ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория вычислительной техники и автоматизации

На правах рукописи

КРЯНЕВ Александр Витальевич

УДК 517.9::621.039.51

КАЧЕСТВЕННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РЕАКТОРОВ

05.13.16 - применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1989

Работа выполнена в Московском ордена Трудового Красного Знамени инженерно-физическом институте

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Е.П.Жидков
доктор физико-математических наук, профессор Е.Ф.Сабаев
доктор физико-математических наук, профессор А.М.Федотов

Ведущая организация -

Институт атомной энергии им.И.В.Курчатова

Защита состоится "19" окт. 1989 г. в 10.30 часов на заседании специализированного Совета Д 047.01.04 при лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ по адресу: 141980 Дубна Московской обл. ЛВТА ОИЯИ

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЛВТА ОИЯИ

Автореферат разослан "21" августа 1989 года

Ученый секретарь
специализоронанного
Совета кандидат
физико-математических наук Иван З.М.Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и современное состояние проблемы. Теория ядерных реакторов (ЯР) уже на протяжении нескольких десятилетий является одним из основных "поставщиков" новых математических задач разного уровня сложности по их качественному исследованию и численному решению, причем методы качественного исследования и численного решения задач математической теории ЯР используются не только в самой теории ЯР, но и находят широкое применение во многих фундаментальных областях естествознания.

Математические модели, подлежащие изучению в теории ЯР, имеют различные формы и уровни сложности. Наиболее важным классом математических моделей в теории ЯР являются уравнения, описывающие распространению нейтронов в активных зонах (АЗ) ЯР.

В нашей стране и за рубежом введены или планируется ввести в число действующих новые АЭС. Причем мощность отдельных блоков АЭС непрерывно возрастала как за счет увеличения объема АЗ, так и за счет увеличения мощности, снимаемой с единицы объема АЗ. Увеличение объема АЗ приводит к значительному усилению пространственных эффектов и поэтому приходится рассматривать двух и трехмерные по пространству модели, описывающие распределение нейтронов в стационарных и нестационарных режимах. Увеличение же мощности, снимаемой с единицы объема АЗ, приводит к увеличению температуры и, как следствие, к значительному усилению влияния температуры на распределение нейтронов. Поэтому для адекватного описания процессов, происходящих в АЗ современных энергоблоков АЭС, необходимо рассматривать сложные пространственные модели по потоку нейтронов и температуре с учетом их взаимного влияния. Единое температурно-нейтронное распределение (Т-НР) может быть описано в рамках различных моделей в зависимости от типа АЗ и поставленной задачи.

Одной из основных проблем, возникающих в математической теории реакторов, является проблема корректности поставленных в ней задач, включая, в частности, создание эффективных методов решения задач, не обладающих свойством корректности. К таким задачам прежде всего относится определение стационарного режима работы реактора, что соответствует определению стационарного решения системы уравнений, описывающих Т-НР. Физическая реализуемость стационарного режима реактора, являющегося, как правило, его основным рабочим режимом, возможна лишь при соблюдении условий корректности задачи, определяющей стационарный режим, причем одним из наиболее важных требований, гарантирующих работу в стационарном режиме, является выполнение условий его устойчивости. Проблема устойчивости стационарных режимов непосредственно связана с эффективностью и безопасностью работы ЯР, поэтому изучению вопроса устойчивости стационарных режимов уделяется огромное внимание и при решении этой проблемы применяются все накопленные арсеналы результатов по теории устойчивости. В то же время математические модели Т-НР ЯР обладают рядом особенностей, учет которых при решении проблем корректности и, в частности, устойчивости стационарных режимов позволяет более эффективно и адекватно с физической точки зрения находить условия корректности решаемых задач.

В связи с запросами практики в теории ЯР возникают также некорректные задачи, причем чаще всего оказывается нарушенным условие устойчивости решения по отношению к возмущениям входных величин. При создании эффективных методов решения некорректных задач теории ЯР необходимо учитывать специфику этих задач. К некорректным задачам теории ЯР относятся обратные задачи, связанные с нейтронным и температурным распределениями, многие задачи оптимального управления распределениями, коррекция распределений с учетом показаний системы датчиков внутриреакторного контроля, задачи восстановления нейтронно-физических характеристик элементов АЗ по экспериментальным данным.

К настоящему времени наиболее изучены модели, описывающие распределение нейтронов без учета влияния температурного поля, причем наибольшее внимание уделялось качественному исследованию линейного уравнения переноса Больцмана (Ж.Ленер, Г.Винг, Йоргенс, Мика, В.С.Владимиров, Т.А.Гермогенова, М.В.Масленников, С.Б.Шихов и др.) и многогрупповой диффузионной модели (Г.Габетлер, М.Мартино, В.М.Новиков, А.И.Попыкин и др.), а также разработке численных методов решения линейных задач, связанных с распределением нейтронов (Г.И.Марчук, В.И.Лебедев и др.). Значительные результаты достигнуты в вопросах гладкости решений линейного уравнения Больцмана (В.С.Владимиров, Т.А.Гермогенова,

В.И.Агошков, А.Дуглас, Х.Капер, Р.Келлог и др.) и в решении обратных задач для линейного уравнения переноса (Г.И.Марчук, Д.С. Аниканов, А.И.Прилепко и др.).

Исследованию проблем корректности нелинейных задач Т-НР посвящено гораздо меньшее число работ, а качественные результаты по исследованию нелинейных задач и разработка эффективных численных методов их решения ещё далеки от завершения. Первые работы в этом направлении (О.Б.Москалев, В.А.Чуянов, И.А.Бахтин) были посвящены вопросам существования и единственности решений стационарной задачи на критичность в диффузионном и односкоростном газокинетическом приближениях. Некоторые частные вопросы корректности нестационарных задач Т-НР рассмотрены в работах отечественных (Е.Ф.Сабаев, Ю.И.Ершов, Ю.А.Кузнецов, С.Ф.Морозов, В.И.Сумин, В.В.Шашков) и зарубежных (Донг Нгуен, Ж.Бузони, А.Беллини-Моранте, Е.Дин, К.Пао, Ж.Фрозали, П.Шамбре) авторов.

Хотя вопросам устойчивости стационарных режимов реакторов посвящено много работ, в том числе и монографий (В.Д.Горяченко, Е.Ф.Сабаев, А.Акази, Велтон, В.Стесей, Попов, Л.Шоткин и др.), однако рассмотрение велось, как правило, для конкретных моделей (точечной или диффузионной) и до сих пор нет достаточно эффективной теории устойчивости, "работающей" для произвольной математической модели Т-НР. Что касается некорректных задач теории реакторов, то запросы практики требуют создания методов исследования корректности линейных и нелинейных задач математической теории ЯР, а на их основе разработки устойчивых и эффективных алгоритмов нахождения приближенных решений, которые в полной мере учитывали бы специфику и физический смысл рассматриваемых задач и, в частности, их решений.

Целью работы является разработка качественных и численных методов исследования вопросов корректности задач стационарного и нестационарного нейтронного и температурного распределений в АЗ ЯР, описываемых различными математическими моделями, включая создание общего конструктивного метода исследования устойчивости стационарных решений с учетом специфики математических моделей Т-НР; разработка общих методов и на их основе устойчивых численных алгоритмов нахождения приближенных решений некорректных задач теории ЯР.

Научная новизна. Вопросы единственности и устойчивости стационарных режимов являются основными для математической теории ЯР при исследовании нелинейных моделей Т-НР. Для многих конкретных моделей Т-НР методы, разработанные и применяемые в математической теории ЯР, не "работали" при решении этих двух проблем. В диссертации представлен новый подход для решения проблем корректности стационарных Т-НР, "работающий" для применяемых в настоящее время моделей Т-НР. Этот подход базируется на разработанных в диссертации теории устойчивости относительно конуса и теории функционалов обратных связей. Впервые показано, что проблемы единственности и устойчивости стационарных Т-НР взаимно связаны и могут решаться на основе единого подхода. Для решения некорректных задач математической теории ЯР в диссертации предложен новый метод - обобщенный метод максимального правдоподобия (ОММП), учитывающий, в частности, специфику реакторных задач. Этот метод позволяет использовать априорную информацию как детерминированного, так и статистического характера. На основе ОММП сконструированы и обоснованы новые устойчивые алгоритмы численного нахождения приближенных решений многих прикладных задач.

