ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

ИНОЗЕМЦЕВА Наталья Германовна

УДК 531.19

ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В МОДЕЛЯХ НЕРАВНОВЕСНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Дубна — 1991

Работа выполнена в Московском институте радиотехники, электроники и автоматики

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор — И.П.ПАВЛОЦКИЙ

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник — Е.Е.ТАРЕЕВА

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник — А.С.ШУМОВСКИЙ

Ведущая организация - Математический институт имени В.А.Стеклова АН СССР

Защита состоится "___" ___________ 1991 г. на заседании Специализированного совета Д047.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "___" ___________ 1991 г.

Ученый секретарь Специализированного совета Д047.01.01

В.И.ЖУРАВЛЕВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Изучение законов эволюции макроскопических систем на основе динамической теории представляет собой одну из центральных задач статистической механики. Вплоть до настоящего времени основным способом, позволяющим продвинуться по пути к ее решению, остается рассмотрение моделей, в той или иной степени использующих идеи сокращения описания и предположения о свойствах систем в конкретных физических ситуациях.

Адекватной основой для построения подобных моделей является бесконечная цепочка нелинейных интегродифференциальных уравнений Н.Н.Боголюбова, эквивалентная точному уравнению Лиувилля. Ее приближенные решения, полученные в рамках гипотезы о быстром затухании многочастичных корреляций в системах с короткодействием, соответствуют локальным обобщениям кинетического уравнения Больцмана и классическим уравнениям гидродинамики. Систематическое изучение корреляционных эффектов на расстояниях, превышающих длину свободного пробега, начатое работами по моделированию столкновений в системах твердых сфер и непосредственному измерению временных автокорреляционных функций (ВКФ) динамических величин, привело к новому этапу развития кинетической теории. Для интерпретации аномально медленного убывания ВКФ возникла необходимость как в привлечении полуфеноменологических схем, используемых с целью качественного объяснения эксперимента, так и в существенно более глубоком анализе нелинейных эффектов в известных моделях. Особую актуальность приобрело исследование моделей, обладающих точными решениями и применимых к системам умеренной плотности.

В течение последнего десятилетия было найдено значительное число аргументов, свидетельствующих о том, что проблема описания предравновесных состояний макроскопических систем с короткодействием может быть корректно решена лишь посредством отказа от локальной картины процессов переноса и формулировки схем, явно учитывающих наблюдаемые дальнодействующие корреляции. Наиболее перспективным здесь является подход, основанный на использовании в соответствии с общим принципом сокращения описания новых аппроксимаций в цепочке уравнений Н.Н.Боголюбова. Его последовательное применение стимулировало разработку актуальной проблемы доказательства точных утверждений о свойствах решений нетрадиционных кинетических моделей и вывода на их основе нелокальных уравнений гидродинамики. Постановкой данного круга задач обусловлен возросший интерес к нелинейным моделям с упрощенными интегралами столкновений, допускающих на примере тех или иных семейств точных решений проверку гипотез относительно релаксации квазиравновесных распределений.

Расширение класса точно решаемых моделей представляется актуальным и в динамическом подходе к квантовому описанию многочастичных процессов, поскольку выяснение скрытой симметрии квантовых модельных систем позволяет, помимо определения эффективности различных аппроксимаций, получить информацию о структуре пространства состояний и полностью исследовать эволюцию динамических переменных.

Целью работы является построение и развитие методов, позволяющих получить точные результаты для ряда моделей неравновесной статистической механики и связанных с ними задач нелинейной математической физики вне рамок стандартных приближений.

Научная новизна и практическая ценность. Новым вкладом является разработка методов вычисления асимптотического поведения временных автокорреляционных функций в нелинейной модели Больцмана-Энскога, обладающей точными микроскопическими решениями.

Впервые изучены свойства нелокальной кинетической модели, соответствующей учету динамических корреляций при расцеплении бесконечной цепочки уравнений ББГКИ для систем твердых сфер, дано доказательство существования расходимостей в стандартном подходе к получению уравнений гидродинамики, установлена структура неаналитической зависимости квазиравновесных функций распределения от параметра однородности, сформулирован алгоритм построения нелокальных гидродинамических уравнений. Эти результаты представляют возможность для последовательного описания непосредственно наблюдаемой временной зависимости ВКФ и релаксации макроскопических потоков в системах с короткодействием.

Впервые указаны точные пространственно-неоднородные решения обобщенной модели Каца. Новым является представленный в работе метод построения изотропных решений модели сверхтвердых дисков при начальных условиях, не обеспечивающих ограниченности второго момента функции распределения. Впервые проведено исследование свойств матричных нелинейных систем второго порядка, аналогичных классическим уравнениям Пенлеве I и П рода.

