ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

В.К. Мельников

878

О ПОВЕДЕНИИ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМЫ, БЛИЗКОЙ К АВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЕ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель – профессор С.В. Фомин

Дубна 1962 год

В.К. Мельников

878

О ПОВЕДЕНИИ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМЫ, БЛИЗКОЙ К АВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЕ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель – профессор С.В. Фомин

При исследовании различных процессов, происходящих с частицами высокой энергии (фазовые колебания в резонансных ускорителях /6-8/, радиальные и вертикальные колебания частиц в циклических ускорителях /9-10/, движение плазмы в магнитном поле /11/ и др.), возникает необходимость в исследовании следующей системы уравнений с малым параметром ϵ :

$$\dot{x} = f_0(x,y) + \epsilon f_1(x,y,t,\epsilon), \qquad (I_\epsilon)$$

$$\dot{y} = g_0(x,y) + \epsilon g_1(x,y,t,\epsilon),$$

удовлетворяющей следующему основному условию: система (I_0) (система (I_0) получается из системы (I_ϵ) при $\epsilon = 0$) имеет в некоторой точке (x_0, y_0) положение равновесия типа центр.

Из основного условия следует, что при достаточно малом $\epsilon \neq 0$ все решения системы (I_ϵ), выходящие из достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0), будут колеблющимися, по крайней мере, до тех пор, пока они будут находиться вблизи точки (x_0, y_0). Однако, с течением времени эти решения, вообще говоря, могут удаляться от точки (x_0, y_0) настолько далеко, что их движение примет совсем другой характер. С другой стороны, даже среди колеблющихся решений системы (I_ϵ) могут встретиться решения настолько различных типов, что некоторые из них не обеспечивают устойчивое протекание исследуемого процесса. Этим объясняется важность нахождения границ, отделяющих, с одной стороны, колеблющиеся решения системы (I_ϵ) от неколеблющихся, с другой стороны, разделяющих колеблющиеся решения различных типов.

В настоящей диссертации излагается полученное автором решение этой задачи в предположениях, которые будут сформулированы ниже. Основной результат диссертации состоит в том, что аналогично тому, как в случае автономной системы двух уравнений для полного анализа достаточно определить расположение сепаратрис, так и в случае системы (I_ϵ) существуют однопараметрические семейства граничных траекторий, которые в пространстве x, y, t отделяют однотипные траектории системы (I_ϵ). В диссертации дается метод для нахождения граничных траекторий системы (I_ϵ) в виде сходящихся в круге $|\epsilon| < \epsilon_0$ $(\epsilon_0 > 0)$ рядов по степеням параметра ϵ. Это позволяет найти все возможные типы расположения семейства граничных траекторий системы (I_ϵ).

Диссертация состоит из двух частей. В первой части диссертации решается следующая задача. Предположим, что максимальная односвязная окрестность G_0 точки (x_0, y_0), целиком заполненная замкнутыми траекториями системы (I_0) и не содержащая других положений равновесия системы (I_0), кроме (x_0, y_0), лежит в ограниченной части плоскости. Предположим далее, что на границе области G_0 расположено единственное положение равновесия (x_s, y_s) типа седло. Ради простоты будем предполагать, что оба рассматриваемых положения равновесия простые, т.е. в точке (x_0, y_0)

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial g_0}{\partial y} - \frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{\partial g_0}{\partial x} > 0,$$

а в точке (x_s, y_s)

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial g_0}{\partial y} - \frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{\partial g_0}{\partial x} < 0.$$

Пусть далее функции $f_0(x, y)$ и $g_0(x, y)$ аналитические по x и y в некоторой области $\tilde{G}_0 \supset \bar{G}_0$, а функции $f_1(x, y, t, \epsilon)$ и $g_1(x, y, t, \epsilon)$ аналитические по x, y, ϵ в области, являющейся прямым произведением области $\tilde{G}_0$ на круг $|\epsilon| < \epsilon_0$ $(\epsilon_0 > 0)$, непрерывные по t вместе с первой производной по t и периодические по t с периодом 2π. Тогда, согласно теореме Пуанкаре (см. /1/, гл. III), существует аналитическое в некотором круге $|\epsilon| < \epsilon_s$ $(\epsilon_s > 0)$ периодическое по t с периодом 2π решение $(x_s(t,\epsilon), y_s(t,\epsilon))$ системы (I_ϵ) такое, что $|x_s(t,\epsilon) - x_s| + |y_s(t,\epsilon) - y_s| \to 0$ при $\epsilon \to 0$. Решение $(x_\epsilon(t), y_\epsilon(t))$ системы (I_ϵ) назовем граничным, если оно определено при всех t, больших некоторого t_0, и при $t \to \infty$

