ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

АНДРИАНОВ
Сергей Николаевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЭВОЛЮЦИИ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна, 1980

Работа выполнена на факультете прикладной математики - процессов управления Ленинградского государственного университета имени А.А.Жданова (г.Ленинград)

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник — Дымников Александр Дмитриевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор — Маханьков Владимир Григорьевич

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник — Галкин Виктор Яковлевич

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Институт электрофизической аппаратуры им.Д.В.Ефремова (Ленинград)

Автореферат разослан "10" октября 1980 г.
Защита диссертации состоится "14" ноября 1980 г.
в "13" часов на заседании Специализированного совета Д-047.01.04 Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна Московской области.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук — Ивáч — З.М.Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Развитие одного из фундаментальных разделов современной физики - физики ядра и элементарных частиц невозможно представить без ускорительной физики и техники. Кроме того, в последнее время ускорители различного типа находят широкое применение в народном хозяйстве (например, в медицине, в сельском хозяйстве). Получение частиц различной энергии стало предметом специальной науки. При создании новых и совершенствовании существующих ускорителей возникает проблема выбора оптимальных с точки зрения тех или иных физических требований параметров, определяющих работу ускорителя. Одним из наиболее эффективных современных методов решения подобных задач является численный эксперимент, т.е. моделирование на ЭВМ математического аналога исследуемого физического процесса. Численное моделирование наряду с аналитическими методами (когда задача допускает аналитическое решение) позволяет исследовать физическую задачу значительно полнее и дешевле, чем это можно сделать физическими методами. Для некоторых задач поставить физический эксперимент представляется либо весьма трудной, либо невозможной задачей. В этом случае математическое моделирование является практически единственным методом, позволяющим решать такие задачи. В связи с вышесказанным большое значение приобретает проблема создания математической модели, позволяющей наиболее эффективно решать поставленные задачи. Здесь необходимо выделить два следующих аспекта: во-первых, математическое моделирование физического процесса, а во-вторых, постановку задачи оптимального управления, позволяющую эффективно решать поставленные задачи оптимального управления, а также получать условия существования, необходимые и достаточные условия оптимального управления.

Диссертация посвящена построению математической модели эволюции ансамбля невзаимодействующих частиц во внешних полях, формулировке задачи оптимального управления ансамблем частиц, развитию методов решения нелинейных дифференциальных уравнений движения частиц и задач оптимального управления.

Объект исследования. Рассматривается уравнение движения частиц во внешних электромагнитных полях, записанное в общем виде

$$x' = f(x,u,t) \qquad (I)$$

Здесь x – n -мерный фазовый вектор, u – r -мерный вектор управлений. Под пучком частиц будем понимать некоторый ансамбль частиц, двигающихся вдоль выбранной оси. Выбирая длину, измеряемую вдоль этой оси, в качестве новой независимой переменной, можем определить движение пучка как эволюцию поперечного фазового множества, занимаемого пучком. Предполагая отсутствие взаимодействия между частицами, получаем, что эволюция поперечного фазового множества однозначно определяется эволюцией фазовых точек, его составляющих. Пусть $\mathcal{X}$ – множество состояний пучка частиц, $\mathcal{U}$ – множество управляющих воздействий, тогда уравнение движения (I) определяет динамическую систему

$$F: \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2 \quad , \qquad (2)$$

где $\mathcal{R}_i = \mathcal{X}_i \times \mathcal{U}_i$, $\mathcal{R}_1$ – множество начальных состояний, а $\mathcal{R}_2$ – множество конечных состояний динамической системы. Выбор конкретного

вида элементов множеств $\mathcal{X}_i$, $\mathcal{U}_i$ накладывает на эти множества алгебраические и топологические свойства. Введем отображения

$$G_0: \mathcal{X}_2 \to R^1 \ , \quad G_1: \mathcal{X}_2 \times \mathcal{U}_2 \to \mathcal{Y}_1 \ , \quad G_2: \mathcal{X}_2 \times \mathcal{U}_2 \to R^m \ , \qquad (3)$$

