ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

ДИХТЯР ВАСИЛИЙ ИВАНОВИЧ

УДК 519.6

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ К-го ПОРЯДКА

(01.01.07 — вычислительная математика)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 1984

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и функционального анализа ордена Дружбы народов Университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук **Занкин П. Н.**,
кандидат физико-математических наук **Дорофеев И.Ф.**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук профессор **Гласко В. Б.**,
кандидат физико-математических наук доцент **Савелова Т. И.**

Ведущая организация: Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша АН СССР.

Защита состоится « 14 » июня 1984 г. в 10 час. 30 мин. на заседании специализированного совета Д 047.01.04 в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан « 4 » мая 1984 г.

Ученый секретарь
специализированного совета

ИВАНЧЕНКО З. М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. При моделировании многих важных научно-технических проблем возникает необходимость в численных методах решения линейных интегральных уравнений Фредгольма I рода

$$Az \equiv \int_a^b K(t,s)\,z(s)\,ds = u(t),\ t\in[c,d]; \qquad (1)$$

и их подкласса – уравнений типа свертки

$$Az \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t-s)\,z(s)\,ds = u(t). \qquad (2)$$

где решение z и правая часть u принадлежат заданным гильбертовым пространствам $z \in Z \subseteq Y$, $u \in U \subseteq V$, а оператор $A: Y \to V$ определяет функциональную связь между характеристиками изучаемого объекта z и результатами наблюдений u.

К таким задачам, имеющим важное практическое значение, относятся: восстановление сигналов, искаженных приборами или окружающей средой, идентификация линейных систем, включающая определение параметров объектов, обработка и интерпретация геофизических наблюдений и т.п.

Математические задачи (1,2) принадлежат к классу некорректно поставленных задач и их численное решение представляет большую сложность ввиду неустойчивости результатов вычислений к малым изменениям исходных данных. Поэтому разработка и исследование эффективных алгоритмов построения устойчивых приближенных решений уравнений (1,2) на основе метода регуляризации, учитывающих априорную информацию о задаче и допускающих реализацию на современных быстродействующих ЭВМ, является актуальной задачей вычислительной математики.

Работы, положенные в основу диссертации, выполнены в соответствии с планом научно-исследовательских работ Университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы.

Цель работы. Целью диссертационной работы является разработка и теоретическое обоснование численных методов решения задач (I,2), что включает:

- построение и исследование регуляризирующих операторов k-го порядка (P_k -операторов);
- изучение асимптотических свойств процедуры регуляризации k-го порядка;
- исследование и применение свойств оптимальных P_k-операторов в задаче линейной фильтрации;
- разработку математических методов определения параметров слоистой среды в задаче гравиметрии;
- создание комплекса программ, реализующих алгоритмы k-го порядка решения линейных интегральных уравнений типа свертки.

Научная новизна. В диссертации предложены и исследованы новые регуляризирующие операторы k-го порядка для некорректно поставленных задач (I,2), изучены их свойства и построены эффективные устойчивые алгоритмы, реализованные в виде программ для ЭВМ.

Показано, что процедура регуляризации k-го порядка не требует дополнительной памяти ЭВМ и приводит к повышению порядка асимптотической сходимости по параметру регуляризации приближенного решения к точному.

Доказано, что оптимальные P_k-операторы соответствуют большему (по сравнению с $k=0$) значению параметра регуляризации α, более экономичны по числу операций при многократном решении однотипных задач с разными значениями α.

Разработан новый метод определения характеристик слоистой среды (числа контактных поверхностей, их глубин залегания и коэффициентов подобия).

Регуляризирующие операторы k-го порядка могут быть широко использованы в системах полной автоматической обработки наблюдений.

Результаты исследований реализованы в виде комплекса программ, снабженного информационным обеспечением, полным набором тестов и ориентированного на ЭВМ БЭСМ-6, ЕС ЭВМ и СМ ЭВМ.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах кафедры дифференциальных уравнений и функционального анализа, вычислительной лаборатории УДН, научных конференциях факультета физико-математических и естественных наук УДН, а также научных семинарах факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ, Института прикладной математики АН СССР, Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, Института физики Земли АН СССР.

