ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2 - 7292

Димитр Стоянов

ФАКТОРИЗАЦИЯ И SL(2,R) - СИММЕТРИЯ ДУАЛЬНЫХ АМПЛИТУД

Специальность 01.04.02 - теоретическая
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Дубна 1973

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:
член-корреспондент АН УССР В.П.Шелест,
доктор физико-математических наук Д.В.Волков,
доктор физико-математических наук Р.М.Мурадян.

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР, г. Москва.

Автореферат разослан " " 1973 года
Защита диссертации состоится " " 1973 года на заседании Ученого совета Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета

Р.А.АСАНОВ

2 - 7292

Димитр Стоянов

ФАКТОРИЗАЦИЯ И SL(2,R) - СИММЕТРИЯ ДУАЛЬНЫХ АМПЛИТУД

Специальность 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

В последнее время при изучении процессов взаимодействия элементарных частиц интенсивно используются дуальные резонансные модели. Понятие о дуальных свойствах амплитуды рассеяния возникло в связи с обоснованием правил сумм при конечных энергиях [1–3]. Как известно, эти правила устанавливают интегральную связь между поведением амплитуды в резонансной области и реджевским асимптотическим поведением. Именно такую связь в случае насыщения правил сумм резонансами стали называть дуальностью [4,5] /или, как сейчас принято говорить, глобальной дуальностью/. В дальнейшем [6] было показано, что свойство дуальности амплитуды рассеяния может иметь не только глобальный, но и локальный характер. Иллюстрацией последнего явилась узкорезонансная дуальная модель, предложенная в работе [7]. Эта модель вначале была применена к вопросам феноменологии, и оказалось, что она с успехом описывает различные факты процессов рассеяния элементарных частиц.

Успехи, достигнутые в феноменологии, с другой стороны, стимулировали и чисто теоретические исследования свойства дуальности и дуальных моделей. Эти исследования охватывают весьма широкий круг вопросов, связанных с унитаризацией, с факторизацией и выявлением групповой структуры, а также с обобщением дуальных моделей. Нетривиальные свойства симметрии, которые были обнаружены в дуальных амплитудах, позволяют предположить, что свойство дуальности является следствием этих симметрий. Поэтому в цикле работ [8–12] была поставлена цель - обосновать и доказать групповой характер свойства дуальности. Эти работы и легли в основу настоящей диссертации.

Первым шагом к достижению намеченной цели является факторизация узкорезонансных дуальных амплитуд. Последняя не только дает возможность проследить возникновение искомой симметрии, но также выявляет наличие многих фактов, непосредственно указывающих на ее существование. С другой стороны, факторизация имеет и самостоятельное значение. На ее основе строится диаграммная техника для дуальных резонансных амплитуд, а также дуальные диаграммы с замкнутыми петлями. Результаты факторизации, кроме того, легли в основу статистического подхода в дуальных моделях /см., например, [13–15].

Первая факторизация дуальных амплитуд была проведена в работах [16,17]. Для этого был применен своеобразный формализм бесконечного набора гармонических осцилляторов с кратными частотами. Такая факторизация привела также к операторному формализму, используемому при построении и исследовании дуальных многочастичных амплитуд. Одним из основных результатов этой факторизации является экспоненциальный рост кратности вырождения резонансов с ростом их массы. Такое чрезмерное нарастание вырождения не может быть приемлемым, тем более, что простой анализ четырехточечной амплитуды показывает, что его нет. Поэтому в работах [8,9] был предложен и развит новый операторный формализм, основанный на конечном числе пятимерных осцилляторов. Получающаяся при этом факторизация показывает, что кратность вырождения уровней резонансов дуальных амплитуд растет степенным образом /см. также работу [18]/. Вопросам формулировки нового операторного формализма и факторизации дуальных амплитуд посвящена первая часть диссертации.

В первом параграфе вводится пятимерный $U(4,1)$-инвариантный осциллятор при помощи пяти операторов рождения и уничтожения a_i^+ и a_i соответственно / i = 0,1, 2,3,4/, с коммутационными соотношениями

$$[a_i, a_k^+] = g_{ik}, \quad [a_i, a_k] = [a_i^+, a_k^+] = 0,$$

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = -1. \qquad /1/$$

Гамильтониан этого осциллятора

$$H = -a_0^+ a_0 + a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2 + a_3^+ a_3 + a_4^+ a_4 \qquad /2/$$

имеет целочисленные положительные собственные значения. Системы из таких осцилляторов в дальнейшем используются при факторизации дуальных амплитуд, и поэтому данный параграф имеет подготовительный характер. Рассмотрены два этапа состояний этого осциллятора: дискретные

$$|\chi_{(n_i)}> \equiv |\chi_{n_0 n_1 n_2 n_3 n_4}> = \prod_{i=0}^{4} \frac{(a_i^+)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0>, \qquad /3/$$

и непрерывные, или, как обычно их называют, когерентные,

$$|z> \equiv |z_{(i)}> \equiv e^{z^i a_i^+} |0>, \qquad /4/$$

где z_i - пять произвольных комплексных чисел. Дискретные состояния /3/ являются собственными состояниями пяти операторов

$$N_i = a_i^+ a_i, \quad i = 0,1,2,3,4, \qquad /5/$$

а когерентные - собственными состояниями операторов уничтожения a_i. Действие гамильтониана /2/ на когерентные состояния определяется согласно формуле

$$x^H |z> = |xz>. \qquad /6/$$

Второй параграф включен в диссертацию с целью конкретного обзора различных математических выражений для дуальных амплитуд.

