ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория вычислительной техники и автоматизации

На правах рукописи

ХИСАМУТДИНОВ Альфред Ибрагимович

УДК 518.12::621.039

НЕСМЕЩЕННЫЕ ОЦЕНКИ В МЕТОДАХ МОНТЕ-КАРЛО В ПЕРЕНОСЕ ИЗЛУЧЕНИЙ

Специальность 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна, 1982

Работа выполнена в Вычислительном центре Сибирского отделения Академии наук СССР.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук профессор В.С.Барашенков
доктор физико-математических наук профессор В.В. Орлов
доктор физико-математических наук профессор И.М. Соболь

Ведущее предприятие -
Ленинградский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. А.А. Жданова

Защита состоится 17 марта 1983 г. в 10.30 часов на заседании специализированного Совета Д 047.01.04 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ (141980 Дубна Московской обл., ЛВТА ОИЯИ).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЛВТА ОИЯИ

Автореферат разослан 14 февр. 1983 года

Ученый секретарь
специализированного Совета
к.ф.-м.н. Ивач З.М. Иванченко

Введение.

0.1. Предисловие. В широком плане автор понимает свою работу как работу по численным решениям "сложных" уравнений математической физики. Рассматриваемые методы - методы Монте-Карло, или методы статистического моделирования; рассматриваемое уравнение - линейное уравнение переноса, или линеаризованное кинетическое уравнение Больцмана, описывающее перенос излучений (нейтронов, γ-квантов и др.). Класс задач переноса,разрешимых в замкнутой форме, является крайне ограничен - ным, решения в замкнутой форме возможны лишь в очень простых и идеализированных ситуациях. Реалистичные проблемы далеки от них. Для решения этих проблем широко используются численные методы. Реалистичные задачи имеют высокую размерность, сложную пространственную конфигурацию и многоэлементный состав сред, сложный вид дифференциальных и интегральных сечений взаимодействий частиц с веществом. Эти факторы, статистическая природа переноса и наличие быстродействующих вычислительных машин способствовали и способствуют широкому использованию методов Монте-Карло (методов М-К, как будет писаться далее).

Многие характеристики полей излучений могут вычисляться посредством так называемых "прямых" (имитационных) методов М-К. Но будут ли они вычислены с заданной точностью за приемлемое число вычислительных операций? Очень частый ответ - нет. Определенные классы задач могут быть решены лишь с использованием методов, значительно отличающихся от имитации. Этот факт был понят уже относительно давно. Выяснилось, что для многих важных задач вопросы трудоёмкости и её уменьшения являются решающими. Это положение сохраняется и сейчас, когда казалось бы резкое возрастание возможностей вычислительной техники должно снять проблему. Но растут требования к точности решений, и изменяются типы задач. Определяются не только интегральные, но и дифференциальные характеристики полей. Вопросы уменьшения трудоёмкости есть вопросы оптимизации методов и алгоритмов; эти вопросы составляют основное содержание теоретической части диссертации. Характерным для диссертации является введение и изучение различных множеств несмещенных оценок и определение в этих множествах оценок с минимальной дисперсией. Два направления можно выделить в вопросах об уменьшении трудоёмкости методов:

I) поиск новых методов и модификаций в надежде, что они эффективнее стандартных,

2) исследование на "оптимальность" уже известных.

Оба направления представлены в диссертации. Во второе мы включаем и сравнение методов, в частности, сравнение с имитацией; но степень "оптимальности" стандартных оценок исследуется и в сравнении их с оценками с минимальной дисперсией.

Первоначально методы М-К активно использовались в физике реакторов и защиты. Позднее они стали привлекаться для рассмотрения переноса и в других областях, и среди них-в геофизике. Как правило, новые приложения обладают специфическими особенностями, что создает предпосылки и требует развития новых эффективных методов и модификаций. По предложению академика Г.И. Марчука автором рассматривались различные задачи ядерно-геофизических методов. Следует отметить, что они требуют использования новейшей вычислительной техники. С появлением БЭСМ-6 стало возможным и рассмотрение в реалистичном аспекте важного класса задач физики защиты – задач оптимального выбора формы многослойных теневых защит. Проблема статистического моделирования названных задач включает в себя как основные элементы их постановку, подбор или разработку и обоснование метода и алгоритма, создание программы, проведение и анализ вычислений и в некоторых случаях доведение программы до уровня стандартной с целью её передачи для дальнейшего использования. Решение задач ядерно-геофизических методов и задач оптимизации формы радиационной защиты составляет содержание прикладной части диссертации.

В диссертации рассматривается перенос лишь в "немультиплицирующих" средах. Уравнение переноса в интегральной форме представляет собой интегральное уравнение 2-го рода. Основные теоретические результаты диссертации имеют место для произвольного интегрального уравнения 2-го рода со сходящимся рядом Неймана.

Диссертация состоит из Введения, 8 глав и Приложения; общее число страниц – 296, число рисунков – I7, число таблиц

– 27, в списке литературы – 205 наименований. В первых пяти главах излагаются математические результаты, в главах 6–8, а также в § 6 гл. 4, – численные решения физических задач.

0.2. Приведем некоторые обозначения, относящиеся к переносу.

$x = (\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ – точка фазового пространства X координат $\bar{r}$, направлений $\bar{\Omega}$ и энергий E,

$\Sigma(x)$ – полное макроскопическое сечение взаимодействия частиц со средой,

$\varphi(x)$ – плотность столкновений, $f(x)$ – плотность I-х столкновений $(\int f(x)dx = 1)$,

$$\varphi(x) = \int k(y,x)\varphi(y)dy + f(x)$$

– интегральное уравнение переноса для плотности $\varphi(\cdot)$,

$$\mathcal{J} = \int \varphi(x) h(x) dx$$

– подлежащий вычислению линейный функционал,

$\varphi^*(x)$ – решение сопряженного относительно функционала $\mathcal{J}$ интегрального уравнения, функция "ценности"; $\bar{\varphi}(x)$ – функция, являющаяся приближением к функции $\varphi^*(x)$.

В гл. I–3 диссертации рассматриваются более общие нежели в теории переноса объекты, хотя формально многие символы сохраняются. Интегрирование понимается в смысле Лебега-Стилтьеса. Вместо обобщенных плотностей $f(x)$, $\varphi(x)$ и $k(x,y)$ вводятся меры $\mathcal{F}\{dx\}$, $\Phi\{dx\}$ и ядро $\mathcal{K}\{x,dy\}$, которые могут быть и знакопеременными; также знакопеременной может быть и функция $h(x)$. Считается, что

X – s – мерное координатное пространство $[X = R^s]$, $(X, \mathcal{B})$ – измеримое пространство с σ-алгеброй борелевских множеств,

$\mathcal{F}\{dx\}$, $\mathcal{K}\{x,dy\}$ и $h(x)$ принадлежат соответственно некоторым множествам $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$ с заданными свойствами,

$\mathcal{J}$ – подлежащая вычислению сумма сходящегося ряда,

$$\mathcal{J} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{J}^{(\ell)} \qquad (0.I)$$

$\mathcal{J}^{(1)} = \int d\mathcal{F}_1 h_1$, $\quad \mathcal{J}^{(\ell)} = \underbrace{\int\cdots\int}_{\ell} d\mathcal{F}_1\, d\mathcal{K}_{1,2}\cdots d\mathcal{K}_{\ell-1,\ell}\, h_\ell$, $\ell \geq 2$,

где приняты сокращения:

$d\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}\{dx_1\}$, $d\mathcal{K}_{\ell-1,\ell} \equiv \mathcal{K}\{x_{\ell-1}, dx_\ell\}$, $h_\ell \equiv h(x_\ell)$;

$$\Phi\{dx\} = K\Phi\{dx\} + \mathcal{F}\{dx\}, \quad K\Phi\{\cdot\} \equiv \int \mathcal{K}\{y,\cdot\}\,\Phi\{dy\} \qquad (0.2)$$

$$\varphi^*(x) = K^*\varphi^*(x) + h(x), \quad K^*\varphi^*(\cdot) \equiv \int \mathcal{K}\{\cdot, dy\}\,\varphi^*(y) \qquad (0.3)$$

– интегральные уравнения, связанные с рядом (0.I), так что

$$\mathcal{J} = \int \Phi\{dx\}\, h(x) = \int \mathcal{F}\{dx\}\, \varphi^*(x) .$$

Переход к случаю теории переноса совершается автоматически:

$$\mathcal{F}\{dx\} = f(x)dx, \quad \Phi\{dx\} = \varphi(x)dx, \quad \mathcal{K}\{x, dy\} = k(x,y)dy .$$

Завершим ввод обозначений.

