ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2 - 8487

МАВРОДИЕВ

Страшимир Щерев

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НА ГРУППЕ ЛОРЕНЦА

Специальность 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Дубна, 1974

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединённого института ядерных исследований

Научные руководители:

доктор физико-математических наук В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

кандидат физико-математических наук Р.М. МИР-КАСИМОВ

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук А.Н. ЛЕЗНОВ

кандидат физико-математических наук Л.А. СЛЕПЧЕНКО

Ведущее научно-исследовательское учреждение

Институт математики СО АН СССР

Автореферат разослан

Защита диссертации состоится

на заседании Учёного совета Лаборатории теоретической физики Объединённого института ядерных исследований

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ

Учёный секретарь Совета

Р.А. АСАНОВ

2 - 8487

МАВРОДИЕВ
Страшимир Щерев

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НА ГРУППЕ ЛОРЕНЦА

Специальность 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

(Диссертация написаиа на русском языке)

Релятивистское описание двухчастичной системы - одна из основных проблем теории элементарных частиц.

В квантовой теории поля для изучения этой проблемы в рамках четырехмерного формализма используется уравнение Бете-Солпитера/I/. Однако четырехмерная волновая функция зависит от двух временных аргументов и не допускает вероятностной интерпретации в духе обычной квантовой механики.

До появления ковариантного формализма в теории поля релятивистская проблема частиц исследовалась на основе трехмерного метода Тамма-Данкова/2/. Несмотря на возможность вероятностной трактовки волновой функции и простоту граничных условий, нековариантность уравнений Тамма-Данкова не позволяла рассматривать данный метод как полностью адекватный аппарат для решения релятивистской проблемы двух тел.

Квазипотенциальный подход Логунова-Тавхелидзе/3/к релятивистской проблеме двух тел не только удачно сочетает в себе свойства ковариантности и трехмерности, но и обладает целым рядом преимуществ технического характера. В течение более 10 лет этот метод применяется для исследования широкого круга вопросов: от аналитических свойств амплитуды рассеяния до феноменологического описания различных процессов при высоких энергиях.

На основе гамильтоновой формулировки квантовой теории поля Кадышевским был построен независимый вариант квазипотенциального подхода/4/.Важной особенностью уравнений этого подхода является наличие в них трехмерных кинематических объектов, имеющих релятивистскую природу. Например, интегрирование в уравнениях для амплитуды рассеяния и волновой функции ведётся по трехмерному импульсному пространству Лобачевского. Эти уравнения могут рассматриваться как непосредственные релятивистские обобщения уравнений Липпмана-Швингера и Шредингера. Они даже могут быть записаны в "абсолютном", т.е. не зависящем от выбора геометрии импульсного пространства, виде[5].

Как показало развитие квазипотенциального подхода[6], эффективная волновая функция, удовлетворяющая квазипотенциальному уравнению, не определяется однозначно, что обусловлено неоднозначностью выхода за массовую поверхность.

Можно привести теоретико-групповую интерпретацию некоторых свойств шредингеровских волновых функций, допускающих релятивистское обобщение[7] в смысле абсолютной геометрии[8]. В результате максимально используется релятивистская кинематика, существенно упрощаются формулы и, возможно, их физический смысл.

Нерелятивистская инвариантность (принцип относительности Галилея) означает, что в пространстве волновых функций системы реализуется унитарное представление группы Галилея.

Разложение представления подгруппы трансляций на неприводимые[9] приводит к обычному (нерелятивистскому гармоническому анализу с четырехмерными плоскими волнами. Но, как известно, в квантовой механике этот фурье-анализ связывает координатное и импульсное представления. Таким образом, это разложение служит <u>теоретико-групповым определением</u> импульсного представления.

При разделении переменных на координаты центра и относительные, волновая функция факторизуется на плоскую волну и эффективную волновую функцию, описывающую относительное движение. Эффективная волновая функция преобразуется по единичному представлению группы Галилея (с точностью до вращений).

