ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-93-69

УДК 530.12:539.12

СОРОКА
Вячеслав Александрович

КАЛИБРОВОЧНАЯ СУПЕРСИММЕТРИЯ И СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ С НЕЧЕТНОЙ СКОБКОЙ ПУАССОНА

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Дубна 1993

Работа выполнена в Харьковском физико-техническом институте

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук И.А.БАТАЛИН

доктор физико-математических наук В.В.НЕСТЕРЕНКО

доктор физико-математических наук В.П.ПАВЛОВ

Ведущая организация : Институт теоретической физики АН Украины, г.Киев

Защита диссертации состоится "____" ____________ 1993г. в ____ час. на заседании Специализированного Совета Д 047.01.01 при Лаборатории теоретической физики Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна, Московской области.

Автореферат разослан "____" ____________ 1993 г.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Учёный секретарь Специализированного Совета
кандидат физико-математических наук

В.И.ЖУРАВЛЁВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Симметрия, описывая свойства пространства-времени и физических полей и предопределяя вид взаимодействий, лежит в основе фундаментальных законов физики. Поэтому обнаружение новых закономерностей во многом связано с установлением новых типов симметрий.

Ярким примером развития теории симметрии является интенсивно разрабатываемое направление исследований в физике элементарных частиц, связанное с введённой в начале 70-х годов группой суперсимметрии. Суперсимметрия, аккумулировав и объединив многие основные достижения теории симметрии, в то же время существенно их обогатила, расширив наши представления о возможных типах соотношений симметрии.

Прежде всего это касается представления о структуре пространства-времени, которое суперсимметрия, являясь обобщением пространственно-временной симметрии, расширяет до суперпространства путём добавления грассмановых спинорных координат. С другой стороны суперсимметрия, имея спинорные генераторы, изменяющие спин на I/2, проявляется как симметрия между бозонами и фермионами. Чрезвычайно важным явилось обнаружение расширенного варианта суперсимметрии, нетривиально объединяющего пространственно-временную и внутренние симметрии.

Расширенная суперсимметрия в соединении с идеологией калибровочных теорий, успешно описывающих каждое из известных взаимодействий (при этом, как известно, с гравитацией связаны пространственно-временные калибровочные группы, а все другие взаимодействия описываются калибровочными внутренними группами), может служить перспективной основой для построения единой теории всех, включая и гравитацию, взаимодействий. Поскольку точная симметрия, приводя к одинаковым массам полей материального мультиплета и нулевым массам калибровочных полей, не всегда соответствует действительности (для точной суперсимметрии это ненаблюдаемое равенство масс бозонов и фермионов), то для построения реалистичных моделей используются различные механизмы нарушения симметрии. Очень важную роль в объяснении многих реальных явлений играет спонтанное нарушение симметрии, приводящее в случае калибровочной группы к эффекту Хиггса, в результате которого некоторые калибровочные поля приобретают ненулевую массу и появляется возможность снятия вырождения по массам у материальных полей.

Ещё одно интересное проявление концепции суперсимметрии, которое расширяет наши представления о формулировке динамики, связано с возможностью введения на фазовом суперпространстве, помимо прямого суперобобщения обычной скобки Пуассона, приводящего к чётной скобке, другой состоятельной пуассоновской скобочной операции – нечётной скобки, которая не имеет аналога в обычном грассманово чётном фазовом пространстве. В нечётной скобке оказалась возможной альтернативная формулировка как классической, так и квантовой динамики.

Цель диссертационной работы. Диссертация посвящена исследованию двух проблем. 1. Рассмотрение калибровочных полей, связанных с калибровочной и общековариантной группами суперсимметрии. 2. Изучение классических и квантовых суперсимметричных систем с нечётной скобкой Пуассона.

Научная новизна и практическая ценность. В диссертацию вошли работы, в которых впервые рассмотрена калибровочная, а точнее спонтанно нарушенная калибровочная группа расширенной суперсимметрии. Это рассмотрение выявило отличительные особенности суперсимметрии по сравнению с ранее рассматривавшимися группами. Основные из них выражаются в следующем: во-первых, калибровочные поля имеют не только традиционные бозонные значения спина 1 и 2, но и необычное до этого полуцелое значение 3/2; во-вторых, механизм эффекта Хиггса для голдстоуновских частиц со спином 1/2 существенно отличается от случая групп внутренней симметрии, затрагивая геометрические свойства пространства-времени; в-третьих, и это по-видимому явилось наиболее интересным и многообещающим свойством, оказалось принципиально возможным объединение гравитации со взаимодействиями, описываемыми калибровочными группами внутренней симметрии. Существенной чертой при этом явилось то, что гравитационное поле входит совместно со своими суперпартнёрами со спином 3/2, названными в дальнейшем гравитино.

Перечисленные результаты, а также развитые при их получении методы, являясь ключевыми, послужили основой направлению исследований, называемому теорией супергравитации. В дальнейшем разрабатывались различные подходы к супергравитации, основными из которых являются компонентный и суперполевой. В рамках последнего в диссертации впервые построена $N=1$ супергравитация с новым минимальным набором вспомогательных полей в линеаризованном виде. Нелинейный вид этого варианта супергравитации позже был найден другими авторами сначала в компонентном, а затем в суперполевом подходах.

При построении моделей, в том числе калибровочных и супергравитационных, с группами расширенной суперсимметрии оказалось, что особо важное значение, благодаря малой размерности, имеют представления этих групп с центральными зарядами. В связи с этим в диссертации построены необходимые для классификации представлений операторы Казимира N – расширенной суперсимметрии при наличии центральных зарядов с максимально возможной для данного чётного N группой внутренней симметрии $USp(N)$, а для случая $N=2$ найдена структура серии неприводимых массивных представлений малой размерности, среди которых известный гипермультиплет Фае-Сониуса является простейшим.

