ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

АЛЕКСЕЕВ Александр Александрович

УДК 517.95

ПРИБЛИЖАЮЩИЕ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛЫ И МЕТОД СИНГУЛЯРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 05.13.16 - Применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1995

Работа выполнена в Российском Университете дружбы народов.

Научные руководители: кандидат физико-математических наук, доцент Ю.П.РЫБАКОВ
кандидат физико-математических наук, доцент Л.А.СЕВАСТЬЯНОВ

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, И.Л.БОГОЛЮБСКИЙ
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, К.В.ЧУКБАР

Ведущая организация: Московский государственный институт электронники и математики

Защита диссертации состоится "7" апреля 1995г. в 10^{30} часов на заседании Специализированного совета Д 047.01.04 при Лаборатории вычисительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "7" марта 1995г.

Ученый секретарь
Специализированного совета З.М.Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время теория нелинейных уравнений в частных производных является одной из ведущих областей математической физики. Важную роль при этом играют точноинтегрируемые уравнения (KdV, MKdV и др.). В приложении, однако, в такие уравнения для учета высших дисперсий, нелинейностей, диссипации и т.п. часто приходиться вводить малые слагаемые, нарушающие интегрируемость. Поэтому актуальными являются разработка и применение приближенных методов для исследования подобных возмущенных систем.

Известные до сих пор аналитические подходы, такие как прямые методы теории возмущений, метод возмущенной обратной задачи (Карпман и Маслов, Кауп 1977), в основном были ориентированы на исследование возмущений частных (солитонных) решений. Исключение составляют канонические преобразования (Kodama 1985-87) и теория приближенных симметрий (Байков и др. 1989). В то же время известно, что с интегрируемыми уравнениями могут быть связаны преобразования Бэклунда, задачи рассеяния и т.п., которые разрушаются любым малым возмущением. Поэтому развитие методов, позволяющих находить соответствующие аналоги для возмущенных уравнений и их применение для построения приближенных решений, представляется важным и перспективным направлением аналитической теории.

Цель работы. Целью настоящей работы является обобщение на возмущенные уравнения метода сингулярных многообразий и метода псевдопотенциалов и их применение для ряда модельных уравнений с целью построения приближенных (авто)преобразований Бэклунда, задач рассеяния, законов сохранения и т.д.

Следующим шагом является использование полученных соотношений для построения приближенных решений.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются оригинальными.

В работе предложены новые подходы для исследования уравнений с малым параметром, позволяющие находить приближенные аналоги задач рассеяния, законов сохранения и т.п., и в частности обобщающие известный метод возмущенной обратной задачи рассеяния. Найдены приближенные солитонные решения возмущенных уравнений KdV и MKdV.

Полученные результаты позволяют по-новому взглянуть на теорию возмущений и выделить класс возмущений нарущающих интегрируемость в более высоких порядках по сравнению с порядком малости самого возмущения.

Основные результаты.

1. Предложены обобщения методов псевдопотенциалов и сингулярных многообразий для возмущенных уравнений. Разработано соответсвующее програмное обеспечение для системы компьютерной алгебры REDUCE.

2. Для возмущенных уравнений KdV, MKdV, Бюргерса, Каупа-Купершмидта, Савада-Котера и высшего KdV найдены приближенные задачи рассеяния. На языке RLISP, базовом языке системы REDUCE, разработаны модули для поддержки операции умножения в структурах типа алгебр Ли.

3. В слабонелинейном пределе построены приближенные задачи рассеяния для обобщенного уравнения Бюргерса, обобщенного KdV с источником и уравнения Бюргерса-KdV.

4. Найдены также автопреобразования Бэклунда, связанные с некоторыми из построенных задач рассеяния. Для обобщенных уравнений Бюргерса и KdV с источником выведены формулы суперпозиции приближенных решений. Построены одно- и двухсолитонные решения для возмущенного KdV и MKdV. При этом использовалось упомянутое выше матобеспечение.

5. Для возмущенных уравнений KdV, MKdV и Каупа-Купершмидта методом сингулярных многообразий построены (авто)преобразования Бэклунда и преобразования типа Миуры. Разработана программа для нахождения соответствующих обобщенных усеченных рядов Лорана.

6. Для возмущенного уравнения 7-ого порядка типа высшего KdV применением метода сингулярных многообразий к соответствующей псевдопотенциальной функции так же получены преобразования типа Миуры.