Группа преобразований сдвигов относительного импульса изо-

морфна группе галилеевских сдвигов, но не является группой инвариантности уравнения Шредингера относительного движения. Разложение ее унитарного представления на неприводимые приводит к гармоническому анализу с трехмерными плоскими волнами и служит <u>теоретико-групповым определением относительной координаты.</u>

С точки зрения принципа соответствия между нерелятивистским и релятивистским случаями естественно определить релятивистскую эффективную волновую функцию в пространстве Лобачевского. Таким свойством обладает, например, волновая функция в квазипотенциальном подходе Кадышевского[5].

Поскольку группа движений пространства Лобачевского есть группа Лоренца, в пространстве эффективных волновых функций можно определить её унитарное представление. Разложение этого представления на неприводимые представления приводит к релятивистскому анализу Фурье и служит теоретико-групповым определением релятивистской относительной координаты.

Диссертация состоит из Введения, четырех глав, заключения и трех приложений.

В первой главе на базе общей теории представлений групп выводятся основные формулы релятивистского анализа Фурье для случая произвольного спина в удобной для физических приложений параметризации[10], а именно:

Пусть $\psi_{\mu}^{(s)}(\underline{p})$ - волновая функция частицы с импульсом $\underline{p}$ $(p_0^2-\underline{p}^2=1)$, спином S и проекцией спина μ. Приводимое унитарное представление группы Лоренца определено равенством

$$T_q\,\psi^{(s)}(\underline{p})=D^{(s)}\big(V(q,p)\big)\,\psi^{(s)}(\underline{p(-)q}),\qquad\text{(I)}$$

где

$$p(-)q \equiv \Lambda_q^{-1} p = \begin{pmatrix} pq \\ \underline{p} - \underline{q}\,\dfrac{p_0 + pq}{1+q_0} \end{pmatrix}.$$

Вигнеровское вращение $V(q,p)$ есть

$$V(q,p) = B_p^{-1} B_q B_{p(-)q} ,$$

где

$$B_p = \frac{1 + \mathcal{L}}{\sqrt{2(1+p_0)}} , \quad \mathcal{L} = p_0 - \underline{p}\cdot\underline{\sigma}\left(\equiv p^{\mu}\sigma_{\mu}\right)$$

и σ_μ – матрицы Паули.

Разложение представления (I) на неприводимые задается формулами

$$\psi_\mu^{(s)}(\underline{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (\nu^2 + r^2)\, dr\, d^2\underline{r}\; \overset{+}{\xi}{}^{(s)}_{\mu\nu}(\underline{p},\underline{r})\, \psi_\nu^{(s)}(\underline{r}),$$

$$\psi_\mu^{(s)}(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \underline{p}}{2p_0}\; \xi^{(s)}_{\mu\nu}(\underline{p},\underline{r})\, \psi_\nu^{(s)}(\underline{p}), \tag{2}$$

где "экспонента" $\xi^{(s)}_{\mu\nu}$ имеет вид

$$\xi^{(s)}_{\mu\nu}(\underline{p},\underline{r}) = \xi^{(0)}(\underline{p},\underline{r})\, D^{(s)}_{\mu\nu}\left(\underline{r(-)p}\right),$$

$$\xi^{(0)}(\underline{p},\underline{r}) = \left(p_0 - \underline{p}\cdot\underline{n}\right)^{-1-ir},$$

функция $D^{(s)}$ – матричный элемент неприводимого унитарного представления веса S группы $S((2)$, $\underline{r(-)p} = r\,\underline{n(-)p}$,

$\underline{n(-)p} = \underline{\Lambda_p^{-1} n}\ (\underline{n}^2 = 1)$. Функции $\psi_\nu^{(s)}(\underline{r})$ преобразуются по

неприводимому представлению $[\nu, r]$

$$T_q^{[\nu,r]}\, \psi_\nu^{(s)}(\underline{r}) = \xi^{(0)}(\underline{p},\underline{r})\, \psi_\nu^{(s)}\left(\underline{r(-)q}\right). \tag{3}$$

Отметим, что преобразования (2) для случая $S = 0$ получили название[5] преобразования Шапиро[II].