В диссертации сформулирован и развит альтернативный подход к описанию гамильтоновой динамики на основе нечётной скобки. Так для систем с равным числом пар грассманово чётных и нечётных фазовых координат решён вопрос о соотнесении описаний динамики, осуществляемых с помощью скобок разной чётности, и показано, что и уравнения **движения**, и свойства симметрии этих систем эквивалентным образом описываются и в чётной, и в нечётной скобках. При этом на примере классической суперсимметричной механики Виттена установлена дуальность чётных и нечётных интегралов движения при изменении чётности скобки. В частности дуальность между чётным гамильтонианом и играющими в нечётной скобке роль нечётных гамильтонианов суперзарядами вскрывает динамическую роль последних.

Несомненный интерес представляет проблема квантования систем с нечётной скобкой. В диссертации дан рецепт квантования нечётной скобки, при котором не возникает трудно интерпретируемой нечётной постоянной Планка. При этом найдены различные квантовые представления нечётной скобки, которые в отличие от случая чётных скобок могут быть неэквивалентными. С помощью квантовой нечётной скобки получены различные представления квантовой механики Виттена, в том числе с составными координатой и импульсом, и построена модель составной спинорной структуры пространства-времени, отличная от твисторного подхода. Наконец, впервые рассмотрено квантование классической системы с нечётной скобкой.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

I. Рассмотрена калибровочная спонтанно нарушенная группа расширенной суперсимметрии, на основе которой

а) введены калибровочные майорановские безмассовые поля со спином 3/2 в качестве суперпартнёров поля гравитации;

б) указана принципиальная возможность объединения гравитации с взаимодействиями, основанными на калибровочных внутренних группах.

2. Рассмотрен эффект Хиггса для голдстоуновских фермионов со спином I/2 и показано, что в его результате не только поля со спином 3/2 приобретают массу, но и возникает космологический член для поля гравитации.

3. Получена линеаризованная N = I супергравитация с новым минимальным набором вспомогательных полей.

4. Построены операторы Казимира для $USp(N)$- расширенной суперсимметрии с центральными зарядами, а в случае N = 2 найдена структура неприводимых представлений малой размерности.

5. Доказано существование систем, гамильтоновы уравнения которых имеют эквивалентную формулировку на основе нечётной скобки Пуассона. На примере механики Виттена установлена дуальность четных и нечётных интегралов движения таких систем.

6. Для суперсимметричных гамильтоновых систем найдены уравнения движения, которые имея своим следствием уравнения Гамильтона, играют роль корня квадратного из последних.

7. Дан рецепт квантования нечётной скобки и обнаружено существование её неэквивалентных квантовых представлений.

8. С использованием квантовой нечётной скобки построены представления квантовой механики Виттена, в одном из которых координата и импульс имеют составную структуру.

9. На основе квантовой нечётной скобки предложена модель составной спинорной структуры пространства-времени.

I0. Рассмотрено на простом примере квантование классических систем с нечётной скобкой.

Апробация работы и публикации. Основные материалы диссертации докладывались (или были представлены) на сессиях Отделения ядерной физики АН СССР, 4 Международном семинаре по нелокальной квантовой теории поля (Алушта, I976), Международных конференциях по физике высоких энергий (Тбилиси, I976, и Брайтон, I983), Международных семинарах по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля (Протвино, I984-87, I989), 3 Международном семинаре по теоретико-групповым методам в физике (Юрмала, I985), Всесоюзном семинаре по теории представлений и групповым методам в физике (Тамбов, I989), I8 Международном коллоквиуме по теоретико-групповым методам в физике (Москва, I990) и опубликованы в I8 работах.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит 2I2 машинописных страниц и состоит из введения, пяти глав основного текста, заключения, трёх приложений и списка цитированной литературы из I78 названий.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дана мотивировка проведённых в диссертации исследований, обоснована их актуальность и ценность и описано содержание всех глав диссертации.

Первая глава посвящена рассмотрению калибровочной спонтанно нарушенной группы расширенной суперсимметрии и исследованию эффекта Хиггса для голдстоуновских фермионов со спином I/2.

В § I напоминаются сведения о нелинейной реализации спонтанно нарушенной группы

$$G(a, b) = K(a)\, H(b),$$

применяемой для описания голдстоуновских полей $A^i(x)$, сопоставляемых параметрам a^i левого смежного класса K группы G по подгруппе инвариантности вакуума H. Преобразование голдстоуновских полей группой G, описывающей инвариантность исходного лагранжиана, приводящего к вырождению вакуума, определяется левыми сдвигами $G(a', b') = G(g)\, G(a, b)$. В случае групп, включающих подгруппой группу Пуанкаре, группа Лоренца относится к H, а пространственные трансляции включаются в K. Инвариантное действие строится на основе инвариантных форм Картана, входящих коэффициентами в разложении по генераторам группы $X_i \in K$, $Y_\alpha \in H$ инвариантна

$$G^{-1}(a,b)dG(a,b)=\bar{\omega}^i(a,b,da)X_i+\bar{\theta}^\alpha(a,b,da,db)Y_\alpha \quad (I)$$

Формы $\omega^i(a,da)=\bar{\omega}^i(a,0,da)$ служат ковариантными производными голдстоуновских полей, а $\theta^\alpha(a,da)=\bar{\theta}^\alpha(a,0,da,0)$ входят в ковариантные производные $D\varphi=d\varphi+\theta^\alpha T_\alpha\varphi$ неголдстоуновских полей φ (T_α – генераторы H в представлении полей φ). Действие строится из преобразующихся группой G по линейным представлениям H величин ω^i, φ и $D\varphi$ в виде инвариантных относительно H однородных степени единица функций от внешних произведений четвёртой степени по дифференциалам.

