ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

ЛАНЕЕВ Евгений Борисович

УДК 519.6+517.9+612.82

УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПРИЛОЖЕНИИ К ЗАДАЧЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

(01.01.07 — вычислительная математика)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна — 1990

Работа выполнена в Университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы.

Научный руководитель —

доктор физико-математических наук, профессор **А. С. Ильинский.**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук **А. В. Крянев**,
кандидат физико-математических наук **Б. Н. Хоромский.**

Ведущая организация — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

Защита диссертации состоится « 01 » ноября 1990 г. в 10 час. 30 мин. на заседании специализированного совета Д 047.01.04 при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований по адресу: город Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан « 01 » октября 1990 г.

Ученый секретарь
специализированного совета Д047.01.04
кандидат физико-математических наук
З. М. ИВАНЧЕНКО

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Интенсивное развитие методов и практика решения некорректно поставленных задач в последние десятилетия привели к созданию теории регуляризации их решений [1-4]. Вместе с тем проблема построения решения конкретных задач, имеющих прикладное значение,- модификаций постановок известных задач, полученных при изменении или уточнении моделей, новых задач, связанных с новыми явлениями или процессами,- остается актуальной.

Широкий круг некорректных задач составляют обратные задачи восстановления структуры изучаемого объекта по косвенной информации - измеряемым физическим полям [5]. Для гармонических полей эффективны методы решения этой задачи, основанные на принципе аналитического продолжения поля в сторону его источников, предполагающие последующую интерпретацию поля с целью восстановления структуры плотности распределения этих источников. Интерпретация продолженного поля вблизи источников оказывается более эффективной, чем интерпретация исходного измеренного поля. Задача Коши для уравнения Лапласа - одна из возможных постановок задач аналитического продолжения, нашедших наиболее широкое применение в геофизике [6].

В прикладном аспекте диссертация посвящена применению принципа аналитического продолжения к обработке термографических данных, представляющих собой результаты измерения температурного поля на поверхности изучаемого объекта. Актуальность этой задачи обусловлена необходимостью повышения эффективности интерпретации изображений температурного поля в тепловизионных методах диагностики заболеваний [7] а также в исследованиях собственных физических полей (в том числе - температурных) биологических объектов [8]. Отметим, что в отличие от некоторых других известных методов диагностики [9] тепловизионные методы не требуют искусственного источника излучения.

Возможность использования в качестве математической постановки задачи аналитического продолжения стационарного температурного поля задачи Коши для уравнения Лапласа приводит к необходимости разработки достаточно эффективного метода численного решения одного из общих вариантов ее постановки в трехмерном случае. Существующие устойчивые методы решения этой некорректной задачи либо неприменимы непосредственно в этом случае либо имеют определенные недостатки. В частности, использование разностных методов [10] предполагает известную гладкость или предварительное сглаживание исходных данных.

Цель работы.

Цель работы состоит в разработке устойчивого метода решения трехмерного варианта некорректно поставленной задачи Коши для уравнения Лапласа с данными на произвольной гладкой замкнутой поверхности в приложении к задаче аналитического продолжения стационарных температурных полей, возникающей в связи с проблемой обработки данных в термографии. Достижение сформулированной цели предполагает:

1) построение математической модели стационарного температурного поля внутри ограниченного однородного тела, включающего источники тепла; применительно к проблеме обработки данных тепловидения постановка и исследование в рамках этой модели задачи аналитического продолжения стационарного температурного поля с поверхности тела;
2) разработка и обоснование устойчивого метода решения задачи Коши для уравнения Лапласа с данными общего вида на произвольной гладкой замкнутой поверхности и приложение его к решению задачи аналитического продолжения температурного поля как задачи Коши для уравнения Лапласа;
3) проверка эффективности предлагаемого метода и алгоритмов численного решения проведением расчетов на ЭВМ для модельных задач.

Научная новизна.

Предложен метод математической обработки термограмм - температурных снимков поверхности объекта - на основе принципа аналитического продолжения стационарного температурного поля, повышающий разрешающую способность термограмм. Предложена и исследована математическая модель задачи аналитического продолжения стационарного температурного поля в виде задачи Коши для уравнения Лапласа.

Разработан метод устойчивого решения трехмерного варианта

задачи Коши для уравнения Лапласа с данными общего вида на гладкой замкнутой поверхности, допускающий использование в задачах с различным физическим содержанием. При этом в отличие от известных разностных методов не требуется гладкости или предварительного сглаживания исходных данных.

