ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

На правах рукописи

БОРИСОВ
Александр Борисович

АФФИНАЯ ГРУППА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Специальность 01.04.02 - теоретическая
и математическая физика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна - 1977

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник В.И.Огиевицкий

Официальные оппоненты: I. Доктор физико-математических наук, профессор Я.А.Смородинский

2. Кандидат физико-математических наук Б.М.Зупник

Ведущее научно-исследовательское учреждение:

Физико-технический институт АН УССР, г.Харьков

Автореферат разослан "____" ____________197 г.

Защита диссертации состоится "____" __________197 г. на заседании специализированного Ученого совета К-047.01.01. Лаборатория теоретической физики Объединенного института ядерных исследований (Дубна, Московской области).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь совета В.И.Журавлев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Пространственно-временные группы симметрии, содержащие в качестве подгруппы группу Пуанкаре, широко используются в теории поля и физике элементарных частиц. В последние годы плодотворно применялись конформная группа и группа масштабных преобразований: масштабная инвариантность в пределе Бьеркена глубоконеупругих лептон-адронных процессов[1,2,3] операторное разложение Вильсона[4,5,6], асимптотически свободные теории поля[7,8], бутстрапная программа вычисления аномальных размерностей[9] и т.д. Группы суперсимметрии[10] используются для построения интересных теоретико-полевых моделей.

Исследования пространственно-временных групп симметрий содержащих в качестве подгруппы группу Пуанкаре связаны со значительными надеждами на то, что такие симметрии могут быть приближенными симметриями адронов.

Концепция спонтанного нарушения симметрии, возникшая в теории многих тел[11-13] и перенесенная в квантовую теорию поля Намбу[14] и Голдстоуном[15], оказалась чрезвычайно популярной в физике элементарных частиц. Спонтанно-нарушенные симметрии используются многими динамическими теориями: киральной динамикой[16], единой теорией слабых и электромагнитных взаимодействий [17] и т.д.

В настоящее время несомненный интерес представляет изучение спонтанного нарушения пространственно-временных симметрий. Взаимодействие голдстоуновских полей, сопровождающих такое нарушение должно быть универсальным и этим выделено в общем классе взаимодействий.

В диссертации исследуются пространственно-временные и в первую очередь аффинная симметрия в теории поля.

Цель работы. Исследование спонтанного нарушения аффинной и общековариантной группы, изучение унитарных представлений линейной и общековариантной группы.

Научная новизна и практическая ценность. В диссертации впервые показано, что теория гравитационного поля есть теория совместных нелинейных реализаций аффинной и конформной групп симметрий.

В диссертации впервые описаны унитарные представления группы линейных преобразований в четырехмерном пространстве (группы $GL(4,R)$) в дискретном ортонормированном базисе, элементы которого классифицируются по неприводимым представлениям группы $SU(2) \times SU(2)$ и вычислены матричные элементы генераторов унитарных представлений группы $GL(3,R)$ в дискретном базисе.

В диссертации предложен оригинальный подход к построению унитарных представлений общековариантной группы. В его рамках удалось впервые получить широкий класс унитарных представлений общековариантной группы в теории поля.

Основные результаты диссертации, выдвигаемые на защиту

1) Исследовано спонтанное нарушение аффинной симметрии до симметрии группы Пуанкаре в рамках теории нелинейной реализации симметрии.

2) Доказано, что теория совместных нелинейных реализаций аффинной и конформной групп симметрии есть теория гравитационного поля Эйнштейна. Тем самым показано, что гравитоны аналогично π - мезонам в киральной динамике (нелинейная реализация группы $SU(2) \times SU(2)$) являются голдстоуновскими частицами.

3) Получена удобная для физических приложений классификация унитарных представлений группы $GL(4,R)$ в дискретном базисе, элементы которого классифицируются по неприводимым представлениям группы $SU(2) \times SU(2)$. Вычислены матричные элементы генераторов унитарных представлений группы $GL(3,R)$ в дискретном базисе, элементы которого классифицируются по неприводимым представлениям группы $SU(2)$.

4) Доказано, что существуют унитарные представления алгебры общековариантной группы в теории поля, реализуемые зависящими от координат матрицами на полях, которые являются унитарными представлениями аффинной группы. Выведена общая формула операторов представления конечных преобразований общековариантной группы, которая определяет, как частный случай, как унитарные, так и конечномерные представления. Разработан алгоритм построения инвариантных лагранжианов из полей, которые образуют мультиплет унитарного представления общековариантной группы.

Апробация работы. Основные материалы диссертации докладывались на семинарах лаборатории теоретической физики ОИЯИ и теоретического отдела ФИАН, на III Международном семинаре по нелокальной квантовой теории поля (Алушта, 1973 г.). Результаты, вошедшие в главу I, представлены на XVII Международную конференцию по физике высоких энергий (Лондон, 1974 г.).