Развит новый теоретико-алгебраический подход к изучению гамильтонианов квантовых систем, отвечающих взаимодействию резонансных мод бозонного поля с многоуровневыми источниками. Впервые установлено существование динамической симметрии и нетривиальных интегралов движения при определенных ограничениях на параметры, характеризующие взаимодействие для произвольного числа уровней.

Для защиты выдвигаются следующие основные результаты, полученные в диссертации.

1. Разработан метод построения спектра и собственных функций интегрального оператора, отвечающего процессам переноса в линеаризованной модели Больцмана-Энскога для систем твердых сфер. Получены точные выражения для коэффициентов переноса в модели без каких-либо ограничений на равновесную плотность систем.

2. Предложен метод определения ведущего степенного вклада в асимптотику ВКФ микроскопических токов, обусловленного нелинейными эффектами в модели Больцмана-Энскога. Обосновано предположение об использовании коэффициентов переноса с поправками Энскога для описания экспериментов по определению ВКФ в системах средней плотности.

3. Построено нелокальное кинетическое уравнение для систем твердых сфер, учитывающее дальнодействующие динамические корреляции. Развита схема определения его решений, отвечающих гидродинамическому этапу релаксации. Доказано существование расходимостей в приближении Барнетта, свидетельствующих о неприменимости стандартных разложений по параметру однородности модели.

4. Доказано, что учет динамических корреляций приводит к неаналитической зависимости решений нелокального кинетического уравнения от параметра однородности. Дан алгоритм построения нелокальных уравнений гидродинамики в общей нелинейной постановке задачи.

5. В обобщенной модели Каца построены два класса точных решений для функции распределения, содержащих зависимость от пространственной переменной.

6. Предложен метод построения точных изотропных решений модели сверхтвердых дисков при медленно убывающих начальных условиях. Найдены случаи, в которых функции распределения могут быть представлены в виде интегралов, содержащих гипергеометрические функции.

7. Найдены матричные системы нелинейных уравнений второго порядка, обобщающие уравнения Пенлеве I и П рода. Доказано существование их решений с полюсными особенностями, содержащих максимально допустимое число произвольных постоянных; даны примеры редукций к низшим трансцендентам.

8. Построен новый класс точно решаемых моделей взаимодействия бозонного поля с источниками, не содержащих каких-либо ограничений на числа резонансных мод поля и источников.

Указаны дополнительные интегралы движения и продемонстрирована эффективность их использования для решения спектральных задач.

Апробация работы. Основные материалы диссертации неоднократно докладывались на семинарах НИИЯФ МГУ и Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, были представлены на I–IУ Международных симпозиумах по избранным проблемам статистической механики (Дубна – 1977,1980,1984, 1987), Всесоюзной школе по статистической механике (Баку, 1980), Школе по избранным проблемам теории твердого тела (Львов, 1978), на научных семинарах университета Салерно (Италия, 1988,1990), Международном совещании "Достижения теоретической физики" (Ветри, 1990), Всесоюзной конференции "Современные проблемы статистической физики" (Харьков, 1991).

По теме диссертации опубликовано 23 работы в советской и зарубежной печати.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения, содержит 226 страниц машинописного текста, библиографический список из 183 названий.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении содержится обзор современного состояния проблем кинетической теории, рассматриваемых в диссертации, излагается постановка задач, кратко освещается содержание работы.

В первой главе исследуются решения линеаризованного уравнения Больцмана-Энскога, необходимые для определения наиболее простых свойств предравновесных состояний систем твердых сфер средней плотности. Построение их явного вида эквивалентно решению спектральной задачи

$$(i\vec{k}\vec{v} - n\hat{\Lambda}_{\vec{k}}(\vec{v}))\Psi_{\vec{k}}(\vec{v}) = z(\vec{k})\Psi_{\vec{k}}(\vec{v}),$$

$$\hat{\Lambda}_{\vec{k}}(\vec{v})\chi(\vec{v}) = a^2 \int\limits_{(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}>0} [(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}][\chi(\vec{v}^*) + \chi(\vec{v}^{*\prime})e^{ia\vec{k}\vec{\sigma}} - \chi(\vec{v}) - \chi(\vec{v}')e^{-ia\vec{k}\vec{\sigma}}]d\vec{\sigma}, \qquad (I)$$

где n – равновесная плотность, a – диаметр сферы,

$|\vec{\sigma}| = 1$, $\vec{v}^*, \vec{v}^{*\prime} = \vec{v} \pm \vec{\sigma}((\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma})$.

