ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи
УДК 530.145

МАШКЕВИЧ Стефан Владимирович

ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ ЭНИОНОВ

01.04.02 - теоретическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна - 1993

Работа выполнена в Институте теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова АН Украины

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Г.М.Зиновьев

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А.А.Андрианов

доктор физико-математических наук, профессор А.Т.Филиппов

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Украинский научный центр Харьковский физико-технический институт, г.Харьков

Защита состоится "7" апреля 1993 г. в ____ час. на заседании Специализированного совета К 047.01.01 при Объединенном Институте ядерных исследований.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "5" марта 1993 г.

Ученый секретарь совета А.Е.Дорохов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Понятие квантовой статистики является одним из основных и принципиальных в квантовой теории. Квантовый способ описания систем тождественных частиц принципиально отличается от классического, и учет эффектов квантовой статистики в таких системах необходим фактически во всех тех случаях, в которых играют роль квантовые эффекты вообще.

Из общих принципов следует возможность ровно двух видов статистики – бозевской и фермиевской, что полностью согласуется с опытом. Вместе с тем в двух измерениях топологические свойства пространства допускают существование промежуточной статистики, непрерывно интерполирующей между бозевской и фермиевской. Такая статистика характеризуется статистическим параметром δ – вещественным числом; частицы, подчиняющиеся промежуточной статистике, были названы энионами.

Изучение двумерных систем в последнее время вызывает весьма значительный интерес в связи с наличием в природе ситуаций, в которых двумерность играет существенную роль, и с возможностью проявления в этих ситуациях качественно новых эффектов, связанных с пониженной размерностью. Имеется экспериментально наблюдаемое явление, о котором можно с достаточной уверенностью говорить как о проявлении промежуточной статистики – квантовый эффект Холла. Чрезвычайно интересной и актуальной областью, где считается возможным проявление промежуточной статистики, является высокотемпературная сверхпроводимость. Такая возможность связана с тем, что, как было установлено, эта сверхпроводимость имеет существенно двумерный характер.

Промежуточная статистика возникает также в (2+1)-мерных топологических полевых моделях для частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, лагранжиан которого представляет собой так называемый член Черна-Саймонса. Данный член может быть индуцирован как часть эффективного действия калибровочного поля, взаимодействующего с фермионами, и потому может возникать в реальных физических моделях.

Кроме этого, исследование энионов интересно с точки зрения общих принципов квантовой механики. Известно, каковы характеристические свойства бозонов и фермионов, и естественно возникает вопрос о том, каким образом происходит интерполяция между этими предельными случаями. Оказывается, что для промежуточной статистики задача существенно усложняется.

В связи со всем вышесказанным изучение систем частиц, подчиняющихся промежуточной статистике, может представлять значительный теоретический и прикладной интерес.

Цель и задачи работы. Цель данной работы состояла в рассмотрении задачи многих энионов в терминах неоднозначных волновых функций, в получении точных выражений для энергий и волновых функций некоторых состояний, в оценке относительного количества этих состояний и их вклада в статистическую сумму, а также в развитии общего понятия о статистике, зависящей от расстояния.

В соответствии с указанной целью в работе решались следующие задачи:

– построение неоднозначных волновых функций, удовлетворяющих энионным перестановочным условиям;

– рассмотрение системы N энионов в энионной калибровке, в которой гамильтониан не содержит взаимодействия, а волновая функция неоднозначна;

– точный анализ случая $N = 3$ и выяснение структуры трехэнионного спектра;

– рассмотрение системы частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, лагранжиан которого есть сумма Черн-Саймонсовского слагаемого и слагаемого нетопологической природы (частицы в этом случае подчиняются статистике, зависящей от расстояния).

Научная новизна результатов диссертационной работы состоит в том, что в ней впервые

– последовательно рассмотрена задача многих энионов в терминах неоднозначных волновых функций, найден вид таких функций, подчиняющихся перестановочным условиям, накладываемым промежуточной статистикой, и в этом подходе получены точные решения задачи произвольного числа энионов в потенциале гармонического осциллятора;

– проведен точный анализ спектра трех энионов, получены формулы, определяющие кратности вырождения всех состояний и показано, что "хорошие" (найденные точно) состояния составляют одну треть общего количества;

– выполнена оценка числа "хороших" состояний для произвольного числа энионов и показано, что эти состояния не дают вклада в термодинамическом пределе;

– развито понятие о статистике, зависящей от расстояния, проанализированы общие свойства частиц, подчиняющихся такой статистике, получена формула для второго вириального коэффициента газа таких частиц;

– качественно рассмотрена задача о частицах с зависящей от расстояния статистикой при низких температурах и сделаны некоторые общие выводы относительно их поведения; проанализирован частный случай Максвелл-Черн-Саймонсовских энионов.