Практическая и теоретическая ценность. Предложены конструктивные методы для построения приближенных преобразований различных видов, задач рассеяния и т.п., нахождения приближенных решений возмущенных уравнений. Исследован ряд уравнений важных для физического приложения, для которых найдены некоторые приближенные решения.

Методы могут быть полностью реализованы средствами компьютерной алгебры.

Апробация работы. Основные материалы диссертации докладывались на семинарах к-ры Прикладной математической физики МИФИ (рук. проф. А.В.Крянев), к-ры Общей математики ВМК МГУ (рук. проф. И.А.Шишмарев), ЛВТА ОИЯИ г.Дубны (рук. д.ф.-м.н. И.Л.Боголюбский), ЛТФ ОИЯИ г.Дубны (рук. д.ф.-м.н. В.Б.Приезжев), семинаре ВЦ РАН (рук. д.ф.-м.н. Е.Д.Терентьев), к-ры Теоретической физики (рук. доцент В.П.Рыбаков) и XXX конференции Университета дружбы народов, а так же на Международном симпозиуме по методам и приложению анализа (Гонконг 1994).

Во всех случаях, когда это возможно, результаты, полученные обоими методами сравнивались между собой и с результатами других авторов, а так же с известными точными выражениями.

Публикации результатов. В настоящей момент по результатам диссертации опубликовано 6 работ, приняты тезисы для доклада на международной конференции KdV'95 (Alexeyev A.A. Application of the Painleve approach to the approximating psedopotentials of the KdV and high-order KdV-type perturbed equations// Abstract of Papers. KdV'95 Centennial Conference. Amsterdam, 1995 (in press).

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 134 страницах и состоит из Введения, двух глав по числу методов, Заключения, списка литературы (131 названий), Приложения с текстом програмных модулей на языках REDUCE и RLISP и 12 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Во **Введении** обсуждается состояние и актуальность проблемы, дается краткий обзор имеющихся до сих пор работ и методов. Подчеркнуты работы, появившиеся в последние несколько лет, сформулирована цель и актуальность работы, дано краткое описание диссертации и предлагаемых подходов, результаты, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена применению псевдопотенциалов.

В *п.1.1* рассматривается метод псевдопотенциалов и вводится понятие приближающих псевдопотенциалов для уравнений с малым параметром.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть имеется уравнение с малым параметром

$$E(x,t,u,u_x,u_t,\ldots,\varepsilon) = 0\ , \quad |\varepsilon| \ll 1$$

и система, задающая эволюцию некоторой новой функции $\vec{q}(x,t)$

$$\vec{q}_x = \vec{P}(x,t,v_x,v_t,\dots;\vec{q};\varepsilon)$$

$$\vec{q}_t = \vec{Q}(x,t,v_x,v_t,\dots;\vec{q};\varepsilon), \quad v=v(x,t)$$

такая, что условие ее совместности

$$\vec{q}_{xt} - \vec{q}_{tx} = 0$$

имеет вид

$$L\, E(x,t,v,v_x,v_t,\dots,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}) = 0, \quad m\in N$$

(L – некоторый оператор: L 0 = 0). Тогда такая система называется приближающим псевдопотенциалом (ПП) m-ого порядка рассматриваемого уравнения, а функция $\vec{q}$ – псевдопотенциальной функцией.

Так как в этом случае псевдопотенциал может и не иметь точного решения для функции $\vec{q}$, то ее необходимо понимать как функцию, приближенно удовлетворяющую уравнениям системы.

Далее в п.1.1 обсуждается техника нахождения ПП заданного вида, их связь с приближенными задачами рассеяния, законами сохранения и т.д., ранее предложенным методом возмущенной обратной задачи.

В последующих пунктах предлагаемый подход применяется к ряду уравнений математической физики.