Поскольку во всей первой части используются явные выражения для этих амплитуд, во 2-ом параграфе описан принцип их построения, а также выписано выражение для мультипериферической $N+2$ -точечной диаграммы в виде, предложенном Бардакчи-Рюегом [19–21]. Для диаграммы на рис. 1 это выражение имеет вид

$$B_{N+2} = \int_0^1 d\phi_{N+2}(p,x), \qquad /7/$$

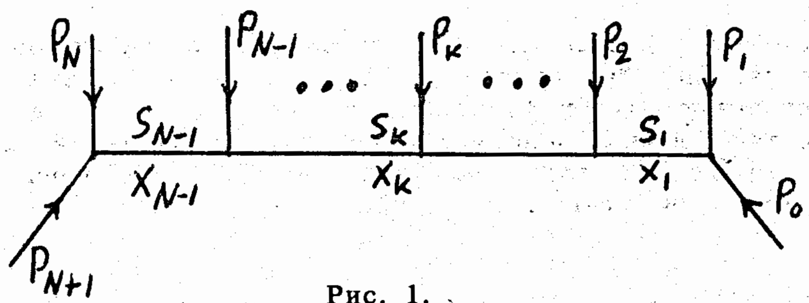

Рис. 1.

где

$$d\phi_{N+2}(p,x) = \prod_{i=1}^{N-1} dx_i\, x_i^{-\alpha(s_i)-1} \prod_{i=1}^{N-1}\prod_{n=i+1}^{N} \Big(1-\prod_{\ell=i}^{n-1} x_\ell\Big)^{-2\alpha' p_n p_i - \rho_{in}},$$

$$\left.\begin{aligned} &\rho_{i\,i+1} = 1+\alpha(0) + \alpha'(p_i^2 + p_{i+1}^2)\\ &\rho_{i\,i+2} = -\alpha(p_{i+1}^2)\\ &\rho_{ik} = 0 \end{aligned}\right\} \quad p_i^2 = p_k^2 = m^2, \qquad /8/$$

/здесь $\alpha(s) = \alpha' s + \alpha(0)$ - линейная траектория Редже/. Вместо переменных x_i часто используют и другие переменные:

$$\sigma_i = \prod_{k=1}^{i} x_k, \quad x_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_{i-1}} \equiv x_i(\sigma). \qquad /9/$$

В этом случае вместо /8/ имеем

$$d\phi_{N+2}(p, x(\sigma)) \equiv d\phi_{N+2}(p,\sigma) =$$

$$= \prod_{i=1}^{N-1} \frac{d\sigma_i}{\sigma_{i-1}} \Big(\frac{\sigma_i}{\sigma_{i-1}}\Big)^{-\alpha(s_i)-1} \prod_{i=1}^{N-1}\prod_{n=i+1}^{N} \Big(1-\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{i-1}}\Big)^{-2\alpha' p_n p_i - \rho_{in}}; \qquad /10/$$

$\sigma_0 \equiv 1.$

Единичный куб, в котором проводилось интегрирование в /7/, превращается в следующую область:

$$1 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_{N-1} \geq 0. \qquad /11/$$

Имея основные выражения для дуальных амплитуд, можно приступить к их факторизации. В третьем параграфе факторизация проводится для простейшего случая дуальной амплитуды упругого рассеяния двух скалярных частиц с одинаковыми массами. В этом случае из равенств /7/ и /8/ для $N=2$ получаем следующее выражение для амплитуды:

$$B_4 \equiv B(-\alpha(s), -\alpha(t)) = \int_0^1 dx\, x^{-\alpha(s)-1}(1-x)^{-\alpha(t)-1},$$

$$s = (p_0+p_1)^2 \quad t = (p_1+p_2)^2. \qquad /12/$$

Как известно, B-функция Эйлера является мероморфной функцией и разлагается в ряд по своим полюсам. Общий член ряда имеет вид

$$\frac{(-1)}{n!}\,\frac{\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(t)-n)}\,\frac{1}{n-\alpha(s)}. \qquad /13/$$

Последнее выражение показывает, что амплитуда /12/ на самом деле является суммой полюсных диаграмм, изображенных на рис. 2.