Практическая и научная ценность работы определяется тем, что развитый в работе подход к решению задач многих энионов с использованием неоднозначных волновых функций представляется полезным при исследовании не найденных точно "плохих" состояний, для которого стандартный анзац Лафлина не дает практически никаких упрощений; такое исследование актуально в связи с тем, что, как показано в работе, "хорошие" состояния не дают вклада в термодинамическом пределе. Выполненный в диссертации анализ свойств частиц с зависящей от расстояния статистикой может быть использован для дальнейшего исследования систем таких частиц. Рассмотрение задач о частицах с промежуточной статистикой и статистикой, зависящей от расстояния, представляет интерес с точки зрения возможной реализации в топологических полевых моделях и физике твердого тела.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Проведенное рассмотрение задачи многих энионов с использованием неоднозначных волновых функций позволяет получить выражения для энергий и волновых функций некоторых ("хороших") состояний, а также может быть применено для исследования остальных ("плохих") состояний, точные выражения для которых неизвестны; показано, что "хорошие" состояния не дают вклада в термодинамический предел.

2. Проведенный анализ спектра трех энионов приводит к точным выражениям для кратностей вырождения всех состояний этого спектра, дает точное соотношение между числом "хороших" и "плохих" состояний, а также позволяет сделать некоторые выводы о поведении третьего вириального коэффициента.

3. Рассмотрение частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, в лагранжиан которого входит "стандартное" слагаемое и член Черна-Саймонса, приводит к общему понятию о статистике, зависящей от расстояния; частным случаем частиц, подчиняющихся такой статистике, являются Максвелл-Черн-Саймонсовские энионы.

4. Второй вириальный коэффициент газа частиц с зависящей от расстояния статистикой существенно зависит от соотношения между те-

пловой длиной волны и длиной взаимодействия; при предельных соотношениях он стремится к двум различным значениям, соответствующим идеальным энионам. При низких температурах и определенных соотношениях между параметрами возможен ван-дер-Ваальсовский фазовый переход.

Апробация работы. Материалы диссертации были доложены и обсуждались на: Международной конференции "Адронная материя в экстремальных условиях" (Одесса, 1991), Международном семинаре "Кварки-92" (Звенигород, 1992), Международной конференции "Современные проблемы квантовой теории поля, струн, квантовой гравитации" (Киев, 1992), Международной школе НАТО "Релятивистсткие ядерные столкновения" (Иль Чокко, Италия, 1992).

Публикации. Основные материалы диссертации опубликованы в 6 научных работах, перечень которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения, изложенных на 125 страницах текста. Она содержит 10 рисунков и список литературы из 74 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведено описание различных моделей, в которых возникает промежуточная статистика, и систем, в которых имеют место эффекты, тем или иным образом связанные с такой статистикой. Описываются общие свойства задач энионов и подчеркиваются их принципиальные сложности по сравнению с задачами бозонов и фермионов.

Первая глава, являющаяся по существу обзорной, посвящена обоснованию принципиальной возможности появления промежуточной статистики и описанию конкретных механизмов ее возникновения. В ней также вводится понятие о статистике, зависящей от расстояния.

§ 1.1 представляет собой подробное рассмотрение вопроса, являющегося, с точки зрения общих принципов квантовой механики, основным в понимании природы и общих свойств промежуточной статистики: почему, в каких случаях и каким образом необходимо уточнять стандартное рассуждение, приводящее к выводу о возможном существовании в природе лишь двух видов статистики – бозевской и фермиевской?

Основные моменты этого рассуждения таковы: во-первых, при перестановке любых двух частиц, ввиду их тождественности, волновая функция может изменяться лишь на глобальный фазовый множитель; во-вторых, поскольку две перестановки восстанавливают начальное положение частиц, то квадрат этого множителя должен равняться единице, что и дает ровно две возможности. Такое рассмотрение, однако, не является строгим. Для системы многих частиц необходимо вводить понятие конфигурационного пространства, точки которого характеризуются множеством координат частиц $\{\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N\}$, причем если частицы тождественны, то множество неупорядоченное, т.е. при замене $\vec{r}_j \leftrightarrow \vec{r}_k$ точка остается той же. Волновая функция задается именно на конфигурационном пространстве и при этом является, вообще говоря, неоднозначной (иначе была бы возможна только бозевская статистика). Ограничения же на ее свойства связаны с топологической структурой пространства. Если провести в нем непрерывный замкнутый путь, дающий вклад в амплитуду перехода $R \to R$, где R – некоторая конфигурация, и обойти его, требуя непрерывности изменения волновой функции при обходе, то по возвращении в начальную точку волновая функция окажется, вообще говоря, домноженной на некоторый фазовый множитель. Априорных требований на множители два: групповое свойство и одинаковость для путей, принадлежащих одному гомотопическому классу, т.е. непрерывно деформируемых друг в друга. Рассматривая конфигурационное пространство системы двух частиц, приходим к следующим выводам. Для трехмерного пространства существует ровно два класса путей: пути, принадлежащие первому (второму) классам, могут (не могут) быть непрерывно деформированы в точку. Фазовый множитель для путей второго класса, соответствующих, на классическом языке, нечетному числу перестановок, может равняться либо плюс единице, либо минус единице. В то же время для двумерного пространства гомотопических классов счетное множество, и никаких ограничений на фазовый множитель, кроме группового свойства, не существует; однократной перестановке может соответствовать фазовый множитель $\exp[i\pi\delta]$, где *статистический параметр* δ – любое вещественное число. На самом деле достаточно рассматривать случай $\delta \in [0,1]$. В частных случаях $\delta=0$ и $\delta=1$ имеем, соответственно, бозоны и фермионы.