$\mathcal{P}$ – неветвящаяся обрывающаяся однородная цепь Маркова с состояниями в $(X+\bar{a})$, где $\bar{a}$ – поглощающее состояние цепи; $1_X(x)$ – индикатор пространства X ; полагаем $h(\bar{a}) = \varphi^*(\bar{a}) = 0$,

$\omega = x_1,\dots,x_n,\bar{a},\bar{a},\dots$ – траектория цепи, $n = n(\omega)$ – её случайная длина (до обрыва),

$p_1\{dx\}$ – начальное распределение цепи, $p\{x, dy\}$ – переходная вероятность, $g(x)$ – вероятность обрыва цепи в состоянии x ,

$dp_1 \equiv p_1\{dx_1\}$, $dp_{\ell-1,\ell} \equiv p\{x_{\ell-1}, dx_\ell\}$, $g_\ell \equiv g(x_\ell)$ – принятые сокращения,

Q_ℓ – "веса", $[Q_\ell = Q_\ell(\omega)$, $Q_\ell(\omega) = 0$ для $\ell > n]$; Q'_ℓ – "вес" за I переход, $Q'_\ell\, dp_{\ell-1,\ell} = d\mathcal{K}_{\ell-1,\ell}$,

$M(\cdot)$, $\mathcal{D}(\cdot)$ – символы математического ожидания и дисперсии по траекториям цепи $\mathcal{P}$, $M(\cdot) \equiv M_{\mathcal{P}}(\cdot)$, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_{\mathcal{P}}(\cdot)$,

$M_{/x_1 \dots x_\ell}(\cdot)$ – символ математического ожидания при условии, что фиксированы состояния $[x_1,\dots, x_\ell]$ цепи $\mathcal{P}$,

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – вероятностное пространство, отвечающее цепи $\mathcal{P}$.

Несмещенные для вычисления $\mathcal{J}$ по траекториям цепи $\mathcal{P}$ оценки ξ удовлетворяют уравнению .

$$M(\xi) = \mathcal{J} .$$

Пара $(\mathcal{P}, \xi)$ составляет метод М-К для вычисления $\mathcal{J}$ и при этом всегда подразумевается, что оценивание $\mathcal{J}$ осуществляется посредством "среднего арифметического",

$$\mathcal{J} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i$$

где N – число испытаний.

t – среднее число вычислительных операций, приходящихся на I испытание,

$\mathcal{P}_0$ – цепь, имитирующая физическое распространение частиц,

ξ_0 – оценка "по поглощениям"; $\xi_0(\omega) = Q_n h_n / g_n$,

ξ_1 – оценка "по столкновениям"; $\xi_1(\omega) = \sum_{\ell=1}^{n} Q_\ell h_\ell$.

Принято называть прямыми (имитационными) методы $(\mathcal{P}_0, \xi_0)$ и $(\mathcal{P}_0, \xi_1)$.

Всюду под знаком интеграла множество интегрирования опускалось и опускается, если оно совпадает со всем пространством. В данном автореферате мы ограничиваемся рассмотрением лишь однородных цепей Маркова.

<u>0.3</u>. Уже в I-х работах по методам М-К (Дж. Форсайт и Р. Лейблер, Г.Кан, В.Вазов, Р.Каткоски и др.) были заложены представления и концепции, которые в дальнейшем получили общее название "схема Неймана – Улама" для решения интегральных и систем линейных алгебраических уравнений. Оценки, введенные в названных работах, это – оценки ξ_0 и ξ_1 . В переносе они являются имитационными соответственно для подсчета количеств поглощений и соударений. Дальнейшее развитие и современный вид теория оценивания линейных функционалов, частью которой является проблема оптимизации методов, получила в

работах советских (И.М.Гельфанд, С.М. Ермаков, В.Г.Золотухин, Г.А.Михайлов, И.М.Соболь, А.Д.Франк-Каменецкий, А.С.Фролов; Н.Н.Ченцов и др.) и в работах зарубежных (Дж.Альберт, Дж.Герцель, М.Калос, Дж.Кэртисс, Дж.Спанье, Дж.Холтон и др.) авторов.

Методы М-К содержат много различных приемов и способов уменьшения трудоёмкости. В узком смысле в качестве основного способа уменьшения трудоёмкости (именно) методов в 60-х годах понимался "весовой" способ; при фиксированной оценке ищется наилучшая цепь $\mathcal{P}$. Разновидностью "весового" способа являлся приём "расщепление-рулетка". "Весовой" способ близок, но, вообще говоря, не идентичен "выборке по важности"; лишь для методов с оценкой ξ_0 они совпадают. Ключевым моментом в "весовой" оптимизации в переносе явилось использование приближений к решению сопряженной задачи. Идея использования функции "ценности" связана, по-видимому, с именем Дж. Герцеля. Следует отметить также, что Г.И. Марчук неоднократно привлекал внимание к использованию сведений о функции $\varphi^*(\cdot)$ для оптимизации вычислений. Два метода соответственно с оценками ξ_0 и ξ_1, использующие приближения $\bar\varphi(\cdot)$ к $\varphi^*(\cdot)$, содержали потенциальную возможность достижения нулевой дисперсии, это – ($\mathcal{P}_1$, ξ_0) и ($\mathcal{P}_2$, ξ_1). В I-м способе переходные плотности есть

$$dP^{(1)}_{\ell-1,\ell} = d\mathcal{K}_{\ell-1,\ell}\,\bar\varphi_\ell \,/\, \bar\varphi_{\ell-1}\ , \quad \bar\varphi_\ell \equiv \bar\varphi(x_\ell)\ ,$$

во 2-м (Дж. Холтон, Г.А. Михайлов) –

$$dP^{(2)}_{\ell-1,\ell} = d\mathcal{K}_{\ell-1,\ell}\,\bar\varphi_\ell \,/\, K^*\bar\varphi_{\ell-1}\ , \quad K^*\bar\varphi_{\ell-1} \equiv K^*\bar\varphi(x_{\ell-1})\,.$$

Во 2-м способе среднее число соударений цепи $\bar n_{\mathcal{P}_2} = \infty$ и необходимо вводить ("близкую") модифицированную цепь $\hat{\mathcal{P}}_2$, содержащую обрыв так, что $\bar n_{\hat{\mathcal{P}}_2} < \infty$; при этом $\mathcal{D}_{\hat{\mathcal{P}}_2}(\xi_1) > 0$ даже при $\bar\varphi(x) = \varphi^*(x)$.

Методы [способы] ($\mathcal{P}_1$, ξ_0) и ($\mathcal{P}_2$, ξ_1) являлись своего рода рецептами для построения "хороших" методов. В то же время понимание, что существуют методы, отличные от ($\mathcal{P}$, ξ_0) и ($\mathcal{P}$, ξ_1), которые, например, можно было бы строить, используя замену вероятностной меры, или, например, "принцип математических ожиданий", ставило вопрос о том, что, возможно, эти рецепты не единственные и не самые лучшие и что, возможно, есть "хорошие" методы, не использующие информации о $\varphi^*(\cdot)$.

Для реализации методов с $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ необходимо вычислять итерацию $K^*\bar\varphi(x)$, и это является препятствием к применению, особенно в задачах с энергетической и временной зависимостями; данная трудность неоднократно обсуждалась. Помимо методов с $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, включающих $\bar\varphi(\cdot)$ в плотность, был намечен и способ, когда функция $\bar\varphi(x)$ входит только в оценку. Это – оценка с "коррелирующей коррекцией" (или оценка типа с "выделением главной части"). Построение "коррелирующей коррекции" (Дж. Альберт, 1956г.) основывалось исключительно на оценке ξ_1 и интегральном уравнении для $\bar\varphi(x)$. Этому способу также присуща уже указанная трудность – вычисление $K^*\bar\varphi(x)$.

Наличие нового и исходного методов сразу же ставит проблему их сравнения. Важным моментом явилась запись выражения для дисперсии $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(\xi_1)$ [Дж. Кэртисс, В.Г. Золотухин и С.М.Ермаков]. Как правило, теоретические сравнения производятся по дисперсии в предположении, что сравниваемые алгоритмы "несильно" различаются по параметру t. Многие результаты относятся к "весовой" оптимизации" (Г.Кан, В.Г. Золотухин и С.М. Ермаков, Л. Левитт, М.Калос и Г. Стейнберг, Г.А. Михайлов и др.). Помимо сравнений при "весовой" оптимизации уже давно рассматривается сравнение оценок ξ_0 и ξ_1 (Дж.Кэртисс, И.М. Соболь). Рассматривались также и другие задачи сравнения (Д. Макмиллан, Л.В. Майоров и А.Д. Франк-Каменецкий и др.).

Теория методов М-К должна стремиться указывать, какие методы (из существующих) применять для решения тех или иных типов задач, тем более, что было достигнуто понимание, что тот или иной метод может быть хорош в одной задаче и плох в другой. Сравнения, в целом, "работают" именно на эту проблему. Но наряду с конкретными сравнениями во избежание эмпиризма желательны были (как можно сейчас сформулировать) и общие подходы.

0.4. С момента своего рождения методы М-К испытали быстрое развитие. Непрерывно расширяется сфера их приложения. Следует отметить, что в теории переноса методы М-К применяются не только для оценивания линейных и билинейных функционалов, но и в проблемах критичности. Сейчас в сфере приложений методов М-К многие разделы физики, теория массового обслуживания, теория игр и математическая экономика и многое другое. Большую роль в развитии и распространении методов М-К в нашей стране сыграли работы В.С. Владимирова, И.М. Гельфанда и Н.Н. Ченцова, В.В. Чавчанидзе, Ю.А. Шрейдера и др. Следует отметить, что схема Неймана-Улама получила обобщение на случай интегральных уравнений со степенной нелинейностью и находит применение, как и методы М-К вообще, при решении (нелинейного) кинетического уравнения для разреженных газов. Но по-прежнему теория переноса остается одним из важнейших приложений методов М-К и по-прежнему не превзойдена та роль, которую она сыграла в развитии методов М-К.

I. Различные множества оценок.

В диссертации рассматриваются различные множества и подмножества оценок; 3 наиболее широкие вводятся в гл. I.

