. 118 - 119.
41. Rybakov Yu.P. On Gravitational Stabilization of Solitons// Abstracts of Conributed Papers to the 11th Intern. Conf. on General Relativity and Gravitation. Stockholm, Sweden, July 6 - 12, 1986. V. **II**.- P. 492.
42. Bronnikov K.A., Rybakov Yu.P., Shikin G.N. Stability Analysis for Self-Gravitating Spherically Symmetic Solitons in Nonlinear Electrodynamics// Abstracts of Conributed Papers to the 5th M. Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation and Relativistic Field Theories. Perth, Australia, August 1988. Eds. D.G.Blair, M.J.Buckingham. V. 1, 2.- Singapore: World Scientific, 1989.- P. 7.
43. Bronnikov K.A., Rybakov Yu.P., Shikin G.N. Nonlinear Electrodynamics and Self-Gravitating Particle-like Configurations// Comm. Theor. Phys.- 1992.- V. **2**, No. 1.- P. 25 - 42.
44. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. Локализованные нетопологические структуры: построение решений и проблема устойчивости// Усп. физ. наук.- 1994.- Т. **164**, N 2.- С. 121 - 148.