В § 2 формы Картана обобщены на калибровочные спонтанно нарушенные группы. При этом вместо (I) берётся калибровочный инвариант

$$G^{-1}dG+fG^{-1}A(d)G=\bar{\omega}^iX_i+\bar{\theta}^\alpha Y_\alpha\,, \quad (2)$$

содержащий неоднородно преобразующиеся

$$A'(d)=G_LA(d)G_L^{-1}+f^{-1}G_LdG_L^{-1}$$

при калибровочных преобразованиях $G'=G_LG$ калибровочные формы

$$A(d)=A^i(d)X_i+A^\alpha(d)Y_\alpha \quad (3)$$

Формы ω^i и θ^α в (2), имея тот же что и в § I смысл, содержат вклад калибровочных форм. Действие голдстоуновских, калибровочных и неголдстоуновских полей строится из преобразующихся при калибровочных преобразованиях группы G по линейному представлению H величин ω^i, φ, $D\varphi$ и входящих в кинетические члены калибровочных полей 2-форм

$$D(d)\omega^i(\delta)X_i=d\omega(\delta)+[\theta(d),\omega(\delta)]\,, \quad (4а)$$

$$R^\alpha(d,\delta)Y_\alpha=d\wedge\theta(\delta)+[\theta(d),\theta(\delta)] \quad (4б)$$

по описанному в § I рецепту.

В § 3 вышеописанные методы применяются для рассмотрения калибровочной спонтанно нарушенной группы расширенной суперсимметрии, у которой произведение групп Лоренца и внутренней симметрии принято в качестве подгруппы инвариантности вакуума. В соответствии с (3) вводятся калибровочные формы для гравитационного поля со спином 2 $W^\mu(d)$, мультиплета по внутренней группе его суперпартнёров со спином 3/2 $\Phi_a^\alpha(d)$, $\Phi^{a\dot\alpha}(d)$, полей Янга-Миллса $V^A(d)$ и спиновой связности $\Omega^{\mu\nu}(d)$, отвечающие генераторам импульса P_μ, суперсдвигов Δ_α^a, $\Delta_{a\dot\alpha}$, внутренней симметрии I_A и момента $I_{\mu\nu}$, соответственно. Находятся соответствующие этим генераторам обобщённые формы Картана (2) $\bar{\omega}^\mu(d)$, $\bar{\omega}_a^\alpha(d)$, $\bar{\omega}^{a\dot\alpha}(d)$, $\bar{V}^A(d)$ и $\bar{\Omega}^{\mu\nu}(d)$, а также 2-формы (4а) $D\omega_a^\alpha(\delta)$, $D\omega^{a\dot\alpha}(\delta)$ и (4б) $F^A(d,\delta)$, $R^{\mu\nu}(d,\delta)$, из которых строится действие, состоящее из следующих инвариантных слагаемых

$$i\,\omega_\alpha{}^{\dot\beta}\wedge\omega_{\dot\beta}{}^\gamma\wedge\omega_\gamma{}^{\dot\delta}\wedge\omega_{\dot\delta}{}^\alpha\,, \quad (5а)$$

$$D\wedge\omega_a^\alpha\wedge\omega_{\alpha\dot\beta}\wedge\omega^{a\dot\beta}+h.c.\,, \quad (5б)$$

$$i\,\omega_a{}^\alpha\wedge\omega_{\alpha\dot\beta}\wedge\omega^{\dot\beta\gamma}\wedge\omega_\gamma{}^a+h.c.\,, \quad (5в)$$

$$i\,R_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\wedge\omega_{\dot\beta\gamma}\wedge\omega^{\gamma\dot\alpha}+h.c.\,, \quad (5г)$$

$$[F^A\wedge\omega_\alpha{}^{\dot\alpha}\wedge\omega_\beta{}^{\dot\beta}][F_A\wedge\omega_{\dot\alpha}{}^\alpha\wedge\omega_{\dot\beta}{}^\beta]\times \quad (5д)$$

$$\times[i\,\omega_\gamma{}^{\dot\gamma}\wedge\omega_{\dot\gamma}{}^\delta\wedge\omega_\delta{}^{\dot\delta}\wedge\omega_{\dot\delta}{}^\gamma]^{-1}\,,$$

входящих с произвольными постоянными и описывающих взаимодействие голдстоуновских полей $\Psi(x)$ со спином I/2 с вышеуказанными калибровочными полями. В (5) величины записаны в спинорном представлении.

В § 4 рассмотрен эффект Хиггса для голдстоуновских полей со спином I/2. Показана адекватность его описания языком обобщённых форм Картана, поскольку в калибровке, в которой устраняются несущественные голдстоуновские поля Ψ, калибровочные формы равны формам Картана, зависящим от Ψ. В данном случае переходом к калибровочным формам

$$\Phi'_a{}^\alpha(d)=f^{-1}\omega_a{}^\alpha(d)\,,\qquad \Phi'^{a\dot\alpha}(d)=f^{-1}\omega^{a\dot\alpha}(d)\,,$$

$$W'^\mu(d)=f^{-1}\omega^\mu(d)$$

вся зависимость от $\Psi(x)$ устраняется, что соответствует супер-Хиггс эффекту, в результате которого действие (5) эффективно содержит взаимодействующие друг с другом гравитационное поле с космологическим членом, массивные поля со спином 3/2 и поля Янга-Миллса со спином I. В отличие от эффекта Хиггса для спонтанно нарушенных внутренних групп массовый член калибровочных полей спина 3/2 возник не за счёт инварианта (5а), содержащего кинетический член им соответствующих голдстоуновских полей, который перешёл в космологический член, а за счёт инварианта (5в), являющегося в отсутствие калибровочных полей полной производной. В конце на основе спонтанного нарушения внутренней группы показана возможность включения в полученную теорию модели электрослабого взаимодействия.