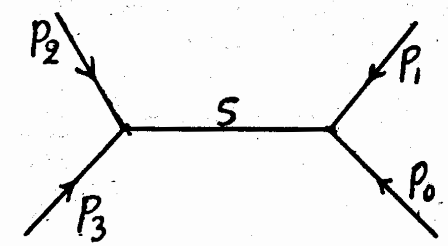

Рис. 2

Факторизация вычета выражения /13/ означает выполнение следующего равенства:

$$\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(t)-n)} = \sum_{(k)} C_{(k)} \Psi^{+}_{n,(k)}(-p_2)\Psi_{n,(k)}(p_1). \qquad /14/$$

Если воспользоваться аналогией с обычной теорией для амплитуды рассеяния, следует принять, что $\Psi_{n,(k)}(p)$ являются волновыми функциями /квазипотенциального типа/ двухчастичного резонанса с массой $M_n^2 = \frac{n-\alpha(0)}{\alpha'}$ /т.е. $\alpha(M_n^2)=n$/, /, а $C_{(k)}$ - квадратом некоторых констант взаимодействия. Совокупность индексов, обозначенную нами через (k), в этом случае можно рассматривать как выражение тех дополнительных степеней свободы, которые /вместе с массой/ полностью определяют резонансное состояние. Такая интерпретация величин, входящих в правую часть равенства /14/, требует выполнения следующих условий:

$$C_{(k)} \geq 0, \qquad \frac{(-1)^n\Gamma(-\alpha(0))}{n!\,\Gamma(-\alpha(0)-n)} > 0. \qquad /15/$$

В дальнейшем будет видно, что оба эти условия выполняются. Ввиду полиномиальности вычета /14/ по переменной t простые рассуждения показывают, что состояния, возникающие в правой части равенства /14/, следует характеризовать пятью квантовыми числами. Для их описания используется пятимерный гармонический $U(4,1)$-инвариантный осциллятор /1/ и /2/. В частности, найден постоянный коммутирующий с операторами N_l из /5/ оператор D со свойством

$$\langle\Psi_n(-p_2)|D|\Psi_m(p_1)\rangle = \frac{(-1)^n\Gamma(-\alpha(t))}{n!\,\Gamma(-\alpha(t)-n)}\,\delta_{nm}, \qquad /16/$$

где

$$|\Psi_m(p)\rangle = \frac{1}{m!}\left(i\sqrt{\alpha'}\,p^\mu a^+_\mu + a^+_4\right)^m|0\rangle. \qquad /17/$$

Мы интерпретируем состояния /17/ как двухчастичные резонансные состояния. Если в левой части равенства /16/ вставить в промежутке полный набор состояний осцилляторов /3/, то легко увидеть, что равенства /14/ и /16/ эквивалентны. При этом постоянные $C_{(k)}$ окажутся равными собственным значениям оператора D. Последние имеют вид

$$\frac{\left(\sum_{\mu=0}^{3} n_\mu\right)!\; n_4!}{\left(\sum_{l=0}^{4} n_l\right)!}\;\mathfrak{L}^{\sum_{l=0}^{4} n_l}_{\sum_{\mu=0}^{3} n_\mu}(\rho), \qquad /18/$$

где n_l - собственные значения операторов N_l нз /5/, а $\mathfrak{L}^{n}_{k}(\rho) > 0$ - вполне определенные числа, связанные с числами Стирлинга. Таким образом, равенство /16/ решает вопрос о факторизации вычета четырехточечной дуальной амплитуды. На основе этой формулы можно получить следующее операторное выраженне для B_4:

$$B_4 = \langle 0|\, e^{i\sqrt{\alpha'}\,p_2^\mu a_\mu + a_4}\,\frac{D}{H-\alpha(s)}\,e^{i\sqrt{\alpha'}\,p_1^\mu a^+_\mu + a^+_4}|0\rangle. \qquad /19/$$

В /19/ появились когерентные состояния, которые мы назвали двухчастичными

$$|p\rangle = e^{i\sqrt{\alpha'}\,p^\mu a^+_\mu + a^+_4}. \qquad /20/$$

Главной особенностью выражения /19/ является появление в нем в качестве пропагатора функции Грина уравнения Шредингера для пятимерного осциллятора

$$[H-\alpha(s)]|\Psi\rangle = 0. \qquad /21/$$

Этот факт показывает, что кратность вырождения уровней резонансов совпадает с кратностью вырождения уровней осциллятора /21/. Как известно, с ростом собственных значений n гамильтониана H вырождение в данном случае растет, как n^4.

В четвертом параграфе поставлена и решена задача о нахождении дополнительных условий, определяющих однозначно двухчастичные состояния /17/. Дело в том что хотя эти состояния являются решением уравнения /21/ для $a(s)=n$, все же они не исчерпывают всю совокупность возможных решений. Как показано в рассматриваемом параграфе, нахождение дополнительных условий дает возможность легко обобщить двухчастичное состояние и получить выражение для N-частичного состояния. Эти дополнительные условия следующие:

1. Лоренц-инвариантность. Это условие связано со скалярностью самой амплитуды B_4.