Поскольку реальный мир трехмерен, то частицы с внутренне присущей энионной статистике существовать не могут. Такая статистика может лишь эффективно возникать за счет некоторого взаимодействия. Описанию модели, в которой имеет место такое взаимодействие, посвящен § 1.2. Рассматривается "зарядо-потоковый композит", т.е. заряд e, жестко скрепленный с соленоидом, ориентированным вдоль оси z и несущим магнитный поток Φ, причем вне соленоида магнитное поле равно нулю. Коль скоро от координаты z ничего не зависит, задача является эффективно двумерной; в плоскости xy имеем заряды, скрепленные с "точками потока". Пусть имеется два таких композита. Посчитанная классически, сила их взаимодействия равна нулю, если не считать кулоновской силы, которую можно сделать достаточно малой и которой мы не будем интересоваться. Однако при их взаимном перемещении волновая функция приобретает фазу, которая на квантовом уровне существенно сказывается на поведении системы (эффект Ааронова-Бома). В частности, при перестановке получаем фазу $\exp[i\pi\delta]$, где $\delta = e\Phi/2\pi$. Подбирая значения e и Φ , получим промежуточную статистику с любым наперед заданным δ .

Более точная формулировка выглядит следующим образом. Задача об N тождественных композитах (в дальнейшем для простоты говорим о частицах) есть задача об N бозонах (фермионах), взаимодействующих посредством электромагнитного потенциала определенного вида. При этом волновая функция должна, как обычно, быть (анти)симметричной по отношению к перестановкам. Вместе с тем, в связи с вышесказанным, потенциал представляет собой чистую калибровку, т.е. может быть сведен к нулю (везде, кроме являющихся сингулярностями точек расположения частиц) посредством калибровочного преобразования. Преобразованный гамильтониан характеризует невзаимодействующие частицы, и в то же время фаза волновой функции изменяется таким образом, что новая функция удовлетворяет перестановочным условиям

$$P_{jk}\Phi = \exp[i\pi\delta]\Phi \quad , \quad 1 \leqslant j,k \leqslant N \quad , \quad j < k \quad , \qquad (1)$$

означающим эффективное появление промежуточной статистики. Здесь под P_{jk} следует понимать операцию перестановки j-й и k-й частиц *против часовой стрелки*.

О первом варианте обычно говорят как о регулярной калибровке, о втором – как об энионной калибровке. Таким образом, задача о невзаимодействующих энионах эквивалентна задаче о взаимодействующих специальным образом бозонах (фермионах).

В § 1.3 описан стандартный путь возникновения промежуточной статистики в (2+1)-мерных теоретико-полевых моделях. Рассматривается сохраняющийся ток j^μ , взаимодействующий с калибровочным полем A^μ , лагранжиан которого есть так называемый член Черна-Саймонса, или топологический член:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\alpha\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda - A_\mu j^\mu \quad . \qquad (2)$$

Член Черна-Саймонса возникает в эффективном действии для калибровочного поля после интегрирования по фермионным степеням свободы в (2+1)-мерной модели калибровочного поля, взаимодействующего с фермионами. Имея это в виду, в нашем рассмотрении считаем его заданным "руками". В модели (2) заряды и токи, по сравнению с обычной электродинамикой, "меняются местами": заряды производят магнитное поле, токи – электрическое поле. В частности, магнитное поле пропорционально плотности заряда. Поэтому точечный заряд становится источником сингулярного магнитного поля, подобного полю описанного выше бесконечно тонкого соленоида. В некотором смысле сам заряд играет роль "зарядо-потокового композита" (причем кулоновское взаимодействие здесь отсутствует). Частицы эффективно становятся энионами со статистическим параметром $\delta = \varkappa + e^2/2\pi\alpha$, где $\varkappa$ описывает статистику "голых" частиц: $\varkappa = 0$ для бозонов и $\varkappa = 1$ для фермионов.