Пункт 1.2 посвящен ПП уравнений в слабонелинейном пределе. Показано, что в случае $|\varepsilon|\ll 1$ обобщенного уравнения Бюргерса

$$u_t + \alpha u_{xx} = \varepsilon(u^2 - \delta u u_x), \quad \alpha \neq 0$$

и обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза с источником

$$u_t + u_{xxx} - \varepsilon(\beta u^2 - \gamma u u_x - \delta u^2 u_x) = 0$$

приближающие псевдопотенциалы приводят к задачам рассеяния

$$\vec{q}_x = \Big((uE + \lambda H) + \varepsilon(1 - \delta\lambda)F/2\alpha \Big)\vec{q}$$

$$\vec{q}_t = \Big[-\alpha(2\lambda u + u_x)E - 2\alpha\lambda^2 H + \varepsilon\Big(-\delta u^2 E/2 + \lambda(\lambda\delta - 1)F + u(1 - \lambda\delta)H/2 + O(\varepsilon^2) \Big)\Big]\vec{q}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и

$$\vec{q}_x = \begin{pmatrix} \lambda & u \\ \varepsilon(-\delta u + \beta/\lambda - \gamma)/6 & -\lambda \end{pmatrix}\vec{q}$$

$$\vec{q}_t = \Big[(-4\lambda^2 u - 2\lambda u_x - u_{xx})E - 4\lambda^3 H + \varepsilon\Big(-(2\delta u + \beta/\lambda + 2\gamma)u^2 E + (4\lambda^2\delta u - 2\lambda\delta u_x + \delta u_{xx} + 4\lambda^2\gamma - 4\lambda\beta)F + (-2\lambda\delta u^2 - 2\lambda\gamma u + 2\beta u + \beta u_x/\lambda - \gamma u_x)H \Big)/6 + O(\varepsilon^2) \Big]\vec{q}$$

продолжающим точные двумерные задачи соответсвующих линейных уравнений и к связанным с ними автопреобразованиям Бэклунда.

Для обобщенного уравнения Бюргерса мы имеем два типа таких преобразований. Первое из них имеет вид

$$u' = \pm u_x/(2\lambda) + u + \varepsilon/(8\lambda^2)(\delta u u_x - u^2) + O(\varepsilon^2)$$

второе задается следующей парой уравнений

$$q_x = \frac{u - u'}{2} + O(\varepsilon^2)$$

$$q_t - \left(\frac{u - u'}{2}\right)_x + \varepsilon/4\left[\frac{(u + u')^2}{2\lambda} + \delta(u + u')(u - u')\right] = O(\varepsilon^2)$$

где $q = -\dfrac{u + u'}{4\lambda} - \varepsilon/(32\lambda^2)\left[\dfrac{(u + u')^2}{2\lambda} + \delta(u + u')(u - u')\right] + O(\varepsilon^2)$

Аналогичное преобразование имеем и в случае обобщенного KdV с источником

$$(u + u')_x = -2\lambda(u - u') + \varepsilon(u + u')/(24\lambda^2)\Big[\beta(u + u') + \delta\lambda(u + u')(u - u') + 2\gamma\lambda(u - u') \Big] + O(\varepsilon^2)$$

$$(u+u')_t = 2\lambda^2(u-u')_{xx} + \varepsilon\Big[-\delta(u-u')_{xx}(u+u')^2 - 2\gamma(u-u')_{xx}(u+u') + 4\beta(u-u')_x(u+u') + 4\beta\lambda(u-u')^2 + 12\beta\lambda(u+u')^2 + 4\delta\lambda^2(u-u')^3 + 12\delta\lambda^2(u-u')(u+u')^2 + 24\gamma\lambda^2(u-u')(u+u') \Big]/(24\lambda) + O(\varepsilon^2)$$

Полученные таким образом преобразования Бэклунда далее используются для вывода формул суперпозиции приближенных решений.

В *п.1.3* применение предлагаемого подхода к возмущенному уравнению KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \varepsilon(-\alpha u^2 u_x + \beta u u_{xxx} + \gamma u_x u_{xx} + \delta u_{xxxxx}) = 0$$

$$|\varepsilon| \ll 1$$

позволяет с точностью до $O(\varepsilon^2)$ найти двумерное продолжение задачи рассеяния, известной для невозмущенного уравнения, и вывести соответсвующее автопреобразование Бэклунда. Последнее используется для построения приближенных одно- и двухсолитонных решений. Выражение для одного солитона имеет вид

$$u_{1s} \cong \frac{k^2}{2}\,\mathrm{sech}^2\frac{\theta}{2} + \varepsilon\frac{k^4}{48}\Big[(90\delta - 6\beta - \alpha - 3\gamma)\,\mathrm{sech}^4\frac{\theta}{2} + 2(\alpha + \gamma + 4\beta - 30\delta)\,\mathrm{sech}^2\frac{\theta}{2}\Big], \quad \theta = kx - (k^3 + \varepsilon\delta k^5)t$$