2. Продольность. Это условие означает, что из всех решений уравнения /21/ следует выбирать те, которые описывают колебания осциллятора вдоль направления импульса внешней частицы

$$H_t\,|\Psi>=0, \qquad /22/$$

где

$$H_t=-\sum_{\mu=0}^{3} a^{+\mu}a_\mu+\frac{\left(\sum_{\mu=0}^{3} p^\mu a^+_\mu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{3} p^\nu a_\nu\right)}{p^2}. \qquad /23/$$

3. Это условие имеет вид линейного лоренц-инвариантного уравнения

$$\frac{p^\mu a_\mu}{m}\,|\Psi_n(p)>=-i\sqrt{a'}\,m a_4\,|\Psi_n(p)>. \qquad /24/$$

В дальнейшем показано, что уравнение /24/ является $SL(2,R)$-инвариантным и его можно рассматривать как динамическое уравнение для двухчастичных резонансных состояний /в смысле уравнений типа Майорана/.

$N+1$-частичные состояния, так же как и B_{N+2} в виде диаграммы рис. 1, можно рассматривать как составленные из отдельных двухчастичных звеньев. Очевидно, что для каждого звена следует потребовать выполнения указанных выше дополнительных условий. В частности, условие /22/ приводит к необходимости описывать $N+1$-частичные состояния с помощью N независимых пятимерных осцилляторов: для каждой частицы, за исключением одной, по одному осциллятору /такая асимметрия связана с отсутствием полной симметрии выражения /7/ по отношению произвольных перестановок частиц/.

Учитывая все три условия, легко найти, что $N+1$-частичное состояние является линейной комбинацией от прямого произведения N-состояний типа /17/. Считая, что резонанс совершенно равноправен с внешними частицами, получаем следующее выражение для $N+1$-частичного дуального состояния:

$$|\Psi_n^{N+1}>=\sum_{\Sigma n_l=n} B_{N+2}\Big(a(s_1)-n_1,\dots a(s_l)-\sum_{k=1}^{l} n_k,\dots;(J)\Big)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{n_k!}\left(i\sqrt{a'}\,p_k^\mu a^+_{k\mu}+a^+_{k4}\right)^{n_k}|0>, \qquad /25/$$

а состояния, аналогичные состоянию /21/, имеют вид

$$|p_N,p_{N-1},\dots p_0>=\int d\phi_{N+2}(p,\sigma)\,e^{\sum_{k=1}^{N}\frac{\sigma_{N-1}}{\sigma_{k-1}}\left(i\sqrt{a'}\,p_k^\mu a^+_{k\mu}+a^+_{k4}\right)}|0> \qquad /26/$$

Последние состояния дают возможность получить аналог формулы /19/ для случая $N+2$-точечной дуальной амплитуды. В пятом параграфе доказана основная формула факторизации $N+2$-точечной амплитуды

$$B_{N+2}=<-p_{N+1},\dots -p_{L+1}\,|\frac{D_{N-L+1,L+1}}{H-a(s_L)}|\,p_L,p_{L-1}\dots p_0>, \qquad /27/$$

где состояние $\langle p_{N+1}, p_N, \ldots p_{L+1} |$ является сопряженным к аналогичному состоянию типа /26/, H - полный гамильтониан системы из N независимых пятимерных осцилляторов типа /1/. Оператор $D_{N-L+1,L+1}$ определяется из рекуррентного уравнения, учитывающего конкретный вид N-точечных амплитуд, и имеет формальный вид

$$D_{N-L+1,L+1} = \prod_{l=1}^{L} \prod_{k=L+1}^{N} (1 - a^+_{k4} a_{l4})^{2 \frac{a^{+\mu}_k a_{l\mu}}{a^+_{k4} a_{l4}} - \rho_{lk}} . \qquad /28/$$

$/\rho_{lk}$ определяются согласно равенству /8//. Этот оператор коммутирует с полным гамильтонианом и симметричен при произвольной перестановке частиц слева и справа от него в выражении /27/. Оказывается, что последнее свойство достаточно для того, чтобы определить его даже в случае, когда конкретный вид B_{N+2} неизвестен, но известны все B_k при $k<N+2$. Тогда с помощью /27/ можно определить и B_{N+2}, и таким образом возникает теорема об индуктивном построении дуальных амплитуд. В шестом параграфе эта теорема доказана.