Практическая значимость.

Разработанный метод решения задачи Коши для уравнения Лапласа позволяет достаточно эффективно решать с использованием ЭВМ задачи математической обработки данных измерений полей физических величин, математической моделью которых может служить задача Коши для уравнения Лапласа. Применением метода к задаче обработки термографического изображения на основе принципа аналитического продолжения температурного поля достигается повышение разрешающей способности термограмм по распознаванию образов тепловыделяющих структур, расположенных внутри исследуемого объекта. В частности, обработка термограмм частей тела человека позволяет в принципе более точно локализовать тепловые аномалии во внутренних органах, связанные с различными заболеваниями.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, перечень которых приведен в конце автореферата.

Апробация.

Результаты работы докладывались и обсуждались на Всесоюзной школе-семинаре по некорректным задачам (Саратов, 1985), на Всесоюзной конференции "Вычислительная физика и математическое моделирование" (Волгоград, 1988), на научных семинарах проф. В.Б.Гласко на физическом факультете МГУ, проф. Е.П.Жидкова в ЛВТА ОИЯИ (Дубна), проф. В.Н.Масленниковой в Университете дружбы народов, на Конференциях молодых ученых и Научных конференциях факультета физико-математических и естественных наук УДН.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитированной литературы. Объем диссертации - 149 страниц. Список литературы включает 158 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается краткая характеристика рассматриваемой в диссертации проблемы и принципов ее решения, сформулированы цели диссертации и дано распределение материала по главам.

В первой главе строится и исследуется математическая модель задачи аналитического продолжения стационарного температурного поля как принципиальной основы для математической обработки термографических данных.

Приведена схема получения термографического изображения с помощью тепловизора, обсуждаются возможности термограммы как источника информации о внутренней тепловыделяющей структуре исследуемого объекта и пути расширения и уточнения этой информации путем обработки термограммы на основе математической модели температурного поля ограниченного однородного теплопроводящего тела, содержащего источники тепла. В качестве такой модели взята третья краевая задача для уравнения Пуассона

$$\begin{gathered} \Delta u(M) = -\frac{4\pi}{k}\rho(M), \quad M \in D \subset R^3, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = h(U-u)\big|_{\partial D}, \end{gathered} \tag{I}$$

где ρ - плотность распределения источников тепла, k - коэффициент теплопроводности, h - коэффициент теплообмена на границе ∂D тела D с внешней средой температуры U.

Термограмма в этой модели связывается с функцией $f = u|_{\partial D}$. В идеале проблема обработки термограммы стационарного температурного поля формулируется как обратная задача (по отношению к прямой задаче (I)) восстановления неизвестной плотности ρ по известной функции f (термограмме). Показано, что эта задача сводится к обратной задаче потенциала. Приведенный в этой главе обзор работ по обратной задаче потенциала показывает, что трудности в решении такой задачи, связанные с существенной неединственностью и неустойчивостью, не позволяют эффективно решать обратную задачу с достаточно сложными функциями ρ, выводящими ее за пределы классов корректности. В связи с этим решение проблемы предлагается искать в рамках концепции аналитического продолжения температурного поля; при этом восстановление (конечно не

полное) плотности ρ по термограмме f предполагается путем интерпретации температурного поля в непосредственной близости от источников тепла. Математическая обработка термограммы в этом случае фактически сводится к пересчету температурного поля аналитическим продолжением (ввиду его гармоничности вне источников тепла) на выбранное сечение для последующей интерпретации полученного поля в том или ином графическом изображении. Ожидаемый эффект от перехода к сечению температурного поля более близкому к источникам тепла состоит в повышении разрешающей способности исходной термограммы, а также - возможно и в получении принципиально новой информации. Приведен обзор методов аналитического продолжения.

В рамках модели (I) при известном граничном значении f температурного поля u и вычисляемой его нормальной производной

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = h(U-u)\big|_{\partial D} = h(U-f)$$

в предположении, что носитель плотности ρ расположен внутри некоторой области D_0 так, что $\overline{D}_0 \subset D$, задача аналитического продолжения температурного поля u в область $D \setminus \overline{D}_0$ сформулирована как задача Коши для уравнения Лапласа

$$\begin{gathered} \Delta u(M) = 0, \quad M \in D \setminus \overline{D}_0, \\ u|_{\partial D} = f, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = h(U-f), \end{gathered} \tag{2}$$

составляющая предмет исследования последующих глав диссертации.