Назовём цепь $\mathcal{P}$ подходящей для вычисления $\mathcal{J}$ по представлению (0.I), если

$$
\begin{gathered}
dF_1 h_1 \ll dp_1 \\
dF_1\, d\mathcal{K}_{1,2} \cdots d\mathcal{K}_{l-1,l}\, h_l \ll dp_1\, dp_{1,2} \cdots dp_{l-1,l}, \quad l=2,3,\dots,
\end{gathered}
\tag{I.I}
$$

и обозначим как $\mathcal{PJ}$ множество подходящих цепей.

Определим на траекториях цепи $\mathcal{P}$ функции $\psi_l(\omega)$, l =I,2,..., такие, что

$$
\begin{cases}
\psi_l(\omega)=0 & \text{для } l>n \\
M_{(x_1 \dots x_l}(\psi_l)=1 & \text{п.н.} \\
\sum_{l=1}^{\infty} M(|Q_l h_l \psi_l|)<\infty
\end{cases}
\tag{I.2}
$$

и функции $\chi_l(\omega)$, l =I,2,..., такие, что

$$
\begin{cases}
\chi_l(\omega)=0 & \text{для } l>n \\
M_{(x_1 \dots x_l}(\chi_l)=0 & \text{п.н.} \\
\sum_{l=1}^{\infty} M(|Q_l(h_l+\chi_l)|)<\infty
\end{cases}
\tag{I.3}
$$

Множества последовательностей $[\psi_1,\psi_2,\dots]$ и $[\chi_1,\chi_2,\dots]$ обозначим соответственно как Ψ и X. Сопоставим множествам Ψ и X множества соответственно Ξ и Z оценок $\xi(\omega)$ и $\zeta(\omega)$ по формулам .

$$
\xi=\sum_{l=1}^{\infty} Q_l h_l \psi_l, \qquad \zeta=\sum_{l=1}^{\infty} Q_l(h_l+\chi_l).
$$

Произведение $Q_l h_l$ связано со схемой Неймана-Улама. Нижеследующие теоремы могут рассматриваться как расширяющие эту схему.

Теорема I.2.I. Пусть $\mathcal{P}\in\mathcal{PJ}$. Тогда для $\forall\xi\in\Xi$

$$
M(Q_l h_l \psi_l)=\mathcal{J}^{(l)},\ l\geq 1;\quad M(\xi)=\mathcal{J}.
$$

Теорема I.5.I. Пусть $\mathcal{P}\in\mathcal{PJ}$. Тогда для $\forall\zeta\in Z$

$$
M(Q_l[h_l+\chi_l])=\mathcal{J}^{(l)},\ l\geq 1;\quad M(\zeta)=\mathcal{J}.
$$

Множества Ξ и Z получили названия соответственно "единичного" и "нулевого" классов оценок. Оценки ξ_0 и ξ_1 содержатся в Ξ.

В диссертации вводится понятие локальной несмещенности при вычислении $\mathcal{J}$ и установлено (предложение I.2.I), что условия подходящести (I.I) являются необходимыми и достаточными для локальной несмещенности оценок из Ξ.

$\Xi\subset Z$ и все оценки класса Ξ можно получить из Z, если полагать

$$\chi_l=0 \quad \text{для} \quad h_l=0, \quad l=\text{I},2,\dots;$$

при этом уменьшается число вычислительных операций на I испытание. Последнее делает обоснованным постановку задачи минимизации дисперсии в первую очередь в классе Ξ.

Класс Z не исчерпывает множества всех несмещенных для вычисления $\mathcal{J}$ оценок, даже у которых "l-й член оценивает

$\mathcal{J}^{(e)}$ ". В § 4 вводится еще одно множество несмещенных оценок, класс H. В частности, в него входит и известная в переносе оценка "по пробегам".

В § 7 гл. I рассматривается одно подмножество класса Ξ, связанное с взаимно абсолютно непрерывными с P вероятностями.

2. Методы М-К для вычисления $\mathcal{J}$ и сопряженное интегральное уравнение.

В гл. 2 в различных множествах оценок и методов определяются соответственно оценки и методы с минимальной дисперсией. Два разных момента имеют место в этом:

I) при фиксированной цепи определение оценок с минимальной дисперсией,

2) замена вероятностной меры.

Оказывается, что в оценках и методах с минимальной дисперсией явным образом используется функция $\varphi^*(\cdot)$ – решение сопряженной задачи; будет правильнее называть их способами использования предварительной информации. С этими способами связываются семейства оценок и методов, использующих или содержащих в себе (!) приближения к $\varphi^*(\cdot)$. Настоящие семейства позволяют:

I) иметь "хорошие" методы, использующие "хорошие" приближения к $\varphi^*(\cdot)$,

2) связывая с оценками и методами приближения, которым они соответствуют, судить об "оптимальности" (оценок и методов),

3) выяснять, для каких пар ($\mathcal{K}$, h), если они существуют, заданные оценки совпадают с оценками с минимальной дисперсией.

Если I-й пункт –, можно сказать, традиционный, то 2-й и 3-й являются новыми.

Принципиальным шагом является рассмотрение приближений к $\varphi^*(x)$ вида $\bar{\varphi}(x|x')$, где $x, x' \in (X+\bar{a})$ и x' играет роль параметра; $\bar{\varphi}(x|\bar{a})=0$. Задание аргумента и на $\bar{a}$ позволило, например, связать определенные приближения с ξ_1; наличие зависимости от параметра позволяет в некоторых случаях существенно упростить вычисление итераций $K\overset{*}{\bar{\varphi}}(x|x) \equiv \int \mathcal{K}\{x,dy\}\bar{\varphi}(y|x)$. Заметим, однако, что приближения указанного вида являются далеко не самыми общими.

2.I. В классах Ξ и Z определены [по-видимому, наиболее простые] оценки с минимальной дисперсией соответственно ξ_2^* и ζ_2^*.

Пусть фиксированы тройка ($\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$, h) $\in \mathcal{F}\times\mathfrak{K}\times\mathfrak{H}$ и цепь $\mathcal{P}\in\mathcal{PJ}$. Рассмотрим, каковы в Ξ оценки, доставляющие

$$\min_{\xi\in\Xi}\{\mathcal{D}(\xi)\} \tag{2.I}$$

Это – вариационная задача, варьируются члены последовательности $[\psi_1,\psi_2,\dots]\in\Psi$. Пусть

$$(\Omega\xi)_\ell \equiv \{\omega: Q_\ell h_\ell \neq 0\},\quad \ell=1,2,\dots;$$

$$t_0=\sup\{t: M(|\xi|^t<\infty,\ \xi\in\Xi\},\ (t_0\geq 1);$$

$$Y_1\equiv\{\omega: Q_1h_1\neq 0\};\ Y_\ell\equiv\{\omega: Q_1h_1=\dots=Q_{\ell-1}h_{\ell-1}=0,\ Q_\ell h_\ell\neq 0\},\ \ell=2,3,\dots,$$

и положим

$$\upsilon(\omega)=Q_\ell\varphi_\ell^* \quad \text{на } Y_\ell,\ \ell=1,2,\dots,\ \varphi_\ell^*\equiv\varphi^*(x_\ell).$$

После преобразований в качестве системы уравнений для задачи (2.I) имеем уравнение

$$\xi(\omega)=\upsilon(\omega) \tag{2.2}$$

и соотношения (I.2). Доказано (теорема 2.3.I), что решения этой системы дают не только решение задачи (2.I), но и доставляют $\min$ абсолютным моментам, меньшим t_0.

Для записи решения необходимо нижеследующее. Пусть $\omega\in(\Omega\xi)_\ell$, $\ell\geq 1$. Обозначим, если оно существует, $m_\ell(\omega)$ положительное целое такое, что $\ell+m_\ell(\omega)$ ближайшее к ℓ число, что $\omega\in(\Omega\xi)_{\ell+m_\ell(\omega)}$; если такого $m_\ell(\omega)$ не существует, будем полагать $\ell+m_\ell(\omega)=n+1$. Всюду далее для упрощения записи вместо $[\ell+m_\ell(\omega)]$ пишется $(\ell+m)$.

Теорема 2.2.I. Пусть уравнения (2.2),(I.2) дополнены соотношениями

$$M_{|x_1\dots x_{\ell+m}}(\psi_\ell)=\psi_\ell \quad \text{на } (\Omega\xi)_\ell,\ \ell=1,2,\dots \tag{2.3}$$

Система уравнений (2.2), (I.2), (2.3) имеет единственное решение ξ_2^{*},

$$\xi_2^{*}=\sum_{l=1}^{\infty} Q_l h_l \psi_l^{*};\quad Q_l h_l \psi_l^{*}=Q_l \varphi_l^{*}-Q_{l+m}\varphi_{l+m}^{*} \quad \text{на } (\Omega^{\prime})_l,\ l=1,2,\dots \qquad (2.4)$$

Аналогичное рассмотрение в классе Z приводит к оценке ζ_2^{*},

$$\zeta_2^{*}=\sum_{l=1}^{\infty} Q_l (h_l+\chi_l^{*});\quad \chi_l^{*}=K^{*}\varphi_l^{*}-Q_{l+1}^{\prime}\varphi_{l+1}^{*},\ l=1,2,\dots; \qquad (2.5)$$
$$[K^{*}\varphi_l^{*}\equiv K^{*}\varphi^{*}(x_l)].$$

На цепи $\mathcal{P}_2$ при $\bar{\varphi}(x)=\varphi^{*}(x)$ $\xi_2^{*}=\xi_1$. Если цепь $\hat{\mathcal{P}}_2$ неоднородная и обрыв вводится лишь после достижения $h(x)>0$, то при $\bar{\varphi}(x)=\varphi^{*}(x)$ $\mathcal{D}_{\hat{\mathcal{P}}_2}(\xi_2^{*})=0$.