На основе факторизационной формулы /27/ можно построить диаграммную технику для дуальных амплитуд. Так, например, амплитуда с графическим изображением на рис. 1 записывается как вакуумное ожидание от произведения элементов диаграммы в таком порядке, как на рис. 1. Элементу вершины  сопоставляется оператор

$$\tilde{\Gamma}_l(p_l) = \prod_{k=1}^{l-1} (1 - a_{k4})^{2i\sqrt{a'} p^\mu_l \frac{a_{k\mu}}{a_{k4}} - \rho_{kl}} \, e^{i\sqrt{a'} p^\mu_l a^+_{l\mu} + a^+_{l4}} \times$$

$$\times :e^{-H_l}: \prod_{k=l+1}^{N} (1 - a_{k4})^{2i\sqrt{a'} p^\mu_l \frac{a_{k\mu}}{a_{k4}} - \sigma_{kl}} . \qquad /29/$$

Пропагаторам, соединяющим вершины, сопоставляется оператор

$$G(s_i) = \frac{1}{H - a(s_i)} . \qquad /30/$$

Таким образом, в силу этой диаграммной техники выражение для диаграммы на рис. 1 выглядит следующим образом:

$$B_{N+2} = \langle 0 | \Gamma_N(p_N) G(s_{N-1}) \Gamma_{N-1}(p_{N-1}) G(s_{N-2}) \ldots G(s_1) \Gamma_1(p_1) | 0 \rangle . \qquad /31/$$

Диаграммная техника позволяет простым образом вычислять различные дуальные выражения. Она рассмотрена в седьмом параграфе и там же применяется для проведения вторичной факторизации дуальных амплитуд. В следующем, восьмом параграфе, где с помощью формализма факторизации построены замкнутые петли, показано, что и в этом случае можно пользоваться диаграммной техникой /29/ и /30/.

Во второй части диссертации мы переходим к непосредственному рассмотрению свойств симметрии дуальных амплитуд, которые, на наш взгляд, являются наиболее показательными для обоснования нашего предположения о групповом характере свойства дуальности.

Прежде всего нам хочется упомянуть два факта, которые рассматривались разными авторами и которые выявляют различные аспекты при рассмотрении свойства симметрии дуальных амплитуд.

Каждая N-точечная дуальная амплитуда, как известно, допускает множество дуальных модификаций, которые связаны друг с другом дуальными преобразованиями. Последние преобразования в большинстве своем являются определенными дробно-линейными преобразованиями, принадлежащими группе $SL(2,R)$. Общее решение дуальных уравнений [22–24] показало, что эта симметрия распространяется на всю группу $SL(2,R)$.

С другой стороны, в работах [25,26] было показано, что дуальная двухчастичная амплитуда /12/ является ядром интегрального оператора, принадлежащего некоторому представлению группы $SL(2,R)$ и соответствующего треугольной подгруппе.

Оба эти аспекта, на наш взгляд, одинаково важны для обоснования нашего предположения. Первый из них приводит к построению аппарата, который позволяет получить описание дуальных преобразований в рамках операторного формализма, а второй - допускает обобщение и непосредственно приводит к установлению группового характера свойства дуальности.

В работе [10] было введено представление группы $SL(2,R)$ в пространстве когерентных состояний /4/. Вопросам о необходимости введения этого представления, а также его определения в случае одномерного и пятимерного осциллятора посвящены девятый, десятый и одиннадцатый параграфы. В девятом параграфе показано, что при дуальных преобразованиях состояний типа /26/ происходит изменение их экспоненты, сводящееся к дробно-линейному преобразованию множителей $\frac{\sigma_{N-1}}{\sigma_{k-1}}$.

Поэтому в десятом параграфе рассматривается это изменение на примере когерентных состояний одномерного осциллятора:

$$e^{za_4^+}|0> \to e^{\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}a_4^+}|0>, \qquad /32/$$

где матрица

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}, \quad \alpha\beta-\gamma\delta=1 \qquad /33/$$

принадлежит группе $SL(2,R)$. Показано, что операторы T_g, задающие это преобразование, образуют представление группы $SL(2,R)$ с генераторами

$$I_\alpha=a_4^+a_4, \quad I_\beta=a_4^+, \quad I_\gamma=-a_4^+a_4^2, \qquad /34/$$

соответствующими трем подгруппам:

$$g_\alpha=\begin{bmatrix}e^{\alpha/2} & 0\\ 0 & e^{-\alpha/2}\end{bmatrix}, \; g_\beta=\begin{bmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \; g_\gamma=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \gamma & 1\end{bmatrix}. \qquad /35/$$

Этим подгруппам соответствуют следующие операторы глобального представления:

$$T_{g_\alpha}=e^{\alpha a_4^+a_4}, \; T_{g_\beta}=e^{\beta a_4^+}, \quad T_{g_\gamma}=e^{-\gamma a_4^+a_4^2}; \qquad /36/$$

с их помощью можно вычислить любой оператор T_g.