В § 1.4 описывается ситуация, в которой возникает так называемая статистика, зависящая от расстояния. Она имеет место для частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, лагранжиан которого содержит Черн-Саймонсовское слагаемое и "стандартное" слагаемое нетопологической природы. В этом случае заряды по-прежнему являются источниками магнитного поля, однако это поле не является сингулярным, а имеет некоторый характерный радиус затухания, так что частица окружена "облаком" магнитного поля. Поведение частиц различно в зависимости от того, насколько сильно перекрываются их облака, и сводится к поведению обычных, "идеальных" энионов в предельных случаях отсутствия перекрытия и полного перекрытия, причем статистический параметр для этих двух случаев имеет различные значения. Именно в этом смысле говорят о статистике, зависящей от расстояния.

Во второй главе обсуждается задача многих энионов. В § 2.1 рассматривается формулировка этой задачи и ее отличительные свойства. Как и для бозонов или фермионов, требуется найти те решения уравнения Шредингера $\mathcal{H}\Phi = E\Phi$, которые удовлетворяют перестановочным условиям вида (1). В качестве $\mathcal{H}$ выбран гамильтониан системы невзаимодействующих осцилляторов. Одночастичный спектр в этом случае прост, и решение задачи многих бозонов или фермионов не представляет принципиальных трудностей. Энионный случай, однако, существенно сложнее.

Неоднозначность волновых функций означает, что писать $\Phi(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N)$, строго говоря, лишено смысла: задание положений частиц фиксирует лишь амплитуду Φ , но не ее фазу. Последняя зависит от фаз всех $\frac{N(N-1)}{2}$ комплексных чисел $z_{jk} \equiv (z_j-z_k)/\sqrt{2}$, где

$z_j = x_j + iy_j$, изменяясь при изменении любой из этих фаз на 2π. Чтобы Ψ подчинялась перестановочным условиям вида (1), в ней должны фигурировать множители вида z_{jk}^{δ}. При дробном δ такое выражение не может быть универсальным образом разложено в ряд по z_j и z_k; поэтому для энионов отсутствует понятие одночастичных волновых функций, и задача изначально является существенно многочастичной. Это согласуется с тем, что энионы эквивалентны взаимодействующим бозонам или фермионам: хотя на классическом уровне сила равна нулю, взаимодействие, как и обычно, "завязывает" волновые функции частиц.

В § 2.2 рассматривается вопрос о построении волновых функций, удовлетворяющих энионным перестановочным условиям. Имеет место равенство $P_{jk}(z^{a}_{jk}z^{*b}_{jk}) = \exp[i\pi(a-b)](z^{a}_{jk}z^{*b}_{jk})$. Поэтому волновая функция ищется в виде линейной комбинации произведений степенных функций z_{jk} и z^{*}_{jk}. Определяется, как действует P_{jk} на произвольную функцию этого вида. Результатом является другая функция такого же вида, умноженная на некоторый фазовый множитель. Искомая линейная комбинация должна содержать в качестве слагаемых все функции, получаемые действием произвольного числа операторов P_{jk} с различными j, k, а ее перестановочные свойства при этом определяются коэффициентами при различных слагаемых и вышеупомянутыми фазовыми множителями. Условия (1) выполняются при определенных соотношениях между показателями степеней для линейных комбинаций, имеющих вид, аналогичный обычным симметричным и антисимметричным функциям.

Коль скоро в волновые функции входят разности комплексных координат, задачу целесообразно переформулировать с использованием этих разностей в качестве независимых переменных. Такой формулировке посвящен § 2.3. В качестве независимых используются кординаты z_{1j}, $j = 2,\dots,N$, плюс координата центра масс. Движение последнего полностью отделяется, а задача об относительном движении представляет собой задачу об N-1 попарно взаимодействующих "относительных осцилляторах". Вместе с тем действие гамильтониана на степенную волновую функцию оказывается сравнительно простым. Результат состоит из "хорошей" части, представляющей собой исходную функцию, умноженную на некоторый коэффициент, и "хвоста" в виде линейной комбинации нескольких функций также степенного вида, но с другими показателями. Задача сводится к построению таких линейных комбинаций функций указанного вида, для которых все "хвосты" взаимно уничтожаются.

Рассмотрение такой задачи проводится в § 2.4. Вначале указываются два простых случая, в которых "хвосты" тождественно обращаются

в нуль. Зависимость энергии от δ в этих двух случаях имеет вид

$$E_1 = E_B + \frac{N(N-1)}{2}\,\delta \quad , \quad E_2 = E_B - \frac{N(N-1)}{2}\,\delta \quad , \qquad (3)$$

где E_B – энергия при $\delta = 0$ (т.е. при бозевской статистике). Затем обсуждается более общий случай. Строится функция, записываемая в виде ряда, которая удовлетворяет и уравнению Шредингера, и перестановочным условиям. Накладывается требование отсутствия сингулярностей, которое может удовлетворяться в случае, когда ряд содержит конечное число членов. При этом естественным образом возникает два класса состояний, для краткости называемых "хорошими", причем зависимость энергии от δ для этих классов имеет вид (3). Оказывается, однако, что при $N > 2$ найденными состояниями не исчерпывается весь спектр; в многоэнионной задаче существуют другие ("плохие") состояния, точные выражения для которых при дробном δ неизвестны и, по-видимому, не могут быть получены.