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в девяти печатных работах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и содержит I22 страницы, включая список литературы из 90 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится общая постановка задачи, обсуждается ее актуальность, кратко излагаются результаты и формулируются основные положения диссертации.

Глава I посвящена разработке специального класса регуляризирующих операторов, зависящих от натурального параметра k, для интегральных уравнений типа свертки (2).

В § I вводятся необходимые для дальнейшего изложения определения и приводится ряд примеров, связанных с математической обработкой и интерпретацией данных физических измерений.

В § 2 разработана новая конструкция P_k-операторов на основе метода интегральных преобразований В.Я.Арсенина, не требующая дополнительных ресурсов памяти ЭВМ.

Пусть $\tilde{v}(\omega)$ - обозначение для фурье-образа функции $v(t)$. Положим

$$L(\omega)=\tilde{K}(\omega)\tilde{K}(-\omega); \qquad M(\omega)=\sum_{i=0}^{p} b_i\omega^{2i},\ b_i\geq 0,\ b_p>0;$$

$$f(\omega,\alpha)=\frac{L(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}\ ; \quad F(\omega,\alpha)=\frac{M(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}\ , \ (\alpha>0);$$

где $\mathcal{K}(\omega)$ – фурье-образ ядра оператора в уравнении (2).

Определение. Модифицированным стабилизирующим множителем k-го порядка (k – целое неотрицательное число, $k<\infty$) называется функция $f_k(\omega,\alpha)$, определяемая соотношением

$$f_k(\omega,\alpha)=f(\omega,\alpha)\left[1+\alpha F(\omega,\alpha)+\ldots+(\alpha F(\omega,\alpha))^k\right].$$

Теорема. Если $f(\omega,\alpha)$ – стабилизирующий множитель для интегрального уравнения (2), то функция

$$z_k(t,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f_k(\omega,\alpha)\,u(\omega)/\mathcal{K}(\omega)\right]e^{-i\omega t}d\omega \qquad (3)$$

определяет для каждого значения k регуляризованное решение уравнения (2).

Определение. Устойчивое приближенное решение (3) $z_k(t,\alpha)$ называется модификацией k-го порядка регуляризованного решения $z(t,\alpha)\equiv z_0(t,\alpha)$, или, короче, P_k-решением уравнения. Соответствующий регуляризирующий оператор называется P_k-оператором, и алгоритм построения $z_k(t,\alpha)$ – P_k-алгоритмом.

Ранее P_k-операторы исследовались В.А.Морозовым, П.Н.Заикиным, И.Ф.Дорофеевым. В диссертации показана связь с этими подходами и дана вариационная интерпретация P_k-решений.

Для функции $\varphi_k(\alpha)=\|Az_k(t,\alpha)-u(t)\|_{L_2}$ при условии, что уровень погрешности правой части уравнения (2) не превосходит δ, впервые изучено поведение корней уравнения невязки

$$\varphi_k(\alpha)=\delta \qquad (4)$$

в зависимости от k и порядка стабилизирующего функционала p.

Теорема. Для корней α_k° уравнения (4) справедливы неравенства:

а) $\alpha_k^\circ > \alpha_{k-1}^\circ$;

б) $\alpha_k^\circ(p_1) > \alpha_k^\circ(p_2)$ при $p_1 < p_2$.

Выяснено, что разным k соответствуют непересекающиеся семейства асимптотически ε-близких стабилизирующих множителей.

В § 3 получены новые асимптотические оценки уклонения P_k-решения от точного $\Delta_k(t,\alpha)=|z_k(t,\alpha)-\bar z(t)|$ при $\alpha\to 0$, характеризующие влияние процедуры регуляризации.

Рассмотрены два важных для приложений класса уравнений, определяемых асимптотическим поведением фурье-образов ядер (типа I и типа II). В случае ядер типа I $\mathcal{K}(\omega)$ определяется как рациональная функция, не имеющая нулей на вещественной оси и стремящаяся к нулю при $\omega\to\infty$ как C/ω^n, $C=const>0$, $n>0$.