Вторая глава посвящена разработке метода решения задачи Коши для уравнения Лапласа для естественного обобщения постановки (2)

$$\begin{gathered} \Delta u(M) = 0, \quad M \in D \setminus D_0, \\ u|_{\partial D} = f, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = g, \end{gathered} \tag{3}$$

где f и g - непрерывные функции, обеспечивающие существование решения.

Задача (3) некорректно поставлена; приведен пример, аналогичный примеру Адамара, демонстрирующий неустойчивость задачи (3).

Дан обзор известных методов устойчивого решения задачи Коши для уравнения Лапласа в различных постановках, отмечены недостатки этих методов, связанные с недостаточной общностью постановки, неполнотой обоснования, недостаточной устойчивостью к погрешностям в данных.

Регуляризованное решение задачи (3) строится на базе схемы получения точного решения. В ее основе – редукция задачи Коши к интегральному уравнению первого рода

$$\int\limits_{\partial D_0} \frac{\partial G}{\partial n_Q}(M,Q)W(Q)d\sigma_Q = -\Phi(M), \quad M \in \partial D_1 \tag{4}$$

с непрерывным на ∂D_0 решением, где

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial D}\left[\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{1}{r_{MQ}}\right)f(Q) - \frac{1}{r_{MQ}}g(Q)\right]d\sigma_Q, \tag{5}$$

$G(M,Q)$ – функция Грина задачи Дирихле для области $R^3\setminus D_0$, а ∂D_1 – граница односвязной области D_1, содержащей $\overline{D}$. Если D_0 – шар, то в качестве D_1 можно взять шар с тем же центром, содержащий $\overline{D}$.

Точное решение задачи Коши (3) выражается через решение W уравнения (4) и известную функцию Φ вида (5)

$$u(M) = -\int\limits_{\partial D_0}\frac{\partial G}{\partial n_Q}(M,Q)W(Q)d\sigma_Q - \Phi(M), \quad M \in D\setminus\overline{D_0}. \tag{6}$$

Единственность решения уравнения (4) устанавливает

Теорема I. Решение уравнения (4) единственно в $C(\partial D_0)$.

Некорректность задачи Коши (3) в приведенной схеме решения проявляется на этапе решения уравнения первого рода (4). В случае приближенно заданных функций f и g, вместо которых известны функции f^δ и g^δ такие, что

$$\|f^\delta - f\|_{L_2(\partial D)} \le \delta_f, \quad \|g^\delta - g\|_{L_2(\partial D)} \le \delta_g,$$

в качестве приближенного решения уравнения (4) рассматривается

экстремаль функционала Тихонова

$$M^\alpha[W] = \left\|\int\limits_{\partial D_0}\frac{\partial G}{\partial n}W d\sigma + \Phi^\delta\right\|^2_{L_2(\partial D_1)} + \alpha\left\|T^\ell W\right\|^2_{L_2(\partial D_0)},$$

где функция Φ^δ – приближенно вычисленная по формуле (5) правая часть уравнения (4) с функциями f^δ и g^δ вместо f и g, T^ℓ – дифференциальный оператор порядка ℓ, определяющий норму в $W_2^\ell(\partial D_0)$.

Особый интерес представляет случай, когда в качестве D_0 выбирается шар $B(0,b)$ радиуса b с центром в точке $0 \in D$. При этом в качестве ∂D_1 можно взять сферу $S(0,c)$ и тогда экстремаль W_α^δ находится методом Фурье в разложении по сферическим функциям. Как следует из утверждения теоремы 2, для равномерной сходимости приближенного решения задачи (3) к точному достаточно положить $\ell = 0$ в стабилизаторе функционала, т.е. огран иться нормой в L_2. Приближенное решение задачи (3) получено по формуле (6) при подстановке функций W_α^δ, f^δ и g^δ вместо соответствующих функций W, f и g в (5) и (6):

$$u_\alpha^\delta(M) = \int\limits_{S(0,c)}\Gamma_\alpha(M,N)\Phi^\delta(N)d\sigma_N - \Phi^\delta(M), \quad M \in D\setminus B(0,b) \tag{7}$$

где

$$\Gamma_\alpha(M,N) = \frac{1}{4\pi c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{r_{0M}}\right)^{n+1}\frac{2n+1}{1+\alpha(c/b)^{2n}}P_n(\cos\theta_{MN}), \quad c > \max_{Q\in\partial D} r_{0Q}. \tag{8}$$

P_n – полиномы Лежандра, θ_{MN} – угол между векторами $\vec{0M}$ и $\vec{0N}$, функция Φ^δ вычисляется по формуле (5) при подстановке f^δ и g^δ вместо f и g.