Наконец, разработанный нами метод сравнивается с обычно применяющимся для решения энионных задач так называемым анзацем Лафлина. Последний имеет вид

$$\Psi_a = \prod_{jk} z_{jk}^{\delta}\cdot\Psi_L \quad , \qquad (4)$$

где Ψ_a – неоднозначная волновая функция в энионной калибровке. Идея этого анзаца состоит в том, что из условия (1) на Ψ_a следует условие симметричности на Ψ_L. Соответствующий задаче о невзаимодействующих энионах гамильтониан, действующий на Ψ_L, содержит двухчастичное взаимодействие. Таким образом, задача о нахождении Ψ_L есть задача о взаимодействующих бозонах, которая может решаться более или менее стандартными методами. Этот подход, однако, представляется малополезным для "плохих" состояний. Для "хороших" состояний 1-го класса функция Ψ_L не содержит дробных степеней (того же можно добиться для состояний 2-го класса, элементарно модифицировав (4)). Удобство этого состоит, разумеется, в том, что Ψ_L может быть разложена по одночастичным функциям, что упрощает решение. Для "плохих" состояний, однако, это не имеет места. Коль скоро Ψ_L содержит дробные степени, задача о его нахождении, вообще говоря, не проще, чем задача о нахождении Ψ_a. В нашем подходе дробные степени изначально имеют место, и в этом смысле он является более универсальным.

Наличие в многоэнионном спектре "плохих" состояний означает, что задача многих энионов, по-видимому, не допускает полного точного решения. В связи с этим приобретает смысл рассмотрение задач малого числа энионов, для которых возможен более или менее точный анализ. Таким задачам посвящена третья глава. Их решение целесообразно, во-первых, потому, что позволяет хотя бы на простых примерах проследить, каким образом происходит интерполяция между бозонным и фермионным спектрами, и во-вторых, так как известно, что если решены m-частичные задачи с $m = 1,\ldots,N$, то можно вычислить вириальные коэффициенты a_j с $j = 2,\ldots,N$, входящие в разложение уравнения состояния по плотности.

В § 3.1 обсуждаются результаты, полученные к настоящему времени. Задача двух энионов сводится отделением движения центра масс к одночастичной и для простых потенциалов может быть решена точно. Ее решение для гармонического потенциала было получено одновременно с введением понятия промежуточной статистики. Кроме того, было получено выражение для второго вириального коэффициента энионного газа. Была также рассмотрена задача о двух взаимодействующих энионах.

Очень большое внимание было уделено трехчастичной задаче. Как и в общем случае, для трех энионов имеют место "хорошие" состояния, однако здесь появляются также "плохие" состояния, для которых зависимость $E(\delta)$ нелинейна. Важным свойством этих состояний является их симметричность относительно семионной ($\delta = \frac{1}{2}$) точки. На основании этого и общего свойства симметрии "хороших" состояний нами впервые были получены точные выражения для кратностей вырождения "хороших" и "плохих" состояний и показано, что относительное число первых стремится к $1/3$ с ростом энергии. Другим следствием упомянутой симметрии оказывается симметрия третьего вириального коэффициента: $a_3(\delta) = a_3(1-\delta)$. Уже для четырехэнионной задачи никаких общих выводов сделать не удается; ни спектр, который устроен существенно сложнее, чем трехчастичный, ни соответственно четвертый вириальный коэффициент не обладает никакими свойствами симметрии.

Достаточно большое внимание было уделено пертурбативному рассмотрению энионных задач. В регулярной калибровке решается задача о взаимодействующих бозонах или фермионах, причем гамильтониан взаимодействия пропорционален γ, где $\gamma = \delta$ для бозонов или $\gamma = 1-\delta$ для фермионов. При $\gamma \ll 1$ его можно рассматривать как возмущение. В рамках пертурбативного подхода были вычислены энергии некоторых "плохих" состояний, в частности, основного состояния в трехчастичной задаче, и получены выражения для вириальных коэффициентов a_2 ,..., a_6 с точностью до γ^2 .

В § 3.2 рассматривается задача двух энионов в осцилляторном потенциале. В этом случае имеется ровно одна относительная координата, гамильтониан относительного движения имеет осцилляторный вид, и задача допускает точное решение. Подчеркивается следующее различие между энионной и регулярной калибровками: в первой механический момент импульса и канонический угловой момент имеют одно и то же дробное значение, во второй – механический момент (который калибровочно инвариантен) имеет дробное значение, а канонический момент, как тому и следует быть, целое значение.