$$|x_\epsilon(t) - x_s(t,\epsilon)| + |y_\epsilon(t) - y_s(t,\epsilon)| \to 0.$$

Для заданного момента времени t_0 обозначим через $\Gamma_\epsilon(t_0)$ множество точек на плоскости (x_0, y_0) таких, что выходящие из них при $t = t_0$ решения системы (I_ϵ) будут граничными. В первой части диссертации показывается, что множество $\Gamma_\epsilon(t_0)$ отделяет однотипные в некотором смысле траектории системы (I_ϵ), и дается метод для нахождения всех встречающихся типов расположения ветвей множества $\Gamma_\epsilon(t_0)$. Таких типов оказывается четыре; они изображены на рис. 1, 2, 3 и 4.

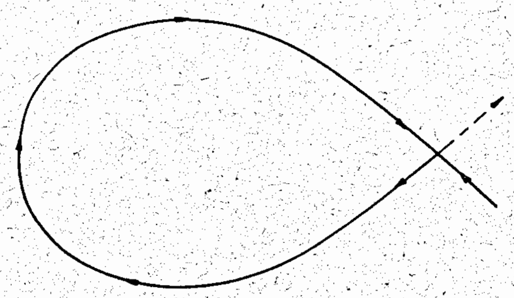

Рис. 1.

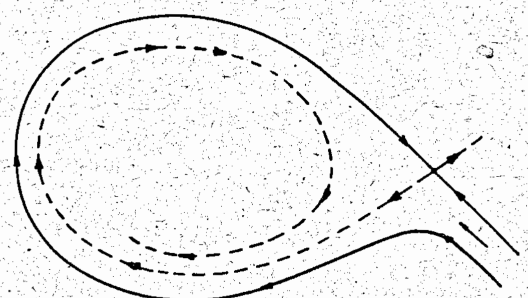

Рис. 2.

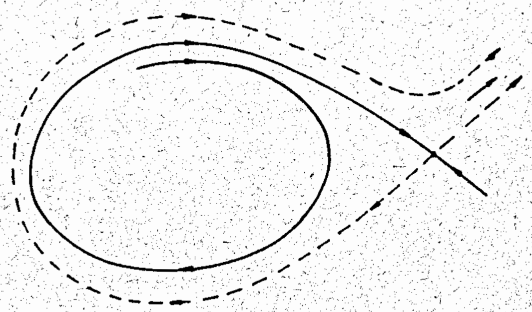

Рис. 3.

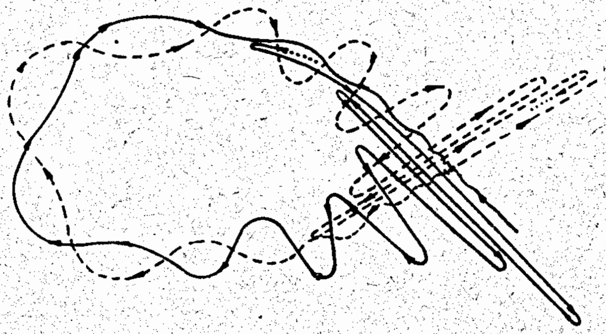

Рис. 4.

Стрелками здесь показано, в каком направлении смещаются точки множества $\Gamma_\epsilon(t_0)$ за время $T_1 = 2k$. Сплошной линией на этих рисунках изображены части соответствующих ветвей множества $\Gamma_\epsilon(t_0)$ для системы (I_ϵ), пунктиром части соответствующих ветвей множества $\Gamma_\epsilon(t_0)$ для системы, получающейся из (I_ϵ) с помощью замены t на $-t$.