где $\mathcal{Y}_1$ – некоторое векторное топологическое пространство, R^1 , R^m – эвклидовые пространства соответствующей размерности. Отображение G_0 будем называть функционалом, G_1 , G_2 – функциями, задающими ограничения на состояние динамической системы. Под задачей оптимального управления будем понимать задачу минимизации функционала G_0 при заданных включениях (ограничениях):

$$G_1(x,u) \in \mathcal{A} \ , \ G_2(x,u) \in \mathcal{B} \ , \ (x,u) \in \mathcal{R}_2 \ , \ \mathcal{A} \subset \mathcal{Y}_1 \ , \ \mathcal{B} \subset R^m \qquad (4)$$

Часто удобно полагать $\mathcal{B} = \{0\}$, таким образом включение $G_2(x,u) \in \mathcal{B}$ эквивалентно ограничениям в виде равенств $G_2(x,u) = 0$.

В данной диссертации в качестве управления рассматривается функция распределения внешнего электромагнитного поля вдоль некоторой оси, выбор которой определяется конкретной задачей. Такой подход тесно связан с возможностью практической реализации оптимального управления.

Цель работы. I. Построить математическую модель эволюции пучка во внешних электромагнитных полях, т.е. задать отображение F , а также задать структуру множеств $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$.

2. Дать метод определения функции распределения электромагнитного поля вдоль оси системы с квадрупольной симметрией со специального вида электродами.

3. Определить условия сходимости метода погружения в пространство фазовых моментов (А.Д.Дымников " Метод оги-

бающих в задачах управления пучками частиц ", в сб.: Программирование и математические методы решения физических задач, Дубна, 1978, с.300-304), с помощью которого строится отображение F .

4. Определить условия на отображения G_i , $i=\overline{0,2}$, F , при которых сформулированная задача оптимального управления имеет решение, а также определить вид отображений G_i , $i=\overline{0,2}$, соответствующих физическим требованиям, налагаемым на систему и пучок, для ряда практических задач.

5. Дать метод решения задачи оптимального управления ансамблем частиц, позволяющий применять его для широкого класса практических задач.

Общие методы исследования. Решение вышеуказанных задач опирается на теорию движения частиц во внешних электромагнитных полях, методы теории линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, на работы Дж.Варга в области общей теории оптимального управления, а также на общую теорию методов нелинейного программирования, развиваемую в работах Е.С.Левитина, Б.Т.Поляка и других.

Научная новизна. Задача оптимального управления ансамблем частиц как задача управления фазовым множеством сформулирована Д.А. Овсянниковым. В данной работе задача оптимального управления ансамблем частиц формулируется как задача управления фазовым множеством при наличии ограничений на управление и на фазовые переменные. С помощью вводимого пространства пучков эта задача формулируется как задача оптимального управления в этом пространстве. Доказываются теоремы существования оптимального управления.

В диссертации приводится доказательство сходимости метода погружения в пространство фазовых моментов, получена оценка скорости сходимости. С помощью теории σ - матрицы в случае линейных уравнений движения и матрицы фазовых моментов и метода погружения в случае нелинейных уравнений движения задача эволюции пучка формулируется как задача эволюции множества, описываемого своей эллиптической границей (метод σ - матрицы) или набором фазовых точек (метод погружения), что позволяет вычислять функционал и ограничения задачи оптимального управления как функции фазовых множеств.

Задача оптимального управления с помощью метода Ритца сводится к задаче математического программирования, которая решается с помощью метода скользящего допуска (Д.Химмельблау " Прикладное нелинейное программирование ", М.,1975, 534 с.). Приводится доказательство сходимости метода скользящего допуска. Показана возможность с помощью метода деформируемого многогранника, используемого в данном методе, за конечное число итераций из недопустимой (неудовлетворяющей ограничениям задачи) точки перейти в почти допустимую (удовлетворяющую ограничениям с некоторой погрешностью).

В диссертации изложены также новые алгоритмы решения ряда важных практических задач физики пучков.