Все состояния в двухчастичной задаче являются "хорошими"; точное знание спектра при любом δ позволяет вычислить статистическую сумму и второй вириальный коэффициент. Зависимость последнего от δ при $0 < \delta < 2$ дается формулой

$$a_2(\delta) = \frac{1}{4}[1-2(1-\delta)^2] \tag{5}$$

(для простоты a_2 определяется без размерного множителя λ^2); эта зависимость должна быть периодически продолжена с периодом 2 и в результате является непрерывной, но не гладкой: производная $da_2(\delta)/d\delta$ терпит разрыв в точках $\delta = 0,\pm2,\ldots$, соответствующи.. бозевской статистике. Это связано с тем, что энергия некоторых двухэнионных состояний содержит слагаемые вида $|\delta|$.

В § 3.3 обсуждается структура трехэнионного спектра. Рассматривается следующий вопрос: какие бозонные состояния являются "хорошими" состояниями 1-го класса, т.е. какие состояния с $\tilde{E} = \tilde{E}_B$ (тильда обозначает относительное движение) превращается при увеличении δ в состояние с $\tilde{E} = \tilde{E}_B + 3\delta$? Доказывается, что таковыми заведомо являются все состояния с $L = \bar{E}$ и $L = \bar{E} - 2$ ($\bar{E} = \tilde{E} - 2$ – энергия с вычетом нулевых колебаний, L – момент), а также отмечается, что существуют также "хорошие" состояния с $L = \bar{E} - 4$, $\bar{E} - 6$,..., 0 . Далее рассматривается второй класс "хороших" состояний, для которых $\tilde{E} = \tilde{E}_B-3\delta$. С помощью теории возмущений вблизи фермиевской статистики показывается, что каждому "хорошему" состоянию 1-го класса с $\tilde{E} = \tilde{E}_B+3\delta$ соответствует ровно одно состояние 2-го класса с $\tilde{E} = \tilde{E}_B+6-3\delta$.

Для "плохих" состояний ранее были проведены численные расчеты, а также построены аналитические волновые функции, имеющие сравнительно простую структуру и дающие при подсчете среднего значения энергии результаты, близкие к полученным численно, на основании чего сделан вывод, что эти функции представляют собой хорошие приближения к истинным волновым функциям "плохих" состояний.

В § 3.4 проводится вычисление кратностей вырождения "хороших" и "плохих" состояний. Если обозначить $\tilde{g}_n^{3B}$ и $\tilde{g}_n^{3F}$ кратности вырождения n-го уровня в трехчастичном относительном спектре (имеющего энергию n), соответственно для бозевской и фермиевской статистики, то $\tilde{g}_n^{3B}$ есть сумма четырех чисел, представляющих собой количества состояний, принадлежащих этому уровню, с наклоном (разностью $\tilde{E}(1)-\tilde{E}(0)$) 3, 1, -1, -3 . Обозначим эти четыре числа, соответственно, через $\tilde{R}_n^+$, $\tilde{r}_n^+$, $\tilde{r}_n^-$, $\tilde{R}_n^-$. Первое и последнее числа соответствуют "хорошим" состояниям, остальные два - "плохим". Чтобы получить выражения для $\tilde{R}_n^\pm$ и $\tilde{r}_n^\pm$ через n , необходимы четыре уравнения для каждого n . Два уравнения выражают "закон сохранения количества состояний" при $\delta=0$ и $\delta=1$ (выражения для $\tilde{g}_n^{3B}$ и $\tilde{g}_n^{3F}$, разумеется, известны); еще два можно получить, используя свойства симметрии "хороших" и "плохих" состояний. С помощью этих уравнений определяются искомые величины. Выражения для них имеют вид

$$\tilde{R}_n^\pm = A_r^\pm n^3 + B_n^\pm n^2 + \Gamma_n^\pm n + \Delta_n^\pm \quad , \tilde{r}_n^\pm = \alpha_n^\pm n^3 + \beta_n^\pm n^2 + \gamma_n^\pm n + \delta_n^\pm \quad , \qquad (6)$$

где $A_n^\pm ,\ldots, \delta_n^\pm$ - числа, зависящие от $n \bmod 6$. Для всех n имеет место $A_n^\pm = \frac{1}{2}\alpha_n^\pm$, из чего следует, что в пределе $n \to \infty$ количество "хороших" состояний составляет 1/3 от полного количества.

В § 3.5 показывается, что полученные результаты позволяют сделать некоторые выводы относительно поведения трехчастичной статистической суммы и третьего вириального коэффициента. Прямое вычисление вклада в статистическую сумму "хороших" состояний подтверждает установленный ранее факт независимости соответствующего вклада в третий вириальный коэффициент от δ ; так что поведение данного коэффициента полностью определяется "плохими" состояниями. Семионная симметрия последних влечет за собой семионную симметрию коэффициента. Никаких других точных выводов сделать не удается - опять-таки из-за неизвестности точного поведения "плохих" состояний.