Теоретическая и практическая значимость. В работе создана общая теория корректности стационарных и нестационарных нелинейных задач Т-НР в размножающих средах, позволяющая рассматривать и решать проблемы корректности для различных математических моделей Т-НР конкретных ЯР. Результаты работы дают возможность на достаточно высоком уровне общности обосновать качественное поведение Т-НР во времени и возможность устойчивой работы ЯР в стационарном режиме. Эти результаты позволяют также конструировать устойчивые алгоритмы нахождения стационарных режимов на основе пространственных нелинейных математических моделей Т-НР. Примеры, приведенные в диссертации, показывают, что с помощью созданного общего метода исследования устойчивости можно в ряде случаев с относительно небольшими вычислительными затратами проводить исследование устойчивости стационарных режимов конкретных ЯР.

Результаты диссертации по созданию новых методов решения

некорректных задач позволяют для многих прикладных задач более эффективно и полнее использовать априорную информацию об искомом решении и конструировать устойчивые численные алгоритмы решения конкретных некорректных задач, включая задачи теории ЯР. Примеры применения этих результатов приведены в диссертации. Представленные в работе алгоритмы МРИ (см.гл.4 диссертации) для решения операторных уравнений первого рода в настоящее время используются не только в теории ЯР, но и при решении обратных задач молекулярной газодинамики и математической обработки экспериментальных данных.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертации докладывались на:

- Всесоюзной Воронежской зимней математической школе,
- Всесоюзном семинаре по динамике ЯЭУ,
- Всесоюзной школе-семинаре по методам решения некорректных задач и их приложениям, 1973,1983,1985г.г.,
- Всесоюзной конференции по нейтронной физике, г.Киев, 1983г.,
- Всесоюзной конференции "Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов", г.Нальчик, 1982г.,
- Всесоюзной конференции по планированию и автоматизации эксперимента в научных исследованиях, г.Москва, 1983г.,
- Сибирской школе по условно корректным задачам, г.Красноярск, 1986г.,

а также на научных конференциях МИФИ, 1972-1987г.г. и на научных семинарах в ИТМП АН БССР, в отделе вычислительной математики АН СССР, в ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, в ИПУ АН СССР, в ОИЯИ (Дубна) и в других организациях.

По теме диссертации опубликованы 1 научная монография и 27 других работ.

Автор защищает: 1.Разработку теории устойчивости относительно конуса стационарных положительных решений эволюционных уравнений специального класса. 2.Метод исследования устойчивости стационарных решений математических моделей нейтронного распределения в размножающих средах с внутренними и внешними обратными связями, основанный на анализе знаков функционалов обратной связи. 3.Решение проблемы единственности стационарных нейтронных распределений в нелинейных моделях. 4.Применение метода регуляризованных итераций и разработанных на его основе численных алгоритмов для решения некорректных задач математической теории реакторов. 5.Статистический метод решения некорректных задач - обобщенный метод максимального правдоподобия и основанные на нем численные алгоритмы. 6.Статистическую форму регуляризованного метода наименьших квадратов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из оглавления, введения, 5-ти глав, заключения (260 страниц машинописного текста), приложения (40 с.), включая 32 рисунка. Список литературы содержит 305 наименований (27 с.).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении (с.5-22) дано обоснование актуальности проблем, рассмотренных в диссертации, анализируется современное состояние проблем и дается общая характеристика работы.

Глава I (с.23-71) играет важную роль при исследовании проблем корректности стационарных и нестационарных задач Т-НР. Во-первых, в ней представлены некоторые основные, используемые в диссертации, результаты по теории эволюционных уравнений первого порядка, обладающих свойством положительности, с неограниченным оператором в правой части, причем уровень общности выбран с учетом вида и характера задач, рассматриваемых в математической теории ЯР. Следует подчеркнуть, что все используемые в настоящее время математические модели Т-НР в АЗ ЯР описываются этим классом эволюционных уравнений. Во-вторых, в главе I представлены результаты автора, используемые в дальнейшем при исследовании корректности задач математической теории ЯР. Наличие свойства положительности позволило предложить новый метод исследования устойчивости стационарных Т-НР, базирующийся на понятии устойчивости относительно конуса.

В § I.I приведены основные определения и утверждения, связанные с положительными эволюционными уравнениями в вещественном банаховом пространстве X. Основным объектом исследования является эволюционное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Q(x,t), \qquad (I.I)$$

где $A: D(A) \to X$ - неограниченный, линейный, замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A) \subset X$, порождающий линейную, положительную относительно конуса $K \subset X$ полугруппу операторов e^{At} класса (C_0), $Q(x,t)$ - ограниченный, положительный, вообще говоря, нелинейный оператор, определенный для всех $x \in K$.

Для уравнения (I.I) вводится понятия сильного и обобщенного положительного решения задачи Коши с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \in K. \qquad (I.2)$$

Эволюционный оператор Коши $V(t,t_0)$ уравнения (I.I) положителен и каждое положительное решение задачи Коши представимо в виде $x(t) = V(t,t_0)x_0$.

Большая часть главы I посвящена вопросу устойчивости положительных решений уравнения (I.I). При исследовании устойчивости используются нижеследующие понятия.

Положительный оператор B называется: I.вогнутым; 2.оператором квазисжатия; 3.слабо вогнутым; 4.оператором слабого квазисжатия; 5.выпуклым; 6.оператором квазирастяжения; 7.оператором квазирастяжения в большую сторону; 8.оператором квазирастяжения в меньшую сторону - на элементе $x^* \in K$, если для любых $\alpha \in [0,1]$, $\beta > 1$ выполнены неравенства:

I. $B(\alpha\beta x^*) \geqslant (1+\eta)\alpha B(\beta x^*)$;

2. $B(\alpha x^*) \geqslant (1+\eta)\alpha B x^*$, $(1+\eta) B(\beta x^*) \leqslant \beta B(x^*)$;

3. $B(\alpha\beta x^*) \geqslant \alpha B(\beta x^*)$;

4. $B(\alpha x^*) \geqslant \alpha B(x^*)$, $B(\beta x^*) \leqslant \beta B(x^*)$;

5. $(1+\eta) B(\alpha\beta x^*) \leqslant \alpha B(\beta x^*)$;

6. $(1+\eta) B(\alpha x^*) \leqslant \alpha B(x^*)$, $B(\beta x^*) \geqslant (1+\eta)\beta B(x^*)$;

7. $B(\beta x^*) \geqslant (1+\eta)\beta B(x^*)$;

8. $(1+\eta) B(\alpha x^*) \leqslant \alpha B(x^*)$

соответственно (для некоторого $\eta > 0$).

В дальнейшем предполагается, что оператор Q не зависит от t и уравнение (I.I) имеет стационарное решение $x^* \in K$, т.е. $Ax^* + Q(x^*) = 0$. Тогда x^* - неподвижная точка эволюционного оператора $V(t)$ для любого $t \geqslant 0$, т.е. $V(t)x^* = x^*$. В диссертации приведены свойства оператора $V(t)$ на элементе x^* в терминах свойств правой части уравнения (I.I).

Лемма I.I. Пусть оператор $Q(x)$ монотонен на конусе K и существуют такие $R > r > 0$, что $Rx^* \geq e^{At}Q(x) \gg r x^*$ для $t \in [0,T]$. Тогда из свойства: I.вогнутости; 2.квазисжатия; 3.слабой вогнутости; 4.слабого квазисжатия; 5.выпуклости; 6.квазирастяжения в большую сторону; 7.квазирастяжения в меньшую сторону; 8.квазирастяжения на элементе $x^* \in K$ оператора $Q(x)$ следует наличие такого же свойства у эволюционного оператора $V(t)$ для всех $t \in [0,T]$.