В одиннадцатом параграфе найдены аналогичные представления в пространстве когерентных состояний пятимерного осциллятора, которые содержат в себе рассмотренные раньше дуальные преобразования. Эти представления определяются с помощью преобразования

$$e^{z^\mu a_\mu^+ + z_4 a_4^+}|0> \to e^{(\frac{z^\mu}{z_4}a_\mu^+ + a_4^+)\frac{\alpha z_4+\beta}{\gamma z_4+\delta}}|0>. \qquad /37/$$

Операторы последних обозначены через Θ_g, и показано, что они распадаются на неприводимые представления, эквивалентные представлениям /32/. Найден оператор, осуществляющий эту эквивалентность при помощи преобразования подобия. Вид этого оператора следующий:

$$L^+ = :e^{a^{+\mu}a_\mu(1-a_4)}: \qquad /38/$$

Генераторы представлений Θ_g получаются из /34/ преобразованием подобия

$$J=L^+I(L^+)^{-1} \qquad /39/$$

и имеют вид

$$J_\alpha=-a_\mu^+a^\mu+a_4^+a_4\equiv H, \; J_\beta=H\frac{1}{a_4}, \quad J_\gamma=Ha_4 \qquad /40/$$

/оператор $1/a_4$ подробно рассмотрен в десятом параграфе/. Используя представления Θ_g, можно показать, что уравнение /24/ инвариантно относительно этого представления.

Таким образом, получена возможность производить дуальные преобразования в рамках операторного формализма, рассмотренного в первой части. В двенадцатом параграфе показано, как это делается в случае перехода от мультипериферической к квазимультипериферической диаграмме, а также в случае получения трехреджионной вершины [11]. Эти рассмотрения привели к формуле о факторизации квазимультипериферической диаграммы на рис. 3 в сечении s_k. Результат показывает, что пропагатор и оператор D в этом сечении изменяются и что они получаются из старых с помощью представлений Θ_g.

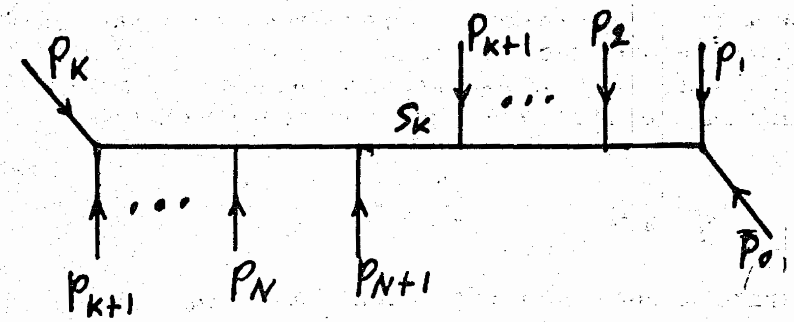

Рис. 3

Подробное групповое рассмотрение данного операторного формализма показало, что множество операторов, появляющихся при факторизации дуальных амплитуд, на самом деле определено лишь в пространстве неприводимых представлений группы $SL(2,R)$, а не на всем пространстве осциллятора. Это наводит на мысль, что роль осцилляторов при факторизации сводится к роли удобного формализма для описания именно групповой структуры дуальных амплитуд. Все это приводит к необходимости рассмотреть взаимосвязь между свойствами дуальности и $SL(2,R)$-симметрией амплитуды рассеяния независимо от принятой модели [12]. Таких моделей много /имеется в виду большое количество обобщений дуальной резонансной модели/, и все они задаются интегральными представлениями типа Мелина. Поэтому прежде всего в тринадцатом параграфе показано, что амплитуда рассеяния двух скалярных частиц с массой μ, удовлетворяющая обычному дисперсионному соотношению без вычитаний

$$T(s,t,u)=\frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty}\frac{\rho_s(s',t)}{s'-s}\,ds'+\frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty}\frac{\rho_u(u',t)}{u'-u}\,du', \qquad /41/$$

представима в виде интеграла Мелина

$$A(\sigma,\tau)=\int_0^{\infty}\rho(x,\tau)\,x^{-\sigma-1}\,dx, \qquad /42/$$

$$\rho(x,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}d\sigma\,A(\sigma,\tau)\,x^{\sigma}, \qquad /43/$$

где $\sigma=a(s-4\mu^2)$, $\tau=a(t+8\mu^2)$, a - произвольная постоянная с размерностью $1/\mu^2$ и $A(\sigma,\tau)$ - амплитуда рассеяния, выраженная с помощью переменных σ и τ, а $\rho(x,\tau)$ - интегральная плотность Мелина. Постоянная c - действительна и удовлетворяет неравенству

$$\lambda\equiv 4\mu^2 a-\tau< c<0. \qquad /44/$$

Если рассмотреть главные обобщения [24-30] для дуальной амплитуды рассеяния двух частиц, можно увидеть, что они характеризуются одинаковым видом интегральной плотности Мелина

$$\rho(x,\tau)=|1+x|^{\lambda}f(x), \qquad /45/$$

где функция $f(x)$ для разных обобщений разная, но для нее всегда выполняются два условия:

$$\lim_{x\to 0}x^{\nu}f(x)=0\ ;\ \nu>0 \qquad \lim_{x\to 0}x^{\nu}f(x)=\infty\ .\ \nu<0 \qquad /46/$$

Поэтому /45/ и /46/ мы принимаем в качестве математического определения свойства дуальности.