Практическая ценность. На основании рассматриваемых в диссертации методов разработаны численные алгоритмы решения практических задач физики пучков, которые реализованы в виде пакетов подпрограмм, написанных на ФОРТРАНе и поставленных на машины БЭСМ-6 и СДС-6500 (в Объединенном институте ядерных исследований). Эффективно решены следующие задачи:

I. Оптимизация системы медленного вывода пучка протонов из синхрофазотрона ОИЯИ (сделан доклад на Международном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач, сентябрь 1977 г.,г.Дубна).

2. Задача определения параметров " невидимой вставки " для модели сверхпроводящего синхротрона/2/.

3. Задача временной эволюции пучка протонов в синхрофазотроне ОИЯИ при резонансном выводе частиц, в частности задача учета влияния паразитных колебаний в питающих обмотках основного и возмущающего магнитных полей (сделан доклад на семинаре в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ).

4. Задача численного моделирования и оптимизации протонного микрозонда на 3 Мэв (для Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ) с учетом аберраций 3-го порядка/3/,/4/.

<u>Апробация работы</u>. Результаты диссертации были доложены на III Украинской республиканской конференции по электронной оптике и ее применениям (сентябрь 1974 г.,г.Харьков) - один доклад, на Международном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (сентябрь 1977г.,г.Дубна) - два доклада, на Шестом Всесоюзном совещании по обмену опытом эксплуатации и усовершенствования электростатических ускорителей (декабрь 1979г.,г.Харьков) - два доклада, на конференции молодых ученых ЛГУ им.А.А.Жданова (апрель 1980г.,г.Ленинград) - один доклад, а также на семинарах кафедры теории управления Ленинградского университета, Лаборатории высоких энергий и Лаборатории вычислительной техники и автоматики Объединенного института ядерных исследований (г.Дубна).

<u>Публикации</u>. Основное содержание диссертации опубликовано в 4 печатных работах.

<u>Структура и объем работы</u>. Диссертация изложена на 167 страницах машинописного текста и состоит из введения, вспомогательного параграфа, трех глав, заключения, приложения и списка литературы, включающего 86 наименований. Глава I состоит из шести параграфов, глава 2 - из семи параграфов, а глава 3 содержит четыре параграфа.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описывается объект исследования, указывается круг проблем, рассматриваемых в диссертации, и дается краткий обзор работ по указанной теме.

В §0 приводятся вспомогательные определения и утверждения, необходимые для дальнейшего изложения.

Первая глава посвящена построению математической модели движения пучка во внешних полях, т.е. решаются первая, вторая и третья задачи, указанные в пункте " цель работы ". Эти задачи решаются на основе теории движения частиц во внешних полях, методе погружения в пространство фазовых моментов, понятиях $\mathfrak{G}$ - матрицы и матрицы фазовых моментов.

В §I.I приводятся основные уравнения движения частиц в электромагнитном поле. Эти уравнения, записанные в безразмерной форме, приводятся к уравнениям в произвольной плоской криволинейной системе координат. Правая часть полученного уравнения

$$x' = f(x,u,t) \tag{5}$$

при известных свойствах электромагнитного поля удовлетворяет условию Липшица по переменным x и u, измерима по t, и кроме того, $f(x,u,t)$, является аналитической функцией переменной x.

В §I.2 вводится понятие вектора фазовых моментов и излагается метод погружения в пространство фазовых моментов. Пусть x - вектор фазовых координат, тогда вектор z_k будем называть вектором фазовых моментов k-го порядка, если его компоненты имеют вид $x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{k_n}$, где x_j - j-ая компонента фазового вектора x и $\sum_{i=1}^{n} k_i = |k|$. Пространство, натянутое на вектора фазовых моментов, будем называть пространством фазовых моментов. В этом пространстве строится линейное уравнение

$$Y_N'(t) = P_N(t)Y_N(t) , \tag{6}$$

эквивалентное уравнению (5) с точностью до членов N-го порядка разложения по фазовым переменным включительно. Здесь $Y_N^* = \{z_1^*,\ldots,z_N^*\}$ - вектор размерности $\sum_{k=1}^{N} C_{n+k-1}^{k}$. Матрица $P_N(t)$ имеет верхнетреугольный вид. Решение уравнения (6) записывается с помощью матрицанта R_N, имеющего также верхнетреугольный вид

$$Y_N(t) = R_N(t|t_0)Y_N(t_0) \tag{7}$$

или для первых n компонент вектора Y_N:

$$x_N(t) = Q_N(t|t_0)Y_N(t_0) = \{R^{11}(t|t_0),\ldots,R^{1N}(t|t_0)\}Y_N(t_0) , \tag{8}$$