Публикации. По результатам диссертации опубликовано пять статей.

Объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав основного содержания, заключения и трех приложений; она содержит 112 страниц машинописного текста и библиографический список из 102 названий.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация начинается с короткого введения, в котором перечисляются основные результаты диссертации. Каждая глава диссертации снабжена расширенной аннотацией.

Во Введении обсуждается современное состояние теории симметрии в теории поля и физике элементарных частиц и дается обзор применений конформной и аффинной групп симметрий.

Группа аффинных преобразований координат (аффинная группа $A(4)$)

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu \qquad (1)$$

является полупрямым произведением группы сдвигов и линейной группы $GL(4,R)$. Алгебра аффинной группы состоит из генераторов $L_{\mu\nu}$ группы Лоренца, генераторов $R_{\mu\nu}$ собственно линейных преобразований (включая растяжения) и генераторов группы сдвигов.

Аффинная симметрия не является точной симметрией. Поэтому в главе I мы изучаем спонтанное нарушение аффинной и конформной симметрией до симметрии группы Пуанкаре. Формализм нелинейных реализаций [18-21] является наиболее прямым и эффективным подходом к спонтанному нарушению. Пусть G - группа симметрии с генераторами A_ℓ $(\ell = 1, 2, \cdots n)$ и V_α $(\alpha = 1, 2, \cdots m)$, причем только генераторы V_α $(\alpha = 1, 2, \cdots m)$ реализуются линейными преобразованиями на полевых переменных.

Симметрия группы G нарушена, причем согласно теореме Голдстоуна спонтанное нарушение сопровождается появлением безмассовых (голдстоуновских) частиц с квантовыми числами генераторов A_ℓ. Теория нелинейной реализации позволяет сравнительно простой математической техникой определить трансформационные свойства голдстоуновских полей и провести феноменологическое описание взаимодействия голдстоуновских частиц. Основные положения общей теории нелинейных реализаций приведены в § I главы I.

В § 2 рассмотрена нелинейная реализация аффинной группы, так что только группа Пуанкаре реализована линейными преобразованиями полей. В соответствии с общей теорией нелинейных реализаций вводится голдстоуновское поле $h_{\mu\nu}(x)$ $(h_{\mu\nu}(x) = h_{\nu\mu}(x))$ трансформационные свойства которого относительно аффинной группы определяются из разложения:

$$g\, C(x, h_{\mu\nu}(x)) = C(x', h'_{\mu\nu}(x')) \exp \tfrac{i}{2} u_{\mu\nu} L_{\mu\nu} \qquad (2)$$

где $C(x, h_{\mu\nu}) = \exp i P_\mu x_\mu \exp \frac{i}{2} h_{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $g \in A(4)$. Произвольное поле $\Psi(x)$ преобразуется по представлению группы Лоренца с параметрами $u_{\mu\nu}$, нелинейно зависящими от $h_{\mu\nu}$:

$$g: \quad \Psi(x) \to \Psi'(x') = \exp\left\{\tfrac{i}{2} u_{\mu\nu} L^{\Psi}_{\mu\nu}\right\} \Psi(x) \qquad (3)$$

где $L^{\Psi}_{\mu\nu}$ – матрицы представления генераторов группы Лоренца на полях $\Psi(x)$. С помощью дифференциальных форм Картана определяются ковариантные производные, которые преобразуются по представлениям группы Лоренца с параметрами $u_{\mu\nu}$. Ковариантная производная голдстоуновского поля $h_{\mu\nu}$ определяется как

$$\nabla_\lambda h_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} \tau^{-1}_{\lambda\tau} \tau^{-1}_{\mu\gamma} \partial_\tau \tau_{\gamma\nu} + (\mu \leftrightarrow \nu); \; \tau_{\mu\nu} = (e^h)_{\mu\nu} \qquad (4)$$

Общая форма ковариантной производной поля $\Psi(x)$

$$\nabla_\lambda \Psi(x) = \tau^{-1}_{\lambda\tau} \partial_\tau \Psi(x) + \tfrac{i}{2} \left[\tfrac{1}{2} \tau^{-1}_{\lambda\tau} \tau^{-1}_{\mu\gamma} \partial_\tau \tau_{\gamma\nu} + c_1 \nabla_\mu h_{\nu\lambda} + c_2 \delta_{\mu\lambda} \nabla_\nu h_{\alpha\alpha} + c_3 \delta_{\mu\lambda} h_{\nu\tau} - (\mu \leftrightarrow \nu) \right] L^{\Psi}_{\mu\nu} \Psi(x) \qquad (5)$$

фиксирована недостаточно жестко и содержит неминимальные постоянные c_1, c_2, c_3. Действие $\int \mathcal{L} \det \tau \, d^4x$ инвариантно относительно аффинной группы, если лагранжева плотность $\mathcal{L}(\Psi(x), \nabla_\gamma \Psi(x), \nabla_\lambda h_{\mu\nu}(x))$ является скаляром относительно группы Лоренца.