<u>2.2</u>. Со способами ξ_2^{*} и ζ_2^{*} связываются семейства и подсемейства оценок Ξ_{20}, Ξ_2, Ξ_{21}, Ξ_1, Ξ_{22} и Z_2, $Z_2^{(c)}$, Z_1, $Z_2^{(z)}$. Каждая оценка семейства определяется каким-либо приближением $\bar{\varphi}(x|x^{\prime})$ или связанной с ним функцией.

$$\Xi_{20}:\quad \xi_{20}^{(\cdot)}=\sum_{l=1}^{\infty} Q_l h_l \psi_l^{(20\cdot)};\quad \psi_l^{(20\cdot)}=1+\frac{1}{Q_l h_l}\left[M_{/x_l\cdot x_l}(Q_{l+m}\bar{\varphi}_{l+m})-\right.$$
$$\left.-Q_{l+m}\bar{\varphi}_{l+m}\right] \quad \text{на } (\Omega^{\prime})_l,\quad \bar{\varphi}_{l+m}\equiv\bar{\varphi}(x_{l+m}|x_l).$$

$$Z_2:\quad \zeta_2^{(\cdot)}=\sum_{l=1}^{\infty} Q_l\left[h_l+\chi_l^{(2\cdot)}\right],\quad \chi_l^{(2\cdot)}=K^{*}\bar{\varphi}_{l/l}-Q_{l+1}^{\prime}\bar{\varphi}_{l+1},$$

$$\bar{\varphi}_{l+1}\equiv\bar{\varphi}(x_{l+1}|x_l),\qquad K^{*}\bar{\varphi}_{l/l}\equiv\int d\mathcal{K}_{l,l+1}\bar{\varphi}_{l+1}.$$

<u>Подсемейство $Z_2^{(c)}$</u>. Пусть пространство X представлено как прямая сумма

$$X=X_0+\sum_{l=1}^{J} X_l$$

и имеются:

некоторая функция $\bar{\bar{\varphi}}(x)$ такая, что
$\bar{\bar{\varphi}}(x)=0$ на X_0, $\bar{\bar{\varphi}}(x)=\bar{\bar{\varphi}}_j$ на X_j, j =I,2,..., J,
и ядро $\mathcal{L}\{x,dy\}$ такое, что

величины $\mathcal{L}\{x,X_j\}$, j =I,..., J, вычисляются и что

$$\mathcal{L}\{x,dy\}\ll\mathcal{K}\{x,dy\} \qquad \text{п.н.}$$

Рассмотрим приближение вида

$$\bar{\varphi}(y|x)=\frac{\mathcal{L}\{x,dy\}}{\mathcal{K}\{x,dy\}}\bar{\bar{\varphi}}(y); \qquad (2.6)$$

имеем

$$K^{*}\bar{\varphi}(x|x)=\sum_{l=1}^{J}\mathcal{L}\{x,X_l\}\bar{\bar{\varphi}}_l, \qquad (2.7)$$

т.е. итерация вычисляется. Множество всех оценок в Z_2 с приближениями вида (2.6) и составляет $Z_2^{(c)}$. Заметим, что для вычисления (2.7) можно вводить "дополнительную рандомизацию" по номеру члена в сумме.

<u>Семейство $Z_2^{(z)}$</u>. Пусть итерация $K^{*}\bar{\varphi}_{l/l}$ вычисляется посредством введения "дополнительной рандомизации", т.е. каким-либо образом производится её статистическое оценивание,

$$K^{*}\bar{\varphi}_{l/l}\approx\widehat{K\varphi}_l,\quad K^{*}\bar{\varphi}_{l/l}=M_{/x_l}^{(z)}(\widehat{K\varphi}_l),\quad \widehat{K\varphi}_l\equiv\widehat{K\varphi}(x_l^{(z)}|x_l),$$

где $M_{/x_l}^{(z)}(\cdot)$ – символ осреднения по "дополнительному случайному узлу $x_l^{(z)}$" при фиксированном состоянии цепи x_l. Оценки $\zeta_{2\cdot}^{(z)}$,

$$\zeta_{2\cdot}^{(z)}(\omega;x_1^{(z)},\dots,x_n^{(z)})=\sum_{l=1}^{n}Q_l\left[h_l+\widehat{K\varphi}_l-Q_{l+1}^{\prime}\bar{\varphi}_{l+1}\right]$$

каждая из которых определяется каким-либо приближением $\bar{\varphi}(\cdot|\cdot)$ и типом дополнительной рандомизации, образуют семейство $Z_2^{(z)}$. При $\bar{\varphi}(y|x)=h(y)$ имеем в $Z_2^{(z)}$ оценку способа "математических ожиданий" ζ_1,

$$\zeta_1(\omega;x_1^{(z)},\dots,x_n^{(z)})=Q_1 h_1+\sum_{l=1}^{n}Q_l\,\widehat{Kh}_l.$$

Соответственно, при $\bar{\varphi}(y|x)=h(y)$ имеем в Z_2 оценку "аналитического способа математических ожиданий" $\zeta_1^{(a)}$,

$$\zeta_1^{(\omega)}(\omega) = Q_1 h_1 + \sum_{\ell=1}^{n} Q_\ell K^* h_\ell .$$

2.3. В § 7 аналоги классов Ξ , Z и множеств Z_2 , $Z_2^{(c)}$ вводятся для интегральных уравнений: со степенной нелинейностью и комплексных.

2.4. Известный путь получения методов с минимальной дисперсией – это использовать преобразование "замена (вероятностной) меры". Можно условно считать, что в переносе оно применялось к методу ($\mathcal{P}_0$, ξ_0). Пусть ($\mathcal{P}$, ξ) – метод с $\mathcal{P} \in \mathcal{P}\mathcal{J}$, $\xi \in \Xi$ и пусть $\Xi_{p,\xi}$ – множество методов, полученных из ($\mathcal{P}$, ξ) преобразованием "замена меры". Оказывается (теорема 2.8.I), что метод " выборка по важности" доставляет min не только дисперсии в $\Xi_{p,\xi}$, но и всем абсолютным моментам. В § I0 рассматривается способ "выборка по важности" ($\mathcal{P}_3^*$, ξ_3^*), $[\ \xi_3^* = \frac{dP_0}{dP_3^*}\ \xi_1\ ]$, полученный преобразованием " замена меры" из метода ($\mathcal{P}_0$, ξ_1). С этим способом связываются два семейства методов, цепи в одном из которых являются ветвящимися; в обоих семействах – цепи немарковские.

2.5. Имитационные методы (и "близкие" им), казалось бы, не используют сведений о $\varphi^*(\cdot)$. Естественен вопрос: "лучше чего" должно быть приближение, чтобы использующий его метод оказался эффективнее имитации? Возможен более глубокий вопрос, ответ на который дает ответ и на предыдущий. А именно, если по заданным семействам и приближениям $\bar\varphi(\cdot/\cdot)$ строятся методы, то можно ли обратить ситуацию, "отвечают" ли все оценки и методы каким-либо семействам и приближениям? Положительный ответ формулируется в форме концепции:

любые оценка и метод отвечают каким-либо семействам и каким-либо приближениям к функции $\varphi^*(\cdot)$.

Оценка $\xi_1 \in \Xi_{2c}$ и отвечает такому приближению, что

$$\frac{Q_{\ell+m}}{Q_\ell}\,\bar\varphi_{\ell+m} = C(x_\ell) \quad \text{на} \quad (Q\xi)_\ell \quad , \quad \ell \geq 1 \ , \qquad (2.8)$$

где $C(\cdot)$ – некоторая конечная функция. В частности, из (2.8) следуют условия на цепь $\mathcal{P}$,(предложение 2.II.I) выполнение которых необходимо для совпадения $\{\xi_1 = \xi_2^k\}$.

3. Обобщенные линейные комбинации оценок ξ_0 и ξ_1 .

В гл. 3 исследуется подсемейство $\Xi_1 \subset \Xi_{21}$; его составляют оценки $\xi_{1\cdot}$, которые могут быть записаны в виде

$$\xi_{1\cdot} = \sum_{\ell=1}^{\infty} Q_\ell h_\ell \psi_\ell^{(1\cdot)},\ \psi_\ell^{(1\cdot)} = 1 + \lambda_\ell\left[1 - 1_X(x_{\ell+1})(1-g_\ell)^{-1}\right];\ \lambda_\ell \equiv \lambda(x_\ell);\ \xi_{1\cdot} \equiv \xi_{1\lambda} .$$

Эти оценки можно классифицировать как обобщенные линейные комбинации ξ_0 и ξ_1 . В Ξ_1

I) определяется оценка с минимальной дисперсией – оценка ξ_1^* с $\lambda(x) = \lambda^*(x) \equiv K^*\varphi^*(x)/h(x)$,

2) устанавливается доминируемость оценки ξ_1 (теорема 3.2.I),

3) ставится и решается задача: при фиксированных цепи и оценке определить, если она существует, пару ($\mathcal{K}$, h), для которой заданная оценка есть оценка с минимальной дисперсией,

4) для 2-х заданных множеств пар ($\mathcal{K}$, h) сравниваются дисперсии $\mathcal{D}(\xi_{1\cdot})$ и $\mathcal{D}(\xi_1)$ [теорема 3.4.I] .