Кроме того строятся приближенные пара Лакса, реккурентные формулы для законов сохранения

$$q_x \cong q^2 + \xi q + u + \varepsilon\Big[2(\alpha + 2\beta + \gamma - 10\delta)(q^4 + 2\xi q^3 + 2q^2u) + 2\xi^2(\beta - 10\delta)q^2 + 3\xi^4\delta + 2(-3\beta + \gamma + 10\delta)u^2\Big]/12$$

$$q_t \cong -\frac{\partial}{\partial x}(\xi^2 q + 2qu + \xi u + u_x) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\Big[2(-\alpha - 2\beta - \gamma + 10\delta)q^2u_x + 2\xi^2(-\beta + 4\delta)qu + 2(\alpha + 2\beta - 8\delta)qu^2 - 12\delta qu_{xx} - 6\delta\xi^3u - 6\delta\xi^2u_x + \xi(-\gamma + 2\delta)u^2 - 6\delta\xi u_{xx} + (-\gamma + 2\delta)uu_x - 6\delta u_{xxx}\Big]/6$$

и находятся соответствующие адиабатические инварианты рассматриваемого уравнения, первые два из которых таковы

$$\rho_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx$$

$$\rho_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} -6u^2dx + \varepsilon(2\beta - \gamma)\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2dx$$

В *п.1.4* аналогичным образом рассматривается возмущеное уравнение MKdV

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} + \varepsilon(\beta u^2u_{xxx} + \gamma uu_xu_{xx} + \delta u_x^3 + \alpha u_{xxxxx} + \zeta u^4u_x) = 0$$

$$|\varepsilon| \ll 1$$

Для него при $\zeta=-20\alpha+\beta+2\gamma-4\delta$ построены приближенная задача рассеяния и автопреобразование Бэклунда ($\beta=10\alpha$), которое использовано для нахождения односолитонного решения

$$u \cong -2\lambda\,\mathrm{sech}\,\theta + 2/3\,\varepsilon\lambda^3\Big[(-10\alpha + \gamma - 3\delta)\,\mathrm{sech}\,\theta - 2(10\alpha - \delta)\,\mathrm{sech}^3\theta\Big], \quad \theta = 2\lambda x - 8\lambda^3t - 32\varepsilon\alpha\lambda^5t$$

В *п.1.5*, заключительном пункте главы, приводятся результаты для приближенных спектральных задач уравнений Каупа-Купершмидта, Савада-Котера и высшего KdV с возмущением вида

$$P(u) = \varepsilon(\alpha u^3u_x + \delta u^2u_{xxx} + \gamma uu_xu_{xx} + \rho uu_{xxxxx} + \beta u_x^3 + \upsilon u_xu_{xxxx} + \kappa u_{xx}u_{xxx} + \mu u_{xxxxxxx})$$

так же как и дополнительные соотношение на параметры уравнений, при которых эти задачи существуют. Кроме того приведена приближенная задача рассеяния для уравнения Бюргерса-KdV в слабонелинейном пределе

$$u_t + \alpha u_{xx} + u_{xxx} + \varepsilon uu_x = 0 \qquad |\varepsilon| \ll 1$$

а именно

$$\vec{d}_x \cong \Big[(uE + \lambda H) - \varepsilon\lambda F/(2(3\lambda + \alpha))\Big]\vec{d}$$

$$\vec{d}_t \cong \Big[(-4\lambda^2u - 2\lambda\alpha u - 2\lambda u_x - \alpha u_x - u_{xx})E - 2\lambda^2(2\lambda + \alpha)H + \varepsilon\Big[-(2\lambda + \alpha)u^2E + 2\lambda^2(2\lambda + \alpha)F - \lambda(2\lambda u + \alpha u + u_x)H\Big]/(2(3\lambda + \alpha))\Big]\vec{d}$$

Получены также продолжение задачи рассеяния для уравнения MKdV с возмущением отличным от исследованного в п.1.4