Во второй части диссертации изучается структура областей, образованных начальными данными колеблющихся решений системы (I_ϵ). С этой целью с помощью подходящим образом выбранной замены переменных, система (I_ϵ) преобразуется в систему:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mu A_0(v) + \mu^2 R(u, v, t, \mu), \\ \dot{v} &= \mu a u + \mu^2 S(u, v, t, \mu), \end{aligned} \qquad (II_\mu)$$

где $\mu = \sqrt{\epsilon}$, $a \neq 0$, $A_0(v)$ – аналитическая в полосе $|Im\ v| < \delta_0 (\delta_0 > 0)$ функция v, периодическая по v с периодом $2\pi/n$ (n –целое), а функции $R(u, v, t, \mu)$ и $S(u, v, t, \mu)$ аналитические по u, v, μ в некоторой области $|\mu u| < a_0$, $|Im\ v| < \delta_0$ $(a_0 > 0, \delta_0 > 0)$, непрерывные по t вместе с первой производной по t и периодические по t с периодом $2\pi m$ (m –целое). Переход от системы (I_ϵ) к системе (II_μ) получается в результате последовательного применения следующих аналитических и взаимнооднозначных замен переменных.

1. Переменные (x, y) заменяются на переменные (ξ, η) такие, что в переменных (ξ, η) система (I_ϵ) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= H'_\eta(\xi, \eta) + \epsilon f(\xi, \eta, t, \epsilon), \\ \dot{\eta} &= -H'_\xi(\xi, \eta) + \epsilon g(\xi, \eta, t, \epsilon). \end{aligned} \qquad (I'_\epsilon)$$

2. Переменные (ξ, η) заменяются на переменные (H, ϕ), где $H = H(\xi, \eta)$ – гамильтониан системы (I'_0), а $\phi = \phi(\xi, \eta)$ удовлетворяет соотношению $\phi'_\xi H'_\eta - \phi'_\eta H'_\xi = 1$; в переменных (H, ϕ) система (I'_ϵ) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \epsilon F(H, \phi, t, \epsilon), \\ \dot{\phi} &= 1 + \epsilon G(H, \phi, t, \epsilon), \end{aligned} \qquad (I''_\epsilon)$$

где функции $F(H, \phi, t, \epsilon)$ и $G(H, \phi, t, \epsilon)$ периодические по ϕ с периодом $T(H)$, зависящим от H.

3. Переменные (H, ϕ) заменяются на переменные (h, ψ) по формулам[x]:

$$H = H_{m,n} + \mu h, \quad \phi = \frac{nt}{2m\pi} T(H) + \psi,$$

где $H_{m,n} \neq H_c = H(\xi(x_c, y_c), \eta(x_c, y_c))$, таково, что период решения $(\xi_{m,n}(t), \eta_{m,n}(t))$ системы (I_0'), удовлетворяющего условию

$H(\xi_{m,n}(t), \eta_{m,n}(t)) \equiv H_{m,n}$, равен $2\pi \frac{m}{n}$ (m и n – взаимно простые целые числа); в переменных (h, ψ) система (I_ϵ'') имеет вид:

$$\frac{dh}{dt} = \mu A(\psi, t) + \mu^2 P(h, \psi, t, \mu),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \mu a h + \mu^2 Q(h, \psi, t, \mu), \qquad (II_\mu')$$

где $a = -\frac{n}{2m\pi} T'(H_{m,n}) \neq 0$, если $T'(H_{m,n}) \neq 0$.

4. Наконец, переменные (h, ψ) заменяются на переменные (u, v) по формулам:

$$h = u - \mu m \sum_{p \neq 0} \frac{i}{p} A_p(v) e^{ip t/m}, \quad \psi = v,$$

где

$$A_p(v) = \frac{1}{2m\pi} \int_0^{2m\pi} A(v, t) e^{-ip t/m} dt;$$

с помощью последней замены переменных система (II_μ') превращается в систему (II_μ).

---

[x] В том случае, когда $H_{m,n}$ близко к H_c, необходима другая замена переменных. Этот случай, охватывающий явление резонанса в нелинейных системах, в настоящей диссертации не рассматривается. Однако, применение изложенных в диссертации идей и результатов к исследованию этого случая дает качественное описание явлений, происходящих при резонансе.

К системе (II_μ) применимы с некоторыми уточнениями результаты первой части диссертации. С помощью этих результатов во второй части диссертации найдены все возможные типы расположения ветвей множества $\gamma_\mu(t_0)$ (определение множества $\gamma_\mu(t_0)$, аналогичное определению множества $\Gamma_\epsilon(t_0)$, дается в диссертации). Наиболее интересные из них изображены на рис. 5,6,7, 8, 9 и 10.