В § 3 производятся необходимые сведения по нелинейным реализациям конформной группы [22-23]. Общая теория предписывает два голдстоуновских поля: векторное $\varphi_\mu(x)$ и скалярное $\sigma(x)$. Однако специфика конформной группы такова, что векторное поле $\varphi_\mu(x)$ можно представить как градиент скалярного поля $\sigma(x)$ и тем самым остается только скалярное поле $\sigma(x) = \frac{1}{4} h_{\mu\mu}(x)$. Поля $\Psi(x)$ преобразуются относительно конформной группы по представлениям группы Лоренца с параметрами $\bar{u}_{\mu\nu} = \beta_{\mu\nu} + 2(\beta_\mu x_\nu - \beta_\nu x_\mu)$, где $\beta_{\mu\nu}$ – параметры группы Лоренца, β_μ – параметры специальных конформных преобразований. Ковариантная производная произвольного поля $\Psi(x)$ строится на основе форм Картана и имеет вид:

$$\bar{\nabla}_\lambda \Psi(x) = \exp -\sigma \left[\partial_\lambda \Psi(x) + i\, \partial_\nu \sigma\, L^{\Psi}_{\lambda\nu} \Psi(x) \right] \qquad (6)$$

Совместные нелинейные реализации аффинной и конформной группы рассмотрены в § 4. Требование, чтобы аффинная ковариантная производная $\nabla_\lambda \Psi(x)$ (5) зависела от σ и от $\partial_\nu \sigma$ только посредством конформно-ковариантных операций $\bar{\nabla}_\lambda \Psi(x)$ однозначно определяет численное значение параметров c_1, c_2, c_3: $c_2 = c_3 = 0$, $c_1 = -1$. Таким образом, одновременно и для конформной симметрии ковариантной производной любого поля $\Psi(x)$ является

$$\Delta_\lambda \Psi(x) = \tau^{-1}_{\lambda\tau} \partial_\tau \Psi(x) + \tfrac{i}{2} W_{\mu\nu,\lambda} L^{\Psi}_{\mu\nu} \cdot \Psi(x) \qquad (7)$$

где $W_{\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2} \left[\tau^{-1}_{\lambda\gamma} \tau^{-1}_{\mu\alpha} \partial_\gamma \tau_{\alpha\nu} + \tau^{-1}_{\nu\gamma} (\tau^{-1}_{\lambda\alpha} \partial_\gamma \tau_{\alpha\mu} + \tau^{-1}_{\mu\alpha} \partial_\gamma \tau_{\alpha\lambda}) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right]$. Доказывается, что в совместной нелинейной реализации ковариантная производная поля $h_{\mu\nu}(x)$ ис–

чезает. Указано ковариантное выражение (включающее наряду с $h_{\mu\nu}$, $\partial_\lambda h_{\mu\nu}$ также и вторые производные поля $h_{\mu\nu}$), которое необходимо использовать при построении лагранжиана самодействия поля $h_{\mu\nu}(x)$. Минимальное взаимодействие с полем $h_{\mu\nu}$ описывается интегралом действия:

$$S = \int \det r \, d^4x \left[\mathcal{L}(\Psi, \Delta_\lambda \Psi) + \frac{1}{4f^2} R \right] \tag{8}$$

где $\mathcal{L}(\Psi, \Delta_\lambda \Psi)$ получается из свободного лагранжиана для полей Ψ заменой обычных производных $\partial_\lambda \Psi$ на ковариантные $\Delta_\lambda \Psi$, а член $R = 2\, r^{-1}_{\mu\gamma} \partial_\gamma W_{\mu\nu,\nu} + W_{\mu\nu,\gamma} W_{\nu\gamma,\mu} - W_{\mu\gamma,\mu} W_{\nu\gamma,\nu}$ описывает самодействие поля $h_{\mu\nu}$. Правильная размерность голдстоуновского поля обеспечивается введением универсальной константы связи f и повсеместной заменой $h_{\mu\nu} \to f\, h_{\mu\nu}$.

Как показано Огиевецким [24] алгебра общековариантной группы является замыканием конечномерных алгебр линейной и конформной группы. Поэтому, построенная теория инвариантна относительно группы общих преобразований координат.