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} + \varepsilon(3uu_{xxx} + u_xu_{xx}) = 0 \qquad |\varepsilon| \ll 1$$

$$\vec{d}_x \cong \Big[(uE - uF + \lambda H) + 4/3\,\varepsilon\Big(-u^2E + (u^2 - 3/2\,\lambda^2)F\Big)\Big]\vec{d}$$

$$\vec{d}_t \cong \Big[-(2u^3 + 4\lambda^2u + 2\lambda u_x + u_{xx})E + (2u^3 + 4\lambda^2u - 2\lambda u_x + u_{xx})F - 2\lambda(u^2 + 2\lambda^2)H + \varepsilon\Big((12u^4 + 4\lambda^2u^2 - 2\lambda uu_x - uu_{xx} - u_x^2)E + (-12u^4 + 8\lambda^2u^2 - 2\lambda uu_x + uu_{xx} + u_x^2 + 24\lambda^4)F + 2\lambda(2u^3 - 6\lambda^2u - 3\lambda u_x)H\Big)/3\Big]\vec{d}$$

и точная задача для возмущенного уравнения Бюргерса вида

$$u_t - 2(u^2)_x - u_{xx} + \varepsilon((u^2)_{xx} + u_{xxx}) = 0$$

Обсуждается связь полученных результатов с точными задачами рассеяния и приближенными решениями, построенными ранее в других работах с применением традиционных подходов.

Во **второй главе** рассматривается метод сингулярных многообразий и его применение для ряда возмущенных уравнений.

В *п.2.1* даны классификация возможных особых точек решений дифференциальных уравнений, понятия бесконечного и усеченного обобщенного ряда Лорана, т.е рядов вида

$$u=\sum_{l=-p}^{\infty} W_l F^l \quad \text{и} \quad u=\sum_{l=-p}^{0} W_l F^l, \qquad p\in N$$

(где функции u, W_l, F – функции независимых переменных дифференциального уравнения), резонансов, приводящих к произвольным функциям в разложении Лорана, уравнения на сингулярное многообразие F и т.д. Далее рассматриваются резонансы, особенность построения и структура обобщенных рядов Лорана вида

$$u=\sum_{j=0}^{+\infty}\varepsilon^j\sum_{l=-n_j}^{+\infty} W_{jl}F^l \; ; \; n_j\in N$$

для случая возмущенных уравнений. Подстановка таких рядов в исследуемое уравнение и анализ соотношений на коэффициенты получаемые расщеплением по степеням функции F в ряде случаев приводит к выражениям для преобразований Бэклунда, задачам рассеяния и т.д.

В *п.2.2* предлагаемая модификация обобщенных рядов Лорана используется вместе со связанными с ними уравнениями на сингулярное многообразие для нахождения приближенных (авто)преобразований Бэклунда и преобразований типа Миуры между решениями уравнений соответствующих разным видам возмущений. С этой точки зрения рассматриваются возмущенные уравнения KdV, MKdV и уравнение Каупа-Купершмидта, основные соотношения для которых и их взаимосвязь представленны на рис.1-3, а так-же так называемое RLW-уравнение

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}+\varepsilon u_{xxt}=0 \qquad |\varepsilon|\ll 1$$