Во второй главе получен линеаризованный вариант N = I супергравитации с новым минимальным набором вспомогательных полей. Рассмотрение проведено в суперполевом общековариантном подходе к теории N = I супергравитации, формулируемом в 8-мерном вещественном суперпространстве $R_{4,4}$ с координатами $z^a=(x^\mu, \psi^\alpha, \psi^{\dot\alpha})$ (x^μ – пространственно-временные, а ψ^α – спинорные грассмановы координаты)

Во вводном § I изложены основные понятия дифференциальной геометрии суперпространства, такие как: формы репера $\omega^A(d)$ и связности $\Gamma_B{}^A(d)$, ковариантная производная, тензоры кручения $S_{CB}{}^A$ и кривизны $R_{DC,B}{}^A$, а также связывающие их структурные уравнения Картана для суперпространства

$$d\wedge\omega^A-\omega^B\wedge\Gamma_B{}^A=-\frac{1}{2}\,\omega^B\wedge\omega^C S_{CB}{}^A,$$

$$d\wedge\Gamma_B{}^A-\Gamma_B{}^C\wedge\Gamma_C{}^A=-\frac{1}{2}\,\omega^C\wedge\omega^D R_{DC,B}{}^A.$$

Описывается роль определяемой тензорами кручения и кривизны группы голономии при рассмотрении геометрии суперпространства и влияние её выбора на физическое содержание общековариантной теории. Отмечено, что соответствующая как теории Эйнштейна, так и обычным суперсимметричным моделям группа Лоренца, взятая в качестве однородной группы голономии суперпространства, приводит к соотношениям на формы связности

$$\Gamma_{AB}(d)+(-1)^{AB}\Gamma_{BA}(d)=0$$

$$\Gamma_{\mu\nu}(d)=(6_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta\,\Gamma_\beta{}^\alpha(d)+(6_{\mu\nu})_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\,\Gamma_{\dot\beta}{}^{\dot\alpha}(d),$$

где $6_{\mu\nu}$ – антисимметризованное произведение двух релятивистских 6_μ – матриц Паули.

В § 2 рассмотрено линейное приближение слабых суперполей относительно глобально суперсимметричного суперпространства, обладающего отличными от нуля постоянными векторными компонентами кручения $\overset{\circ}{S}_{\alpha\dot\beta}{}^\mu=2ia\,6_{\alpha\dot\beta}{}^\mu$.

Введены две калибровочные группы, имеющие место в реперном формализме общековариантной теории: а) группа общековариантных преобразований координат $z^{a'}=f^{a'}(z)$ вещественного суперпространства и б) группа преобразований репера $\omega^{A'}(d)=\omega^B(d)L_B{}^{A'}(z)$, – и даны преобразования относительно этих групп суперполей линейного приближения.

В § 3 рассмотрено инвариантное относительно вышеуказанных калибровочных групп действие общековариантной теории в $R_{4,4}$

$$\int\mathcal{L}(R,S)\,s\det\omega_a{}^A\,d^8z^a$$

(где $\omega_a{}^A$ – матрица тетрады $\omega^A=dz^a\omega_a{}^A$) с лагранжианом $\mathcal{L}$, квадратичным по векторному кручению

$$\mathcal{L}\sim T_\nu{}^\mu T_\mu{}^\nu-T_\mu{}^\mu T_\nu{}^\nu$$

и с дополнительными ковариантными калибровочными условиями на компоненты кручения

$$S_{AB}{}^\alpha=S_{\alpha\beta}{}^\mu=S_{\nu\rho}{}^\mu=S_{\mu\alpha}{}^\mu=S_{\nu\alpha}{}^\mu 6_\mu{}^{\alpha\dot\beta}=0$$

где $T_\nu{}^\mu=6_\nu{}^{\alpha\dot\beta}(S_{\alpha\dot\beta}{}^\mu-2ia\,6_{\alpha\dot\beta}{}^\mu)$. Показано, что этот лагранжиан в линейном приближении слабых полей в пренебрежении взаимодействием содержит гравитационное поле в своём линейном варианте, его вещественный суперпартнёр со спином 3/2 (гравитино) и набор (названный позже новым минимальным) вспомогательных полей, состоящий из аксиального вектора $C_\mu(x)$ и антисимметричного тензора $a_{[\mu\nu]}(x)$.

В третьей главе исследуются представления группы $USp(N)$-расширенной суперсимметрии с центральными зарядами z_1 и z_2, перестановочные соотношения которой для генераторов суперсдвигов S_α^I (α – биспинорный, I – внутренний индексы) между собой и с генераторами момента $M_{\mu\nu}$ и внутренней $USp(N)$ – симметрии I_{IK} имеют вид

$$\{S_\alpha^I,\bar S_K^\beta\}=\delta_K^I(\gamma\cdot P+z_1+i\gamma_5 z_2)_\alpha{}^\beta, \quad (6а)$$

$$[M_{\mu\nu}, S^I_\alpha] = i(\sigma_{\mu\nu} S^I)_\alpha, \quad [I^{IK}, S^L_\alpha] = 2i S^{(I}_\alpha \Omega^{K)L}, \qquad (6б,в)$$

(Ω^{KL} – антисимметричная метрика $USp(N)$– группы, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$)

В § I построены операторы Казимира рассматриваемой супергруппы, содержащие помимо квадрата импульса P^2 и центральных зарядов квадрат вектора **суперспина** Y^μ, являющегося суперобобщением вектора Паули-Любанского, и суперсимметризованные операторы Казимира $C_p = T_{I_1}{}^{I_2} \ldots T_{I_p}{}^{I_1}$ внутренней $USp(N)$ – группы, составленные из суперобобщений $T_I{}^K = \Omega^{KL} T_{IL}$ её генераторов I_{IK}. Рассмотрение проведено для двух серий неприводимых массивных представлений, у которых значение P^2 удовлетворяет соответственно соотношениям $P^2 \neq z^2 = z_1^2 + z_2^2$ и $P^2 = z^2$. Показано, что спектр собственных значений операторов $(Y)^2$ и C_p одинаков для обеих серий, тогда как структура малой группы импульса меняется при переходе от первой ко второй за счёт уменьшения вдвое ранга матрицы в правой части (6а), вследствие чего уменьшается размерность неприводимых представлений с $P^2 = z^2$ по сравнению со случаем $P^2 \neq z^2$.