В четырнадцатом параграфе показано, что функции типа /45/ принадлежат неприводимому унитарному представлению группы $SL(2,R)$ из так называемой дополнительной серии при условии, что выполняются неравенства

$$-2<\lambda\equiv 4\mu^2 a-r<0. \qquad /47/$$

Очевидно, что последнее находится в согласии с неравенством /44/. Более того, оказывается, что функции типа /45/ являются аналогами сферических функций. Они возникают при рассмотрении линейных функционалов $\phi(g,f)$, заданных на пространстве $\mathfrak{U}$ функций одного действительного переменного и одновременно являющихся функциями на группе $SL(2,R)$ $(g\in SL(2,R))$. Условие сферичности этого функционала имеет вид

$$\phi(g,V_h^\lambda f)=\phi(gshs^{-1},f),\quad g,h\in SL(2,R), \qquad /48/$$

где V_h^λ - представление группы $SL(2,R)$ в пространстве $\mathfrak{U}$, а

$$s=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad /49/$$

Второе условие

$$\phi(s_\beta,f)=\phi(e,f),\quad e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad /50/$$

где s_β - элемент подгруппы

$$s_\beta=\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad /51/$$

приводит к равенству

$$\phi(s_\beta g,f)=\phi(g,f). \qquad /52/$$

Оно показывает, что $\phi(g,f)$ как функции от g постоянны на смежных классах $S_\beta/SL(2,R)$. Оба условия дают возможность восстанавливать такие функционалы по их значению в одной точке /в чем и состоит их аналогия с обычными сферическими функциями/. В силу /52/ ясно, что $\phi(g,f)$ являются функциями всего двух параметров группы $SL(2,R)$. С помощью подходящей параметризации смежных классов $S_\beta/SL(2,R)$ и равенства /48/ можно показать, что вид функции $\phi(g,f)$ совпадает с видом функций /45/. Таким образом, специальный вид интегральной плотности Мелина $\rho(x,r)$ /формула /45// является следствием ее симметрии по отношению к унитарному неприводимому представлению группы $SL(2,R)$.

В последнем, пятнадцатом, параграфе определен базис, по которому можно разлагать любую "сферическую" функцию и, в частности, любую дуальную амплитуду. В последнем случае получается некоторое интегральное представление для дуальной амплитуды рассеяния. Интегральная плотность Мелина для базисных элементов имеет вид

$$e_\nu^\lambda(x)=\begin{cases}|1+x|^\lambda\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\lambda/2+i\nu}, & -1<x<1;\\[2ex] |1+x|^\lambda\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\lambda/2+i\nu}, & x>1,\ x<-1.\end{cases} \qquad /53/$$

Функции $e_\nu^\lambda(x)$ для разных ν оротогональны в смысле $SL(2,R)$-инвариантного скалярного произведения. Их скалярный квадрат, однако, равен бесконечности /δ-образная особенность/, и, следовательно, сами векторы /53/ не принадлежат пространству унитарного представления. Между тем доказано, что любой вектор из последнего пространства можно разложить по векторам /53/. Это разложение для $\rho(x,r)$ имеет вид

$$\rho(x,r)=\int_{-\infty}^{\infty}C(\nu)e_\nu^\lambda(x)d\nu, \qquad /54/$$

где $C(\nu)$- функции, которые должны удовлетворять неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\nu|C(\nu)|^2 N(\lambda,\nu)<\infty, \qquad /55/$$

а фактор $N(\lambda,\nu)$ имеет вид

$$N(\lambda,\nu)=2^{\lambda+3}\sin\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\left[\cos\frac{\pi}{2}(\lambda+2)+ch\pi\nu\right]\left|\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+i\nu+1\right)\right|^2 \qquad /56/$$

По своей сущности равенство /54/ является интегральным представлением для $\rho(x,\tau)$, и, пользуясь равенством /42/, его легко переформулировать на языке самой амплитуды

$$A(\sigma,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, C(\nu)\, T_{\nu}(\sigma,\tau), \qquad /57/$$

где

$$T_{\nu}(\sigma,\tau) = \int_{0}^{\infty} e_{\nu}^{\lambda}(x)\, x^{-\sigma-1}\, dx. \qquad /58/$$

Таким образом, основные результаты диссертации состоят в следующем:

а/ Показано, что факторизацию дуальной N-точечной амплитуды можно провести с помощью конечного набора пятимерных $U(4,1)$-инвариантных осцилляторов.

б/ Определены в операторной форме дуальные N-точечные состояния, возникающие в результате данной факторизации, и найдены дополнительные условия, которые фиксируют однозначно эти состояния.