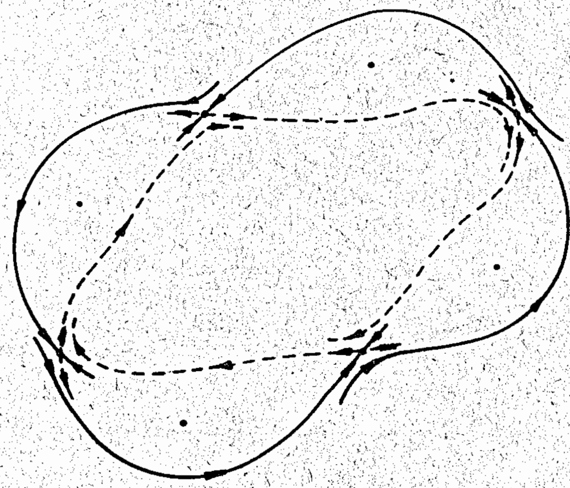

Рис. 5.

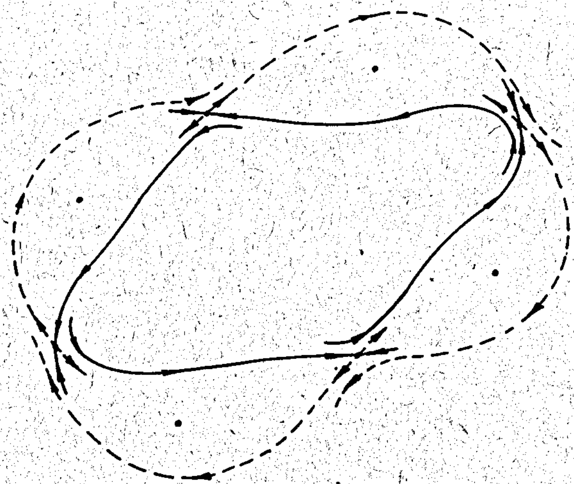

Рис. 6.

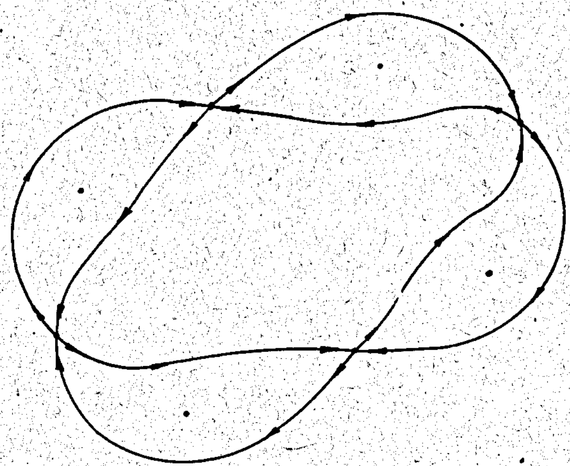

Рис. 7.

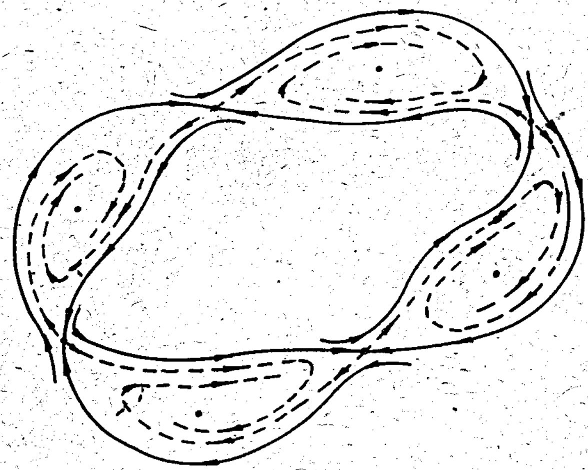

Рис. 8.

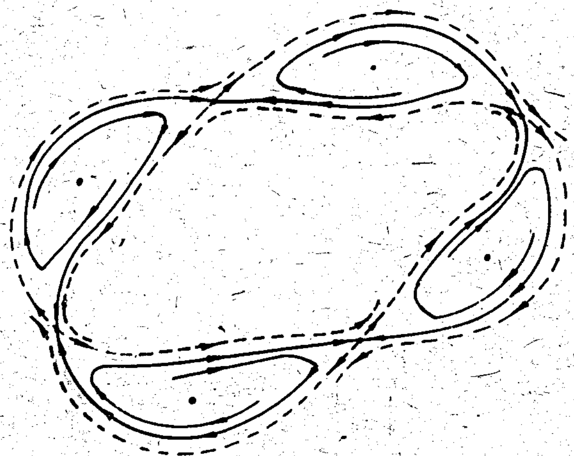

Рис. 9.