В § 2 для случая $N = 2$ ($USp(2) \simeq SU(2)$) найдена спин-изоспиновая (s, i) структура серии неприводимых представлений малой размерности с $P^2 = z^2$

$$(y, t+\tfrac{1}{2}) \oplus (y, t-\tfrac{1}{2}) \oplus (y+\tfrac{1}{2}, t) \oplus (y-\tfrac{1}{2}, t),$$

характеризуемых значениями суперспина y и суперизоспина t. Показано, что в этой серии представлений гипермультиплет Фае-Сониуса со структурой (I/2, 0) ⊕ (0, I/2) ($y = t = 0$) является простейшим. Указаны представляющие интерес для вариантов $N = 2$ расширенных теорий супергравитации и супер-Янга-Миллса представления этой серии с $y = 3/2$, $t = 0$ и $y = I/2$, $t = 0$, соответственно.

<u>В четвёртой главе</u> рассмотрены классические системы с нечётной скобкой Пуассона.

В § I приведены необходимые свойства чётных и нечётных скобок Пуассона

$$\{A, B\}_0 = A(\overleftarrow{\partial}_{q^a} \overrightarrow{\partial}_{p_a} - \overleftarrow{\partial}_{p_a} \overrightarrow{\partial}_{q^a} - i \overleftarrow{\partial}_{\theta^\alpha} \overrightarrow{\partial}_{\theta^\alpha}) B, \qquad (7а)$$

$$\{A, B\}_1 = A(\overleftarrow{\partial}_{y_i} \overrightarrow{\partial}_{\eta^i} - \overleftarrow{\partial}_{\eta^i} \overrightarrow{\partial}_{y_i}) B = A \overleftarrow{\partial}_M \omega^{MN} \overrightarrow{\partial}_N B, \qquad (7б)$$

определённых на фазовом суперпространстве X^M с чётными $y_i = (q^a, p_a)$ и нечётными $\eta^i = (\theta^\alpha)$ действительными координатами.

В § 2 на примере имеющей две чётные q, p и две нечётные θ^1, θ^2 фазовые координаты классической суперсимметричной механики Виттена, у которой гамильтониан H, суперзаряды Q_1, Q_2 и фермионный заряд F

$$H = \frac{p^2 + W^2(q)}{2} + i\theta^1\theta^2 W'(q), \qquad F = i\theta^1\theta^2,$$

$$Q_1 = p\theta^1 - W\theta^2, \qquad Q_2 = p\theta^2 + W\theta^1$$

удовлетворяют в чётной скобке супералгебре

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}_0 = -2i\delta_{\alpha\beta} H, \quad \{F, Q_\alpha\}_0 = \varepsilon_{\alpha\beta} Q_\beta \qquad (8а,б)$$

доказывается существование систем, гамильтоновы уравнения которых, полученные обычным образом на основе чётной скобки с помощью грассманово чётного гамильтониана H, воспроизводятся в нечётной скобке (7б) посредством эквивалентного нечётного гамильтониана $\bar{H}$, т.е.

$$\frac{dx^M}{dt} = \{x^M, H\}_0 = \{x^M, \bar{H}\}_1 \qquad (9)$$

При этом найденные из (9) нечётный гамильтониан $\bar{H}$ и коэффициенты нечётной формы Лиувилля $\bar{\mathcal{A}}(d) = dx^M \bar{\mathcal{A}}_M$, соответствующей нечётной скобке (7б), (9)

$$\bar{\omega}_{MN} = \partial_M \bar{\mathcal{A}}_N - (-1)^{g(M)g(N)} \partial_N \bar{\mathcal{A}}_M, \qquad \bar{\omega}_{MN} \bar{\omega}^{NL} = \delta_M^L$$

выражаются через шесть произвольных функций f, g, k, ℓ, m, n, зависящих от H, и интеграл $\mathcal{J}$, связанный с собственным временем t

$$\bar{H} = fQ_1 - gQ_2, \qquad \mathcal{J} = \int_{q_0}^{q} [2H - W^2(q')]^{-3/2} dq', \qquad (10а,б)$$

$$\bar{\mathcal{A}}_q = \left[\frac{f}{p} + (\ell - f\mathcal{J})\left(\frac{W^2}{2}\right)'\right] Q_1 - \left[\frac{g}{p} + (k - g\mathcal{J})\left(\frac{W^2}{2}\right)'\right] Q_2, \qquad (10в)$$

$$\bar{\mathcal{A}}_p = [(\ell - f\mathcal{J})Q_1 - (k - g\mathcal{J})Q_2]\, p \qquad (10г)$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{\theta^1} = F\left\{[m - (\ell - f\mathcal{J})W']\, p - [n - (k - g\mathcal{J})W']\, W + \frac{g}{p}\right\}, \qquad (10д)$$

$$\mathcal{A}_{\Theta^2} = F\{-[m-(\ell-f\gamma)W']W - [n-(k-g\gamma)W']p + \frac{f}{p}\}. \qquad (10e)$$

В § 3 установлена дуальность между чётными и нечётными интегралами движения механики Виттена при переходе от чётной к нечётной скобке, которая заключается в том, что величины $\bar{H}$ (10a) и

$$\bar{Q}_1 = \frac{2ir(b+c)}{a}F - (s+ir)H, \quad \bar{F} = \pm\frac{ia}{2c}(gQ_1 + fQ_2) + d\bar{H},$$

$$\bar{Q}_2 = \pm\left[\frac{2is(b+c)}{a}F + (r-is)H\right]$$

(где постоянные a, b, c, d, r, s связаны соотношением $(r^2+s^2)(b+c)=a^2$) удовлетворяют в найденной нечётной скобке супералгебре, совпадающей с (8).