где $R^{1k}(t|t_0)$ блок-матрицы, составляющие $R_N(t|t_0)$. Метод построения последовательности $x_N(t)$ называется методом погружения в простран-

ство фазовых моментов. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть правая часть уравнения (5) $f(x,u,t)$ является аналитической функцией по x в области $X \subset R^n$, удовлетворяющей условию Липшица по управлению $u \in U \subset R^r$, измеримой по t, существуют ограниченные множества $X_1 \subset X$, $U_1 \subset U$ и суммируемая функция $\varphi(t)$ такая, что

$$\left\| \frac{\partial^{|k|} f(x,u,t)}{\partial x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{k_n}} \right\| \leq \varphi(t), \ \forall x \in X_1, \ \forall u \in U_1, \text{ почти всюду на } \mathcal{T} \subset R^1 , \tag{9}$$

тогда последовательность (8) сходится к решению уравнения (5) $\bar{x}(t)$ равномерно по $x_0 \in \mathcal{M}_0 \subset R^n$ и $t \in \mathcal{T}$.

Здесь $\mathcal{T}$ - множество конечной меры, $\mathcal{M}_0$ - ограниченное замкнутое множество начальных фазовых координат. Из доказательства теоремы следует оценка скорости сходимости

$$\| x_N - \bar{x} \|_C \leq B\rho^2 \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \prod_{j=1}^{k} \left\{ \frac{j+1}{j!} L^j + 1 \right\} , \tag{10}$$

где выражения для величин B, L и ρ, характеризующих размеры множества $\mathcal{M}_0$ и функцию $f(x,u,t)$, приводятся в диссертации.

В §I.3 полные уравнения движения, приведенные в §I.I, записываются с точностью до членов 2-го и 3-го порядков разложения для двух видов внешних полей: полей с одной и двумя плоскостями симметрии (дипольная и квадрупольная симметрии). Приводятся эквивалентные им уравнения в пространстве фазовых моментов.

В §I.4 излагается решение уравнений из §I.3 с помощью метода погружения в пространство фазовых моментов. Для прямоугольной модели внешних полей приводятся аналитические выражения для элементов матрицанта $R_N(t|t_0)$.

§I.5 посвящен решению задачи определения статического электромагнитного поля в системе с квадрупольной симметрией с цилиндрическими электродами. Полученные формулы позволяют определять функцию распределения электромагнитного поля вдоль оси системы по заданным геометрическим характерстикам системы, а также по заданным потенциалам на поверхности электродов.

В §1.6 приводятся основные понятия и выражения теории σ - матрицы, а также вводится понятие матрицы фазовых моментов, с помощью которой задается фазовое множество, занимаемое пучком.

Во второй главе решаются третья и четвертая задачи.

В §2.1 формулируется задача оптимального управления объектами, описываемыми уравнениями в полном метрическом пространстве. Уравнение

$$x = F(x, u) \tag{11}$$

называется уравнением движения, где $F: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $\mathcal{X} = C(\mathcal{T}, R^n)$ - пространство непрерывных функций, действующих из пространства с конечной мерой $\mathcal{T}$ в эвклидовое пространство R^n, $\mathcal{U}$ - множество допустимых управлений, задаваемое следующим определением.

Определение. Семейство управляющих функций $\mathcal{U}$, действующих из $\mathcal{T}$ в R^r называется допустимым, если

1) для почти всех $t \in \mathcal{T}$ значения $u(t)$ принадлежат замкнутому и ограниченному множеству $U \subset R^r$,

2) решение уравнения (11) существует и единственно для любого $u \in \mathcal{U}$,

3) семейство $\mathcal{U}$ представляет собой всюду плотное подмножество в компактном множестве измеримых функций $\mathcal{Z} \subset L_2(\mathcal{T}, R^r)$.