В § 5 производится отождествление теории совместных нелинейных реализаций аффинной и конформной симметрий с теорией гравитационного поля Эйнштейна. Для полей с целым спином $a_{\mu\nu\gamma\ldots}$ можно определить ко- и контравариантные величины, преобразующиеся по линейному представлению группы $GL(4,R)$, путем умножения на $r_{\mu\nu}$ или $r^{-1}_{\mu\nu}$ по каждому индексу, соответственно. Так, $A_\mu = r_{\mu\nu} a_\nu$ будет ковариантным вектором, $g_{\mu\nu} = r_{\mu\gamma} r_{\gamma\nu}$ – ковариантный тензор второго ранга, который отождествляется с метрическим тензором в теории тяготения. Линейно преобразующиеся ковариантные производные для полей с целым спином определяются аналогичным образом и доказывается, что при замене $(\exp 2h)_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$ они совпадают со стандартными ковариантными производными в теории тяготения. Полагая, что константа связи f выражается через ньютоновскую гравитационную постоянную K соотношением

$$\frac{1}{4\pi} f^2 = K \tag{9}$$

мы полностью идентифицируем полученную теорию с теорией гравитационного поля Эйнштейна. Установленная аналогия между теорией тяготения и теориями нелинейных реализаций групп внутренних симметрий приводит к постановке ряда задач, решение которых способствовало бы более глубокому пониманию роли гравитации в теории элементарных частиц. Некоторые из этих задач обсуждаются в конце § 5. Так в теориях нелинейной реализации киральной симметрии возникает асимптотическая алгебраическая симметрия: частицы должны классифицироваться по представлениям $SU(2) \times SU(2)$ симметрии, если потребовать, чтобы диаграммы вели себя разумно при высоких энергиях [25]. При аналогичном требовании в теории гравитационного поля можно ожидать алгебраизации аффинной и конформной групп симметрии. Для соответствующих исследований требуется четкое знание унитарных представлений линейной и общековариантной групп.

Линейные группы являются некомпактными группами, поэтому их унитарные представления бесконечномерные (кроме тривиальных синглетов). Для физических приложений наиболее удобна реализация представлений группы $GL(N,R)$ в дискретном базисе, элементы которого классифицируются по мультиплетам группы $SO(N)$. Тогда использование унитарных представлений линейных групп эффективно в классификации состояний динамических систем. Так для специальной линейной группы в трехмерном пространстве (группы $SL(3,R)$) некоторые серии унитарных представлений найдены рядом авторов и применены в классификации адронов на траекториях Редже [26] и вращательных уровней сложных ядер [27]. В главе II проводится полное рассмотрение унитарных представлений группы $GL(3,R)$ и $GL(4,R)$.

В § I описывается общий метод построения представлений группы $GL(N,R)$ в пространстве функций $H(N) = \{f(u) \mid u \in SO(N)\}$, квадратично интегрируемых относительно инвариантной меры du на $SO(N)$. Этот метод является простым обобщением реализации представлений группы $SL(N,R)$ в пространстве $H(N)$, предложенной Хариш-Чандрой [28]. Рассматриваются представления группы $GL(N,R)$, индуцированные представлением подгруппы $K(N)$ ($k = \| k_{ij} \| \in K(N)$, если $K_{ij} = 0$ при $i > j$, $K_{ii} > 0$; $i,j = 1,2,\dots N$). Представление $T(g)$ ($g \in GL(N,R)$, $\det g > 0$) реализуется в $H(N)$ в следующем виде:

$$T(g) f(u) = (K'_{11})^{d_1} (K'_{22})^{d_2} \cdots (K'_{NN})^{d_N} f(u') \tag{10}$$

$$u\,g = K' \cdot u' \;;\; K' = \| K'_{ij} \| \in K(N),\; u, u' \in SO(N)$$

Проблема поиска унитарных представлений в методе индуцированных представлений редуцируется в определении численного значения параметров $d_1, d_2, \dots d_N$ и скалярного произведения (f, f), которое инвариантно относительно операторов $T(g)$ (10).

В § 2 изучаются унитарные представления группы в дискретном базисе, элементы которого классифицируются по неприводимым представлениям группы $SU(2)$. Применяется инфинитезимальный подход, т.е. исследуются эрмитовые представления алгебры группы $GL(3,R)$. Используя формулу (10), вычисляются генераторы представления группы $GL(3,R)$ в $|\overline{m\,\ell\,h}>$ базисе:

$$< u \,|\, \overline{m\,\ell\,h} > = \sqrt{2\ell+1}\; \mathcal{D}^{\ell}_{mh}(u) \tag{11}$$