В § 4 результат об эквивалентном описании гамильтоновых уравнений скобками разной чётности (9) обобщён на системы с произвольным равным числом пар n чётных x^m и нечётных x^μ вещественных канонических переменных. Искомые $\bar{H}$ и $\mathcal{A}$, удовлетворяющие уравнениям (9), выражаются через произвольные функции $\bar{a}_M$ и $\bar{\chi}$, зависящие от канонических относительно чётной скобки (7a) интегралов движения соответственно чётных $H, I_1, \ldots, I_{2(n-1)}$ и нечётных $\Theta^1, \ldots, \Theta^{2n}$ и времени t, в виде

$$\mathcal{A}_M = \bar{a}_M(H, I; \Theta) + \partial_M \bar{\chi}(t, H, I; \Theta), \qquad (11)$$

$$\bar{H} = \bar{a}_t(H, I; \Theta), \quad \Theta^\mu \bar{a}_\mu(H, I; \Theta) = 0.$$

Попутно приведённое решение аналогичной проблемы нахождения грассманово чётных пар гамильтониан-скобка, воспроизводящих одинаковые уравнения движения, имеет подобную (11) структуру с тем отличием, что грассманово нечётные величины $\mathcal{A}$, $\bar{\chi}$ и $\bar{H}$ в (11) следует заменить на чётные.

В § 5 показано, что гамильтоновы уравнения суперсимметричных систем (8a) являются следствием более сильных, играющих роль корня квадратного из них уравнений движения

$$iD_\alpha x^M = \{Q_\alpha, x^M\}_0$$

формулируемых на основе чётной скобки с помощью суперзаряда Q_α

и ему соответствующей нечётной производной

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \eta^\alpha} + i\eta^\alpha \frac{\partial}{\partial t},$$

где $\eta^\alpha = Q_\alpha/2H$ – суперпартнёры времени t. Благодаря вышеустановленной дуальности подобные уравнения с помощью чётного суперзаряда $\bar{Q}_\alpha$ возможно постулировать и в нечётной скобке

$$iD_\alpha x^M = \{\bar{Q}_\alpha, x^M\}_1.$$

<u>Пятая глава</u> посвящена системам с квантовой нечётной скобкой. Дан рецепт квантования скобок произвольной чётности ϵ ($\epsilon = 0, 1$ соответственно для чётной и нечётной скобок), состоящий в разделении канонических переменных на две группы, каждая из которых не содержит канонически сопряжённых пар, и в разбиении функций от канонических переменных на классы $\overset{\epsilon}{O}_k$ и $\overset{\epsilon}{E}_k$, зависящие соответственно от нечётных $2k+1$ и чётных $2k$ степеней переменных из первой группы. Далее вводятся квантовая градуировка каждой величины (функции) A

$$q_\epsilon(A) = \left(g(A) + \epsilon \ \text{ для } A \in \overset{\epsilon}{O}_k; \ g(A) \ \text{ для } A \in \overset{\epsilon}{E}_k\right)$$

и квантовое умножение $\underset{\epsilon}{*}$, зависящее от принадлежности сомножителей упомянутым классам $O', O'' \in \overset{\epsilon}{O}$, $E', E'' \in \overset{\epsilon}{E}$,

$$O' \underset{\epsilon}{*} O'' = \{O', O''\}_\epsilon, \quad O' \underset{\epsilon}{*} E' = \{O', E'\}_\epsilon, \quad E' \underset{\epsilon}{*} E'' = E'E'',$$

с помощью которых для величин A, B определяется квантовая скобка ((анти)коммутатор) при её действии на волновую функцию $\Psi \in \overset{\epsilon}{E}$

$$[A, B]_\epsilon \underset{\epsilon}{*} \Psi = A \underset{\epsilon}{*} (B \underset{\epsilon}{*} \Psi) - (-1)^{q_\epsilon(A) q_\epsilon(B)} B \underset{\epsilon}{*} (A \underset{\epsilon}{*} \Psi). \qquad (12)$$

Показано, что квантовая скобка при $A \in \overset{\epsilon}{O}$ связана с соответствующей классической скобкой

$$[A, B]_\epsilon \underset{\epsilon}{*} \Psi = \{A, B\}_\epsilon \underset{\epsilon}{*} \Psi = (A \underset{\epsilon}{*} B) \underset{\epsilon}{*} \Psi.$$

В § 1 найдены два оказавшихся (в отличие от случая чётных скобок) неэквивалентными представления квантовой нечётной скобки E и $\bar{E}$, у которых к первой группе отнесены соответственно все грассманово чётные y_i или нечётные η^i канонические переменные.

Перестановочные соотношения квантовой нечётной скобки для канонических величин y_i, η^i представлены в E – представлении антикоммутаторами, а в $\bar{E}$ – представлении коммутаторами, а сами канонические величины имеют в этих представлениях различный физический смысл.