В §0 указываются функции, составляющие множества $\mathcal{U}$ и $\mathcal{Z}$.

Пусть $\mathcal{B}_1(\mathcal{U})$ множество пар (x,u), удовлетворяющих (11) и ограничениям $G_1(x,u) \in \mathcal{A}$, $G_2(x,u) \in \mathcal{B}$, где $\mathcal{A} \subset \mathcal{Y}_1$, $\mathcal{B} \subset R^m$ и $\mathcal{Y}_1$ - векторное топологическое пространство. Множество $\mathcal{B}_2(\mathcal{U})$ - множество пар (x,u), удовлетворяющих уравнению (11) и ослабленным ограничениям $G_1(x,u) \in \mathcal{A} + \mathcal{W}_1$, $G_2(x,u) \in \mathcal{B} + \mathcal{W}_1$, где $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ - окрестности нуля в соответствующих пространствах. Тогда задачей оптимального управления будем называть задачу минимизации функции $G_0: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to R^1$ на множествах $\mathcal{B}_1(\mathcal{U})$ и $\mathcal{B}_2(\mathcal{U})$. Приводятся уловия существования оптимального управления для множеств $\mathcal{B}_1(\mathcal{U})$ и $\mathcal{B}_2(\mathcal{U})$.

В §2.2 вводится понятие пространства пучков траекторий, которое определяется как пространство непрерывных многозначных отображений $\mathcal{T}$ в пространство непустых компактных множеств из R^n - $\mathcal{P}(R^n)$ и обозначается $\mathcal{Y} = C(\mathcal{T}, \mathcal{P}(R^n))$. На $\mathcal{Y}$ вводится метрика

$$\rho_y(y_1, y_2) = \sup_{t \in \mathcal{T}} \rho_*(\mathcal{M}_1(t), \mathcal{M}_2(t)),$$

где $\rho_*(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ - хаусдорфова метрика в $\mathcal{P}(R^n)$ и $y_1, y_2 \in \mathcal{P}(R^n)$, соответствующие множествам $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ из R^n. Дифференциальные уравнения движения частиц (5) при условиях, указанных в диссертации, индуцируют в пространстве пучков $\mathcal{Y}$ уравнения типа (11), с непрерывной правой частью по своим аргументам.

В §2.3 формулируется задача оптимального управления пучками частиц. На основе понятия пространства пучков траекторий эта задача формулируется как задача оптимального управления в полном метрическом пространстве - пространстве пучков. Основными результатами §2.3 являются теоремы существования оптимального управления пучками частиц.

В §2.4 рассматривается функционал общего вида

$$F_0[u]=\nu\int\limits_{\mathcal{T}_1}\int\limits_{\mathcal{M}(\mathcal{M}_0,u,t)} G(x,t)\,dx\,dt+\sum_{i=1}^{p}\nu_i\int\limits_{\mathcal{M}(\mathcal{M}_0,u,t_i)} G_i(x)\,dx \quad , \qquad (12)$$

где ν, ν_i, $i=\overline{1,p}$ весовые коэффициенты, $G(x,t)$ неотрицательная суммируемая функция переменных x и t, $G_i(x)$ - неотрицательные суммируемые функции фазовой переменной x, $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}$. Здесь фазовое множество $\mathcal{M}(\mathcal{M}_0,u,t)$ - образ начального фазового множества $\mathcal{M}_0$ в силу управления $u\in\mathcal{U}$. Указаны свойства функций G, G_i, при которых $F_0[u]$ удовлетворяет условию Липшица по u. Приводятся частные случаи функционала $F_0[u]$ для ряда практически важных задач.

В §2.5 приводится математическая запись ограничений на управление и фазовые переменные, возникающих в физике пучков. Исследованы свойства функций, задающих ограничения.