Оператор Больцмана-Энскога $\hat{\Lambda}_{\vec{k}}(\vec{v})$ не коммутирует с сопряженным ему $\hat{\Lambda}^+_{\vec{k}}(\vec{v})$; его спектр при $|\vec{k}| \to 0$ вырожден. В §I разработана модификация теории возмущений для подобных операторов, позволяющая построить алгоритм нахождения собственных функций в любом порядке по $|\vec{k}|$. Результаты соответствующих вычислений приведены в §2, где показано, что следствием нелокальности модели по пространственным переменным является неортогональность $\{\Psi_{\vec{k}}(\vec{v})\}$ для произвольных $|\vec{k}|$ в гильбертовом пространстве с нормой

$$\|\Psi\| = \left[\int d\vec{v}\,\varphi_0(\vec{v})\Psi^*(\vec{v})\Psi(\vec{v})\right]^{1/2},$$

где $\varphi_0(\vec{v})$ – равновесная одночастичная функция распределения. Гидродинамическая часть спектра (I) анализируется в §3. С учетом неортогональности $\{\Psi_{\vec{k}}(\vec{v})\}$ найдены явные выражения для коэффициентов разложений $z^{(\alpha)}(\vec{k}) = z_1^{(\alpha)}|\vec{k}| + z_2^{(\alpha)}|\vec{k}|^2 + O(k^3)$ без каких-либо предположений о величине параметра na^3 ; показано, что в пределе $na^3 \to 0$ воспроизводятся известные формулы Энскога. Эти результаты используются во второй главе для нахождения асимптотики ВКФ $C_\varepsilon^k(t)$ микроскопических тонов j_ζ, λ при $t \gg t_{mfp} \sim (\frac{m}{\theta})^{1/2}(na^2)^{-1}$ в нелинейной модели Больцмана-Энскога, обладающей, как было показано Н.Н.Боголюбовым в 1975 г., точными микроскопическими решениями. Во второй части §I указаны основные свойства ВКФ динамических величин. Далее устанавливается их связь с одночастичной функцией распределения $f(t,\vec{r},\vec{v})$,

$$C_\varepsilon^k(t) = n^2\int d\vec{v}_0\, j_\varepsilon(\vec{v}_0)\varphi_0(\vec{v}_0)\int d\vec{r}\,d\vec{v}\, j_\varepsilon(\vec{v}) f(t,\vec{r},\vec{v}), \quad \varepsilon = \{\zeta, \lambda\}. \qquad (2)$$

Начальное условие для $f(t,\vec{r},\vec{v})$ сингулярно и содержит бинарную равновесную функцию распределения

$$f(0,\vec{r},\vec{v}) = n^{-1}\delta(\vec{v}-\vec{v}_0)Z(\vec{r}-\vec{r}_0) + \varphi_0(\vec{v})\int d\vec{r}'Z(\vec{r}'-\vec{r}_0)f_2(|\vec{r}-\vec{r}'|),$$
$$\int d\vec{r}_0\, Z(\vec{r}-\vec{r}_0) = 1. \qquad (3)$$

Показано, что решение линеаризованного уравнения Больцмана-Энскога, удовлетворяющее (3), соответствует экспоненциальной асимптотике ВКФ $\sim n\exp(-n\lambda_0 t)$, $\lambda_0 = -(j_\varepsilon(\vec{v}), \hat{\Lambda}_0(\vec{v})j_\varepsilon(\vec{v}))$. Метод учета нелинейных эффектов модели, развитый в §2, позволяет найти компактное интегральное представление для ВКФ в области $t \gg t_{mfp}$

$$C_\varepsilon^k(t) \simeq -\int\limits_L \frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\Big(-\hat{\Lambda}_0^{-1}(\vec{v})j_\varepsilon(\vec{v}), \int d\vec{v}'\varphi_0(\vec{v}')\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\hat{T}_{\vec{k}} \times$$
$$\times\big(p + i\vec{k}(\vec{v}-\vec{v}') - n(\hat{\Lambda}_{\vec{k}}(\vec{v}) + \hat{\Lambda}_{-\vec{k}}(\vec{v}'))\big)^{-1}M^\varepsilon_{\vec{k}}(\vec{v},\vec{v}')\Big),$$

где $\hat{T}$ – фурье-образ двухчастичного столкновения, $M^\varepsilon_{\vec{k}}(\vec{v},\vec{v}')$ вследствие (3) сингулярна при $\vec{v} \to \vec{v}'$. Асимптотика (4) полностью определяется положением и структурой крайней правой особенности в p -плоскости скалярного произведения в правой части (4). Исследование, проведенное на основе свойств решений спектральной задачи (I), показывает, что данная особенность представляет собой точку ветвления при