Далее в этом же параграфе анализируется следующий вопрос. Согласно вышесказанному, в системе двух энионов все состояния являются "хорошими", тогда как для трех энионов относительное количество "хороших" состояний составляет 1/3 . Чему равно это количество при произвольном N и, в частности, как оно ведет себя при $N \to \infty$?

Провести точный анализ при $N > 3$ не удается из-за нехватки уравнений. Оказывается возможным, однако, выполнить оценку, основанную на формуле для второго вириального коэффициента. Зная, чему равен этот коэффициент, легко вычислить с соответствующей точностью плотность состояний для системы N энионов. С другой стороны, эта плотность выражается через фермионную плотность и величины a_k , где a_k есть относительное число состояний с $|E(1)-E(0)| = k$. Относительное число "хороших" состояний есть a_Q , где $Q = \frac{N(N-1)}{2}$. Приравнивая два выражения для плотности состояний, получаем уравнения для a_k , из которых следует, что $a_Q \leqslant 4/N^2$. Таким образом, "хорошие" состояния не дают вклада в термодинамическом пределе.

Четвертая глава посвящена рассмотрению статистики, зависящей от расстояния, имеющей место для частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, лагранжиан которого, помимо члена Черна-Саймонса, содержит "стандартный" член нетопологической природы. Такой член может либо присутствовать в теории изначально, либо быть генерирован как квантовая поправка. Частицы, о которых идет речь, в определенном смысле аналогичны рассмотренным выше идеальным энионам, и вместе с тем для них имеют место некоторые специфические черты.

В § 4.1 проводится общее рассмотрение модели частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, лагранжиан которой есть

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \frac{1}{2}\alpha\varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda - A_\mu j^\mu \quad . \qquad (7)$$

В этой модели заряд производит, вообще говоря, как электрическое, так и магнитное поле. Первое приводит к квазикулоновскому заряд-зарядовому взаимодействию, которое никак не отражается на статистике частиц и в дальнейшем не будет приниматься во внимание (при необходимости оно может быть учтено стандартным образом). Магнитное поле, в отличие от чисто Черн-Саймонсовского случая, отлично от нуля не только там, где отлична от нуля плотность заряда. Для точечного заряда в начале координат создаваемый магнитный поток через круг радиуса r есть $\Phi(r) = -2\pi\Delta(r)/e$, где $\Delta(r)$ - функция, определяемая из соотношения

$$A_\varphi(r) = -\frac{\Delta(r)}{er} \qquad (8)$$

Рассматривается задача о двух частицах, взаимодействующих посредством указанного калибровочного поля. Угловая часть волновой функции отделяется стандартным образом, и гамильтониан относительного движения для l-й парциальной волны имеет вид

$$\tilde{\mathcal{H}}_l^2 = \frac{p_r^2}{m} + \frac{[l+\Delta(r)]^2}{mr^2} + V(r) \quad , \qquad (9)$$

где l - момент, $V(r)$ - механический потенциал взаимодействия. При $\Delta(r)$ = const (что имеет место при $\mathcal{E}_0 = 0$) этот гамильтониан соответствует идеальным энионам. Поэтому, если $V(r)$ выбран так, что расстояние между рассматриваемыми частицами меняется в достаточно узком диапазоне, в котором можно считать $\Delta(r) \simeq \Delta$ = const , то частицы ведут себя подобно Δ-энионам (идеальным энионам с $\delta = \Delta$). Если изменить диапазон r , то изменится и Δ , в связи с чем имеет смысл говорить о статистике, зависящей от расстояния.

Подчеркивается существенное отличие частиц с зависящей от расстояния статистикой от идеальных энионов. Для последних, как уже отмечалось, задача может быть сформулирована как задача о невзаимодействующих частицах (хотя взаимодействие и "оставляет следы" в виде существенно многочастичной волновой функции). Для первых же такая формулировка невозможна. Здесь все время идет речь о взаимодействующих бозонах (фермионах), а характер взаимодействия таков, что при определенных условиях оно может быть описано как эффективное изменение статистики.