В § I главы II приведены важные для дальнейшего теоремы и формулы нерелятивистского анализа Фурье и вскрыт их теоретико-групповой смысл.

В § 2 показано, что релятивистский аналог нерелятивистской плоской волны для случая произвольного спина есть $2S+1$ -мерный столбец[I2]

$$\xi^{S,\nu}(\underline{p},\underline{r}) = \xi^{(s)}(\underline{p},\underline{r})\, \chi^{S,\nu}, \tag{4}$$

где спинор $\chi^{S,\nu}$ является собственной функцией матричного оператора спина

$$\underline{S} = D^{(s)}(\underline{r})\, \underline{L}\, \overset{+}{D}{}^{(s)}(\underline{r})$$

(оператор L – генератор группы $S((2)$). Аналогично нерелятивистскому случаю, плоская волна есть производящая функция для матричных элементов сдвигов, если в качестве базиса выбраны матричные элементы группы вращений

$$\xi^{s,\nu}_\mu(\underline{p},\underline{r}) = \sum_{J=|s|}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} (2J+1)\, d^{[\nu,r]}_{JS\mu}(\chi_p)\, \overset{+}{D}{}^{(J)}_{\mu M}(\underline{p})\, D^{(J)}_{M\nu}(\underline{r}), \tag{5}$$

где χ_p есть быстрота

$$\chi_p = \ln(p_0 + p) = \frac{1}{2} \ln \frac{p_0 + p}{p_0 - p} .$$

В § 3 на основе разложения (5) и соотношений ортогональности и полноты для матричных элементов групп $SL(2,C)$ и $SU(2)$ выведены соотношения ортогональности и полноты для плоских волн

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int(\gamma^2+r^2)\,dr\,d^2\underline{r}\;\overset{+}{\xi}{}^{(s)}_{\mu\nu}(\underline{p},\underline{r})\,\xi^{(s)}_{\nu\sigma}(\underline{q},\underline{r})=\delta_{\mu\sigma}\,\delta(\underline{p(-)q}),$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3}}\int\frac{d^3\underline{p}}{2p_0}\;\xi^{(s)}_{\mu\nu}(\underline{p},\underline{r})\,\overset{+}{\xi}{}^{(s)}_{\nu\sigma}(\underline{p},\underline{r}')=\delta_{\mu\sigma}\frac{r^2}{\mu^2+r^2}\,\delta(\underline{r}-\underline{r}'), \qquad (6)$$

В § 4 получена "теорема сложения" для релятивистских плоских волн

$$\int d^2\underline{r}\;\overset{(+)}{\xi}{}^{(s)}(p,r)\,\xi^{(s)}(\underline{q},\underline{r})=$$

$$=D^{(s)}\big(V(q,p)\big)\int d^2\underline{r}\;\overset{+}{\xi}{}^{(s)}(\underline{p(-)q},\underline{r})\,D^{(s)}(\underline{r}), \qquad (7)$$

т.е., в отличие от нерелятивистского случая, теорема сложения для релятивистских плоских волн имеет место под знаком интеграла. Это связано с тем, что лоренцевские сдвиги, оставляя инвариантным модуль координаты, меняют направление в Γ - пространстве.

В § 5-7 показано, как можно конструктивно доказать аналог теоремы Планшереля, теорему об образах и аналог теоремы Парсеваля.

Глава III посвящена физическим приложениям развитого аппарата.

В § 8 построены оператор гамильтониана и оператор импульса в релятивистском координатном пространстве для свободной частицы с произвольным спином. Получен нерелятивистский предел и показано,

что он совпадает с нерелятивистскими операторами (для оператора импульса - с точностью до вращений).