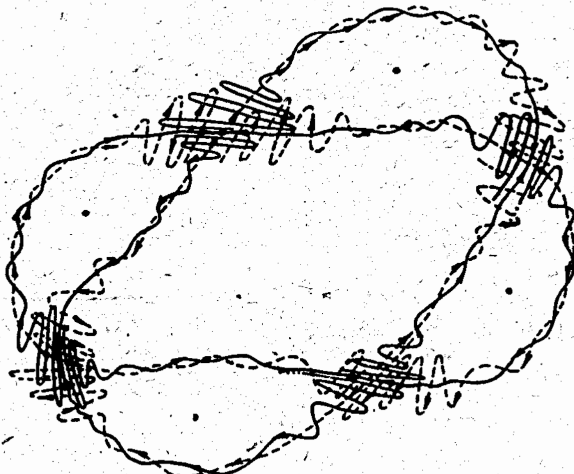

Рис. 10 .

Стрелками здесь показано, в каком направлении смещаются точки множества $\gamma_\mu(t_0)$ за время $T_m=2m\pi$. Сплошной линией на этих рисунках изображены части соответствующих ветвей множества $\gamma_\mu(t_0)$ для системы (II_μ), пунктиром – части соответствующих ветвей множества $\gamma_\mu(t_0)$ для системы, получающейся из (II_μ) с помощью замены t на $-t$.

Здесь необходимо отметить, что в случаях, изображенных на рис. 5, 6, 8 и 9, расположение ветвей множества $\gamma_\mu(t_0)$ может быть приближенно определено с помощью метода усреднения (см./2/, гл. У). Однако, в случае, изображенном на рис. 10, метод усреднения всегда дает качественно неверный ответ.

Результаты, составившие содержание настоящей диссертации, являются дальнейшим развитием идей и результатов работы /3/; основные результаты диссертации опубликованы в заметках /4,5/.

Литература

1. H.Poincaré. Les méthods nouvelles de la mécanique céleste, t. I, Paris, 1892.

2. Н.Н.Боголюбов и Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.

3. В.К.Мельников. Определение области захвата для уравнения второго порядка, близкого к консервативному, Матем. сб., 49 (91), вып.4, 1959, 353-380.

4. В.К.Мельников. Об определении области захвата для системы, близкой к гамильтоновой, ДАН СССР, 139, № 1, 1961, 31-33.

5. В.К. Мельников. О поведении траекторий системы, близкой к автономной гамильтоновой системе, ДАН СССР, 142, № 3, 1962.

6. R.Q.Twiss, N.H.Frank. Orbital Stability in a Proton Synchrotron, Rev. Sci. Instr.,20, 1, (1942).

   (Перевод: "Устойчивость орбит протонов в синхрофазотроне", сборник "Резонансные циклические ускорители элементарных частиц", ИЛ, 1950, 136-137).

7. T.R.Kaiser. On the Capture of Particles into Synchrotron Orbits, Proc, Phys. Soc.,63A, 1950, 52-66.

   (Перевод: "О захвате частиц на синхронную орбиту", сборник "Проблемы современной физики", 2, 1952, 62-63).

8. Ю.С.Саясов и В.К.Мельников. Теория захвата частиц в синхронный режим ускорения с учетом неконсервативности уравнений движения, ЖТФ, XXX, 6, 1960, 656-664.

9. P.D.Dunn, L.B.Mullett, T.G.Pickavance, W.Walkinshaw, I.I.Wilkins. Accelerator studies at A.E.R.E., Harwell, CERN Symposium, 1956, 1, 9-31.

10. V.I.Danilov, Yu. N. Denisov, V.P.Dmitrievskij, V.P.Dzhelepov, A.A.Glazov, V.V.Kol'ga, A.A.Kropin, Lu Ne-chuan, V.S.Rybalko, L.A.Sarkisyan, A.L.Savenkov, B.I.Zamolodchikov, N.L.Zaplatin and D.P.Vasilevskya. Cyclotron with Space Variation of the Magnetic Field, Proceeding of the Intern. Conf. of High-Energy Accelerators and Instrumentation, CERN, 1959, 211-225.

11. Л.В.Кораблев, А.И.Морозов и Л.С.Соловьёв. О магнитных поверхностях, ЖТФ, XXXI, 10, 1961, 1153-1163.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1961 года.