$p=0$, соответствующую вкладу области $|\vec{k}|\, l_{mfp} \lesssim 1$ при интегрировании в (4). Параграф завершается выводом асимптотического закона убывания ВКФ в нелинейной модели Больцмана-Энскога, $C_\varepsilon^{\kappa}(t) \sim A_\varepsilon t^{-3/2}$ и нахождения замкнутого выражения для коэффициентов $\{A_\varepsilon\}$, включающего изученные в предыдущей главе правильные функции нулевого приближения $\hat{\psi}_{\vec{e}}^{(\alpha)}(\vec{v}) = \lim_{|\vec{k}|\to 0} \psi_{\vec{k}}^{(\alpha)}(\vec{v})$, $\vec{e} = \vec{k}/|\vec{k}|$, и характеристики $\{z_1^{(\alpha)}, z_2^{(\alpha)}\}$ спектра оператора (I),

$$A_\varepsilon = -(\hat{\Lambda}_0^{-1}(\vec{v}) j_\varepsilon(\vec{v}), \int d\vec{v}'\, \varphi_0(\vec{v}') \int \frac{d s_2 \vec{e}}{(2\pi)^3} \hat{T}_0 \sum_{l,m=1}^{5} \delta(z_1^{(l)} + z_1^{(m)}) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\pi}{4}} (z_2^{(l)} + z_2^{(m)})^{-3/2} \tilde{\psi}_{\vec{e}}(\vec{v}) \tilde{\psi}_{-\vec{e}}^{(m)}(\vec{v}') M_{\vec{e}}^{\varepsilon(l,m)}, \qquad (5)$$

где $M_{\vec{e}}^{\varepsilon(l,m)}$ - коэффициенты разложения $M_{\vec{k}}^{\varepsilon}(\vec{v}, \vec{v}')$ по $\{\psi_{\vec{k}}^{(l)}(\vec{v}), \psi_{-\vec{k}}^{(m)}(\vec{v}')\}$ при $|\vec{k}| \to 0$. Нахождение $M_{\vec{e}}^{\varepsilon(l,m)}$ и преобразование скалярного произведения в (5) составляют основное содержание третьего параграфа данной главы. Представление $\{\hat{\psi}_{\vec{e}}^{(l)}(\vec{v})\}$ в виде линейных комбинаций инвариантов столкновения и использование свойств оператора $\hat{T}_0^{-1}$ позволяют вычислить все интегралы по скоростям в (5) и получить компактное выражение для A_ε , пригодное при вычислениях любых приближений по параметру na^3 . Показано, что формулы для A_ε , предложенные ранее Дорфманом и Коэном, справедливы лишь в первом порядке по этому параметру; во всех следующих порядках необходимо, помимо поправок к $\{z_2^{(\alpha)}\}$, принимать во внимание неортогональность набора функций $\{\hat{\psi}_{\vec{e}}^{(\alpha)}(\vec{v})\}$.

Третья глава посвящена проблеме построения предравновесных решений кинетической модели, явно учитывающей существование крупномасштабных динамических корреляций. В §I дан анализ трудностей схемы локального описания систем с короткодействием, предполагающей затухание многочастичных корреляций на кинетическом этапе релаксации. Далее рассмотрены нелинейные уравнения модели, не содержащие ограничений, вытекающих из гипотезы о полной синхронизации высших функций распределения $f_s(t;1,\dots s)$ с $f(t,1)$ и позволяющие изучить динамические корреляционные эффекты, определяемые функцией

$$g_2(t;1,2) = f_2(t;1,2) - f_1(t,1) f_1(t,2),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + L(1)\right] f_1(t,1) = n \int dx_2\, T(1,2) \left[f_1(t,1) f_1(t,2) + g_2(t;1,2)\right], \qquad (6)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(t,1)\right] + \mathcal{L}(t,2) \Big] g_2(t;1,2) = T(1,2) f_1(t,1) f_1(t,2),$$

где $T(1,2)$ - оператор двухчастичного столкновения,

$L(j) = \vec{v}_j \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j}$, $\mathcal{L}(t,j)\Psi(j) = L(j)\Psi(j) - n\int dx_3\, T(j;3)\left[f_1(t,j)\Psi(3) + f_1(t,3)\Psi(j)\right]$; $j = 1, 2$. Приближение $g_2(t;1,2) \equiv 0$ соответствует уравнению Больцмана-Энскога. Показано, что система (6) с начальным условием $g_2(t;1,2)\big|_{t=0} = 0$ эквивалентна нелокальному кинетическому уравнению, содержащему T-упорядочение некоммутирующих операторов, зависящих от времени; корреляционные эффекты соответствуют суперпозициям распространяющихся волн и носят пространственно-временной характер.