Теорема. Если $\bar z$ принадлежит пространству Соболева H^{2q+1}, $q=0,1,\ldots,p(k+1)$, то для ядер типа I функция $\Delta_k(t,\alpha)$ асимптотически при $\alpha\to 0$ имеет вид

$$\Delta_k(t,\alpha)\sim B_k(p,n,q)\left[\alpha/C^2\right]^{(2q+1)/2(p+n)}\cdot\left|\bar z^{(2q+1)}(t)\right|,$$

где

$$B_k(p,n,q)=\frac{1}{k!}\prod_{r=1}^{k}\left|r-\frac{2q+1}{2(p+n)}\right|\left|(p+n)\sin\frac{\pi(2q+1)}{2(p+n)}\right|^{-1}.$$

Изучены асимптотические свойства процедуры регуляризации и для ядер типа II, определяемого следующим образом: $\mathcal{K}(\omega)$ допускает особые точки (кроме $\omega=\infty$) лишь в ограниченной области; в любом промежутке $[0,\omega_1]$, $\omega_1>0$, интеграл от $1/L(\omega)$ сходится; при $\omega\to\infty$ $\mathcal{K}(\omega)\sim H\exp[-(i\Gamma\omega)^{1/m}]$, где $H=const>0$, $\Gamma=const>0$, $m>1$.

В главе II выполнены исследования оптимальных регуляризирующих операторов k-го порядка, связанные со статистическим подходом к описанию исходных данных для уравнений (I,2).

В § I анализируется случай аддитивного возмущения правой части уравнения

$$u(t)=\bar u(t)+\eta(t), \qquad (5)$$

когда точное значение $\bar u(t)$ является детерминированной функцией, а $\eta(t)$ представляет реализацию стационарного случайного процесса со спектральной плотностью вида

$$S_\eta(\omega)\sim S_\eta^\circ/\omega^{2a},\ \omega\to\infty;\ S_\eta^\circ>0,\ a\geqslant 0. \qquad (6)$$

Пусть $C_r = r+1$ при $r=0,\dots,k$, а при $k+r = k+1,\dots,2k$ коэффициенты определяются по симметрии $C_{k+r} = C_{k-r}$. В случае ядер типа I положим

$$d = \frac{2p+2a-1}{2(p+n)}; \quad D_0 = 1,\ D_1 = 1-d,\ D_r = \frac{1}{(r+1)!}\prod_{l=1}^{r}(l-d),\ r>1.$$

Теорема. Дисперсия влияния возмущения $\eta(t)$ правой части интегрального уравнения (2) на P_k-решение при достаточно малых значениях α для ядер типа I вычисляется по формуле

$$\sigma_k^2(\alpha) \sim \frac{S_\eta^0}{4\pi^2(p+n)C^2}\left(\frac{C}{\alpha}\right)^{1-d}\frac{\pi d}{\sin \pi d}\left\{\sum_{r=0}^{2k} C_r D_r\right\}.$$

Следствие.

$$\sigma_k^2(\alpha) \sim \sigma_0^2(\alpha)\left\{1+\sum_{r=1}^{2k} C_r D_r\right\}.$$

Аналогичные формулы выведены и для ядер типа II.

Для любого $k < \infty$ получены значения параметра α, близкие к (C,f)-оптимальным, которые приводят к наилучшим P_k-решениям с заданным стабилизирующим множителем f.

В § 2 исследуются оптимальные P_k-операторы в винеровской постановке задачи о фильтрации стационарных процессов, когда в (5) $\bar{u}(t)$ также представляет стационарный процесс, некоррелированный с процессом $\eta(t)$.

Теорема. Семейство P_k-решений уравнения (2) содержит в себе для каждого значения k результат оптимальной фильтрации по Винеру. Если для соответствующего значения параметра регуляризации α^0 при $k=0$ выполнено неравенство $L(\omega)/\alpha^0 M(\omega) < 1$, то при использовании одинаковых стабилизаторов с постоянными коэффициентами (т.е. одинаковых функциях $M(\omega)$) переход к P_k-решению приводит к увеличению оптимального значения параметра, причем

$$\alpha_k^0 \geqslant (k+1)\alpha^0.$$

При построении P_k-операторов, задающих оптимальные линейные фильтры, используются спектральные представления случайных процессов и метод регрессии.