Во многих приложениях,включая математическую теорию ЯР,физический смысл имеют лишь положительные решения.Более того,в таких задачах нелинейный оператор Q определен не для всех $x \in X$,а только для физически реализуемых элементов $x \in K$.Поэтому необходимо рассматривать устойчивость не относительно любых отклонений от исследуемого решения уравнения (I.1),а лишь таких,при которых решения также принадлежат конусу.

Положительное решение $x = \xi(t)$ уравнения (I.I) назовем устойчивым относительно конуса K ,если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$,что как только $\|x_0 - \xi(0)\| \leq \delta$, положительное обобщенное решение $x(t)$, $x(0) = x_0 \in K$, уравнения (I.I) удовлетворяет неравенству $\|x(t) - \xi(t)\| \leq \varepsilon$ для всех $t > 0$.

Аналогично вводятся определения асимптотической устойчивости в целом относительно конуса.

Устойчивость относительно конуса положительных решений положительных эволюционных уравнений вида (I.I) по существу - свойство более узкое,чем устойчивость по Ляпунову в том смысле, что если бы оператор Q был определен не только для $x \in K$, а для любых $x \in X$,то из устойчивости по Ляпунову следует устойчивость относительно конуса.Поэтому правомерно ожидать,что существуют специальные методы исследования устойчивости относительно конуса,отличные от традиционных методов исследования устойчивости по Ляпунову (вернее их аналогов,с учетом положительности уравнений,приведенных в диссертации).

Теорема I.I. Пусть конус K нормален и существует такое $T > 0$,что $V(t)$ монотонен для $t \in [0,T]$ в окрестности x^*,а оператор $V(T)$ u_0 - положителен и является оператором слабого квазисжатия на элементе x^*.Тогда положительное стационарное решение x^* уравнения (I.I) устойчиво относительно конуса.

В частности,теорема I.I остается в силе,если условие

слабого квазисжатия $V(t)$ на x^* заменить условием слабой вогнутости $V(t)$ на x^*.

Теорема I.2. Пусть конус K нормален и существует такое $T > 0$,что $V(t)$ монотонен для $t \in [0,T]$ на конусе,а оператор $V(t)$ u_0 - положителен и является оператором квазисжатия на элементе x^*.Тогда x^* асимптотически устойчиво в целом относительно конуса K .

В частности,теорема I.2 остается в силе,если условие квазисжатия $V(t)$ на x^* заменить условием вогнутости $V(T)$ на x^*.

Если в теореме I.2 монотонность $V(t)$ выполняется только в окрестности x^*,то x^* асимптотически устойчиво относительно конуса.

Если эволюционное уравнение (I.I) определено на всем пространстве X ,то неустойчивость относительно конуса порождает одновременно неустойчивость по Ляпунову.Обратное в общем случае неверно.

Теорема I.3. Пусть конус K нормален и существует такое $T > 0$,что оператор $V(T)$ монотонен на конусе и является оператором квазирастяжения либо в большую,либо в меньшую сторону на элементе x^*.Тогда x^* неустойчиво относительно конуса.

В частности,теорема I.3 остается в силе,если условие квазирастяжения в большую или в меньшую сторону $V(T)$ на элементе x^* заменить условием растяжения или выпуклости $V(T)$ на элементе x^*.

Если в условиях теоремы I.3 $V(T)$ - оператор квазирастяжения в большую сторону на x^*,то "уход" положительных возмущенных решений от x^* с ростом t связан с неограниченным ростом нормы этих решений.Пользуясь реакторной терминологией,можно сказать,что система,для которой (I.I) является математической моделью,надкритична на мощностях больших,чем стационарная.Если же в условиях теоремы I.3 $V(T)$ - оператор квазирастяжения в меньшую сторону на x^*,то "уход" положительных возмущенных решений от x^* с ростом t связан с уменьшением норм возмущенных решений. Следовательно можно сказать,что в этом случае система (I.I) подкритична на мощностях меньших,чем стационарная.

В теоремах I.I-I.3 условия устойчивости или неустойчивости относительно конуса сформулированы в терминах свойств эволюционного оператора $V(t)$.Поскольку оператор $V(t)$,как правило в явном виде неизвестен, то с точки зрения приложения этих теорем для исследования устойчивости относительно конуса решений конкретных положительных эволюционных уравнений нужно уметь обнаруживать необходимые свойства оператора $V(t)$ по свойствам задаваемой, и поэтому известной явно, правой части уравнения (I.I). В диссертации приведены соответствующие утверждения по этому вопросу, частью которых является лемма I.I.

В главе I приведены также утверждения об устойчивости относительно конуса стационарных положительных решений систем, являющихся частными классами уравнений вида (I.I) и используемых в математической теории ЯР.

Во второй главе диссертации введен и обоснован еще один метод исследования устойчивости относительно конуса стационарных положительных решений эволюционных уравнений специального класса, основанный на оценке знаков функционалов обратной связи.

В главе П (с.7I-I56) исследуются вопросы существования, единственности и устойчивости положительных стационарных и нестационарных решений системы уравнений, описывающих Т-НР в АЗ ЯР, причем функция распределения нейтронов подчиняется квазилинейному кинетическому уравнению Больцмана:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -v\vec{\Omega}\nabla\Phi - v\Sigma_t(\vec{r},E,T)\Phi + \sum_b\sum_l\iint_Q dE'd\vec{\Omega}'v'\cdot \\
&\cdot\Sigma_{bl}(\vec{r},E',T)W_{b,l}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega},T)\cdot\Phi(\vec{r},E',\vec{\Omega}'t) + \\
&+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j C_j(\vec{r},E,t),\ \vec{r}\in V,\ \vec{\Omega}\in V_\Omega,\ E\in[0,E_o], \\
&Q=[0,E_o]\times V_\Omega,\ \Phi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)\big|_{\vec{r}\in S}=0,\ \vec{\Omega}\cdot\vec{n}<0, \qquad (2.I)\\
&\frac{\partial C_j}{\partial t} = -\lambda_j C_j + \sum_l\iint_Q dE'd\vec{\Omega}'v'\omega_{l,j}(E',E)\Sigma_{f,l}(\vec{r},E',T)dE'd\vec{\Omega}', \\
&\qquad j=\overline{1,m},\quad \frac{\partial T}{\partial t} = A_1T + B_1(T)\Phi.
\end{aligned}$$

В системе (2.I): $\Phi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)$ - функция распределения мгновенных нейтронов, имеющих энергию E и направление скорости $\vec{\Omega}$ в точке $\vec{r}$ в момент времени t; $C_j(\vec{r},E,t)$ - функция распределения эмиттеров запаздывающих нейтронов j-ой группы, $T(\vec{r},t)$ - температура. Остальные обозначения можно найти в [II].

В дальнейшем предполагается, что $T\equiv 0$ соответствует работе ЯР на нулевом уровне мощности, т.е. когда $\Phi\equiv 0$. Тогда согласно физическому смыслу $T(\vec{r},t)$ должна быть неотрицательной (линейный оператор A_1 однороден).

В диссертации доказывается, что при соответствующих условиях, налагаемых на сечения $\Sigma_t(\vec{r},E,T)$, $\Sigma_{b,l}(\vec{r},E,T)$, $\Sigma_{f,l}(\vec{r},E,T)$, на индикатрисы рассеяния $W_{b,l}(E',E,\vec{\Omega},T)$ и на другие входные величины, определяющие систему (2.I), она может рассматриваться как частный случай эволюционного уравнения (I.I) вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Q_1(x)x + Q_2(x)x \qquad (2.2)$$

в банаховом пространстве элементов $x=(\Phi,C_1,\dots,C_m,T)^T$, $\Phi\in L^p_D$, $C_j\in L^p_D$, $T\in L^\infty_V$ с конусом K элементов x, для которых Φ, C_j, T принадлежат множеству почти всюду неотрицательных функций из L^p_D, L^p_G, L^∞_V соответственно; $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ для каждого фиксированного $x\in K$ - линейные, ограниченные операторы, причем $-(A+Q_1(x))^{-1}Q_2(x)$ - положительные операторы.