Теорема 2. Пусть решение задачи (3) существует в $D\setminus\overline{B(0,b-\varepsilon)}$, $0 < \varepsilon < b$. Тогда для любой функции $\alpha = \alpha(\Delta) > 0$ такой, что $\alpha(\Delta)\to 0$ и $\Delta/\sqrt{\alpha(\Delta)} \to 0$ при $\Delta \to 0$, функция $u^\delta_{\alpha(\Delta)}$ вида (7), где $\Delta = \delta_f + const\,\delta_g$ сходится к точному решению задачи (3) равномерно на любом компакте $K \subset D\setminus B(0,b)$ при $\delta_f \to 0$, $\delta_g \to 0$.

В этой же главе получено интегральное представление приближенного решения (7) в виде

$$u_\alpha^\delta(M) = \int\limits_{\partial D}\left[\frac{\partial C_\alpha}{\partial n_Q}(M,Q)f^\delta(Q) - C_\alpha(M,Q)g^\delta(Q)\right]d\sigma_Q,$$

где

$$C_\alpha(M,Q) = -\frac{1}{4\pi r_{MQ}} + \frac{1}{4\pi r_{OM}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_{OQ}}{r_{OM}}\right)^n \frac{P_n(\cos\theta_{MQ})}{1+\alpha(c/b)^{2n}}.$$

Показано, что функция $C_\alpha(M,Q)$ удовлетворяет условиям определения функции Карлемана.

Приведены формулы для случая, когда область $D\setminus\overline{B(0,b)}$ - шаровой слой $B(0,a)\setminus B(0,b)$, $a > b$, имеющие более простой вид.

В третьей главе результаты второй главы применены к задаче аналитического продолжения температурных полей (2), где область D_0 - шар $B(0,b)$.

Приближенное решение задачи (2) в $D\setminus B(0,b)$ имеет вид (7) где при $y = h(U-\xi)$

$$\Phi^\delta(M) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\left[\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{1}{r_{MQ}}\right)\xi^\delta(Q) + \frac{h}{r_{MQ}}\left(\xi^\delta(Q) - U^\delta(Q)\right)\right]d\sigma_Q \qquad (9)$$

и $\Gamma_\alpha(M,Q)$ - функция вида (8).

Теорема 3. Пусть решение задачи (2) существует в $D\setminus\overline{B(0,b-\varepsilon)}$, $0<\varepsilon<b$ и выполнены условия

$$\|\xi^\delta - \xi\|_{L_2(\partial D)} \leq \delta, \quad \|U^\delta - U\|_{L_2(\partial D)} \leq \delta.$$

Тогда для любой функции $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ такой, что $\alpha(\delta)\to 0$ и $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \to 0$ при $\delta\to 0$, функция $u^\delta_{\alpha(\delta)}$ вида (7)-(9) сходится к точному решению задачи (2) равномерно на любом компакте $K\subset D\setminus B(0,b)$ при $\delta\to 0$.

Приведены различные формы представления приближенного решения задачи (2), удобные в случае $U = const$ и для задачи (2) в шаровом слое $B(0,a)\setminus B(0,b)$.

При использовании формул приближенного решения задачи аналитического продолжения температурного поля в область $D\setminus B(0,b)$ шар $B(0,b)$ предполагается заданным. Вместе с тем, из результатов главы 2 следует, что точное решение задачи (3), а, следовательно, и задачи (2), в $D\setminus B(0,b)$ не зависит от радиуса b шара $B(0,b)$, а регуляризованное решение содержит параметр b лишь в регуляризующем множителе $1/(1+\alpha(c/b)^{2n})$, где его величина существенного значения не имеет, так как c - любое число, удовлетворяющее условию $B(0,c)\supset\overline{D}$. Центр шара $B(0,b)$, если его

выбор не связан с какими-либо конструктивными особенностями исследуемого объекта, может быть выбран как центр тяжести неизвестной плотности источников тепла ρ, для вычисления координат которого в любой заранее выбранной системе координат получена формула в зависимости от известных величин ξ и U

$$\vec{r}_0 = \int_{\partial D}\left[(\xi-U)\vec{r} + \xi\frac{\vec{n}}{h}\right]d\sigma \Big/ \int_{\partial D}(\xi-U)\,d\sigma.$$

Доказана корректность этой формулы.

Четвертая глава содержит описание алгоритмов и результаты численного решения задачи аналитического продолжения температурного поля.