При этом используются функции

$$V=\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(F/\sqrt{F_x}\right)$$

$$C=-F_t/F_x$$

$$S=F_{xxx}/F_x-3/2\,F_{xx}^2/F_x^2$$

такие что

$$V_x=-V^2-S/2$$

$$V_t=CV^2-C_xV+(CS+C_{xx})/2$$

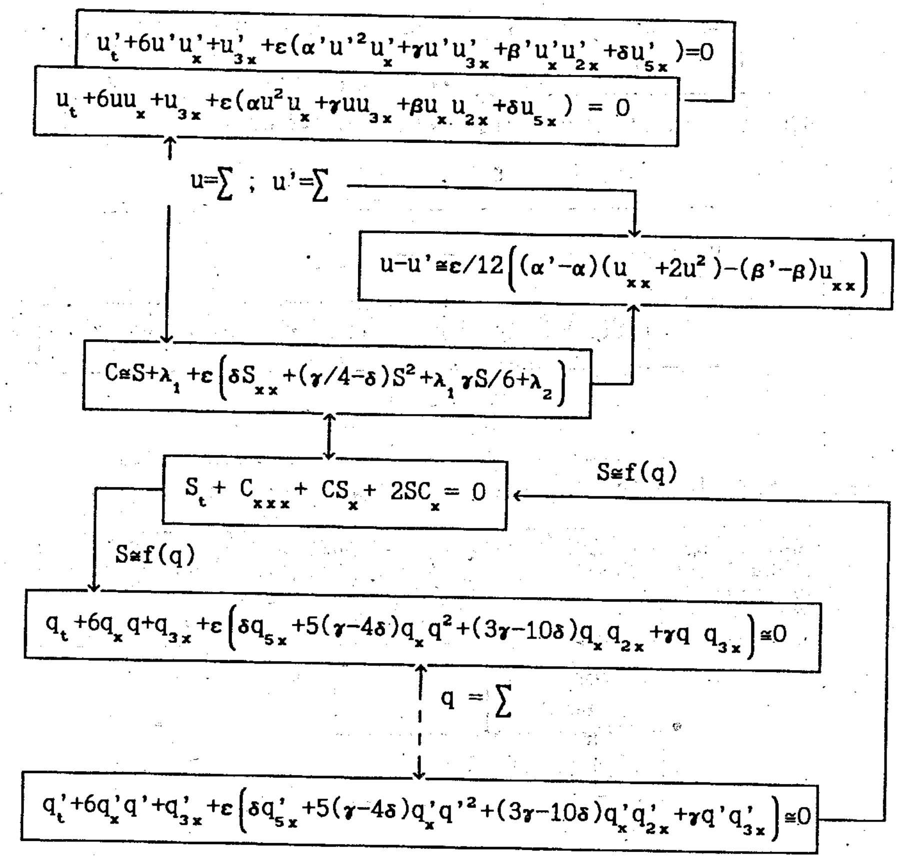

Рис.1 Свойства возмущенного уравнения KdV связанные с уравнением на сингулярное многообразие.

$$S_t + C_{xxx} + 2C_x S + CS_x = 0$$

удобные для проведения вычислений и введенными ранее другими авторами, т.к. усеченный ряд Лорана в этом случае представляеться полиномом по функции V с коэффициентами зависящими от C и S.

Полученные преобразования используются для нахождения приближенных двухсолитонных решений этих уравнений. Рассматривается также применение метода сингулярных многообразий к системе уравнений, получаемой прямой теорией возмущений из возмущенного уравнению KdV с производными до седьмого порядка включительно и также построены двухсолитонные решения.

В *п.2.3* метод применяется к псевдопотенциальной функции уравнения седьмого порядка

$$u_t - 45(a/4 + b)u^2 u_x - 3/2\, auu_{xxx} - (9/2\, a + 15b)u_x u_{xx} + bu_{xxxxx} + \varepsilon\Big(\alpha u^3 u_x + \beta u_x^3 + \gamma uu_x u_{xx} + \delta u^2 u_{xxx} + \sigma uu_{xxxxx} + \zeta u_x u_{xxxx} + \xi u_{xx} u_{xxx} + \mu u_{xxxxxxx} \Big) = 0 \quad |\varepsilon| \ll 1$$

частными случаями которого являються уже упомянутые возмущенное высшее уравнение KdV, возмущенные уравнения Каупа-Купершмидта и Савада-Котера, решения которого в более общих случаях не могут быть представлены обобщенными рядами Лорана. Как результат для этого уравнения так же найдены уже упомянутые преобразования типа Миуры.

В **Заключении** перечислены основные результаты диссертации.

Полученные результаты опубликованы в следующих работах:

1. Alexeyev A.A. Approximating pseudopotentials and inverse scattering problems for perturbed nonlinear equations// Phys.Lett.A. 1993. V.177. No 3. P.203-210

2. Alexeyev A.A. Auto-Bäcklund transformations for weak nonlinear systems// Phys.Lett.A. 1993. V.183. No 2/3. P.160-164.

3. Alexeyev A.A. Approximating pseudopotentials, scattering problems, and Bäcklund transformations for the Korteweg-de Vries and modified Korteweg-de Vries equations with perturbations// J.Phys.A: Math.Gen. 1994. V.27. No 3. P.865-881.

4. Алексеев А.А. Приближенные преобразования Бэклунда для возмущенных уравнений КдФ и МКдФ// Тез. докл. XXX конф. ф-та ФМиЕН. 16 - 24 мая 1994г., ч.2. Математич. секции. М: Изд. РУДН, 1994. С.13.

5. Alexeyev A.A. The singular manifold method for perturbed nonlinear PDEs// Abstract of Papers: Int. Symp. on Methods and Applications of Analysis. Hong Kong: Publications and Media Production Unit. CityU, 1994. P.1.

6. Alexeyev A.A. The Painleve approach for perturbed nonlinear equations: Backlund and Miura-type transformations// J.Phys.A: Math.Gen. 1995. V.28. No 6. P.1699-1712.