В §2 изучается возможность перехода к гидродинамическому описанию посредством введения в (6) формального параметра однородности μ, определяющего степень изменения свойств системы при пространственно-временных трансляциях. Вначале предполагается, что решения (6) могут быть представлены в виде рядов по μ вида

$$f(t,1) = f^{(0)}(t,1)(1 + \mu\varphi_1(t,1) + \mu^2\varphi_2(t,1) + \dots),$$

$$g_2(t;1,2) = f^{(0)}(t,1) f^{(0)}(t,2)(\mu\psi_1(t;1,2) + \mu^2\psi_2(t;1,2)), \qquad (7)$$

где $f^{(0)}(t,1) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{m}\left(\frac{m}{2\pi\theta(\vec{r},t)}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(\vec{v}-\vec{u}(\vec{r},t))^2}{2\theta(\vec{r},t)}\right]$ - квазиравновесная максвелловская функция распределения. В первом порядке по μ получена линейная система уравнений для функций $\varphi_1(t,1)$ и $\psi_1(t;1,2)$. Дан способ построения ее решений, подстановка которых в уравнения обобщенных законов сохранения приводит к стандартным локальным уравнениям Навье-Стокса для макроскопических параметров $\rho, \vec{u}, \theta$ с корректно определенными выражениями для коэффициентов переноса. Далее излагается схема вычисления функции $\varphi_2(t,1)$, необходимой для построения приближения Барнетта. Подробно изучаются свойства сингулярного интегрального оператора

$$Q(1,2) = \left[(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\frac{\partial}{\partial \vec{r}} - n(\Lambda_M(1) + \Lambda_M(2))\right]^{-1}, \qquad (8)$$

где $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\hat{\Lambda}_M(j)\chi(j) = a^2 \int dx_3\, d\vec{e}_3\, f^{(0)}(t,3)\, T(j;3)(\chi(1) + \chi(3))$.

Показано, что с точностью до членов высших порядков по μ он может быть аппроксимирован оператором

$$\tilde{Q}(1,2) = (2\pi)^{-3} \int d\vec{k}\, \exp(i\vec{k}\vec{r}) \left[i(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\vec{k} - n(\Lambda_M(1) + \Lambda_M(2))\right]^{-1} \hat{F}^{-1},$$

где $\hat{F}$ ставит в соответствие функции аргумента $\vec{r}$ ее фурье-образ. Получено компактное представление для $\varphi_2(t,1)$, содержащее действие квадрата оператора (8) на функции координат, локализованные в точке $\vec{\varepsilon}=0$. Последнее обстоятельство позволяет путем перехода к операторам $\hat{Q}(1,2)$. выделить в $\varphi_2(t,1)$ вклады вида

$$\int d\vec{q}\, \exp(i\vec{q}\vec{\varepsilon}) \sum_{j,\kappa=1}^{5} A_{j\kappa}(\vec{q}) \left[z^{(j)}(\vec{q}) + z^{(\kappa)}(-\vec{q}) \right]^{-2}, \qquad (9)$$

где $z^{(j)}(\vec{q})$ – собственные значения (I); коэффициенты $A_{j\kappa}(\vec{q})$ регулярны в окрестности точки $|\vec{q}|=0$. Присутствие в (9) слагаемых с $z^{(j)}(\vec{q})+z^{(\kappa)}(-\vec{q})\sim|\vec{q}|^2$ при $|\vec{q}|\to 0$ доказывает расходимость коэффициентов Барнетта и свидетельствует о противоречивости локального описания гидродинамического этапа релаксации в данной модели. В §3 рассмотрена модификация разложений (7), при которой порядок отклонений решений от $\{f^{(0)}(t,1), 0\}$ определяется непосредственно из системы (6). Предложен метод построения нелокальных уравнений гидродинамики, основанный на выделении в модифицированных разложениях вида (7) ведущей особенности по μ. Показано, что в общей нелинейной постановке задачи выражение для $\varphi_1(t,1|\mu)$ содержит интегралы с T-упорядочением зависящих от μ некоммутирующих операторов. В пределе малых отклонений макроскопических параметров $\rho, \vec{u}, \theta$ от их равновесных значений проблема определения структуры ведущей сингулярности в μ-плоскости допускает явное решение; соответствующий вклад в $\varphi_1(t,1,\mu)$ в правые части уравнений обобщенных законов сохранения может быть представлен в форме

$$I_{jj'}(z,\vec{q}|\mu) \sim \int_{\Omega_0} \frac{d\vec{\kappa}}{(2\pi)^3} \left[\kappa^2 + d_1^{(jj')}\mu\vec{\kappa}\vec{q} + d_2^{(jj')}\mu\vec{q}^{\,2} + d_3^{(jj')}\mu z \right]^{-1}, \qquad (10)$$

где $z, \vec{q}$ – аргументы образов Фурье-Лапласа параметров $\rho, \vec{u}, \theta$; $\{d_s^{(jj')}\}$ – комбинации больцмановских коэффициентов переноса, Ω_0 – конечная область, содержащая точку $\vec{\kappa}=0$. Правая часть (10) не является аналитической функцией μ: в окрестности $\mu=0$ разложение $I_{jj'}(z,\vec{q}|\mu)$ при $d_1^{(jj')}=0$ имеет вид

$$const\,(4\pi)^{-1}\left(d_2^{(jj')}\mu z + d_2^{(jj')}\mu^2\vec{q}^{\,2}\right)^{1/2}.$$

Этот результат подтверждает сформулированный в §2 вывод о неприменимости приближения Барнетта к системе (6).