Наряду с задачей Коши для системы (2.I) или, что эквивалентно, для уравнения (2.2), в соответствии с физическим смыслом этой системы, рассматривается квазистационарное (условно-критическое) уравнение

$$Ax + Q(x)x + \frac{1}{K_{эф}}Q_2(x)x = 0; \qquad (2.3)$$

которое относительно компонент Φ, T имеет вид системы

$$\begin{aligned}
&L(T)\Phi = \frac{1}{K_{эф}}K(T)\Phi,\ -A_1T = B_1(T)\Phi, \\
&L(T)\Phi = v\vec{\Omega}\nabla\Phi + v\Sigma_t(\vec{r},E,T)\Phi, \qquad (2.4)\\
&K(T)\Phi = \sum_l\iint_Q dE'd\vec{\Omega}'\cdot v'\Big(\sum_b\Sigma_{b,l}(\vec{r},E',T)W_{b,l}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega},T) + \\
&+\sum_{j=1}^{m}\omega_{l,j}(E',E)\cdot\Sigma_{f,l}(\vec{r},E',T)\Big)\cdot\Phi(\vec{r},E',\vec{\Omega}').
\end{aligned}$$

С использованием результатов первой главы доказывается, что путем изменения $K_{эф}$ в промежутке, размеры которого указываются, можно обеспечить квазистационарное Т-НР с любым уровнем мощности ЯР. Даются оценки промежутка изменения $K_{эф}$ в зависимости от свойств входных величин системы (2.I). В частности, доказано, что если ЯР нулевой мощности надкритичен (подкритичен), а реактор бесконечно большой мощности подкритичен (надкритичен), то существует стационарное Т-НР ЯР.

Существование квазистационарного положительного решения задачи (2.4) для каждого $K_{эф}$, принадлежащего некоторому промежутку, физически означает возможность добиться компенсации влияния температуры на размножающие свойства АЗ с помощью внешнего монотонного изменения размножающих свойств среды за счет монотонного изменения $K_{эф}$ в вышеуказанном промежутке. Принятый здесь способ компенсации влияния обратной связи широко используется при расчетах ЯР на критичность.

Известно, что для одного значения $K_{эф}$ может существовать несколько квазистационарных Т-НР. В § 2.2 строится теория функционалов обратной связи с помощью которой выясняется причина неединственности и дается ответ на вопрос о количестве квазистационарных, в частности, стационарных Т-НР.

Рассматривается положительное уравнение вида (2.2) в произвольном банаховом пространстве X с острым конусом K. Предположим, что условно-критическое уравнение (2.3) при $K_{эф}=K^*_{эф}>0$ имеет положительное решение x^*. Обозначим: I. $x^+\in K^+$ единственное положительное решение сопряженного уравнения

$$A^+x^+ + Q_1^+(x^*)x^+ + \frac{1}{K^*_{эф}}Q_2^+(x^*)x^+ = 0, \qquad (2.5)$$

где A^+, $Q_1^+(x^*)$, $Q_2^+(x^*)$ - сопряженные к A, $Q_1(x^*)$, $Q_2(x^*)$ линейные операторы, причем нормировку x^+ выберем так, что значение линейного функционала $\langle x^*, x^+\rangle = I$; 2. P - оператор проектирования на подпространство $X\setminus X_1$, где X_1 - одномерное подпространство, порожденное элементом x^*; 3. $Rx = -(A+Q_1(x))^{-1}Q_2(x) = R(x)x$; 4. $G(K^*_{эф}) = (R(x^*) - K^* I)^{-1}$ - ограниченный обратный на подпространстве $X\setminus X_1$; 5. $C^* = R'(x^*) - R(x^*)$, где $R'(x^*)$ - производная Фреше оператора R в точке x^*. Введем функционал

$$J_0(x) = \langle [I - P(I+G(K^*_{эф})PC^*)^{-1}G(K^*_{эф})P]C^*x, x^+\rangle. \qquad (2.6)$$

Теорема 2.I. Пусть $J_0(x^*)\neq 0$. Тогда существует $\delta>0$ такое, что для всех $K_{эф}\in[K^*_{эф}-\delta, K^*_{эф}+\delta]$ задача (2.3) имеет единственное положительное решение $x(K_{эф})$, непрерывное по $K_{эф}$ и $x(K^*_{эф}) = x^*$. Если $J_0(x^*)>0$, то $x(K_1)\geq x(K_2)$ при $K_1>K_2$, если $J_0(x^*)<0$, то $x(K_1)\leq x(K_2)$ при $K_1>K_2$ (предполагается, что норма GC^* мала).

$J_0(x)$ назовем функционалом обратной связи нулевого порядка (ФОС). Таким образом, если ФОС отличен от нуля, то обеспечена единственность квазистационарных положительных решений, мало отличающихся по норме от x^*, для $K_{эф}$ близких к $K^*_{эф}$. Причиной неединственности является наличие таких квазистационарных положи-

тельных решений x^*, при которых ФОС равен нулю (критическая точка). Оказывается, что в этом случае вопрос о количестве квазистационарных положительных решений зависит от знака первого отличного от нуля ФОС порядка выше нулевого, вводимого по аналогии с ФОС нулевого порядка.

Для модели Т-НР первая компонента $\Phi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ вектор-функции x^+ является функцией распределения ценности мгновенного нейтрона. При малых значениях нормы оператора GC^* знаки ФОС и $\langle C^*x^*, x^+\rangle$ совпадают. Для модели Т-НР (2.I) малость нормы C^* означает малую мощность стационарного режима или слабую зависимость нейтронно-физических характеристик нуклидов, входящих в состав АЗ, от температуры.

В § 2.4 с учетом специфики эволюционных уравнений, описывающих Т-НР, разработан метод решения задачи об устойчивости стационарных Т-НР, в том числе с учетом системы внешнего управления. Метод обладает универсальностью, т.е. с его помощью удается решать задачи об устойчивости стационарных Т-НР в различных моделях по потоку нейтронов и различными вариантами моделей по температуре и внешнего управления. Основной идеей этого метода является нахождение такого конуса, отличного от исходного , относительно которого эволюционный оператор всегда монотонен по крайней мере в малой окрестности исследуемого на устойчивость стационарного решения, и дальнейшее применение теорем I.I-I.3.

Рассматривается положительное эволюционное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Q(x)x \qquad (2.7)$$

в произвольном вещественном пространстве X со строго положительным конусом $K\subset X$.

Предполагается, что стационарное положительное решение уравнения (2.7) x^* - внутренняя точка K. Обозначим: I. x^+ положительное решение сопряженного уравнения

$$A^+x^+ + Q^+(x^*)x^+ = 0; \qquad (2.8)$$

2. $\langle x, x^+\rangle$ линейный функционал, такой, что $\langle x^*, x^+\rangle = 1$; 3. $J(x^*) = \langle Q'_x(x^*)x^*, x^+\rangle$, где $Q'_x(x^*)$ - производная оператора $Q(x)$ по функциональному параметру x в точке x^*.

При выполнении довольно общих и естественных с точки зрения теории ЯР условий справедливы

Теорема 2.2. Пусть $J(x^*)<0$. Тогда x^* асимптотически устойчиво.

Теорема 2.3. Пусть $J(x^*) > 0$. Тогда x^* неустойчиво.

Предположим, что в уравнение (2.7) введено управление u, целью которого является обеспечение устойчивости x^*. Тогда вместо уравнения (2.7) имеем систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Q(x,u)x, \quad \frac{du}{dt} = Ru + B(x - x^*), \qquad (2.9)$$

где $u \in U$ - вещественное банахово пространство; $R : U \to U$ - ограниченный линейный оператор, спектр которого лежит внутри левой полуплоскости (условие самоустойчивости системы регулирования); $B : X \to U$ - линейный ограниченный оператор; $Q(x,0) = Q(x)$.

Обозначим $u^* = -R^{-1}Bx^*$, $J_u(x^*) = \langle Q'_u(x^*,0)\, u^* x^*, x^+ \rangle$, где $Q'_u(x^*,0)$ - производная оператора $Q(x,u)$ по функциональному параметру u в точке $u=0$ при $x = x^*$, $\tilde{J}(x^*) = J(x^*) + J_u(x^*)$.