3.I. С.М. Ермаков и В.С. Нефедов (I972г.) предложили привлечь для сравнения оценок и методов представления математической статистики и построили пример, в котором оценка ξ_0 доминировала одну из оценок класса Ξ . Нижеследующая теорема может рассматриваться как развитие этого подхода.

Теорема 3.2.I. Пусть

$X_1 \subset X$,

$\lambda_0(x)$ – некоторая заданная функция на X ,

$\mathcal{T}$ – множество троек ($\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$, h) функций,

$\mathcal{P}\mathcal{T}$ – множество цепей $\mathcal{P}$

и пусть X_1 , $\lambda_0(\cdot)$, $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}\mathcal{T}$ такие, что

I) $\lambda_0(x) > 0$ на X_1 , $\lambda_0(x) \geq 0$ на $X - X_1$;

2) $\mathcal{F}\{\cdot\} \geq 0$, $\mathcal{K}\{\cdot,\cdot\} \geq 0$, $h(\cdot) \geq 0$; $\int \mathcal{K}\{\cdot, dy\} < 1 - g_0$, $g_0 > 0$;

для $\forall(\mathcal{F},\mathcal{K},h)\in T$ $\begin{cases}\int_{X_1}\Phi\{dx\}h(x)>0\\ K\overset{*}{\varphi}{}^*(x)\geq\lambda_0(x)h(x)\end{cases}$,

3) $\forall\mathcal{P}\in\mathcal{P}T$ является подходящей для $\forall(\mathcal{F},\mathcal{K},h)\in T$ и для $\forall\mathcal{P}\in\mathcal{P}T$ $g(x)>0$ на X_1.

Тогда, если

$0<\lambda(x)<2\lambda_0(x)$ на X_1, $0\leq\lambda(x)\leq 2\lambda_0(x)$ на $X-X_1$

и если существуют дисперсии, то для $\forall\mathcal{P}\in\mathcal{P}T$ и для $\forall(\mathcal{F},\mathcal{K},h)\in T$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(\xi_{1\cdot})<\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(\xi_1)\quad.$$

3.2. Обозначим как $\Phi_p\{dx\}$ решение интегрального уравнения

$$\Phi_p\{dx\}=\int p\{y,dx\}\,\Phi\{dy\}+p_1\{dx\}$$

и как X_{hp} множество $\{x: h(x)\neq 0\quad \Phi_p\{\cdot\}-\text{п.н.}\}$.

Частичный ответ на вопрос, существует ли какая-либо пара ($\mathcal{K},h$), для которой $\{\xi_1^*=\xi_1\}$ дает

Предложение 3.3.I. В случае

$\mathcal{K}\{\cdot,\cdot\}\geq 0,\ h(\cdot)\geq 0,\ \int\mathcal{K}\{x,dy\}>0$ на X_{hp} и $g(x)>0$ на X_{hp}

оценка ξ_1 не может доставлять $\min$ дисперсии в Ξ_1, а следовательно, и в любом более широком множестве оценок.

Фиксируем теперь какое-либо $\lambda(x)$ и соответствующую $\xi_{1\lambda}\in\Xi_1$ и поставим вопрос: существуют ли пары ($\mathcal{K}$, h), для которых

$$\xi_1^*=\xi_{1\lambda}\tag{3.I}$$

Теорема 3.3.I. Пусть $\lambda(x)>0$ на X_{hp}. Тогда существуют такие $\mathcal{K}\{\cdot,\cdot\}$, $h(\cdot)$, что для них справедливо (3.I).

Один из принципиальных выводов, к которому ведёт теорема 3.3.I, состоит в том, что оценки с $\lambda(x)>0$ на X_{hp} обладают в Ξ_1 свойством "недоминируемости". Это касается как оценки ξ_0 ($\lambda(x)=1/g(x)-1$ на X_{hp}), так и новой оценки ξ_4 с $\lambda(x)=1-g(x)$ на X_{hp}.

3.3. Считаем здесь, что мера $\mathcal{F}\{\cdot\}$ фиксирована и что $\mathcal{K}\{\cdot,\cdot\}\geq 0$, $h(\cdot)\geq 0$. Пусть

I) $\lambda_0(x)$ – некоторая определенная на X_{hp} функция,

2) $\{\mathcal{K},h\}_{\geq\lambda_0}$, $\{\mathcal{K},h\}_{<\lambda_0}$ – множества пар $(\mathcal{K},h)$ таких, что для $\forall$ тройки ($\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$, h) цепь $\mathcal{P}$ – подходящая, и таких, что

для $\forall(\mathcal{K},h)\in\{\mathcal{K},h\}_{\geq\lambda_0}$ $K\overset{*}{\varphi}{}^*(x)\geq\lambda_0(x)h(x)$ на X_{hp},

а для $\forall(\mathcal{K},h)\in\{\mathcal{K},h\}_{<\lambda_0}$ $K\overset{*}{\varphi}{}^*(x)<\lambda_0(x)h(x)$ на X_{hp}.

Из теоремы 3.4.I вытекают следствия, касающиеся ξ_0, ξ_1 и ξ_4.

Следствие I. Пусть

$g(x)>[1+2\lambda_0(x)]^{-1}$ на X_{hp};

тогда

$\mathcal{D}(\xi_0)<\mathcal{D}(\xi_1)$ для $\forall(\mathcal{K},h)\in\{\mathcal{K},h\}_{\geq\lambda_0}$.

Если же

$g(x)\leq[1+2\lambda_0(x)]^{-1}$ на X_{hp},

то

$\mathcal{D}(\xi_1)<\mathcal{D}(\xi_0)$ для $\forall(\mathcal{K},h)\in\{\mathcal{K},h\}_{<\lambda_0}$.

Следствие 2. Пусть

$g(x)>1-2\lambda_0(x)$ на X_{hp};

тогда

$\mathcal{D}(\xi_4)<\mathcal{D}(\xi_1)$ для $\forall(\mathcal{K},h)\in\{\mathcal{K},h\}_{\geq\lambda_0}$

Если же

$g(x)\leq 1-2\lambda_0(x)$ на X_{hp},

то

$\mathcal{D}(\xi_1)<\mathcal{D}(\xi_4)$ для $\forall(\mathcal{K},h)\in\{\mathcal{K},h\}_{<\lambda_0}$.

В какой-то мере следствие I объясняет преимущественное в сравнении с ζ_c использование ζ_1 в задачах переноса.

4. Вычисление потоков: "среднего по объёму" и "в точке".

4.I. Способ "математических ожиданий" ("м.о.") был введен в методы М-К Г. Каном и конкретизирован, далее, для задач с "барьерной геометрией". Трудности в способе возникают из-за возможности лишь численного вычисления в точках соударения траекторий итерации $K^*h(\cdot)$. В задачах ядерно-геофизических методов при вычислении средних по конечным объёмам (V) величины V потоков естественным явилось использование "м.о.", а именно, оценки ζ_1. (Можно считать, что в "барьерной геометрии" $V=\infty$). Развитие способа применительно к названному случаю, анализ дисперсий различных вариантов "дополнительной рандомизации" и доказательство преимущества способа над имитацией (для одного специального случая и $V\to 0$) представлены в §§ 2,3 гл. 4. Метод ($\mathcal{P}\Delta$, ζ_1), в котором оценивание $K^*h(\cdot)$ производится лишь посредством равномерной выборки направлений, обладает конечной дисперсией и широко использовался.

Наиболее прост в реализации метод ($\mathcal{P}V$, ζ_1), в котором оценивание $K^*h(\cdot)$ осуществляется посредством равномерной выборки точки в объёме (V); но $\mathcal{D}_{\mathcal{P}V}(\zeta_1)=\infty$. В § 7 предложен метод ($\mathcal{P}V$, $\zeta_{2h}^{(z)}$), в котором используются равномерная выборка в объёме (V) и приближение [$\zeta_{2h}^{(z)}\in Z_2^{(z)}$]

$$\bar\varphi(x|x')=\begin{cases}\dfrac{|\bar r-\bar r'|^2}{|\bar r-\bar r'|^2+\varepsilon^2}h(x) & |\bar r-\bar r'|<\varepsilon_1 \text{ и } \bar r'\in(V_1)\\ h(x) & |\bar r-\bar r'|\geq\varepsilon_1 \text{ или } \bar r'\notin(V_1)\end{cases}$$

где ε, ε_1 – заданные постоянные, а (V_1) – заданный объём, содержащий объём (V); $\mathcal{D}_{\mathcal{P}V}(\zeta_{2h}^{(z)})<\infty$. Наряду с ($\mathcal{P}V$, $\zeta_{2h}^{(z)}$) для вычисления средних по объёму потоков в § 7 предложены также методы ($\mathcal{P}$, $\zeta_{2h}^{(c)}$) с $\zeta_{2h}^{(c)}\in Z_2^{(c)}$ и ($\mathcal{P}\Delta$, $\zeta_{1\beta}^{(z)}$) с $\zeta_{1\beta}^{(z)}\in Z_2^{(z)}$. Все новые методы просмотрены на модельных задачах теории переноса и, например, метод ($\mathcal{P}\Delta$, $\zeta_{1\beta}^{(z)}$) оказался более чем в 2 раза менее трудоёмким нежели ($\mathcal{P}\Delta$, ζ_1).

Один численный эксперимент в § 7 связан с использованием оценки $\zeta_2^{(z)}$ для вычисления среднего по поверхности потока частиц, прошедших через "теневую защиту".