В § 4.2 рассматривается задача о вычислении второго вириального коэффициента газа частиц с зависящей от расстояния статистикой. Система таких частиц характеризуется различными параметрами размерности длины: средним расстоянием между частицами ξ , характерной длиной взаимодействия d , а при конечной температуре, кроме того - тепловой длиной волны λ . При $\lambda \ll \xi$ применимо вириальное разложение, и отклонение поведения системы от поведения идеального газа в низшем порядке определяется вторым вириальным коэффициентом. Точно вычислить этот коэффициент не удается; вычисление проводится в полуклассическом приближении Уленбека и Бета, в котором угловое движение квантуется, а радиальное движение рассматривается классически. Результатом является общая формула, которая в предельных случаях $\lambda/d \to 0$ и $\lambda/d \to \infty$ сводится к формуле (5) для идеальных энионов, причем в качестве δ в этих двух случаях фигурируют соответственно δ_∞ и $\delta_0 = \Delta_0$ mod 2 ; такие результаты легко объясняются на основе простых качественных рассуждений. Вообще говоря, формула, полученная

в полуклассическом приближении, справедлива лишь при $\lambda \ll d$. Тот факт, что в предельном случае $\lambda/d \to \infty$ она также дает верный результат, объясняется, очевидно, тем, что в этом пределе эффект взаимодействия, который учитывается рассматриваемым приближением неточно, сводится к эффекту изменения статистики, который учитывается точно, поскольку точно проводится разложение по парциальным волнам. Таким образом, формула правильно отражает качественное поведение a_2 с изменением λ .

В § 4.3 проводится качественный анализ свойств частиц с зависящей от расстояния статистикой при низких температурах. Основное внимание уделяется вопросу о поведении основного состояния. На основе простой модельной зависимости $\Delta(r)$ определяется энергия этого состояния в различных режимах и обсуждается, каким образом происходит интерполяция между этими режимами. В частности, показывается, что при определенных соотношениях между параметрами возможна ситуация, в которой давление уменьшается при уменьшении площади. Соответствующие состояния являются неустойчивыми, и диапазон таких состояний интерпретируется как область фазового перехода, подобного происходящему в газе ван-дер-Ваальса.

В § 4.4 рассматривается частный случай частиц, подчиняющихся зависящей от расстояния статистике - Максвелл-Черн-Саймонсовских энионов. Приводится явное выражение для функции $\Delta(r)$ и обсуждается поведение таких частиц при различных соотношениях параметров. Общие выводы остаются справедливыми для этого случая; кроме того, прослеживается форма потенциала взаимодействия в различных режимах. Дается численная оценка значений параметров, при которых возможен ван-дер-Ваальсовский фазовый переход.

В заключении формулируются основные результаты работы.

1. Впервые последовательно рассмотрена задача многих энионов в энионной калибровке, в которой волновая функция неоднозначна, и найден общий вид такой функции, удовлетворяющей энионным перестановочным условиям. Преимущество такого метода рассмотрения состоит в том, что он не требует упрощений, на которых основаны имеющиеся рассмотрения задачи в регулярной калибровке, но которые возникают лишь в частном случае.

2. В рамках разработанного метода получены точные решения задачи многих энионов; энергия соответствующих состояний линейно зависит от статистического параметра. Впервые показано, что относительное количество таких состояний убывает с ростом числа частиц не медлен-

нее, чем обратно пропорционально квадрату этого числа.

3. В задаче трех энионов впервые получены точные выражения для кратностей вырождения энионного спектра. Показано, что состояний с линейной зависимостью энергии от статистического параметра вдвое меньше, чем состояний с нелинейной зависимостью (не найденных точно).

4. Развито понятие о статистике, зависящей от расстояния. Проанализирован представляющий интерес с точки зрения возможного осуществления в реальных физических системах частный случай возникновения такой статистики - случай Максвелл-Черн-Саймонсовских энионов.

5. Впервые получена формула для второго вириального коэффициента газа частиц, подчиняющихся зависящей от расстояния статистике, и показано, что при предельных соотношениях тепловой длины волны и длины взаимодействия она сводится к формуле для идеальных энионов с различными значениями статистического параметра в зависимости от того, которая из длин больше. Кроме того, качественно проанализировано низкотемпературное поведение таких частиц и показано, что возможна ситуация, подобная фазовому переходу в газе ван-дер-Ваальса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mashkevich S.V. Exact solutions of a many-anyon problem. Preprint, Institute for Theoretical Physics, Kiev, ITP-91-106E (1991), 28 p.
2. Mashkevich S.V. Exact solutions of a many-anyon problem. *Int.J.Mod.Phys.* A7 (1992), No.32, p.7931-7942.
3. Mashkevich S.V. Towards the exact spectrum of the three-anyon problem. *Phys.Lett.* B295 (1992) No.2, p.233-236.
4. Mashkevich S.V. Precise analysis of the three-anyon spectrum. Preprint, Institute for Theoretical Physics, Kiev, ITP-92-48E (1992), 17 p.
5. Mashkevich S.V., Sato H., Zinovjev G.M. The two-body problem for Maxwell-Chern-Simons anyons. Preprint, University of Bielefeld, BI-TP 92/46 (1992), 10 p.
6. Mashkevich S.V. Quantum mechanics and thermodynamics of particles with distance dependent statistics. Preprint, Institute for Theoretical Physics, Kiev, ITP-93-5 (1991), 12 p.