Теорема 2.4. Пусть $\tilde{J}(x) > 0$. Тогда стационарное решение $(x^*, 0)$ системы (2.9) асимптотически устойчиво.

Теорема 2.5. Пусть $\tilde{J}(x^*) < 0$. Тогда стационарное решение $(x^*, 0)$ системы (2.9) неустойчиво.

В условиях теорем 2.2-2.5 предполагается малость нормы линейного оператора $Q'_x(x^*)$.

Функционал $\tilde{J}(x^*)$, от знака которого зависит устойчивость x^*, равен сумме двух функционалов $J(x^*)$ и $J_u(x^*)$. Функционал $J(x^*)$ не зависит от управления и определяется только характером внутренних обратных связей, напротив, функционал $J_u(x^*)$ при отсутствии управления равен нулю, а при наличии управления его величина определяется характером влияния управления на изучаемую систему. Функционалы $J(x^*)$ и $J_u(x^*)$ назовем соответственно коэффициентами температурной и внешней обратных связей (КТОС и КВОС).

Обозначим $x^* = (\Phi^*, C_1^*, \ldots, C_m^* T^*)^T$ - стационарное положительное решение системы (2.1), соответствующее стационарному Т-НР, где $\Phi \subset K_D^\infty$, $C_j^* \in K_G^\infty$, $T^* \in K_V^\infty$.

Для стационарного Т-НР модели (2.1) КТОС совпадает с функционалом $\langle C^* \Phi^*, \Phi^+ \rangle$ и имеет вид

$$J(x^*) = \iiint_D \Phi^+(\vec{z}, E, \vec{\Omega}) \Big[(Q'_T(T^*))_0 \Phi^* + \sum_{j=1}^{m} (Q'_T(T^*))_j \Phi^* \Big] d\vec{z}\, dE\, d\vec{\Omega}, \qquad (2.10)$$

где $(Q'_T(T^*))_0 \Phi^* = -\frac{\partial \Sigma_t^*}{\partial T} T^*(\vec{z}) \Phi^*(\vec{z}, E, \vec{\Omega}) + T^*(\vec{z}) \sum_b \sum_\ell \iint dE' d\vec{\Omega}\, v' \cdot$

$$\cdot \Big[\frac{\partial \Sigma_{b,\ell}^*}{\partial T} W_{b,\ell}^* + \Sigma_{b,\ell}^* \frac{\partial W_{b,\ell}^*}{\partial T} \Big] \cdot \Phi^*(\vec{z}, E', \vec{\Omega}),$$

$$(Q'_T(T^*))_j \Phi^* = T^*(\vec{z}) \sum_\ell \iint_\Omega dE\, d\vec{\Omega}'\, v' \omega_{\ell,j}(E', E) \frac{\partial \Sigma_{f,\ell}^*}{\partial T} \Phi^*(\vec{z}, E', \vec{\Omega}'),$$

индекс "$*$" означает, что функция вычисляется при $T = T^*(\vec{z})$, $\Phi^+(\vec{z}, E, \vec{\Omega})$ - функция распределения ценности мгновенного нейтрона.

Из (2.10) следует, что для подсчета КТОС достаточно знать стационарные Т-НР и ценность нейтрона, которые вычисляются во всех стандартных современных программах расчета ЯР на критичность.

При вводе управления все уравнения системы (2.1) остаются без изменения за исключением первого, в правую часть которого добавляется слагаемое $-f(\vec{z}, E, \vec{\Omega}, u)\Phi$, где $f(\vec{z}, E, \vec{\Omega}, u)$ - функция, характеризующая эффективность и расположение системы регулирования в АЗ ЯР, и $f(\vec{z}, E, \vec{\Omega}, 0) = 0$.

Ненулевой управляющий сигнал возникает только при отличии распределения мгновенных нейтронов Φ от стационарного Φ^* и формируется согласно уравнению

$$\frac{du}{dt} = Ru + B(\Phi - \Phi^*),$$

где $B : L_D^\infty \to U$ - линейный ограниченный оператор.

Управляющий сигнал u для системы регулирования, выполненной на базе регулирующих стержней, представляет собой вектор размерности n, где n - число регулирующих стержней. В этом случае КВОС принимает вид

$$J_u(x^*) = \iiint_D (\mathrm{grad}_u f(\vec{z}, E, \vec{\Omega}, 0), u^*) \Phi^*(\vec{z}, E, \vec{\Omega}) \cdot \Phi^+(\vec{z}, E, \vec{\Omega})\, d\vec{z}\, dE\, d\vec{\Omega},$$
$$u^* = -R^{-1} B \Phi^*. \qquad (2.11)$$

В § 2.4 на основе формулы (2.11) конструируется алгоритм построения оптимальной системы регулирования с минимальным количеством регулирующих стержней.

В главе III (с.156-192) методы, разработанные в главах I, II, применяются для исследования вопросов корректности стационарных и нестационарных задач Т-НР, когда распределение нейтронов описывается одногрупповым диффузионным приближением:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathrm{div}(D(\vec{z}) \nabla \Phi) - \Sigma_a(\vec{z}, T)\Phi + (1-\beta)\rho_T \sum_\ell \nu_\ell \Sigma_{f,\ell}(\vec{z}, T)\Phi + \qquad (3.1)$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j C_j\,,\ \beta=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\,,\ \left(\alpha_1(\vec{z})\frac{\partial\Phi}{\partial n}+\alpha_2(\vec{z})\Phi\right)_{\vec{z}\subset S}=0,$$

$$\frac{\partial C_j}{\partial t}=\rho_T\beta_j\sum_{\ell}\nu_\ell\,\Sigma_{f,\ell}(\vec{z},T)\Phi-\lambda_j C_j\,,\ j=\overline{1,m},\quad \frac{\partial T}{\partial t}=A_1T+B_1(T)\Phi.$$

В § 3.I показано, что с помощью функции Грина квазистационарная задача для модели (3.I) сводится к уравнению вида (2.3) и, следовательно, можно применить разработанную во второй главе теорию ФОС.

Функционал $\langle C^*x^*,x^+\rangle$ для модели (3.I) имеет вид

$$\langle C^*,x^*,x^+\rangle=\int_V\left(-\frac{\partial\Sigma_a(\vec{z}';T^*(\vec{z}'))}{\partial T}+\rho_T\sum_{\ell}\nu_\ell\,\frac{\partial\Sigma_f(\vec{z}';T^*(\vec{z}'))}{\partial T}\right)\cdot\Phi^{*2}(\vec{z}')\cdot T^*(\vec{z}')\,d\vec{z}',$$

где $\Phi^*(\vec{z})$, $T^*(\vec{z})$ – квазистационарные распределения мгновенных нейтронов и температуры.

Аналогично, как это сделано для газокинетической модели, показывается, что причиной неединственности квазистационарных Т-НР в рамках модели (3.1) является смена знака ФОС и дано решение проблемы количества квазистационарных Т-НР в случае их неединственности. Устойчивость положительных стационарных решений системы (3.I) исследуется по той же схеме, что и для газокинетической модели.

В главе Ш показано, что модель (3.I) сводится к уравнению вида (2.7) и может быть применена развитая во второй главе теория устойчивости положительных стационарных решений. В частности, КТОС и КВОС для стационарного Т-НР модели (3.I) имеют вид

$$J(x^*)=\langle C^*x^*,x^+\rangle, \tag{3.2}$$

$$J_1(x^*)=\int_V(\mathrm{grad}_u f(\vec{z},0),u^*)\,\Phi^{*2}(\vec{z})\,d\vec{z}, \tag{3.3}$$

где $f(\vec{z},u)$ – функция эффективности и расположения системы регулирующих стержней, $u=R^{-1}B\,\Phi^*$ (модель управления имеет тот же вид, что и во второй главе).

<u>Теорема 3.I</u> Если КТОС отрицателен (положителен), то стационарное Т-НР модели (3.I) асимптотически устойчиво (неустойчиво).

<u>Теорема 3.2.</u> Если суммарное значение КТОС и КВОС отрицательно (положительно), то стационарное Т-НР модели (3.I) в условиях наличия управления асимптотически устойчиво (неустойчиво).