В этом же параграфе получено p-оптимальное значение параметра регуляризации для P_k-операторов при использовании простейших стабилизаторов p-го порядка для ядер типа I. При этом спектральная плотность точного решения уравнения имеет вид

$$S_{\bar z}(\omega) \sim S_{\bar z}^0/\omega^{2b},\ \omega\to\infty;\quad S_{\bar z}^0 > 0,\ b>0. \tag{7}$$

Исследованы свойства погрешности P_k-решения при заданном k как функции от параметра p.

§ 3 посвящен определению вероятностных характеристик шума S_η^0, a и сигнала $S_{\bar z}^0$, b для априорно заданных соотношений (6,7) по семейству P_k-решений при разных значениях параметра регуляризации α методом В.Я.Арсенина. Исследован соответствующий функционал

$$\Psi_k(\alpha) = \alpha^{-2n/(n+p)}\int_{-\infty}^{\infty} E\left\{A^*\left[Az_k(t,\alpha)-u(t)\right]\right\}^2 dt,$$

где E есть оператор математического ожидания, а A^* – оператор, сопряженный в L_2 оператору A. Показано, что для эргодических процессов метод приводит к уменьшению априорной информации при построении оптимального линейного фильтра. Изменение порядка регуляризации k позволяет варьировать области определения неизвестных параметров и уточнять их оценки.

В § 4 рассмотрен вопрос использования P_k-алгоритмов для последовательного оценивания приближенных решений интегрального уравнения (I) путем перехода к дискретному аналогу задачи – системе линейных алгебраических уравнений. Правая часть задается в виде вектора наблюдений с нормально распределенной ошибкой, имеющей нулевое математическое ожидание и единичную матрицу ковариации. Исследование проводится с использованием байесовского подхода к идентификации вектора состояния линейной системы методом Е.Л.Жуковского и В.А.Морозова.

Показано, что каждый вектор P_j-решения алгебраической системы, $j=1,\dots,k$, является нормальным решением относительно предыдущего вектора P_{j-1}-решения. Этот факт служит основанием для гипотезы об априорной плотности вероятности вектора состояния при переходе к следующему порядку k регуляризирующего оператора, а также для получения байесовских оценок вектора состояния.

Воспользуемся стохастической моделью для алгебраической системы уравнений в виде двумерной марковской цепи (z_t, u_t), $t=1,2,\dots$

с ненаблюдаемой компонентой z_t и наблюдаемой – u_t :

$$\begin{cases} z_{t+1} = z_t, \quad z_0 = z, \\ u_{t+1} = A z_t + \eta_{t+1}, \quad u_0 = u. \end{cases}$$

Теорема. Если число измерений наблюдаемого вектора u для оптимального P_0 -решения при статистической регуляризации равно N, а для сравнимого с ним по критерию χ^2 P_k -решения – $N(k)$, то выполняется неравенство

$$N(k) \leq N(k+1).$$

Показано, что P_k -алгоритм поиска оптимальных решений линейных интегральных и систем алгебраических уравнений эффективны по числу операций. Применение таких алгоритмов открывает возможность сокращения времени счета для задач с многократным вычислением регуляризованных решений.

Глава III содержит исследование предложенного метода обработки и интерпретации гравиметрических наблюдений в рамках контактных моделей с привлечением P_k-алгоритмов.

В § I рассматривается модель структуры земных недр, содержащей несколько слоев различной плотности

$$P_j = \{(x,z) \mid a_j \leq x \leq b_j,\ h_j - z_j(x) \leq z \leq h_j\}, \quad z_j(x) = Q_j z(x), \quad j = 1, \dots, N;$$

в условиях общей теоремы единственности, полученной в работе Филатова В.Г. Более ранние результаты по единственности для контактных задач содержатся в работах Остромогильского А.Х., Гласко В.Б. и Филатова В.Г. В диссертации впервые разработан подход к определению параметров предложенной модели путем сведения к задаче декомпозиции экспоненциальных зависимостей. Развит метод Заикина П.Н. построения устойчивых к возмущениям алгоритмов ее решения. Разработан новый подход к оценке числа N контактных поверхностей, согласованный с уровнем погрешности измерений аномалии напряжения силы тяжести.