4.2. Для вычисления потока в пространственной точке (для определенности точка $\bar r^*$)

$$J=\int\varphi(x)\delta(\bar r-\bar r^*)h'(\bar\Omega,E)dx\ ,\quad [h(x)\equiv\delta(\bar r-\bar r^*)h'(\Omega,E)] \qquad (4.I)$$

хорошо известен метод "локальной оценки" ("л.о.") [В.Г. Золотухин и С.М. Ермаков, М. Калос]. Но из-за бесконечной дисперсии этому методу присуща сходимость лишь типа $1/\sqrt[3]{N}$, поэтому уделялось достаточно большое внимание иным способам вычисления (4.I), и был предложен целый ряд интересных методов. В отличие от других в предлагаемом нами методе ($\mathcal{P}_0$, ζ_2) цепь, как и в методе "л.о.", по-прежнему имитирует физическое распространение частиц. Метод предназначен для вычисления интегрального потока. Оценка $\zeta_2\in\Xi$ и связана со способом ζ_2^* и семейством Ξ_{2c} (при m =I); используется нижеследующее асимптотическое приближение к функции $\varphi^*(\cdot)$:

$$\bar\varphi(x|x')=\begin{cases}\sim|\bar r-\bar r^*|^2 & |\bar r-\bar r^*|<R(x')\\ 0 & |\bar r-\bar r^*|\geq R(x')\end{cases}, \qquad (4.2)$$

которое приводит к $\mathcal{D}_{\mathcal{P}_0}(\zeta_2)<\infty$; выше $R(x')$ – некоторая заданная функция. Метод ($\mathcal{P}_0$, ζ_2) сравнивался с методом "перевыборки" (М. Калос и Г. Стейнберг, I97Iг.), который также обладает конечной дисперсией и выделяется среди других своей универсальностью. Сравнение проводилось на задаче о вычислении (4.I) в односкоростном случае с изотропным рассеянием в однородной среде. Оказалось, что на рассматриваемом классе задач трудоёмкость метода ($\mathcal{P}_0$, ζ_2) в (4–I0) раз меньше трудоёмкости метода "перевыборки". Заметим также, что I-й абсолютный центральный момент метода "л.о." в (8–20) раз превышал соответствующую величину для метода ($\mathcal{P}_0$, ζ_2); средние числа операций на I испытание в методах "л.о." и ($\mathcal{P}_0$, ζ_2) соотносились примерно как (I : I.6).

Для вычисления спектральных величин в точке (напр., временной и энергетический спектры) приближение (4.2) должно быть модифицировано, оно должно задаваться лишь в части шара. Развитием метода ($\mathcal{P}_0$, ξ_2) на данный случай является метод ($\mathcal{P}_0$, ζ_2); оценка $\zeta_2 \in Z$ и связана со способом ζ_2^* и семейством Z_2.

Другого типа метод для вычисления (4.I) предлагается в §5 гл. 6. Он предназначен лишь для определенного круга задач и учитывает их специфику, а именно, наличие "плоской симметрии для части задачи". Преобразования, связанные с этим методом, можно отнести к известной группе приемов "аналитическое интегрирование части случайных переменных".

<u>4.3</u>. Перенос γ-квантов в однородной среде от точечного мононаправленного моноэнергетического источника рассматривался в ряде работ. В их числе наиболее поздняя – работа В.Г.Золотухина, Л.Р.Кимеля, А.И. Ксенофонтова и др.(1974 г.); многочисленные расчеты в ней были выполнены методом "л.о.". Но по многим обстоятельствам в задаче о поле источника с плотностью $q(x) = \delta(x - x^{(0)})$ важно иметь возможно более точные результаты. Наличие более точного численного метода и более быстродействующих вычислительных машин позволило вновь вернуться к проблеме и пополнить результаты.

В § 6 гл. 4 посредством метода ($\mathcal{P}_0$, ζ_2) вычисляются пространственно-энергетические распределения в 2-х средах, воде и песчанике; начальная энергия квантов – 0.5Мэв. Стандартные относительные погрешности составляли, в основном, 5% – 10%.

<u>5</u>. От ряда важных параметров показания ядерно-геофизических методов зависят "гладким" образом (напр., от плотности, пористости, толщины глинистой корки). В "прямых" задачах, решаемых посредством методов М-К, необходимо получать эти зависимости как можно менее подверженными случайному разбросу; в задачах "обратных" следует с учетом этой "гладкости" находить наиболее точные алгоритмы интерпретации данных измерений. В §I гл.5 описываются некоторые моменты, относящиеся к применению хорошо известного способа "зависимые испытания". В §§2,3 рассматриваются две задачи сравнения, связанные с "гладкими" кривыми и "зависимыми испытаниями". Сравнения относятся

к "весовой оптимизации" и, хотя их истоки связаны с γ-γ-каротажем (с задачей "вычисления кривой плотности по одному набору траекторий") и со способом "подобных траекторий", окончательная формулировка довольно общая. Отметим, что вопрос о сравнении дисперсий в способе "подобных траекторий" был поставлен И.М. Соболем.

Задача вычисления вероятности p , ($p = \mathcal{I}$) , какого-либо события A ,

$$p = \int_A P_0\{d\omega\} = \int_\Omega P_0\{d\omega\}\, 1_A(\omega) \quad ,$$

является одной из простых в методах М-К. Пусть ($\tilde{\mathcal{P}}$, $\tilde{\xi}$) – – "весовой" метод и пусть

$$\tilde{p} = \int_\Omega \tilde{P}\{d\omega\}\, 1_A(\omega)$$

Относительно дисперсий $\mathcal{D}_{\mathcal{P}_0}(1_A)$ и $\mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\xi})$ справедливы два нижеследующих утверждения.

<u>Теорема 5.2.I</u>. Для того чтобы $\mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\xi}) < \mathcal{D}_{\mathcal{P}_0}(1_A)$ необходимо

$$\tilde{p} > p$$

<u>Теорема 5.2.2</u>. Пусть $\mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\xi})$ – дифференцируемая по $\tilde{p}$ функция в некоторой окрестности $\tilde{p} = p$ и равенство $\tilde{p} = p$ соответствует совпадению мер P_0 и $\tilde{P}$.
Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\xi})\Big|_{\tilde{p}=p} = -1 \ .$$

В переносе под действие этих теорем попадают также "экспоненциальное преобразование" и родственная 2-м ранее названным модификация "изменение распределения длин пробегов". Для этих родственных модификаций имеет место утверждение и "вдали" от $\tilde{p} = p$ $[P_0 = \tilde{P}]$. Сформулируем его для "изменения распределения длин пробегов". В этой модификации в некоторой заданной области X_1 розыгрыш длин пробегов производится с сечением $\frac{1}{\beta}\Sigma(x)$, $\beta > 0$. (В имитационной плотности используется $\Sigma(x)$). Заметим, что $\tilde{\rho}=\rho$ соответствует $\beta=1$.

Теорема 5.3.I. Пусть X_1 – ограниченная область. Тогда существуют постоянные β_1 и β_2, $1<\beta_1<\beta_2$, и монотонно возрастающая для $\beta>\beta_1$ функция $u(\beta)$, что

$$\mathcal{D}_{\tilde{\rho}}(\tilde{J}) > u(\beta) - \rho^2 > \mathcal{D}_{\rho_0}(J_A) \qquad \text{для} \quad \beta>\beta_1$$

и что, если ряд (0.I) для ρ сходится не быстрее, чем геометрическая прогрессия, то

$$\mathcal{D}_{\tilde{\rho}}(\tilde{J}) = \infty \qquad \text{для} \quad \beta>\beta_2 .$$

В § 4 гл. 5 используется возможность вычисления производных $\frac{\partial J}{\partial a}$, где a – параметр, входящий в уравнение поверхности, разграничивающей среды (см. пункт 8). Речь идёт о численной интерпретации измерений в γ-γ-каротаже. А именно, рассматривается восстановление 2-х параметров: плотности горной породы ρ и толщины глинистой корки x –по измерениям потока на 2-х зондах. Показывается, что используемые в геофизике алгоритмы определения ρ и x представляют собой приближенное "одноитерационное" решение некоторой системы уравнений, рассматривавшейся ранее в общем случае Г.И.Марчуком. Во-вторых, для случая скважинной геометрии получено явное выражение производной $\frac{\partial J}{\partial x}$, что, вообще говоря, позволяет строить более точные ("многоитерационные") алгоритмы восстановления ρ .

6-7. Решение задач ядерно-геофизических (я.-г.)методов

Я.-г. методы привлекаются для решения разнообразных геолого-геофизических задач, в том числе, и это главное, они доставляют информацию о физико-химических свойствах горных пород (плотность, пористость, нефтенасыщенность, элементный состав и т.д.). Применение и совершенствование я.-г. методов базируются на закономерностях полей частиц, на сведениях о пространственных, энергетических и временных распределениях. В специфичных для я.-г. методов условиях сейчас именно они являются наиболее точным и надежным вычислительным инструментом.

К характерным особенностям переноса излучений в условиях я.-г. методов следует отнести "точечность" источника и неоднородность среды, что приводит к достаточно быстро меняющейся пространственной картине и вызывает необходимость получения достаточно детальных пространственных распределений. Другой характернейшей особенностью я.-г. задач является интерес не только к самим распределениям, но и, что не менее важно, к их реакциям на изменение параметров пласта и условий измерений. Одной из целей теоретических подходов является построение наглядной картины переноса излучений, объяснение физического механизма наблюдаемых эффектов. Это возможно лишь на основе решения последовательности усложняющихся задач. Как показывает опыт, последнее является непременным условием приближения к реалистичным задачам; как правило, необходимо иметь достаточно точные "реперные" промежуточные результаты.