где $\mathcal{D}^{\ell}_{mh}(u)$ – функция Вигнера, $u \in SO(3)$. Показано, что условие эрмитовости генераторов представления определяет как численное значение параметров d_1, d_2, d_3, так и скалярное произведение в унитарных представлениях. Получены следующие результаты. Найдены три серии унитарных представлений на ортонормированных векторах $|m\,\ell\,h>$ ($< m'\ell' h' | m\,\ell\,h > = \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{hh'}\, \delta_{mm'}$), где ℓ – орбитальный момент, h – его проекция, а индекс m характеризует вырожденность мультиплетов группы $SU(2)$. Показано, что унитарное неэквивалентное представление матрицы $g \in GL(3,R)$ ($\det g > 0$) реализуется в $|m\,\ell\,h>$ базисе оператором $T(g)$:

$$T(g)|m\,\ell\,h> = \int du \sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell'+1}}\; \frac{N(m)}{N(m')}\; \mathcal{D}^{*\ell}_{mh}(u)\, (K'_{11})^{d_1} (K'_{22})^{d_2} (K'_{33})^{d_3}\, \mathcal{D}^{\ell'}_{m'h'}(u')\, |m'\ell' h'> \tag{12}$$

$$u \cdot g = K' \cdot u' \;;\; K' \in K(3);\; u, u' \in SO(3)$$

где $-d_1 - d_2 + 2d_3 = i\rho$, $d_1 + d_2 + d_3 = i\varkappa$ ($\rho, \varkappa \in R$) и 1) $d_1 - d_2 = 1 + i\omega$ ($\omega \in R$), $N(m) = 1$ или 2) $0 < d_1 - d_2 < 1$ ($d_1 - d_2 \in R$) для четных m; $\frac{1}{2} < d_1 - d_2 < 1$ ($d_1 - d_2 \in R$) для полуцелых m, $N(m) = Q(m, d_1 - d_2)$ ($Q^2(x,y) \equiv \Gamma(\frac{x+y}{2}) (\Gamma(\frac{x-y}{2} + 1))^{-1}$) или 3) $d_1 - d_2 = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ $|m| \geqslant d_1 - d_2$, $m = d_1 - d_2 \pmod 2$, $N(m) = Q(|m|, d_1 - d_2)$ при $d_1 - d_2$ ($d_1 \in R$) представление реализуется в базисе $|\ell\,h> \equiv |m{=}0\,\ell\,h>$.

В § 3 исследуются унитарные представления группы $GL(4,R)$. Получена реализация унитарных неэквивалентных представлений группы $GL(4,R)$ в дискретном ортонормированном базисе $|m_1\, m_2\, \ell_1\, \ell_2\, h_1\, h_2>$ (индексы ℓ_1, h_1, ℓ_2, h_2 характеризуют мультиплет группы $SU(2) \times SU(2)$, а m_1, m_2 – вырожденность мультиплетов группы $SU(2) \times SU(2)$ в унитарных представлениях группы $GL(4,R)$. Найдено девять серий унитарных неэквивалентных представлений. Оператор представления $T(g)$ матрицы $g \in GL(4,R)$ ($\det g > 0$) имеет следующий вид:

$$T(g)|m_1\, m_2\, \ell_1\, \ell_2\, h_1\, h_2> = \int du \sqrt{\frac{2\ell_1+1}{2\ell'_2+1}\; \frac{2\ell_2+1}{2\ell'_1+1}}\; \frac{N(m_-)}{N(m'_-)}\; \frac{N(m_+)}{N(m'_+)}\, (K'_{11})^{d_1} (K'_{22})^{d_2} (K'_{33})^{d_3} (K'_{44})^{d_4}\, \mathcal{D}^{*\ell_1\ell_2}_{m_1h_1m_2h_2}(u)\, \mathcal{D}^{\ell'_1\ell'_2}_{m'_1h'_1m'_2h'_2}(u')\, |m'_1\, m'_2\, \ell'_1\, \ell'_2\, h'_1\, h'_2> \tag{13}$$

$$u\,g = K' \cdot u' \;;\; K' \in K(4);\; u, u' \in SU(2) \times SU(2)$$

где $\mathcal{D}^{\ell_1\ell_2}_{m_1h_1m_2h_2}(u)$ – матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы $SU(2) \times SU(2)$; $1 + \frac{1}{2}(-d_1 - d_2 + d_3 + d_4) = i\rho$, $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = i\varkappa$ ($\rho, \varkappa \in R$); $K_+ = 2(d_1 - d_2)$, и $K_- = 2(d_3 - d_4)$ принимают независимо друг от друга любое из следующих значений $K_+(K_-) = 1 + i\omega_+(\omega_-)$, ($\omega_+, \omega_- \in R$); 2) $K_+, K_- \in R$, $0 < K_+(K_-) < 1$ для четных $m_+(m_-) = m_1 + m_2$ ($m_1 - m_2$); $\frac{1}{2} < K_+(K_-) < 1$ для полуцелых $m_+(m_-)$ 3) а) $K_+(K_-) = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, $|m_+|$ ($|m_-|$) $= K_+(K_-) \pmod 2$, $|m_+|$ ($|m_-|$) $\geqslant K_+(K_-)$ б) $K_+(K_-) = 0$, $m_+(m_-) = 0$. При этом функции $N(m_+)$ ($N(m_-)$) равны соответственно: 1) $N(m_+)$ ($N(m_-)$) $= 1$ 2) $N(m_+)$