В § 2 построено представление суперсимметричной квантовой механики Виттена в терминах двух канонических величин y, η с использованием квантовых представлений нечётной скобки E и $\bar{E}$, в которых результаты им соответствующих квантовых умножений $\overset{*}{1}$ и $\overset{\circ}{1}$ величин y, η на волновую функцию $\Psi = a(y^2) + \eta b(y^2)$ совпадают соответственно с умножением σ – матриц Паули на волновую функцию, представленную как $\Psi = \binom{a}{b}$, или с координатным представлением обычной квантовой скобки Пуассона для координаты $y = q$ и импульса $i\eta = -i\partial_y = P$. При этом в частности суперзаряды имеют вид

$$Q_+ = iy \overset{*}{1} [(\eta - W(y)) \overset{\circ}{1} \Psi], \quad Q_- = i\eta \overset{*}{1} [(\eta + W(y)) \overset{\circ}{1} \Psi]$$

В § 3 с использованием одного E – представления для квантовой нечётной скобки построено другое представление квантовой механики Виттена, в котором координата и импульс

$$q = \ell \ln cy, \quad P \overset{*}{1} \Psi = \frac{i\hbar}{\ell}[(y\eta) \overset{*}{1} \Psi - \eta \overset{*}{1} (y \overset{*}{1} \Psi)]$$

имеют относительно канонических переменных y, η составную структуру (ℓ и C – размерные константы), которая обеспечивает правильный спектр значений координаты $-\infty \leq q \leq \infty$ и воспроизводит на составном уровне в квантовой нечётной скобке правила обычного канонического квантования для координаты и импульса

$$[P, q\}_1 \overset{*}{1} \Psi = -i\hbar \Psi$$

В § 4 E – представление используется для построения модели составной спинорной структуры пространства-времени на примере суперпространств групп $OSp(N,2k)$ $(k=1,2)$. Из наделённых спинорными свойствами вещественных канонических переменных $y_{\alpha i}$, $\eta^{\alpha i}$, названных компонентами суперспинора (α и i – индексы соответственно пространственно-временной $Sp(2k) \simeq O(k,k+1)$ и внутренней $SO(N)$ – групп) построены генераторы суперсдвигов $Q_{\alpha i}$, пространственной $L_{\alpha\beta}$ и внутренней I_{ik} симметрий $OSp(N,2k)$–группы

$$Q_{\alpha i} = y_{\alpha i} - i\varkappa(\bar{\eta}_i y_k)\eta^k_\alpha, \qquad (13)$$
$$L_{\alpha\beta} = -2i y_{i(\alpha}\eta_{\beta)}^i, \quad I_{ik} = -2i\bar{y}_{[i}\eta_{k]}$$

и координаты суперпространства $\theta^{\alpha i} = \eta^{\alpha i}$ и $X^\mu = V^\mu / \varkappa V^5$ с

$$V^A = \begin{cases} (\bar{\tilde{y}}_i \Gamma^A \tilde{y}_k) g^{ik} & (\text{для } k = 1) \\ (\bar{\tilde{y}}_i \Gamma^A \tilde{y}_k)(\bar{\tilde{y}}^i \tilde{y}^k) & (\text{для } k = 2) \end{cases}$$

где $\varkappa$ – обратный радиус кривизны пространств де-Ситтера, $\tilde{y}_{\alpha i}$ – линейная по $y_{\alpha i}$ величина, преобразующаяся относительно суперсдвигов по представлению, индуцируемому четной подгруппой $SO(N) \otimes Sp(2k, R)$ группы $OSp(N, 2k)$

$$\delta\tilde{y}_{\alpha i} = \{(\bar{a}Q), \tilde{y}_{\alpha i}\}_1 = i(\lambda_{\alpha\beta}\tilde{y}^\beta_i + \lambda_{ik}\tilde{y}^k_\alpha),$$

а симметричная $\lambda_{\alpha\beta}$ и антисимметричная λ_{ik} матрицы отвечают инфинитеземальным преобразованиям групп $Sp(2k, R)$ и $SO(N)$, соответственно. Показано, что для построения невырожденных с надлежащей сигнатурой координат X^μ необходимо вместо компактных $SO(N)$ использовать некомпактные $SO(n,m)$ $(n+m=N)$ внутренние группы, а структура составных координат и описывающих их симметрию величин (13) обеспечивает выполнение в квантовой нечётной скобке (12) правил канонического квантования для них. Отмечено ограничение составной спинорной структуры 4-мерного пространства-времени на число суперзарядов $N = 8$, совпадающее с ограничением из максимально расширенной супергравитации.

В § 5 во избежание дополнительной процедуры контракции при переходе от $OSp(N,2k)$ – группы к более физическим группам Пуанкаре, построение составных со спинорной структурой координат проведено непосредственно для последних с использованием одного вещественного суперспинора с компонентами y_α, η^α в E – представлении. При этом условия самосогласованности такого построения генераторов импульса P_A, момента M_{AB} и координат X^A группы Пуанкаре в d – мерном пространстве

$$P_A = \bar{\eta}\Gamma_A P_+ y, \quad M_{AB} = \frac{1}{2}\bar{\eta}\Sigma_{AB} y, \quad X^A = \frac{\bar{y}\Gamma^A y}{2\bar{y}P_+ y},$$

где $P_+ = \frac{1}{2}(1+\Gamma_{d+1})$, $\Sigma_{AB} = \frac{1}{2}[\Gamma_A, \Gamma_B]$, а Γ_{d+1} – произведение всех Γ_A – матриц Дирака , приводят в простейших случаях пространств малой размерности к 8-мерным пространствам с сигнатурой метрики (4,4) и (8,0). Редукция первого из них к 4-мерному физическому пространству сигнатуры (3,I) опять приводит к некомпактным внутренним группам.

В § 6 рассмотрено квантование классических систем с нечётной скобкой на примере одномерного суперсимметричного осциллятора ($W(q)=q$), допускающего эквивалентное описание динамики (9) скобками различной чётности

$$\{A,B\}_0 = iA\left(\overleftarrow{\partial}_{\bar z}\overrightarrow{\partial}_z - \overleftarrow{\partial}_z\overrightarrow{\partial}_{\bar z} - \overleftarrow{\partial}_{\bar\eta}\overrightarrow{\partial}_\eta - \overleftarrow{\partial}_\eta\overrightarrow{\partial}_{\bar\eta}\right)B, \qquad \text{(I4а)}$$

$$\{A,B\}_1 = iA\left(\overleftarrow{\partial}_{\bar z}\overrightarrow{\partial}_\eta - \overleftarrow{\partial}_\eta\overrightarrow{\partial}_{\bar z} + \overleftarrow{\partial}_{\bar\eta}\overrightarrow{\partial}_z - \overleftarrow{\partial}_z\overrightarrow{\partial}_{\bar\eta}\right)B \qquad \text{(I4б)}$$