§ 2 посвящен задаче определения параметров геометрически подобных контактов на основе метода Прони с использованием P_k - алгоритмов. Разработан новый способ нахождения глубин h_j нескольких контактных поверхностей и коэффициентов преобразования Q_j

эталонного контакта $z(x)$. Приведена схема программно-алгоритмического определения параметров многослойной среды в обратной задаче гравиметрии.

В заключении приводятся основные выводы работы.

В приложении представлен комплекс програм, реализующих P_k - алгоритмы поиска устойчивых приближенных решений с использованием быстрого преобразования Фурье. Программы составлены в соответствии с требованиями Библиотеки програм обработки и интерпретации результатов экспериментов МГУ, написаны на языке ФОРТРАН и ориентированы на ЭВМ БЭСМ-6, ЕС ЭВМ и СМ ЭВМ.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ДИССЕРТАЦИИ

I. Предложены и исследованы эффективные P_k -операторы для нахождения устойчивых приближенных решений линейных интегральных уравнений I рода.

2. Установлены асимптотические свойства процедуры регуляризации k -го порядка для важных классов уравнений типа свертки и изучены основные характеристики получаемых P_k -решений.

3. Проанализировано влияние порядка k на оптимальное значение параметра регуляризации при поиске оптимальных приближенных решений. Доказано, что полученные результаты позволяют эффективно использовать априорную информацию при решении задачи оптимальной линейной фильтрации, а при статистической регуляризации – уменьшить число необходимых измерений.

4. Показано, что P_k -алгоритмы позволяют существенно уменьшить объем вычислений (по сравнению со случаем $k = 0$) при циклических обращениях к ним.

5. Предложен и исследован новый способ устойчивого определения числа, глубин и форм контактных поверхностей с использованием P_k -операторов в задаче гравиметрии.

6. Разработан и внедрен комплекс программ для численного решения интегральных уравнений I рода типа свертки с помощью P_k - алгоритмов.

По теме диссертации опубликованы работы:

1. Дорофеев И.Ф., Дихтяр В.И. О модификациях регуляризирующих алгоритмов для интегральных уравнений I рода типа свертки.- В кн.:Всесоюзная конференция по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их приложениям, Фрунзе,изд.Илим,1975,с.19-23.

2. Дихтяр В.И. О статистической регуляризации алгебраических систем уравнений.-В кн.:Современные задачи в точных науках, М.,изд.УДН,1976,с.21-24.

3. Дихтяр В.И. Об устойчивых алгоритмах для интегральных уравнений I рода типа свертки с экспоненциальным ядром.-В кн.: Современные задачи в точных науках,М.,изд.УДН,1976,с.25-26.

4. Дорофеев И.Ф., Дихтяр В.И. О погрешности регуляризованных алгоритмов для уравнений первого рода типа свертки.-В кн.: Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом,М.,изд.УДН,1977,т.10,с.91-98.

5. Дихтяр В.И. Об определении некоторых вероятностных характеристик сигнала и шума.-В кн.:Численные методы решения задач математической физики и теории систем,М.,изд.УДН,1978,с.84-87.

6. Дорофеев И.Ф., Дихтяр В.И. Об оптимальной регуляризации для интегральных уравнений I рода типа свертки.-Вестн. моск.ун-та,сер.Вычисл. матем. и киберн., 1978,№3,с.66-68.

7. Дихтяр В.И. Об одном способе разделения потенциальных полей.-В кн.:Дифференциальные уравнения и обратные задачи динамики, М.,изд.УДН,1983,с.111-113.

8. Дихтяр В.И. О (c,f)-оптимальном выборе параметра регуляризации.-В кн.:Дифференциальные уравнения и функциональный анализ,М.,изд.УДН,1983,с.34-40.

9. Дихтяр В.И. P_k-решения уравнений типа свертки и выбор параметра регуляризации.-В кн.:Дифференциальные уравнения и обратные задачи динамики,М.,изд.УДН,1983,с.114-119.

Подписано к печати 12.4.1984 г. Т-04306. Сдано в печать 16.4.84 г.
Формат 60 х 90/16. Объем 0,75 п.л. Тираж 100 экз. Бесплатно.
Заказ 912

Типография УДН. Москва, ул. Орджоникидзе, 3