Методы М-К используются в я.-г. задачах с 1962г., и

Результаты диссертации по я.-г. методам содержатся в гл. 6,7 и частично в гл. 5. Численные решения задач производились по специально разработанным программам. Тексты последних приводятся в соответствующих отчетах и препринтах ВЦ СО АН СССР. Одна программа, программа ГГК (гамма-гамма-каротаж), оформлена как стандартная и входит в Государственный фонд алгоритмов и программ; описание её возможностей дается в § 2 гл. 6. (Результаты вычислений по этой программе входили в кандидатскую диссертацию автора и в настоящую не входят). Отметим, что программа ГГК использовалась в геофизических организациях.

Численно решались следующие задачи:

I) об энергетическом спектре нейтронов в гамма-нейтронном методе (при опробовании на бериллий),

2) о пространственном распределении γ-квантов точечного мононаправленного моноэнергетического источника в однородной среде,

3) о детальном пространственном распределении γ-квантов точечного мононаправленного моноэнергетического источника в двухслойной бесконечной цилиндрической среде ("скважина-пласт"),

4) о временном, энергетическом и пространственном рас-

пределении нейтронов импульсного точечного изотропного моноэнергетического источника в двухслойной бесконечной цилиндрической среде.

Гамма-гамма-каротаж (ГГК) и гамма-нейтронный метод используются в геофизической практике; они относительно хорошо развиты. Численные исследования проводились нами с целью содействовать дальнейшему совершенствованию методов; задачи I, 3 решались впервые. Исследования методами Монте-Карло различных аспектов ГГК (зависимости от плотности, от длины "зонда", от параметров "ближней зоны", энергетический спектр) проводились ранее Ю.А. Гулиным и др., Р.Т. Хаматдиновым, автором и др. Возможность рассмотреть детальное пространственное распределение возникла в связи с новым методом вычисления потока в точке.

I-не исследования методами Монте-Карло различных задач импульсного нейтрон-нейтронного каротажа (ИННК), к каковым относится и задача 4, производились в 60-х годах (С.А. Денисик, Б.Е.Лухминский, Р.А. Резванов и др.) и позволили выявить многие важные закономерности. Но в этих работах вычисляемые величины представляли собой интегралы, в основном, от плотности тепловых нейтронов по "достаточно большим" объёмам (V), физические модели взаимодействия нейтронов с веществом были, во многом, упрощенными и приближенными, и результаты нередко носили прогностический характер. Со времени выполнения этих работ возросли возможности вычислительной техники и методов и появились более совершенные модели взаимодействия нейтронов с веществом, стало возможным проведение более точных вычислений. При решении задачи 4 использовались ядерные данные библиотеки "ENDL", исследовался весь энергетический спектр, было получено более детальное пространственное разрешение; исследовались также зависимости от пористости пласта и "эксцентриситета прибора". Задача 2 примыкает к рассмотренной в гл. 4 задаче о пространственно-энергетическом распределении γ-квантов. В сравнении с ней настоящая – о менее детализированном распределении, но она решается для значительно большей совокупности параметров.

Решение задачи I производилось с использованием способа, использующего "плоскую симметрию части задачи". При решении задачи 4 использовался способ "математических ожиданий". Решение задач 2, 3 производилось посредством метода $(\mathcal{G}_c, \delta_2)$.

Стандартные относительные погрешности вычислений во всех задачах не превышали в большинстве случаев 10%. При этом в задаче 2 потоки вычислялись на расстояниях до 50 см, в задаче 3 – до 30 см; в диссертации результаты для задачи 4 приводятся для расстояний 0 и 10 см, временной спектр простирается до $7 \cdot 10^{-4}$ сек. Из результатов как в некоторой мере особенные можно отметить следующие. В задаче I – различный характер зависимости от влажности для "быстрых" и "медленных" нейтронов, в задаче 3 – поведение потока вблизи границы раздела. В задаче 4, по-видимому, впервые было показано, что во временном спектре надтепловых нейтронов имеется участок "резкого спада", положение которого на временной оси сдвигается к бо́льшим временам при уменьшении пористости и смещении "прибора" с оси скважины. Отметим также, что одним из результатов решения задачи I явилось изобретение.

В заключение пункта я выражаю признательность профессору Е.М.Филиппову, общение с которым способствовало постановке задач.

8. Оптимизация формы теневой защиты.

Одно из развиваемых направлений в физике радиационной защиты, в особенности для так называемых теневых, связано с оптимизацией защиты посредством наилучшего выбора ее геометрических параметров (формы), а именно, минимизируется значение полной дозы при заданных ограничениях, среди которых ограничение на вес. К числу I-х работ в этом направлении относится работа Л.Р.Кимеля, в которой поток в защищаемой области учитывался в приближении нерассеянного излучения. Поиск оптимальных вариантов четырехслойной плоской защиты с использованием метода "оврагов" и метода дискретных ординат производился в работе Т.А.Гермогеновой, Ю.Г.Федорова и др.(1969г.). В работах В.А. Саковича и В.Л.Генерозова рассматривались оптимизация формы однослойной теневой защиты соответственно для γ-квантов (1970г.) и для нейтронов (1971г.);вычисление дозы производилось методом М-К, для поиска условного экстремума использовался градиентный метод; одновременно с дозой, по одним и тем же траекториям, производилось приближенное вычисление производных дозы по "геометрическим" параметрам. Изложенные в диссертации результаты по физике защиты представляют собой дальнейшее развитие работ В.А.Саковича и В.Д.Генерозова в направлении к реалистичным проблемам и в направлении усовершенствования методов.

Отметим, что переход к реалистичным задачам осложнялся тремя основными факторами: (I) сложной физической моделью взаимодействий частиц, (2) высокой кратностью ослабления излучений и (3) увеличением числа варьируемых переменных. Для изучения нейтронного и гамма полей в защищаемой области и исследования оптимальных форм как однородных так и многослойных теневых защит была создана программа "ОФОРЗ" (оптимизация формы радиационной защиты), с использованием которой был получен целый ряд результатов. В 8-й главе диссертации описываются эта программа, способы вычисления производных линейных функционалов (по "геометрическим" параметрам) и оптимизация 2-х слойной теневой защиты.

8.I. Пусть в некотором объёме, где рассматривается перенос частиц, находится поверхность (S), разделяющая среды с разными свойствами, и пусть a – один из параметров, описывающих эту поверхность. От параметра a зависят макроскопические сечения $\Sigma(x)$ и дифференциальное рассеяния $\Sigma_s(\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E\,|\,\bar{r})$, ядро $K(x',x)$ как функция a испытывает при некоторых (x',x) разрывы I-го рода (вызывающиеся разрывами сечений при переходе через границу раздела сред, а точнее, при вариации границы раздела). Вопрос о вычислении производной $\frac{\partial J}{\partial a}$ рассматривался ранее в работе М.З.Брайниной, В.Д.Генерозова и др. (I967г.) и отчасти в работе Г.А.Михайлова (I966г.). В отличие от названных работ в диссертации получено точное явное выражение для производной и, во-вторых, предложен более точный нежели ранее приближенный способ ее вычисления, который и использовался в программе ОФОРЗ. Следует отметить также рассмотрение данного вопроса В.Г.Золотухиным и Д.А.Усиковым (I979 г.).

Выражение для $\frac{\partial J}{\partial a}$ примечательно тем, что пространственное интегрирование в нем производится по поверхности (S). Несмещенные для вычисления $\frac{\partial J}{\partial a}$ оценки могут строиться с привлечением результатов о классах оценок для J.

8.2. В программе ОФОРЗ внешние (исключая боковую) и внутренние поверхности (S_j) различных слоев – части эллипсоидов вращения; каждая поверхность определяется 3-мя параметрами, которые и варьировались. Для расчетов защит с высокой кратностью ослабления реализованные в программе алгоритмы предусматривают использование "выборки по важности" при моделировании начальных энергий и направлений частиц, "изменения распределения длин пробегов" и "расщепления".

8.3. Оптимизировалась 2-слойная $(Fe + LiH)$ защита с кратностью ослабления $\gtrsim 10^2$; $j = 1,2,3$. При постоянных весе защиты и ее удалении от ("дискового") источника ["закреплена" ближайшая к источнику точка) минимизировалась средняя по защищаемой области суммарная доза нейтронов и γ-квантов (без учета "захватных" квантов). В результате 4-х шагов по методу градиентов доза уменьшилась в два раза; поверхности (S_j) в сравнении с начальным "плоским" видом приобрели достаточную степень кривизны. Стандартная относительная погрешность вычисления дозы составляла примерно 7%.

Заключение.

Основные результаты диссертации могут быть сформулированы следующим образом.

I. Найдены общие условия несмещенности для различных новых классов оценок.

2. В различных множествах определены оценки с минимальной дисперсией, введены новые семейства оценок, использующих приближения к решению сопряженного уравнения $\varphi^*(\cdot)$. Сформулирована концепция: любые оценка и метод отвечают каким-либо семействам и каким-либо приближениям к $\varphi^*(\cdot)$.

3. Рассмотрены обобщенные линейные комбинации стандартных оценок, выявлено свойство некоторых оценок совпадать или не совпадать с оценками с минимальной дисперсией, установлена доминируемость оценок "по столкновениям" и "по пробегам".

4. Построены и развиты новые методы для вычисления потоков: "среднего по объёму" и "в точке". Более точно, нежели ранее, решена задача о пространственно-энергетическом распределении γ-квантов от точечного мононаправленного моноэнергетического источника.