В четвертой главе рассмотрены методы построения решений в одномерных кинетических моделях с упрощенными интегралами столкновений. В §I дана формулировка обобщенной модели Каца, описывающей одномерные системы частиц, находящиеся под действием внешних сил $\Lambda(x,t)$. В наиболее общем случае зависимости функции распределения $f(t,x,v)$

от всех переменных задачи найдены условия, при которых она может быть представлена в виде конечного ряда

$$f(x,t)=\pi^{-1/2}\exp(-bv^2/2)\sum_{n=0}^{5} d_n(x,t)v^n.$$

Получена система из пяти нелинейных уравнений в частных производных для $\{d_n(x,t)\}$, $\Lambda(x,t)$, решения которой изучаются в §2. Показано, что в общем случае существуют две схемы редукции. В первой из них возникает переопределенная система двух уравнений на функции, одна из которых не зависит от пространственной переменной. Указаны ее нетривиальные решения, соответствующие сингулярным возмущениям в форме распространяющихся волн. Вторая схема позволяет получить при $b=const$ одно уравнение с кубической нелинейностью для функции $\Psi(x,t)$, связанной с $\Lambda(x,t)$ соотношением $\Lambda(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\partial\Psi}{\partial t}$; построено однопараметрическое семейство его точных решений, содержащих переменные в комбинации $\eta=\frac{t}{x}$. В §3 исследованы свойства нелинейного уравнения для изотропных пространственно-однородных решений модели "сверхтвердых" дисков. Структура модельного интеграла столкновений приводит к неоднозначности постановки задачи Коши для медленно убывающих начальных условий $f(\varepsilon,0)\sim\varepsilon^{-3}$, $\varepsilon=|v|^2/2$. Показано, что решения в этом случае определяются, помимо $f(\varepsilon,0)$, первым моментом функции распределения $\bar{E}(t)=\int\varepsilon d\varepsilon f(\varepsilon,t)$. Предложен метод преобразования кинетического уравнения модели к уравнению Риккати для изображения Лапласа $g(z,t)=\int_0^\infty \exp(-z\varepsilon)f(\varepsilon,t)d\varepsilon$; определена зависимость его решений от $g(z,0)$. Найдены все случаи, в которых оно может быть представлено в виде интегралов от комбинаций рациональных и гипергеометрических функций. При произвольных $\bar{E}(t)$ построена асимптотика $f(\varepsilon,t)\simeq 2\bar{E}'(t)\varepsilon^{-3}$, $t\to\infty$ для всех решений с неограниченным вторым моментом.

Пятая глава посвящена изучению нелинейных систем уравнений второго порядка, являющихся обобщениями уравнений Пенлеве I и II рода. В §I рассматривается вспомогательная линейная задача с дополнительным параметром L для набора $\{\Psi\}$ $2N$ функций двух аргументов: $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}-L\right)\Psi=0$, $\left(\frac{\partial}{\partial t}-A\right)\Psi=0$, где матрицы L, A размером $2N\times 2N$ полиномиальны по $q(t)\in GL(N,C)$. Показано, что существование нетривиальных решений имеет место лишь при выполнении уравнений, следующих из условия совместности $A_\lambda - L_t + [A,L]=0$,

$$\frac{d^2q}{dt^2}=6q^2+It,\quad \frac{d^2q}{dt^2}=2q^3-tq+\nu I,\quad I\in GL(N,C) \qquad (II)$$

Связь (II) с линейной задачей позволяет сформулировать для решений этих уравнений гипотезу об отсутствии движущихся существенных особенностей в t -плоскости. В качестве шага на пути к ее доказательству в §2 исследован вопрос о структуре полюсных решений (II),

$$q(t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n (t-t_0)^{n-M}, \quad M>0, \quad A_n \in GL(N,C) \qquad (I2)$$

Определены значения M, при которых ограничения на матрицу A_0 минимальны. Далее анализируются нелинейные системы уравнений для $\{A_n\}$. Доказано, что для каждого из уравнений (II) существуют такие A_0, что решения вида (I2) содержат максимально допустимое число произвольных постоянных. Таким образом, для (II) выполнен критерий Абловица-Рамани-Сегура. Явные примеры редукции к низшим трансцендентам построены в §3. Сформулировано условие, при котором уравнения (II) не могут быть эффективно сведены к своим скалярным аналогам. Для первого из этих уравнений указано трехпараметрическое семейство рациональных решений, соответствующее выбору $A_n=0,\ n\geq 4$ в (I2). Дано доказательство соотношения Шлезингера для второго из уравнений (II), позволяющего устанавливать связь между решениями, отвечающими различным значениям параметра ν. Для полуцелых ν найдены замкнутые выражения для бесконечных рядов (I2), содержащие функции Эйри. В случае целочисленных ν построены примеры матриц $q(t)$, представимых в виде интегралов от классических трансцендентов II рода; доказано, что все их движущиеся особенности являются полюсами первого порядка.