В условиях теорем 3.I, 3.2 предполагается, что либо рассматривается стационарный режим малой мощности, либо зависимость сечений от переменных обратной связи слаба.

В § 3.2 рассмотрены модели Т-НР в рамках одногруппового диффузионного приближения и с конкретизацией модели переноса тепла. Первая модель достаточно проста по структуре и некоторые частные случаи этой модели ранее рассматривались другими авторами (Е.Дин, П.Шамбре, Донг Нгуен). Применение развитой в диссертации теории позволяет получить более общие и полные результаты. Математическая модель переноса тепла второй задачи имеет вид

$$\frac{\partial T_i}{\partial t}=-v_i\frac{\partial T_i}{\partial x}+\alpha\cdot n_i\left(\Theta_i|_{z=z_0}-T_i(x,t)\right),$$

$$\frac{\partial\Theta_i}{\partial t}=\frac{\lambda}{c\rho}\cdot\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial\Theta_i}{\partial z}\right)+B_i\Phi, \tag{3.4}$$

$$-\lambda\frac{\partial\Theta_i}{\partial z}\Big|_{z=z_0}=\alpha\left(\Theta_i|_{z=z_0}-T_i(x,t)\right),\ T_i(0,t)=0,\ 0<x<h,\ 0\le z\le z_0\,,\ i=\overline{1,N}$$

и справедлива для ЯР, пронизанного технологическими каналами высоты h, по которым прокачивается жидкий или газовый теплоноситель, $T_i(x,t)$, $\Theta_i(z,x,t)$ – температура теплоносителя и твэлов i-го пакета (остальные обозначения см., например, в [II]).

<u>Глава IУ</u> (с.I92-209) посвящена методу регуляризованных итерации (МРИ) решения некорректных задач математической теории ЯР. МРИ является одним из итерационных методов решения некорректных задач, общая теория которых разработана в работах В.А.Морозова, А.Б.Бакушинского и др. авторов.

В § 4.I исследуются некоторые свойства МРИ для нахождения приближенных решений линейных уравнений первого рода

$$A_T u=f_T \tag{4.I}$$

в гильбертовом пространстве H.

Если A_T неотрицательный самосопряженный оператор, то итерационный процесс (ИП) МРИ имеет вид

$$A_T u_n+Bu_n=Bu_{n-1}+f_T, \tag{4.2}$$

где B – положительно-определенный самосопряженный оператор.

На практике элемент f_T, а часто и оператор A_T известны с погрешностями. Тогда вместо ИП (4.2) имеем

$$(A_T+\Delta A)u'_n + B u'_n = B u'_{n-1} + f_T + \Delta f, \qquad (4.3)$$

где $A = A_T + \Delta A$, $f = f_T + \Delta f$, $\|\Delta A\| \leq \mu$, $\|\Delta f\| \leq \delta$.

Обозначим $\|(A_T+B)^{-1}B\| = q \geq 1$, $m_B = \inf (Bu,u)/\|u\|$.

<u>Теорема 4.I.</u> Пусть $\|(A_T+B)^{-1}\Delta A\| < 1$ и $u_0 = u'_0$. Тогда I° если $q > 1$, то $\|u_n - u'_n\| \leq \frac{q^n - 1}{(q-1)m_B}\left[\delta + \mu\left(qC + \frac{\|f_T\|}{m_B}\right)\right] + o(\mu)$,

2° если $q = 1$, то $\|u_n - u'_n\| \leq \frac{n}{m_B}\left[\delta + \mu\left(C + \frac{\|f_T\|}{m_B}\right)\right] + o(\mu)$,

где $\|u_n\| \leq C$, $o(\mu)/\mu \to 0$ при $\mu \to 0$.

Из теоремы 4.I, в частности, следует, что $\min\limits_n \|u_n - u'_n\| \to 0$, при $\delta, \mu \to 0$. Поэтому МРИ является регуляризирующим алгоритмом нахождения приближенного решения уравнения (4.I), в котором роль параметра регуляризации играет подходящее значение числа итераций. Если A_T известен без погрешностей, то за приближенное решение можно выбирать u_{n_0} с тем номером n_0, для которого впервые выполнено неравенство $\|Au_n - f\| \leq \delta$ (способ невязки).

<u>Лемма 4.I.</u> Пусть n_0 выбрано согласно способу невязки. Тогда $u_{n_0} \to u^*$ при $\delta \to 0$.

Выбор подходящего значения n по способу невязки хорошо зарекомендовал себя при решении практических задач и в настоящее время наиболее часто используется при реализации МРИ. Примеры применения МРИ для решения некорректных задач теории реакторов даны в приложении.

В § 4.2 развит МРИ решения некорректной задачи Коши для эволюционных уравнений первого порядка в вещественном гильбертовом пространстве

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0, \qquad (4.4)$$

где $A : D(A) \subset H \to H$ – неограниченный самосопряженный оператор, $M_A = \sup\limits_{\|x\|=1, x\in D(A)} (Ax,x) = +\infty$.

Пусть $m_A = \inf\limits_{\|x\|=1, x\in D(A)} (Ax,x) > -\infty$

$$e^{-At}x_n(t) + Bx_n(t) = Bx_{n-1}(t) + x_0 + \Delta x, \qquad (4.5)$$

где B – положительно-определенный самосопряженный оператор.

ИП (4.5) при $\Delta x = 0$ сходится к решению $x(t)$ некорректной задачи Коши (4.4). Если $\Delta x \neq 0$, то (4.5) определяет регуляризирующий алгоритм нахождения приближенного решения задачи (4.4), где роль параметра регуляризации играет число итераций. Выбирая различные B, получаем различные конкретные устойчивые алгоритмы

решения задачи (4.4). Если $m_A > 0$, то положим $B = e^{-At}(e^{\alpha A^2 t} - I)$, $\alpha > 0$ и численная реализация (4.5) запишется в виде

$$x_n(T) = x_{n-1}(T) - y_{n-1}(T) + \tilde{y}_0(T),$$

$$\frac{d\tilde{y}_0}{dt} = (A - \alpha\cdot A^2)\tilde{y}_0, \quad \tilde{y}_0(0) = x_0 + \Delta x,$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dt} = -\alpha\cdot A^2 y_{n-1}, \quad y_{n-1}(0) = x_{n-1}(T).$$

<u>В главе У</u> (с.209-257) рассматриваются методы решения некорректных задач, основанные на статистическом подходе. Основной объект исследования – система линейных алгебраических уравнений

$$Au_T = f_T \qquad (5.I)$$

с плохо обусловленной матрицей A^+A.

К системе (5.I) сводятся многие задачи обработки данных физических экспериментов, в том числе нейтронно-физических.

При статистическом подходе ошибки в задании f (и матрицы A, если таковые имеются и учитываются) трактуются как случайные величины и требуется некоторый уровень знания закона распределения этих случайных величин.

В § 5.I дается краткий обзор, анализ и сравнение двух основных, используемых в настоящее время, статистических методов решения некорректных задач вида (5.I) – байесовского и минимаксного, с которыми производятся сравнения вводимого в § 5.2 обобщенного метода максимального правдоподобия (ОММП).

Система (5.I) записывается в виде

$$-Au_T + f = \xi, \qquad (5.2)$$

где ξ – вектор случайных ошибок.

Функцию $L_{исх}(u) = p_\xi(f - Au)$, где f – известная реализация правой части системы (5.I) $p_\xi(x)$ – плотность вероятности случайного вектора ξ, назовем исходной функцией правдоподобия. Если известны несколько независимых реализаций $f_1,\ldots,f_\tau$ случайных величин $Au + \xi_i$, $i = \overline{1,\tau}$, то исходная функция правдоподобия определяется равенством $L_{исх}(u) = \prod\limits_{i=1}^{\tau} p_{\xi_i}(f_i - Au)$, где $p_{\xi_i}(x)$ – плотность вероятности случайного вектора ξ_i.