$(N(m-)) = Q(m_+, K_+)(Q(m_-, K_-))$ в) а) $N(m_+)(N(m-)) =$
$= Q(|m+|, K_+)(Q(|m-|, K_-))$ б) $N(m_+)(N(m-)) = \delta_{m+0}(\delta_{m-0})$

Неприводимость унитарных представлений группы $GL(4,R)$ исследуется в § 4 методом, использующим малую группу Γ. Группу Γ образуют множество матриц, перестановочных с однопараметрической подгруппой $\{g(\omega) = \| g_{ij}(\omega) \|\}$ $(-\infty < \omega < \infty$, $g_{ij}(\omega) = \delta_{ij} \exp \alpha_i \omega)$. Неприводимые представления группы $GL(4,R)$ реализуются в классе функций $f(u)$, которые удовлетворяют уравнениям: $f(\gamma u) = V(\gamma) f(u)$ $(\gamma \in \Gamma$, $V(\gamma)$ – неприводимое представление группы $GL(4,R))$. В каждой серии унитарных представлений группы $GL(4,R)$ параметры которых удовлетворяют условиям $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\alpha_3 \neq \alpha_4$, $\alpha_1 - \alpha_2 \neq \alpha_3 - \alpha_4$ найдено 8 неприводимых представлений и описаны их гильбертовы пространства.

Бесконечнопараметрические группы Ли являются основой многих динамических симметрий, продуктивно используемых в теории поля. Примерами таких динамических симметрий являются локальная калибровочная инвариантность в электродинамике, изотопическая инвариантность с параметрами, зависящими от координат в теории Янг-Миллса, общая ковариантность в теории тяготения и т.д. Общековариантная группа (группа $\mathcal{D}iff\, R^N$) задается координатными преобразованиями:

$$x'_i = x_i(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots N) \tag{I4}$$

где $x'_i(x)$ – произвольные дифференцируемые функции координат x_i в R^N причем $\det \| \partial x'_i(x) / \partial x_k \| \neq 0$. В группе общих преобразований координат наиболее полно исследованы только конечномерные представления. Они широко применяются в физике и геометрии. В главе III найдены и описаны унитарные представления группы $\mathcal{D}iff\, R^N$.

§ I содержит краткий обзор конечномерных (неунитарных) представлений общековариантной группы. Конечномерные представления $\mathcal{D}iff\, R^N$ группы определены в пространстве каждого конечномерного представления группы $GL(N,R)$, т.е. на тензорах $\varphi^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s}(x)$ (r – раз контравариантных, s – раз ковариантных) веса h, трансформационные

свойства которых при преобразованиях (I4) имеют вид:

$$\varphi'^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s}(x') = \frac{\partial x'_{\alpha_1}}{\partial x_{\gamma_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\alpha_r}}{\partial x_{\gamma_r}} \frac{\partial x_{\delta_1}}{\partial x_{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x_{\delta_s}}{\partial x_{\beta_s}} \left(\det \left\| \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \right\| \right)^h \varphi^{\gamma_1 \cdots \gamma_r}_{\delta_1 \cdots \delta_s}(x) \tag{I5}$$

В § 2 изучаются унитарные представления алгебры общековариантной группы. Вначале рассматриваются унитарные представления алгебры группы $A_h\, \mathcal{D}iff\, R^N$ (группы аналитических автоморфизмов пространства R^N. Пусть поля $\Psi_A(x)$ $(A = 1, 2, \cdots \infty)$ образуют базис унитарного представления алгебры группы $SL(N,R)$. Предполагается, что это представление операторно-неприводимо, т.е. любой оператор, коммутирующий с генераторами представления, кратен единичному. Доказывается теорема, утверждающая, что каждое унитарное операторно-неприводимое представление на полях $\Psi_A(x)$ алгебры группы $SL(N,R)$ может быть расширено до унитарного представления алгебры $A_h\, \mathcal{D}iff\, R^N$ группы. Показано, что унитарные представления алгебры общековариантной группы реализуются операторами T_f:

$$\Psi'_A(x) = T_f \Psi_A(x) = i \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\rho} (\overline{F}_{\mu\rho})_{AB} \Psi_B(x) - f_\mu \partial_\mu \Psi_A(x) \tag{I6}$$