5. Исследованы свойства дисперсий в "весовой" оптимизации при вычислении вероятности и при изменении распределения длин пробегов.

Развит метод для вычисления производных линейных функционалов потока по параметрам поверхностей, разграничивающих среды. Предложено уточнение процедуры численной интерпретации данных измерений в γ-γ- каротаже.

6. С использованием созданных и развитых вычислительных методов и по разработанным программам решены задачи гамма-гамма, гамма-нейтронного и импульсного нейтрон-нейтронного ядерно-геофизических методов. Создана стандартная программа ГГК.

7. С использованием развитых методов и по созданному комплексу программ проведена оптимизация формы реалистичной теневой защиты от гамма и нейтронного излучений.

Все указанные под номерами I-5 теоретические результаты являются новыми, доказанными и получены лично автором. Степень новизны результатов по ядерной геофизике и физике защиты отражена в пунктах 6-7 и 8 настоящего автореферата. Численные решения физических задач производились за некоторым исключением с различными соавторами. В опубликованных по теме диссертации и выполненных в соавторстве работах вклад автора составляет не менее равной доли.

В заключение считаю приятным долгом отметить, что я благодарен многим лицам, с которыми имел контакты в процессе работы. Некоторым из них - особенно. Я благодарю академика Г.И.Марчука за предложенную тематику и многолетнее внимание. Я признателен академику М.М. Лаврентьеву, а также сотрудникам отдела, в котором работаю, за благожелательность и содействие. Я благодарю своих соавторов и коллег, с которыми обсуждались различные вопросы настоящей работы, за творческую атмосферу, полезные советы.

Результаты диссертации опубликованы в следующих работах автора.

I. Об эффективности метода математических ожиданий для задач одного класса.-Журн.вычисл.матем. и матем.физ., 1967, т. 7,№ 4, с. 946-953.

2. Выборка по важности в теории переноса излучений. - Журн.вычисл.матем. и матем.физ., 1970, т.10,№4, с.999-1005.

3. "Единичный класс" оценок для вычисления по методу Монте-Карло функционалов от решения интегрального уравнения 2-го рода. -Журн.вычисл.матем. и матем.физ., 1970, т. 10, № 5, с. 1269-1280.

4. К уменьшению дисперсии оценки вероятности методом Монте-Карло. -Журн.вычисл.матем. и матем.физ., 1970, т. 10, № 6, с. 1547-1549.

5. Оценки "единичного класса" с минимальной дисперсией. -В сб.: Вероятностные методы решения задач математической физики. Новосибирск, Б.и., 1971, с. 184-210. -В надзаг.: СО АН СССР, ВЦ.

6. Поведение дисперсии при изменении распределения длины пробега. -Журн.вычисл.матем. и матем.физ., 1972, т.12, № I, с. 257-262.

7. Об одном виде оценок "единичного класса". -Журн. вычисл.матем. и матем.физ., 1973, т. 13, № 3, с. 770-775.

8. Оценки с минимальными абсолютными моментами для вычисления методом Монте-Карло суммы ряда Неймана.- Докл. АН СССР, 1973, т. 212, № 2, с. 308-311.

9. Априорная информация и выбор модели метода Монте-Карло для вычисления суммы ряда Неймана. -ВИНИТИ, 1974, деп.рук. № 724-74, -49 с.

10. О сравнении двух простых монте-карловских моделей для вычисления суммы ряда Неймана. -В сб.: Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике. Новосибирск, Б.и., 1974, с.122-127. -В надзаг.: СО АН СССР,ВЦ.

II. Программа ГГК (гамма-гамма-каротаж). -Информ. бюллетень "Алгоритмы и программы", М.: ВНТИЦентр, 1974, вып. 2, (№ 65, инв. № П 000678).

12. Программа ОФОРЗ для расчета методом Монте-Карло нейтронного и гамма-полей за теневой защитой. -В сб.: Всесоюзн. научная конференция по защите от ионизирующих излучений ядернотехнических установок (Тезисы докладов). М.,Б.и., 1974, с.23.-В надзаг.:Мин-во высш. и средн. спец. образования СССР, МИФИ (совм. с Саковичем В.А., Сидоренко Л.Л.).

13. "Единичный" класс оценок для вычисления методами Монте-Карло итераций линейных операторов. -В сб.:Исследование операций и статистическое моделирование. Л.:Изд-во Ленинград. ун-та, 1975, вып. 3, с. 194-208.

14. Подправление оценки "по столкновениям" и сравнение ее с оценкой "по поглощениям". -Новосибирск, Б.и., 1975,34с. (Препринт ВЦ СО АН СССР).

15. Численное исследование зависимости стационарного распределения фотонейтронов от параметров породы. -Геология и геофизика, 1975, № 5, с.128-132.(совм. с Горевым А.В., Морозовым А.А.).

16. Способ "математических ожиданий" для сферических и цилиндрических областей в задачах переноса нейтронов. -В сб.: Некорректные задачи математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений. Новосибирск, Б.и.,1976, с. 78-88. -В надзаг.:СО АН СССР, ВЦ (совм. с Морозовым А.А.).

17. Оценка с конечной дисперсией для вычисления методом Монте-Карло потока в точке. -Журн. вычисл.матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 5, с. 1252-1263.

18. К вычислению потока частиц в точке. Сравнение двух методов и формулы для случая γ-квантов. -Новосибирск,Б.и., 1976, 18с.(Препринт /ВЦ СО АН СССР; 35)(совм. с Ермаковой Н.Е)

19. Выборка по важности и простой метод Монте-Карло при вычислении суммы ряда Неймана. -Журн.вычисл.матем. и матем. физ., 1977, т. 17, № 3, с. 585-590.

20. Поле (интегральные потоки) точечного мононаправленного источника γ-квантов в воде и песчанике. -Новосибирск, Б.и., 1977, - 32с.(Препринт /ВЦ СО АН СССР; 80).

21. Сопоставление результатов численных методов и эксперимента в задаче импульсного нейтрон-нейтронного каротажа.- В сб.: Вычислительные проблемы математических задач

геофизики. -Новосибирск, Б.и., 1978, с. 96-105. - В надзаг.: СО АН СССР, ВЦ (совм. с Морозовым А.А., Поляченко А.Л., Шапошниковой Т.А.).

22. Численное исследование оптимальных форм некоторых двух - и трехслойных теневых защит от нейтронов и гамма-квантов. -В сб.: Вторая Всесоюзная научная конференция по защите от ионизирующих излучений ядернотехнических установок. (Тезисы докладов). -М., Б.и., 1978, с. 73. - В надзаг.: Мин-во высш. и средн. спец. образования СССР, МИФИ (совм. с Саковичем В.А., Сидоренко Л.Л.).

23. Доминируемость оценки "по столкновениям". -Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 1, с. 37-39.

24. Развитие одного монте-карловского метода вычисления потока частиц в точке. - Новосибирск, Б.и., 1979, - 23 с. (Препринт/ВЦ СО АН СССР; 142) (совм. с Павловой Н.В.).

25. Исследование методами Монте-Карло распределения нейтронов импульсного источника 1.4 Мэв в двухслойной бесконечной цилиндрической среде. - В сб.: Условно корректные задачи и проблемы геофизики. -Новосибирск, Б.и., 1979, с. 58-73. -В надзаг.: СО АН СССР, ВЦ (совм. с Морозовым А.А., Резвановым Р.А.).

26. О численной интерпретации в γ - γ-каротаже. -В сб.: Единственность, устойчивость и методы решения обратных и некорректных задач. - Новосибирск, Б.и., 1980, с. 93-99.-В надзаг.: СО АН СССР, ВЦ.

27. Численное исследование распределения нейтронов импульсного источника 14 Мэв в двухслойной бесконечной цилиндрической среде. -"Атомная энергия", 1980, т. 48, вып. 6, с. 374-376 (совм. с Морозовым А.А., Резвановым Р.А.).

28. Пространственные распределения γ-квантов от точечного мононаправленного моноэнергетического источника в двухслойной среде "скзажина-пласт". -В сб.: Неклассические проблемы математической физики. -Новосибирск, Б.и., 1981,с.144-154. -В надзаг.: СО АН СССР, ВЦ (совм. с Павловой Н.В.).

29. Некоторые возможные применения методов Монте-Карло с оценками "нулевого" и "единичного" классов. - В сб.: Приближенные методы решения и вопросы корректности обратных

задач. -Новосибирск, Б.и., 1981, с. 124-131. - В надзаг.: СО АН СССР, ВЦ.

30. Пространственно-энергетические распределения - γ-квантов точечного мононаправленного моноэнергетического источника. -Новосибирск, Б.и., 1981, 28 с. (Препринт / ВЦ СО АН СССР; 308) (Совместно с Горн Н.Е.).

31. Несмещенные случайные оценки итераций интегрального оператора со степенной нелинейностью. -Журн. вычисл.матем. и матем. физ., 1981, т. 21, № 2, с. 363-370.

32. О вычислении методами Монте-Карло производных линейных функционалов потока по параметрам поверхностей.-Журн. вычисл. матем. и матем. физ.,1981, т. 21, № 3, с.787-790 (совм. с Сидоренко Л.Л.).

33. Обобщенные линейные комбинации стандартных оценок в методах Монте-Карло для интегральных уравнений. —Новосибирск, Б.и., 1982, 16 с. (Препринт /ВЦ СО АН СССР; 336).