Пусть дополнительно задана выборка $X_1,\ldots,X_N$ значений случайных величин $\eta_1,\ldots,\eta_N$, совместная плотность вероятности которых $p_\eta(x_1,\ldots,x_N; u)$ параметрически зависит от искомого вектора u_T. Функцию $L_{апр}(u) = p_\eta(X_1,\ldots,X_N; u)$ назовем априорной функцией правдоподобия. Если априорная выборка $X_1,\ldots,X_N$ является повторной для одной случайной величины η, то $L_{апр}(u)=\prod_{i=1}^{N} p_\eta(X_i; u)$, где $p_\eta(x; u_T)$ – плотность вероятности априорной случайной величины η. Функцию $L_{об}(u)=L_{исх}(u)L_{апр}(u)$ назовем обобщенной функцией правдоподобия и введем симметричные неотрицательные матрицы $I_{об}=(I_{ij}^{об})$, $I_{ij}^{об}=-M\dfrac{\partial^2 \ln L_{об}(u)}{\partial u_i \partial u_j}$, $I_{исх}=(I_{ij}^{исх})$, $I_{ij}^{исх}=-M\dfrac{\partial^2 \ln L_{исх}(u)}{\partial u_i \partial u_j}$, $I_{апр}=(I_{ij}^{апр})$, $I_{ij}^{апр}=-M\dfrac{\partial^2 \ln L_{апр}(u)}{\partial u_i \partial u_j}$, которые назовем соответственно обобщенной, исходной и априорной информационными матрицами Фишера.

Поскольку $I_{об}=I_{исх}+I_{апр}$, обобщенная информационная матрица суммирует априорную информацию об искомом решении u_T и информацию, "заложенную" в исходной системе (5.2).

Согласно ОММП за оценку искомого вектора u_T принимается вектор

$$\hat{u}_{оммп}=\arg\max_u L_{об}(u). \qquad (5.3)$$

Оценка ОММП является корнем системы обобщенных уравнений правдоподобия

$$\operatorname{grad}_u \ln L_{исх}(u)+\operatorname{grad}_u \ln L_{апр}(u)=0. \qquad (5.4)$$

В § 5.2 дано обобщение ОММП-оценки на случай, когда неизвестны некоторые характеристики законов распределения исходной ξ и априорной η случайных величин (например, уровни погрешностей векторов f_i или X_j). Рассмотрены частные случаи, когда законы распределения ξ и η – нормальные. Если ξ_i, η_j распределены по нормальным законам с параметрами $M\xi_i=0$, $K\xi_i=\sigma_{fi}^2 K_{fi}$, $i=\overline{1,z}$, $M\eta_j=u_T$, $K\eta_j=\sigma_{aj}^2 K_{u_j}$, то ОММП-оценка существует, единственна и дается равенством

$$\hat{u}_{оммп}=\Big(\sum_{i=1}^{z}\frac{1}{\sigma_{fi}^2}A^+K_{fi}^{-1}A+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{aj}^2}K_{u_j}^{-1}\Big)^{-1}\cdot \Big(\sum_{i=1}^{z}\frac{1}{\sigma_{fi}^2}A^+K_{fi}^{-1}f_i+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{aj}^2}K_{u_j}^{-1}X_j\Big). \qquad (5.5)$$

ОММП-оценка (5.5) не смещена (предполагается усреднение не только по реализациям ξ, но и по реализациям η), распределена по нормальному закону и ее точность характеризуется ковариационной матрицей $K_{\hat{u}}=\Big(\sum_{i=1}^{z}\frac{1}{\sigma_{fi}^2}A^+K_{fi}^{-1}A+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{aj}^2}K_{u_j}^{-1}\Big)^{-1}$.

<u>Лемма 5.I.</u> Пусть $N\to\infty$. Тогда ОММП-оценка (5.5) сходится в среднем квадратичном к u_T вне зависимости от числа реализаций z исходной случайной величины ξ.

<u>Лемма 5.2.</u> Пусть $z\to\infty$. Тогда ОММП-оценка (5.5) сходится в среднем квадратичном к одному из решений системы (5.I), зависящему от реализаций априорной случайной величины η.

В диссертации исследуются ОММП-оценки также в условиях неизвестных уровней исходных и априорных ошибок.

В § 5.2 показано, что ОММП-оценки асимптотически нормальны и в классе всех асимптотически несмещенных оценок асимптотически достигают нижней границы обобщенного неравенства Крамера-Рао $K_{\hat{u}}\geq(I_{исх}+I_{апр})^{-1}$, где $K_{\hat{u}}$ – ковариационная матрица любой несмещенной оценки искомого вектора u_T, построенной на основе исходной и априорной выборок.

ОММП-оценки (5.3) также как и оценки Байеса основаны на использовании статистической априорной информации об искомом решении. Они обладают всеми преимуществами байесовских оценок и имеют дополнительные преимущества. Более того, к ОММП-оценкам (5.3) неприменима известная критика байесовского подхода (С.Н. Бернштейн, Ван дер Варден, Б.И. Карпенко, А.А. Чупров, Р. Фишер и др.), т.к. ОММП позволяет учитывать априорную информацию статистического характера об искомом решении, не требуя трактовки искомых детерминированных величин u_T как случайных объектов.

В § 5.2 вводится вариант ОММП-оценки, основанный на использовании априорной информации об искомом решении u_T детерминированного характера вида $u_T\in R$, где R – заданное множество. Тогда согласно ОММП

$$\hat{u}_{оммп}=\arg\max_{u\in R} L_{исх}(u). \qquad (5.6)$$

Для некоторых частных случаев множества R, когда случайная величина ξ распределена нормально, удается найти аналитический вид оценки (5.6) (например, если R – многомерный эллипсоид). ОММП-оценки (5.6) при естественных ограничениях состоятельны и эффективны.

В § 5.3 рассматривается статистический метод решения системы (5.I) в условиях наличия ошибок в задании и вектора f, и матрицы A. Вводится регуляризованный метод ортогональных проекций (РМОП), согласно которому оценка искомого решения дается равенством

$$\hat{u}=\arg\min_{\|u\|\leq k}\frac{\|Au-f\|^2}{\sigma_f^2+\sigma_a^2\|u\|^2},$$

где σ_a^2, σ_f^2 – дисперсии ошибок в задании элементов матрицы

A и вектора f соответственно.

РМОП позволяет дать оценки не только искомого вектора u_T, но и A_T, f_T:

$$\hat{A}_T = A + \sigma_a^2 \frac{(f - A\hat{u})\hat{u}}{\sigma_f^2 + \sigma_a^2 \|\hat{u}\|^2},$$

$$\hat{f}_T = f - \sigma_f^2 \frac{(f - A\hat{u})}{\sigma_f^2 + \sigma_a^2 \|\hat{u}\|^2}.$$

Устанавливается связь между РМОП и регуляризованным методом наименьших квадратов (РМНК) А.Н.Тихонова (детерминированного метода решения уравнения (5.I) в условиях наличия ошибок в задании A и f). Дается геометрическая интерпретация РМОП и попутно геометрическая интерпретация МНК, отличная от известной геометрической интерпретации МНК А.Н.Колмогорова.

<u>В заключении</u> (с.257-260) дан краткий обзор и анализ основных результатов диссертации, отраженных выше в автореферате.

<u>В приложении</u> (с.261-301) приведена часть качественных и численных результатов по решению задач математической теории ЯР с помощью методов, представленных в диссертации, а также предлагаются новые устойчивые численные алгоритмы решения некорректных задач и некоторые результаты по их реализации. На основе ОММП и минимаксного метода Хьюбера вводится робастный метод оценки решений некорректных задач, устойчивый по отношению к большим непредвиденным ошибкам в измерении f. Робастная ОММП-оценка имеет вид

$$\hat{u}_{роб} = \arg\min\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{z}\rho(f_{jk} - (Au)_k) + \frac{1}{2\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{N}\|X_i - u\|^2_{K_u^{-1}}\right\}, \quad (\text{П.I})$$

где

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma_f^2}x^2, & |x| \le K\sigma_f \\ \frac{K}{\sigma_f}|x| - \frac{K^2}{2}, & |x| > K\sigma_f \end{cases}$$ – функция Хьюбера.