где $\overline{F}_{\mu\rho}$ – матрицы, реализующие любое унитарное представление группы $GL(N,R)$; функции $f_\mu(x)$ определяются инфинитезимальным преобразованием координат относительно общековариантной группы: $x'_\mu = x_\mu + \varepsilon f_\mu(x)$ $(|\varepsilon| \ll 1)$

Унитарные представления общековариантной группы описаны в § 3. Вначале мы излагаем конструкцию унитарных представлений группы $\mathcal{D}iff\, R^3$. Каждому преобразованию (I4) общековариантной группы в R^3 соотносится матрица $\Lambda(x'(x),x) = \| \Lambda_{ik} \|$ $(\Lambda_{ik} = \partial x'_i(x) / \partial x_k;\ i, k = 1, 2, 3)$. Показано, что для матрицы $\Lambda(x'(x), x)$ $(\det \Lambda(x'(x),x) > 0)$ и любой матрицы $u \in SO(3)$ существует разложение:

$$u\, \Lambda(x'(x), x) = K'(u, x)\, u'(u, x) \tag{I7}$$

где $K'(u,x) = \|K_{ij}(u,x)\| \in K(3)$ ($K'_{ij}(u,x) = 0$ при $i > j$, $K'_{ii}(u,x) > 0$, $i,j = 1,2,3$), $u'(u,x) \in SO(3)$ в любой точке трехмерного пространства. Используя разложение (I7) доказывается, что операторы $T_{x'(x)}$ представления общековариантной группы реализуются на полях $\varphi_{m\ell n}(x)$ в следующем виде:

$$\varphi'_{m\ell n}(x') = T_{x'(x)}\varphi_{m\ell n}(x) = \int du\, \mathcal{D}^{*\ell}_{mn}(u) \frac{N(m)}{N(m')}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell'+1}} \left(K'_{11}(u,x)\right)^{\alpha_1}\left(K_{22}(u,x)\right)^{\alpha_2}\left(K_{33}(u,x)\right)^{\alpha_3} \mathcal{D}^{\ell'}_{m'n'}(u'(u,x))\, \varphi_{m\ell n}(x) \quad (\mathrm{I8})$$

При произвольных значениях $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ формула (I8) определяет многообразие бесконечномерных представлений, которое содержит в себе, как конечномерные (I4), так и унитарные представления. Для унитарных представлений ограничения на параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и вид функций $N(m)$ определяются сужением представления (I8) до представления группы $GL(3,R)$ и найдены в § 2 главы II диссертации. Инвариантное относительно операторов (I8) скалярное произведение имеет вид:

$$\varphi(x)\cdot\varphi(x) = \sum_{m\ell n} \varphi^{*}_{m\ell n}(x)\,\varphi_{m\ell n}(x)\ ;\ \varphi(x)\cdot\varphi(x) = \varphi'(x')\cdot\varphi'(x') \quad (\mathrm{I9})$$

Конструкция унитарных представлений группы $\mathrm{Diff}\,R^N$ является несложным обобщением метода построения унитарных представлений группы $\mathrm{Diff}\,R^3$. В конце § 3 получены общие формулы для операторов $T_{x'(x)}$ ($x \in R^N$) бесконечномерных представлений $\mathrm{Diff}\,R^N$ группы. Операторы $T_{x'(x)}$ ($x \in R^N$) зависят в общем случае от произвольных параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_N$ численное значение которых в унитарных представлениях можно определить из условия унитарности операторов $T_{x'(x)}$ ($x \in R^N$) относительно преобразований линейной группы.

В § 4 рассмотрено спонтанное нарушение $\mathrm{Diff}\,R^N$ симметрии до симметрии группы Пуанкаре. Вводится гравитационное поле $h_{\mu\nu}(x)$, инфинитезимальное преобразование которого относительно $\mathrm{Diff}\,R^N$ группы определяется из уравнения

$$\left(I + i\varepsilon \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\gamma} \vec{F}_{\mu\gamma}\right)_{AB} \left(e^{\frac{i}{2} h_{\mu\nu}(x) R_{\mu\nu}}\right)_{BC} = \left(e^{\frac{i}{2} h'_{\mu\nu}(x') \bar{R}_{\mu\nu}}\right)_{A\mathcal{D}} \left(e^{\frac{i}{2} u_{\mu\nu} \bar{L}_{\mu\nu}}\right)_{\mathcal{D}B} \quad (20)$$

где $x'_\mu = x_\mu + \varepsilon f_\mu$; $\vec{F}_{\mu\gamma}$ – матрицы, реализующие унитарные или конечномерные представления линейной группы. При этом произвольное поле $\Psi(x)$ преобразуется по представлению группы $SO(N)$ с параметрами $u_{\mu\nu}$, зависящими от координат и полей $h_{\mu\nu}(x)$:

$$\bar{\Psi}'(x') = \exp \frac{i}{2} u_{\mu\nu} L^{\Psi}_{\mu\nu} \bar{\Psi}(x) \quad (\mathrm{2I})$$

Показано, что существует примечательная связь между унитарными представлениями группы $\mathrm{Diff}\,R^N$ на полях $\Psi_A(x)$ и полями $\Psi(x)$ в нелинейной реализации этой группы. Обсуждается построение феноменологических лагранжианов из унитарных мультиплетов группы $\mathrm{Diff}\,R^N$.