В § 9 в качестве методического примера исследована связь угловой зависимости волновой функции частицы со спином. Показано, что если спин полуцелый или если при целом спине его проекция не равна нулю, то волновая функция всегда имеет угловую зависимость.

В § 10 показано, что в релятивистском случае аналогом соотношений неопределённостей для импульса и координаты является соотношение неопределённостей для быстроты и релятивистской координаты

$$\Delta x\;\Delta r\geq\frac{1}{2}\frac{\hbar}{mc}.$$

В § 11 показано, что экспоненциально-степенное поведение для дифференциального сечения можно интерпретировать в терминах борновской квазипотенциальной амплитуды рассеяния

$$T(\underline{p},\underline{q})=\int d^3\underline{r}\;\overset{+}{\xi}(\underline{p},\underline{r})\,V(\underline{r};s)\,\xi(\underline{q},\underline{r})$$

как геометрический эффект. Другими словами, если квадрат четырехмерной передачи импульса мал: $t\ll 1$, то имеем обычное трехмерное евклидово пространство относительного импульса и экспоненциальное поведение амплитуды, а при $t\gtrsim 1$ - пространство Лобачевского и соответственно степенное поведение амплитуды

$$T(\underline{p},\underline{q})=\begin{cases}\int d^3\underline{r}\;e^{-i\,\underline{p(-)q}\cdot\underline{r}}\,V(\underline{r};s) & \text{при } t\ll 1,\\ \int d^3\underline{r}\;\overset{+}{\xi}{}^{(0)}(\underline{p(-)q},\underline{r})\,V(\underline{r};s).\end{cases}$$

На геометрическом языке это объясняется тем, что локальная геометрия пространства Лобачевского есть евклидова геометрия.

Подчеркнем, что развитый формализм позволяет встать на феноменологический путь для описания кривых дифференциальных сечений.

В § I2 в предположении, что спиновыми эффектами можно пренебречь, для простого феноменологически выбранного протон-протонного потенциала

$$V(r;s) = \frac{\lambda(s)}{R^2(s) + r^2},$$

где s – квадрат инвариантной энергии, $\lambda(s)$ – комплексная "константа" взаимодействия, $R(s)$ – "радиус" взаимодействия, получена амплитуда упругого рассеяния в виде

$$T(s,t) = \frac{2\pi^2\lambda(s)}{\sqrt{t(1-t/4)}} \begin{cases} \exp\left(-R(s)\sqrt{-t(1-t/4)}\right) & \text{при } t \ll 1 \\ \left(1 - t/2 + \sqrt{-t(1-t/4)}\right)^{-R(s)} \end{cases} \quad (8)$$

Отметим весьма простой вид формулы (8) в терминах переданной быстроты $\chi_t = \ln\left(1 - t/2 + \sqrt{-t(1-t/4)}\right)$

$$T(s,\chi_t) = 2\pi^2\lambda(s)\,\frac{\exp(-R(s)\chi_t)}{\operatorname{sh}\chi_t},$$

Подгонка формулы для дифференциального сечения

$$\frac{d\sigma}{dt}(s,t) = \frac{1}{16\pi s(s-4)}\left|T(s,t)\right|^2$$

при s = 8,I2,I6,26,50,3000 (ГэВ^2) и $.2 \le -t \le 8$ (ГэВ^2) с помощью стандартной программы COMPIL /I4/ (библиотека стандартных программ ОИЯИ) привело к следующей параметризации неизвестных функций $\lambda(s)$ и $R(s)$:

$$\lambda(s) = -1.25 + i s\, 0.87 (\ln s)^{\alpha},$$

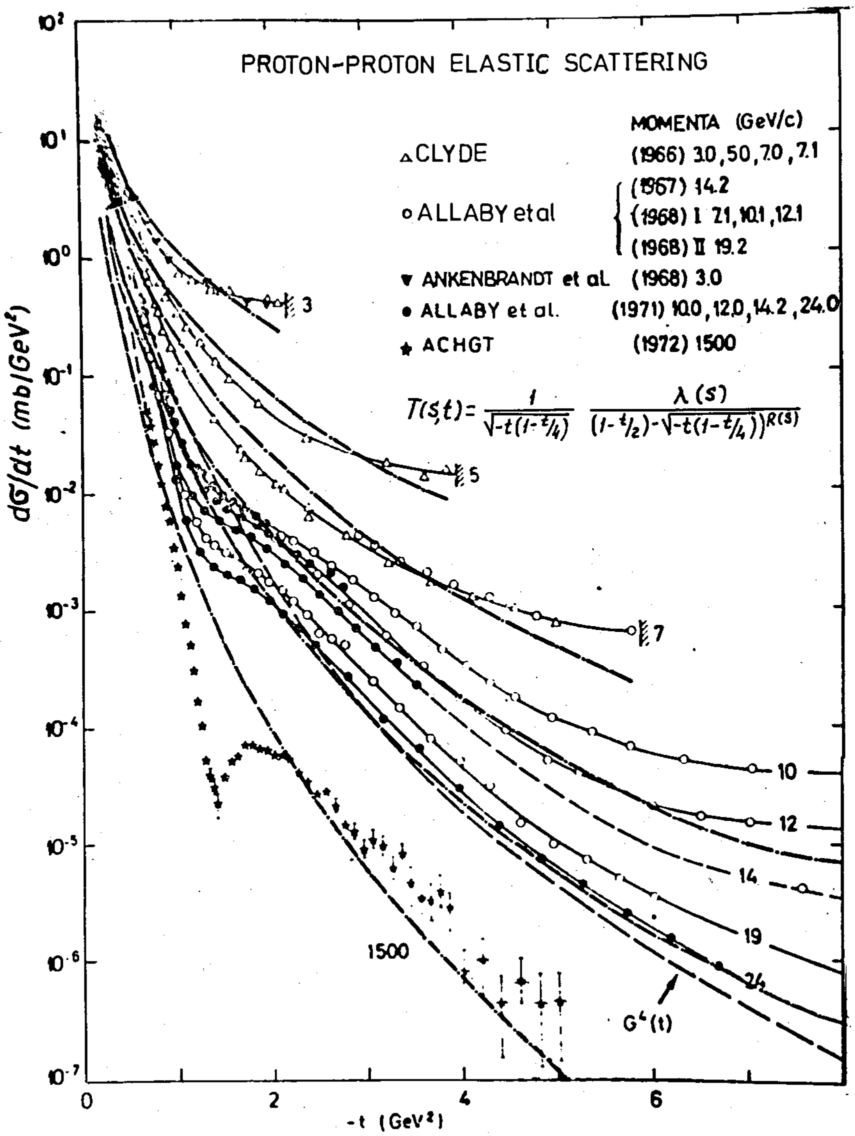
$$R(s) = R_0 (\ln s)^{0.82}\,).$$

где α и R_c даны в таблице I.

Таблица I.

S	8	I2	I6	26	50	3000	все кривые вместе
α	I.34	I.II	I.28	.98	I.22	.82	.97
R_0	.54	.67	.88	.94	I.09	.77	.86

Кривые, воспроизведённые с найденными значениями параметров, начерчены пунктиром и отложены вместе с экспериментальными кривыми /I3/ на следующем рисунке.



Зависимость от энергии "радиуса" взаимодействия, который является аналогом параметра наклона дифракционного пика, показана в таблице 2.

Таблица 2.

s	8	I2	I6	26	50	3000
$R(s)$	.98	I.40	2.03	2.47	3.32	4.33

Сравнение теоретических кривых с экспериментальными показывает, что условие $t_{max}/s \ll 1$ можно рассматривать как релятивистское условие применимости борновского приближения.

Глава IУ посвящена построению лоренц-инвариантного разложения (§ I3) по спиновым структурам амплитуды рассеяния для частиц с произвольным спином /I6,I7/. В § I4 приведены законы дискретных преобразований для инвариантных структур. Полученный аппарат применён в целях иллюстрации) § I5) к случаю пион-нуклонной амплитуды.