с помощью соответствующих чётного и нечётного гамильтонианов

$$H = z\bar z + \bar\eta\eta, \qquad \bar H = Q_1 = \bar z\eta + z\bar\eta, \qquad \text{(I5а,б)}$$

записанных в комплексных грассманово чётных $z = \frac{p-iq}{\sqrt2}$ и нечётных $\eta = \frac{\eta^1 - i\eta^2}{\sqrt2}$ канонических переменных. Для этого построено отличное от E и $\bar E$ квантовое представление нечётной скобки, основанное на общих пригодных для квантования одновременно обеих скобок (I4а,б) классах функций O_K и E_K, у которых первая группа канонических переменных состоит из $\bar z$, $\bar\eta$. Показано, что при таком квантовании классически эквивалентные чётный и нечётный гамильтонианы (I5а,б) с использованием квантовых умножений $\underset{0}{*}$ и $\underset{1}{*}$, отвечающих квантованию чётной и нечётной скобок (I4а,б) соответственно, переходят в квантовые операторы Гамильтона, которые тоже эквивалентны и действие которых на волновую функцию $\Psi(z,\eta)\in E_0$

$$H\underset{0}{*}\Psi = z\underset{0}{*}(\bar z\underset{0}{*}\Psi) - \eta\underset{0}{*}(\bar\eta\underset{0}{*}\Psi),$$

$$\bar H\underset{1}{*}\Psi = z\underset{1}{*}(\bar\eta\underset{1}{*}\Psi) + \eta\underset{1}{*}(\bar z\underset{1}{*}\Psi)$$

сводится к действию гамильтониана супеосциллятора $H = a^+a + b^+b$ выраженному через операторы рождения и уничтожения соответственно бозонов $a^+ = z$, $a = \partial_z$ и фермионов $b^+ = \eta$, $b = \partial_\eta$ в представлении Фока-Баргмана.

<u>В заключении</u> кратко сформулированы основные результаты диссертации, а <u>в приложения</u> вынесены используемые определения и обозначения.

<u>Результаты диссертации опубликованы в работах:</u>

I. Волков Д.В., Сорока В.А. Эффект Хиггса для голдстоуновских частиц со спином I/2. – Письма в ЖЭТФ, I973, т.I8, с.529-532.
2. Волков Д.В., Сорока В.А. Калибровочные поля для группы симметрии со спинорными параметрами. – ТМФ, I974, т. 20, с. 291-298.
3. Акулов В.П., Волков Д.В., Сорока В.А. Об общековариантных теориях калибровочных полей на суперпространстве. – ТМФ, I977, т.3I, с.I2-22.
4. Galperin A.S., Litov L.B., Soroka V.A. Casimir operators of USp(N) supersymmetry with central charges. – J. Phys.G: Nucl. Phys., 1983, v.9, p.133-138.
5. Сорока В.А. О некоторых представлениях группы SU(2)-расширенной суперсимметрии с центральными зарядами. – Письма в ЖЭТФ, I983, т.38, с.35-38.
6. Волков Д.В., Пашнев А.И., Сорока В.А., Ткач В.И. О гамильтоновых системах с четной и нечетной скобками Пуассона и о дуальности их законов сохранения. – Письма в ЖЭТФ, I986, т.44, с.55-57.
7. Волков Д.В., Пашнев А.И., Сорока В.А., Ткач В.И. О гамильтонианах динамических систем со скобками Пуассона различной грассмановой четности. – Проблемы физики высоких энергий и теории поля. – М.: Наука, I988, с.I89-I95.
8. Волков Д.В., Пашнев А.И., Сорока В.А., Ткач В.И. О гамильтоновых динамических системах с четной и нечетной скобками Пуассона. – ТМФ, I989, т.79, с. II7-I26.
9. Soroka V.A. On Hamilton systems with even and odd Poisson brackets. – Lett. Math. Phys., 1989, v.17, p.201-208.
10. Soroka V.A. On square root of supersymmetric Hamilton dynamics. – Problems on high energy physics and field theory. Moscow, Nauka, 1990, p.104-107.
11. Soroka V.A. On square root of Hamilton's equations for supersymmetric systems. – Preprint KFTI 90-6, Moscow-Atominform, 1990.
12. Волков Д.В., Сорока В.А., Ткач В.И. О суперспинорной структуре однородных суперпространств ортосимплектических групп. – Тр. 7 Международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. Протвино: ИФВЭ, I984, т.I, с.48-56.

13. Волков Д.В., Сорока В.А., Ткач В.И. О динамических системах с градуированными скобками Пуассона. - Теоретико-групповые методы в физике.- М.: Наука, 1986, т.I с.175-182.
14. Волков Д.В., Сорока В.А., Ткач В.И. О классических и квантовых гамильтоновых системах с нечетной скобкой Пуассона. - ЯФ, 1986, т.44, с.810-820.
15. Волков Д.В., Сорока В.А., Ткач В.И. О представлении суперсимметричной квантовой механики Виттена на основе квантовой антискобки. - Проблемы физики высоких энергий и теории поля.- М.: Наука, 1987, с.170-174.
16. Волков Д.В., Сорока В.А. О квантовании динамических систем с нечетной скобкой Пуассона. - ЯФ, 1987, т.46, с.110-121.
17. Волков Д.В., Сорока В.А., Ткач В.И. Нечетная скобка Пуассона и спинорная структура пространства-времени. - УФЖ, 1987, т.32, с.1622-1625.
18. Soroka V.A. On quantization of Hamilton's systems based on odd Poisson bracket. - Preprint ITP UWr 785/91, Wroclaw, 1991.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 марта 1993 года.