Дается итерационный метод нахождения нелинейной робастной оценки (П.I). Рассмотрено применение робастного статистического оценивания для восстановления функциональных зависимостей нейтронно-физических характеристик с использованием ортогональных полиномов. Восстановление проводится на основе экспериментальных данных советских и зарубежных исследователей, полученных за последние 30 лет. Робастный метод оценивания позволяет, в частности, выявлять экспериментальные измерения, которым приписывается завышенная точность. Приводятся также численные результаты решения других некорректных задач, например, восстановление плотности вероятности по выборке с привлечением априорной информации с помощью ОММП и МРИ, коррекция поля тепловыделения в АЗ реактора с использованием показаний датчиков внутриреакторного контроля.

<u>Основные результаты.</u> В работе представлено научное направление – качественные и численные методы исследования устойчивости решений задач математической теории реакторов, в рамках развития которого получены следующие основные новые результаты:

I. Развита общая теория устойчивости относительно конуса стационарных решений положительных эволюционных систем, частными случаями которых являются математические модели, описывающие Т-НР в размножающих средах, в том числе в АЗ современных энергетических ЯР.

2. На основе теории устойчивости относительно конуса разработан метод исследования устойчивости стационарных Т-НР, в том числе при наличии системы внешнего управления.

3. Построена теория функционалов обратной связи, с помощью которой решается проблема единственности стационарных Т-НР, включая ответ на вопрос о количестве стационарных распределений в случае их неединственности.

4. Предложены и обоснованы новые методы, а на их основе сконструированы численные алгоритмы нахождения приближенных решений некорректных задач, включая некорректные задачи математической теории ЯР.

<u>Список опубликованных работ по теме диссертации</u>

I. Асимптотическая устойчивость реактора с термоэмиссионным преобразователем.- Атомная энергия, 1972, т.32, вып.6, с.50I-503 (совм. с Горбуновым В.П., Исаевым Н.В. и др.).

2. Решение некорректных задач методами последовательных приближений.- ДАН СССР, 1973, т.210, №I, с.I5-I9.

3. Итерационный метод решения некорректных задач.- ЖВМ и МФ, 1974, т.I4, №I, с.25-35.

4. Об одном методе решения интегральных соотношений.- В кн.: Инженерно-матем. методы в физике и кибернетике. М.: Атомиздат, 1977, №6, с.42-45 (совм. с Агаповым А.В.).

5. Определение температуры сферы и температуропроводности среды по замерам температуры вне сферы.- Инж.-физ. журнал, 1977,

т.32, №6, с.1118 (совм.с Раевской В.Е.,Фардзиновым В.К.).

6.Метод определения температуры поверхности сферы.- Инж.-физ.журнал, 1977, т.33, №3, с.528 (совм.с Саперовым Е.В. Фардзиновым В.К.).

7.Расчет констант образования водно-метанольных комплексов цинка (II) по данным полярографии.- Физическая химия, 1981, т.55, вып.7, с.1887-1889 (совм.с Павловым Н.Н.,Гиниатуллиным Н.Г.,Саммаром Н.).

8.Метод оценки параметров физических систем в задачах регрессии при отсутствии информации о распределении погрешностей.- В кн.: Аппаратное и программное обеспечение систем автоматизации ядерно-физического эксперимента. М.: Энергоиздат, 1982, с.11-17.

9.Идентификация физических констант на основе равномерно-нормального распределения погрешностей прямых измерений.- В кн.: Аппаратное и программное обеспечение систем автоматизации ядерно-физического эксперимента. М.: Энергоиздат, 1982, с.18-24.

10.Метод коррекции расчетного поля на основе показаний системы датчиков.- В кн.: Методы решения некорректных задач и их приложения (Труды Всесоюзной школы-семинара,Самарканд, 1983)/ Под ред.А.Н.Тихонова,М.М.Лаврентьева. Новосибирск, 1983, с.57.

11.Вопросы математической теории реакторов. Нелинейный анализ. М.: Энергоатомиздат, 1983, 280 с. (совм.с Шиховым С.Б.).

12.Устойчивый метод восстановления регрессионной зависимости в условиях ошибочного априорного задания точности неравноточных измерений. Тезисы докладов УП Всесоюзной конференции по планированию и автоматизации эксперимента в научных исследованиях, часть I, М., 1983, с.116-117 (совм.с Волковым Н.Г., Добрицыным А.А.).

13.Определение числа членов разложения при восстановлении функциональной зависимости.- В кн.: Автоматизация эксперимента в физических исследованиях. М.: Энергоатомиздат, 1984, с.19-23 (совм.с Пахомовым Ю.А.).

14.Квазиоптимальное определение доли загрязнения по выборке.- В кн.: Автоматизация эксперимента в физических исследованиях. М.: Энергоатомиздат, 1984, с.29-32 (совм.с Матвеевым С.И).

15.Устойчивые методы оценки нейтронно-физических характеристик нуклидов на основе экспериментальных данных.- В кн.: Нейтронная физика. т.1, М.: ЦНИИатоминформ, 1984, с.85-88 (совм.с Волковым Н.Г.).

16.Коррекция расчетного поля по показаниям системы датчиков.- В кн.: Автоматизация физических исследований. М.: Энергоатомиздат, 1984, с.169-172 (совм,с Лысовым Д.А.).

17.Сравнение численных методов восстановления плотности вероятности по выборке.- В кн.: Автоматизация физических исследований. М.: Энергоатомиздат, 1984, с.151-158 (совм.с Цупко-Ситниковым М.В.).

18.О нелинейной статистической регуляризации.- В кн.: Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения Труды Всесоюзной школы-семинара, Саратов, 1985 / Под ред, А.Н.Тихонова. Изд-во Саратовского университета, 1985, с.88-89 (совм.с Лысовым Д.А.,Цупко-Ситниковым М.В.).

19.Статистическая форма регуляризованного метода наименьших квадратов А.Н.Тихонова.- ДАН СССР,1986, т.291, №4, с.780-785.

20.Существование,единственность и устойчивость стационарных температурно-нейтронных распределений в размножающих средах. Препринт Отдела вычислительной математики АН СССР, 1986.

21.Комплексная программа восстановления регрессии и проведение оценки σ_f, σ_t, α и $\bar{\nu}$ для ^{235}U. Препринт ИЯЭ АН БССР, 1986, 80 с. (совм.с Волковым Н.Г.,Дороговым В.И.,Коньшиным В.А.).

22.Применение методов решения некорректных задач при автоматизированной математической обработке результатов физических экспериментов.- В кн.: Автоматизация научных исследований в экспериментальной физике. М.: Энергоатомиздат, 1987, с.3-18 (совм.с Арсениным В.Я.).

23.Применение статистических методов решения некорректных задач для обработки результатов физических экспериментов.- В кн.: Автоматизация научных исследований в экспериментальной физике. М.: Энергоатомиздат, 1987, с.19-30 (совм.с Арсениным В.Я.).

24.К задаче об оптимальном выравнивании тепловыделения.- В кн.: Прикладные методы вычислительной физики. М.: Энергоатомиздат, 1987, с.56-59 (совм.с Лысовым Д.А.).

25.Восстановление плотности вероятности по выборке с привлечением априорной информации.- В кн.: Прикладные методы вычислительной физики. М.: Энергоатомиздат, 1987, с.59-65 (совм. с Цупко-Ситниковым М.В.).

26.Применение современных методов математической статистики при восстановлении регрессионных зависимостей на ЭВМ.- М.: Изд-во МИФИ, 1988, 80 с.

27.Решение проблем условной корректности задач температурно-нейтронных распределений в размножающих средах.- В кн.: Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Красноярск, изд-во КГУ, 1988, с.112-117.

28.Нелинейные статистические методы решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и их применение к обработке экспериментальных данных.- В кн.: Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Красноярск, изд-во КГУ, 1988, с.185-190 (совм.с Цупко-Ситниковым М.В.).

Л-20757 Подп.к печати 6.03.89 Заказ 832 Тираж 100 экз.

Типография МИФИ, Каширское шоссе, д.31.