§2.6 посвящен изложению метода решения задачи оптимального управления путем сведения ее к задаче математического программирования с помощью метода Ритца. Исследованы свойства целевой функции и функций, задающих ограничения, входящих в задачу математического (нелинейного) программирования, получаемую из исходной задачи оптимального управления.

В §2.7 приводится формулировка метода скользящего допуска и доказывается его сходимость для целевой функции и задающих ограничения функций, удовлетворяющих условию Липшица по своим переменным. Кроме того, показывается, что метод деформируемого многогранника, используемый при реализации метода скользящего допуска, позволяет за конечное число итераций из недопустимой (неудовлетворяющей ограничениям) точки перейти в почти допустимую, т.е. лежащую в некоторой окрестности допустимого множества варьируемых параметров.

В третьей главе на примере ряда практических задач строятся алгоритмы решения этих задач, основанные на методах, изложенных в первых двух главах.

В §3.I на основе теории $\mathcal{B}$ - матрицы дается решение трех задач транспортировки пучков, имеющих важное практическое значение: задачи определения максимального значения огибающей в системе, задачи согласования фазовых множеств, задачи определения аксептанса системы транспортировки частиц в классе эллипсов.

§3.2 посвящен изложению решения задачи оптимизации системы медленного вывода пучка протонов из синхрофазотрона ОИЯИ. При решении этой задачи использовались методы изложенные в §3.I. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными.

В §3.3 на основе метода погружения в пространство фазовых моментов решается задача временной эволюции пучка частиц в синхрофазотроне ОИЯИ в процессе введения резонансного режима работы ускорителя, необходимого для вывода пучка частиц. Рассматривается также проблема влияния паразитных колебаний, существующих в питающих обмотках магнитов, на равномерность интенсивности выводимого пучка. Полученные результаты имеют экспериментальное подтверждение. Приводятся также численные оценки применимости метода погружения для уравнений движения частиц, записанных с точностью до членов $2^{\text{го}}$ порядка включительно.

Изложению задачи математического моделирования и оптимизации протонного микрозонда на 3 Мэв для Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ посвящен §3.4. Применение метода погружения для уравнений движения частиц, записанных с точностью до членов $3^{-го}$ порядка разложения по фазовым переменным, позволяет построить математическую модель эволюции пучка частиц с учетом аберраций третьего порядка. Произведена оптимизация системы микрозонда по всем параметрам, результаты сведены в таблицы, позволяющие выбирать структуру микрозонда в зависимости от нужд и возможностей экспериментатора. На основании теории огибающих исследован вопрос о влиянии точности юстировки системы на характеристики пучка.

В приложении к диссертации приводится краткое описание пакетов подпрограмм, используемых при решении указанных задач. Кроме того, приводятся таблицы и графики, иллюстрирующие изложение основного текста третьей главы.

В заключении дается сводка полученных результатов и сделаны необходимые выводы.

<u>Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:</u>

I. Андрианов С.Н.,Дымников А.Д. Определение электростатического поля электронноoптических квадрупольных систем с цилиндрическими электродами. Материалы симпозиума Секции физики Московского общества испытателей природы по некорректным задачам, часть 2, М., 1974, с.28-31; Тезисы докладов III Украинской республиканской конференции по электронной оптике и ее применениям, сентябрь 1974 г.,г.Харьков, с.51-53.

2. Андрианов С.Н.,Дымников А.Д.,Кулакова Е.М.,Саркисян Г.Х.,Шелаев И.А. Применение метода скользящего допуска при решении задач синтеза оптимального управления пучками заряженных частиц, в сб.: Программирование и математические методы решения физических задач, Дубна, 1978, с.295-299.

3. Андрианов С.Н.,Дымников А.Д.,Осетинский Г.М. Об оптимальном управлении пучками заряженных частиц, ОИЯИ, БI-9-I285I, Дубна, 1979, 24 с.

4. Андрианов С.Н.,Дымников А.Д.,Осетинский Г.М. Система формирования протонных пучков микронных размеров, ОИЯИ, Р9-I2873, Дубна, 1979, I7 с.