в/ На основе факторизации дуальных амплитуд с помощью конечного набора осцилляторов сформулирована диаграммная техника для этих амплитуд.

г/ Введено представление группы $SL(2,R)$ в пространстве когерентных состояний пятимерного осциллятора, что позволяет совершать дуальные преобразования в рамках операторного формализма.

д/ Показано, что общий вид интегральной плотности Мелина для дуальной двухчастичной амплитуды рассеяния возникает как следствие ее принадлежности к пространству действия унитарного неприводимого представления группы $SL(2,R)$.

е/ Показано, что дуальная интегральная плотность Мелина принадлежит определенному классу функций, аналогичных сферическим функциям, и найден базис в пространстве этих функций. Последнее дает возможность записать интегральное представление /57/ для дуальных амплитуд.

Основные результаты диссертации докладывались на всесоюзных и международных семинарах и конференциях и опубликованы в работах /8–12/,/30–32/.

Литература

1. A.A.Logunov, L.D.Soloviev, A.N.Tavkhelidze. Phys.Lett., 14B, 181 (1967).
2. K.Igi, S.Matsuda. Phys.Rev.Lett., 18, 625 (1967).
3. V.A.Meshcheryakov, K.V.Rerikh, A.N.Tavkhelidze, V.I.Zhuravlev. Phys.Lett., 25B, 341 (1967).
4. R.Dolen, D.Horn, C.Schmid. Phys.Rev., 166, 1768 (1968).
5. G.F.Chew, A.Pignotti. Phys.Rev.Lett., 20, 1078 (1968).
6. C.Schmid. Phys.Rev.Lett., 20, 689 (1968).
7. G.Veneziano. Nuovo Cim., 57A, 190 (1968).
8. А.Н.Квинихидзе, Б.Л.Марковский, Д.Ц.Стоянов, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ, 6, №2 /1970/; Препринт ОИЯИ, Е2-5182, Дубна, 1970.
9. А.Н.Квинихидзе, Х.Д.Попов, Д.Ц.Стоянов, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ, 9, 190 /1971/; Препринт ОИЯИ, Е2-5568, Дубна, 1971.
10. Х.Д.Попов, Д.Ц.Стоянов, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ, 12, 370 /1972/.
11. Х.Д.Попов, Д.Ц.Стоянов. Препринт ОИЯИ, Р2-6740, Дубна, 1972.
12. Х.Д.Попов, Д.Ц.Стоянов, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ, 13, 145 /1972/.
13. Б.В.Струминский. Препринт ИТФ, 72-13Р, Киев, 1972.
14. M.I.Gorenstein, V.I.Makarov, V.I.Miransky, V.P.Shelest, G.M.Zinovjev. Preprint ITP-72-53E, Kiev, 1972.
15. Г.П.Демченко, В.В.Кухтин, Б.В.Струминский. Препринт ИТФ-72-49Р, Киев, 1972.
16. S.Fubini, D.Gordon, G.Veneziano. Phys.Lett., 29B, 679 (1969).
17. S.Fubini, G.Veneziano. Nuovo Cim., 66A, 811 (1969).
18. A.Rabl. Nucl.Phys., B27, 408 (1971).
19. K.Bardakci, H.Ruegg. Phys.Lett., 28B, 342 (1968).
20. K.Bardakci, H.Ruegg. Phys.Rev., 181, 1884 (1969).
21. Chan Hong Mo. Phys.Lett., 28B, 425 (1969).
22. Z.Koba, N.B.Nielsen. Nucl.Phys., B10, 633 (1969).
23. Z.Koba, N.B.Nielsen. Nucl.Phys., B12, 517 (1969).
24. E.Donini, S.Scinto. Ann. of Phys., 58, 388 (1970).
25. A.C.T.Wu, J. of Math.Phys., 12, 2035 (1971).
26. A.C.T.Wu. J. of Math.Phys., 12, 2036 (1971).
27. S.Mandelstam. Phys.Rev.Lett., 21, 1724 (1968).
28. S.Matsuda. Phys.Rev., 185, 1811 (1969).
29. A.Martin. Phys.Lett., 29B, 431 (1969).
30. V.A.Matveev, D.Ts.Stoyanov, A.N.Tavkhelidze. Phys.Lett., 32B, 61 (1970).
31. A.N.Kvinikhidze, B.L.Markowski, D.Ts.Stoyanov, A.N.Tavkhelidze.

XY International Conference on High Energy Physics, Kiev, 2, 576 (1970).

32. А.Н.Квинихидзе, Б.Л.Марковский, Х.Д.Попов, Д.Ц.Стоянов, А.Н.Тавхелидзе. Бинарные реакции адронов при высоких энергиях. Труды Межд. семинара, стр. 755, ОИЯИ,Д-6004, Дубна, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел 6 июля 1973 года.