<u>В шестой главе</u> рассмотрены точно решаемые квантовые модели линейного взаимодействия систем независимых дипольных источников с произвольным числом резонансных мод электромагнитного поля. Предложен теоретико-алгебраический подход к построению соответствующих гамильтонианов, являющихся предельными случаями билинейных форм, образованных из различных реализаций алгебры $u(n)$. В §I дан метод непосредственной диагонализации оператора

$$\hat{h}_n = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \omega_{\alpha\beta} \hat{R}_{\beta\alpha} \hat{T}_{\alpha\beta}, \quad \omega_{\alpha\beta}=\omega_{\beta\alpha}, \qquad (I3)$$

где $\{\hat{T}_{\alpha\beta}\}$ - произвольная реализация $u(n)$, $\{\hat{R}_{\beta\alpha}\}$ -представления этой алгебры $(n\times n)$-матрицами. Показано, что базис в пространстве, на котором определено действие (I3), может быть построен из собственных векторов операторов $\{\hat{N}_\delta\}$, отвечающих подалгебре Картана $u(n)\oplus u(n)$ и коммутирующих с $\hat{h}_n$ для произвольных $\{\omega_{\alpha\beta}\}$. При использовании этого базиса спектр $\hat{h}_n$ определяется действием совместности системы n однородных уравнений. Выбор в качестве $\{\hat{T}_{\alpha\beta}\}$ реализации Иордана-Швингера с последующим предельным переходом $N_1\to\infty$ позволяет получить полное решение задачи о взаимодействии одного n -уровневого источника с $(n-1)$ модами поля. В §2 изучена возможность обобщения на произвольные значения n алгебраической схемы Годэна, использованной ранее при построении точного решения модели Дикке для систем двухуровневых источников с различными параметрами расстройки. Установлено, что набор $N+1$ операторов

$$\mathcal{H}_j^{(N)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \sum_{s\neq j}^{N+1} f_{js}^{\alpha\beta} \hat{T}^j_{\alpha\beta} \hat{T}^s_{\beta\alpha}, \quad 1\leq j\leq N+1, \qquad (I4)$$

где $\{\hat{T}^j_{\alpha\beta}\}$ - реализации $u(n)$, образует при $n>2$ вместе с оператором $\hat{N}_\delta = -(\hat{T}^{N+1}_{\delta\delta} + \sum_{j=1}^{N} \hat{T}^j_{\delta\delta})$ коммутативное кольцо лишь для "изотропного" набора коэффициентов $f_{js}^{\alpha\beta}=A(\nu_j-\nu_s)^{-1}$, $\nu_j\in R$. Этот факт препятствует непосредственному применению схемы Годэна для построения точно решаемых моделей квантовой оптики с произвольным числом резонансных мод. Тем не менее, как показано в §3, для $n>2$ можно указать такие $\{f_{js}^{\alpha\beta}\}$, что коммутаторы операторов (I4) при $1\leq j\leq N$ не содержат $\hat{T}^{N+1}_{nn}$. Если $\{T^{N+1}_{\alpha\beta}\}$ - реализация Иордана-Швингера алгебры $u(n)$ бозонными операторами, $T^{N+1}_{\alpha\beta}=-b_\alpha b^+_\beta$, то предельный переход $N_1\to\infty$ позволяет установить, что гамильтониан

$$\check{\mathcal{H}}^N_{N+1} = \sum_{j=1}^{N} \Big[\sum_{\lambda=1}^{n-1} \varepsilon_\lambda (b_\lambda \hat{T}^j_{n\lambda} + b^+_\lambda \hat{T}^j_{\lambda n}) + \nu_j \hat{T}^j_{nn}\Big] + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \hat{N}_\lambda \omega_\lambda, \qquad (I5)$$

где $\varepsilon_\lambda^2=const$, $\nu_j, \omega_\lambda\in R$, коммутирует со всеми $\hat{N}_\lambda$, $1\leq\lambda\leq n-1$ и операторами

$$\tilde{\mathcal{H}}_j^{(N)} = \sum_{s\neq j}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \hat{T}^j_{\alpha\beta} \hat{T}^s_{\beta\alpha} (\nu_j-\nu_s)^{-1} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \varepsilon_\lambda (b_\lambda \hat{T}^j_{n\lambda} + b^+_\lambda \hat{T}^j_{\lambda n}) \qquad (I6)$$

Тем самым доказано, что модель (I5) с N источниками и $(n-1)$ резонансными модами обладает динамической симметрией и дополнительными интегралами движения (I6) при произвольных значениях параметров расстройки $\{\nu_j\}$, но не может быть решена методом Годэна. Уровни гамильтониана допускают классификацию по собственным значениям (I6); для систем, содержащих два многоуровневых источника, указан прямой способ редукции спектральной задачи к двум алгебраическим уравнениям второго порядка, основанный на построении общих собственных функций $\hat{N}_\delta$, $\mathcal{H}^{(2)}_{1,2}$.

Результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Об исследовании уравнения Больцмана-Энскога в акустическом и гидродинамическом приближениях.- Препринт ИТФ-76-I49Р, Киев, 1976, 30 стр.
2. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Уравнение Больцмана-Энскога в акустическом приближении.- ДАН СССР, 1977, т. 235, с. 61-64.
3. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. О предельных соотношениях в модели Больцмана-Энскога.- Труды I Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики, ДI7-II-490, Дубна, 1978, с. 2I3-23I.
4. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Уравнение Больцмана-Энскога и асимптотика автокорреляционных функций.- ТМФ, 1977, т. 3I, с. 260-272.
5. **Inozemtseva N.G., Sadovnikov B.I. On some asymptotic relations in the Boltzmann-Enskog model.** (О некоторых асимптотических соотношениях в модели Больцмана-Энскога). Physica, 1978, v. 94A, p. 615-625.
6. Бочков С.Н., Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. О гидродинамических решениях обобщенного уравнения Больцмана-Энскога.- Сообщение ОИЯИ PI7-8I-IO, Дубна, I98I, I2 стр.
7. **Inozemtseva N.G., Sadovnikov B.I., Bochkov S.N. The asymptotics of the correlation functions in the generalized model of Boltzmann-Enskog.** (Асимптотика корреляционных функций в обобщенной модели Больцмана-Энскога). Physica, 1982, v. 110A, p.329-338.
8. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Об исследовании обобщенных гидродинамических уравнений в линейном приближении модели твердых сфер.- Препринт ИТФ 2-79-24Р, Киев, 1979, 22 стр.
9. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. О нелинейных уравнениях нелокальной гидродинамики в модели твердых сфер.- ДАН СССР, 1980, т. 252, с. 852-855.
IO. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. К нелокальным уравнениям гидродинамики в линейном приближении.- Препринт ИТФ 8I-3IР, Киев, I98I, II стр.
II. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Расходимость коэффициентов Барнетта в трехмерной гидродинамике твердых сфер. I.Линейное приближение.- ТМФ, I98I, т. 48, с. I37-I43.
I2. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Расходимость коэффициентов Барнетта в трехмерной гидродинамике твердых сфер. П. Нелинейные уравнения.- ТМФ, 1982, т. 5I, с. I42-I49.

I3. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Нелокальная гидродинамика в нелинейной теории твердых сфер.- Труды П Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. ДI7-8I-758, Дубна, I98I, с. 35I-359.
I4. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Обобщенная гидродинамика и процессы переноса.- Труды Ш Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. ДI7-84-850, т. 2, Дубна, 1985, с. 3I0-3I9.
I5. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Некоторые математические свойства одномерного уравнения Больцмана.- Сборник аннотаций IУ Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики, ДI7-87-477, Дубна, 1987, с. 77.
I6. **Inozemtseva N.G., Sadovnikov B.I. On exact spatially nonuniform solutions of the Boltzmann equation in the generalized Kac model.** (О точных пространственно-неоднородных решениях уравнения Больцмана в обобщенной модели Каца).- Phys. Lett. A, 1987, v. 124, p. 120-123.
I7. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Об одном пространственно-неоднородном решении модели Каца.- Труды IУ Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. ДI7-88-95, Дубна, I988, с. I65-I7I.
I8. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Эволюция функциональной гипотезы Н.Н.Боголюбова и нелокальность процессов переноса в гидродинамике твердых сфер.- ЭЧАЯ, I987, т. I8, с. 878-903.
I9. **Inozemtseva N.G., Sadovnikov B.I. The structure of general solution of Boltzmann equation in two-dimensional nonlinear VHP-model** (Структура общего решения уравнения Больцмана в двумерной нелинейной модели сверхтвердых частиц).- Phys. Lett. A, 1990, p. 235-238.
20. **Inozemtseva N.G., Sadovnikov B.I. Matrix generalization of Painleve transcendents** (Матричное обобщение трансцендентов Пенлеве). - Physica, 1990, v. 162A, 255-260.
2I. **Inozemtseva N.G., Sadovnikov B.I. On exact solutions for nonlinear differential equations of Painleve type.** (О точных решениях нелинейных дифференциальных уравнений типа Пенлеве).- Advances in Theoretical Physics, Vietri sul Mare, p. 169-183, 1991.
22. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Точно решаемые обобщения модели Дикке в квантовой оптике. Препринт НИИЯФ МГУ-9I-4/208, Москва, I99I.

23. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Динамические корреляции и недокальная гидродинамика систем с короткодействием.- Тезисы Всесоюзной конференции "Современные проблемы статистической физики", Харьков, 1991.