В Приложении I сосредоточены некоторые результаты теории представлений группы $SU(2)$. В Приложении II приведен ряд полезных формул и тождества для инвариантных структур. В Приложении Ш систематизированы основные соотношения формализма Дирака и некоторые тождества для спиноров Баргмана-Вигнера.

Результаты, вошедшие в диссертацию, опубликованы в работах /7,I0,I2,I4,I6,I7/ и докладывались на сессиях ОЯФ АН СССР, семинарах Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, Института "Роджер Бошкович (Загреб), Института "Борис Кидрич" (Белград) и ИЯИЯЭ (София).

Литература:

1. E.Salpeter, H.Bethe, Phys.Rev., 84, 1232 (1951).
2. V.A.Fock, Z.Phys.Sowjetunion, 6, 425 (1934).
   I.E.Tamm, J.Phys.USSR, 9, 449 (1945).
   S.M.Dancoff, Phys.Rev., 78, 382 (1950).
3. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, Nuovo Cim., 29, 308 (1963).
4. V.G.Kadyshevsky, Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude, Nucl.Phys., B6, 125 (1968).
   V.G.Kadyshevsky, M.D.Mateev, Nuovo Cim., 55A, 275 (1967).
5. V.G.Kadyshevsky, R.M.Mir-Kasimov, N.B.Skachkov, Nuovo Cim., 55A, 233 (1968).
6. В.Г.Кадышевский, А.Н.Тавхелидзе. Квазипотенциальный метод в релятивистской задаче двух тел. Проблемы теоретической физики. Наука, Москва (1969).
   I.T.Todorov, Quasipotential approach to the two-body problem in Quantum Field Theory, Proceedings of the Int.School of Subnuclear Physics, Ettore Majorana, Erice, Sicily (1971).
   А.А.Логунов, О.А.Хрусталев. К проблеме двух тел в квантовой теории поля. Проблемы теоретической физики.Наука,Москва (1972).
7. S.Cht.Mavrodiev, Some consequences of the Fourier analysis on the Lorentz group for relativistic quantum mechanics, JINR, E2-7910, Dubna (1974).
8. Н.А.Черников. Геометрия Лобачевского и релятивистская механика. ЭЧАЯ, 4, 3 (1973).

9. М.А.Наймарк. Линейные представления группы Лоренца. ГИФМЛ, Москва (1958).
10. S.Cht.Mavrodiev, N.B.Skachkov, Harmonic analysis on the Lorentz group and particles with spin in quasipotential approach, JINR, E2-6646, Dubna (1972).
11. И.С.Шапиро, ДАН СССР, 106, 647 (1956), Phys.Lett.,1,253(1962)
12. S.Cht.Mavrodiev, Harmonic analysis on the Lorentz group and free Hamiltonian for particles of any spin, JINR, E2-7321, Dubna (1973).
13. G.Giacomelli, Total cross sections and elastic scattering at very high energies, Canadian lecture, M.C.Gill University (1973).
    V.Barger, Reaction mechanisms at high energies, Plenary Session Talk at XVII ICHEP, London (1974).
14. S.Cht.Mavrodiev, D.Karadjov, Harmonic analysis on the Lorentz group, quasipotential approach and proton-proton elastic scattering at high energies, JINR, E2- 8488 , Dubna (1974).
15. Л.Александров. Сообщение ОИЯИ, Р2-7259, Дубна (1973).
16. B.L.Aneva, S.Cht.Mavrodiev, L.K.Hadjiiranov, Lorentz invariant expansion of the scattering amplitude for particles of any spin, JINR, E2-7461, Dubna (1973).
17. B.L.Aneva, S.Cht.Mavrodiev, L.K.Hadjiivanov, Fizika, 6, 1, 9-29 (1974).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 декабря 1974 года.