В главе приводятся расчетные формулы для решения задачи Коши (2) в случае $D_0 = B(0,b)$ и звездной области D и последовательность операций при проведении расчетов на ЭВМ.

Точность предложенных алгоритмов проверяется на примере решения модельной задачи аналитического продолжения температурного поля точечного источника тепла с поверхности теплопроводящего шара на внутреннее сферическое сечение и на сечение шара плоскостью.

Эффективность принципа аналитического продолжения :оля для повышения разрешающей способности термограмм демонстрируется на примере модельной задачи разделения двух точечных источников тепла в различных вариантах, визуально не различимых на исходной термограмме.

Приведен пример обработки термограммы головы человека при выбранных в ходе численных экспериментов значениях параметров.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Предложена и исследована математическая модель задачи аналитического продолжения температурных полей в виде некорректно поставленной задачи Коши для уравнения Лапласа.

2. Построено регуляризованное по А.Н.Тихонову решение задачи Коши для уравнения Лапласа с данными общего вида на произволь-

ной гладкой замкнутой поверхности, устойчивое к погрешностям в данных Коши. Доказана сходимость приближенного решения к точному.

Показано, что полученное регуляризованное решение приводит к построению соответствующей ему функции Карлемана - аналога функции Грина для задачи Коши для уравнения Лапласа. Таким образом, предложен способ построения функции Карлемана на основе метода регуляризации А.Н.Тихонова.

3. Построено устойчивое к погрешностям во входных данных решение задачи аналитического продолжения стационарного (гармонического) температурного поля с поверхности вовнутрь однородного теплопроводящего тела, включающего источники тепла; для определения координат центра масс источников тепла получена устойчивая формула.

4. Проведено методическое исследование численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа на примере задачи аналитического продолжения температурных полей точечных источников тепла. Показана эффективность предложенного устойчивого метода решения задачи в повышении разрешающей способности термограмм на модельных примерах.

Результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в следующих работах:

1. Ланеев Е.Б. О задаче Коши для уравнения Лапласа в шаровом слое // Материалы 8 Конф. мол. ученых Ун-та дружбы народов: мат., физ., химия. Москва, 19-23 февраля 1985. Ч. 2.- М., 1985.- С. 81-87. Деп. в ВИНИТИ 29.05.85, № 3714.

2. Ланеев Е.Б. Об одной задаче продолжения потенциала в неодносвязную область // Современные задачи математической физики и математического обеспечения ЭВМ.- М.: Изд-во УДН, 1986.- С. 108-116.

3. Ланеев Е.Б. О задаче Коши для уравнения Лапласа в неодносвязной области // Статистическая и квантовая физика и ее приложения.- М.: Изд-во УДН, 1986.- С. 49-56.

4. Ланеев Е.Б. О функции Карлемана в задаче Коши для уравнения Лапласа в неодносвязной области // Прямые и обратные задачи математической физики и функциональные пространства.- М.: Изд-во УДН, 1988.- С. 86-93.

5. Ильинский А.С., Ланеев Е.Б. Об определении положения источника тепла по косвенным данным // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычислит. матем. и кибернетика.- 1988,- № 2.- С. 18-22.

6. Ланеев Е.Б. Устойчивое решение задачи Коши для уравнения Лапласа в приложении к задаче аналитического продолжения температурных полей // Всесоюзная конф. "Вычислительная физика и математическое моделирование". Волгоград, 12-18 сентября 1988 г. Тезисы докладов.- М.: Изд-во УДН, 1989.- С. 59-60.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.- М.: Наука, 1986.- 288 с.

2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения.- М.: Наука, 1978.- 206 с.

3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа.- М.: Наука, 1980.- 288 с.

4. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения.- М.: Мир, 1970.- 336 с.

5. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики.- М.: МГУ, 1984.- 112 с.

6. Страхов В.Н. и др. Состояние и перспективы развития в СССР теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Физика Земли.- 1982.- № 5.- С. 11-30.

7. Мирошников М.М. и др. Тепловидение и его применение в медицине.- М.: Медицина, 1981.- 184 с.

8. Годик Э.Э., Гуляев Ю.В. Динамическое картирование физических полей и излучение биологических объектов // Вестник АН СССР.- 1990.- № 1.- С. 78-87.

9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии.- М.: Наука, 1987.- 160 с.

10. Вабищевич П.Н. Разностные методы решения неустойчивых эволюционных задач // Вычислительные методы в математической физике.- М.: МГУ, 1986.- С. 73-87.