В Приложении А построена бесконечномерная алгебра, содержащая алгебру линейной группы в качестве подалгебры. В Приложениях Б и В вынесены громоздкие вычисления главы II.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

I. А.Б.Борисов, В.И.Огиевицкий, ТМФ, 2I, 329 (I974).
2. А.Б.Борисов. Сообщение ОИЯИ, Р2-8493, Дубна, I975.
3. А.Б.Борисов. Сообщение ОИЯИ, Р2-8500, Дубна, I975.
4. Reports on Math.Phys. v.XIII , (1978)
5. А.Б.Борисов, ТМФ, 33, 427 (I977)

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. T.D.Bjorken, Phys.Rev., I79, I547 (I969).
2. G. Altarelli, Revista del Nuovo Cim. 4, 335 (I974).
3. С.М.Биленький ЭЧАЯ, 8, 73 (I977).
4. K.G.Wilson, Phys. Rev., I79, I499 (I969).
5. K. G.Wilson, Phys. Rev., D 2, I478 (I970).
6. T.Ellis, R.Iaffe Scaling, Short distances and the light cone. SLAC Pub -1353 (1973)
7. D.T.Gross, G.Wilczek, Phys.Rev.Lett, 30, I343 (I973); Phys.Rev. D8 ., 3633 (I973).
8. H.D.Politzer, Phys.Rev.Lett. 30, I346(I973).

9. A.Migdal, Phys.Rev.Lett. B 37, 386 (1971); G.Mack, K.Symanzik, Comm. Math.Phys. 27, 247 (1972); A.F.Grillo, Revista del Nuovo Cim., 3, 146 (1973).
10. В.И.Огиевицкий, Л.Мезинческу, УФН, 117, 637 (1975).
11. Н.Н.Боголюбов. Квазисредние в задачах статистической механики, Дубна, Д.781, 1961; 2-е изд.Р.511.1963.
12. В.Гейзенберг. Введение в единую полевую теорию элементарных частиц. М."Мир", 1968.
13. А.А.Гриб, Е.В.Дамаскинский, В.М.Максимов, УФН, 102,587, (1970).
14. Y.Nambu, G.Iona-Iasinio, Phys.Rev., 122, 345 (1961).
15. I.Goldstone, Nuovo Cimento 19, 155 (1961); A.Salam, S.Weinberg, I.Goldstone, Phys.REv., 127, 965 (1962).
16. S.Gasiorowicz, D.A.Geffen,Rev.Mod.Phys. 41, 531 (1969).
17. S.Weinberg, Phys.Rev. Letters 19, 1971 (1967).
18. S.Coleman, I.Wess, B.Zumino, Phys.Rev., 177, 2239 (1969); 177, 2257 (1969).
19. C. Isham, Nuovo Cimento 59A, 356 (1969).
20. Д.В.Волков, Препринт ИТФ 69-75, Киев, 1969, ЭЧАЯ, 4, 3, (1973).
21. V.T.Ogievetsky, Proceeding of X-th Winter School of Theoretical Physics in Karpacz,v.1,p.117, Wroclaw 1974.
22. A.Salam, I.Strathdee, Phys.Rev., 184, 1750 (1969).
23. C.Isham, A.Salam, I.Strathdee, Ann.Phys.(N.Y.) 62,3 (1973).
24. V.T.Ogievetsky, Lett.Nuovo Cimento 8,988 (1973).
25. S. Weinberg, Phys. Rev., 177,2604 (1969).
26. L.Biedenharn,R.Cusson,M.Han,O.Weaver, Phys.Lett. 42B, 257 (1972).
27. L.Weaver, L.C.Biedenharn, Nucl.Phys. A 185, 3 (1972)
28. Harish- Chandra, Proc. Nat. Acad. Ser.USA 37, 170, 362,366,691 (1951).

Борис

Отпечатано на ротапринте ИФМ УНЦ АН СССР г.Свердловск
Подписано к печати 11/1-78г.НС19004 тираж 100 зак.28
объем 0,65 печ.л. формат 60x84 1/16